Analisi I

2019-2020 - Facoltà di Ingegneria Edile-Architettura
prof.ssa Roberta SCHIATTARELLA

Appunti di Riccardo M.Polidoro - riccardo.polidoro.org

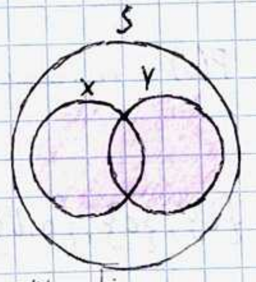
Teoria degli insiemi

Un insieme si denomina con le lettere maiuscole dell'alfabeto (in genere $\mathbb{A}, \mathbb{B}$); esso è composto da diversi elementi.
Per ennunciare una determinata proprietà P degli elementi appartenenti ad un insieme, si ricorre alla notazione:

$$x \in S : P \qquad \text{(elementi di S tale che valga P)}$$

Operazioni con gli insiemi

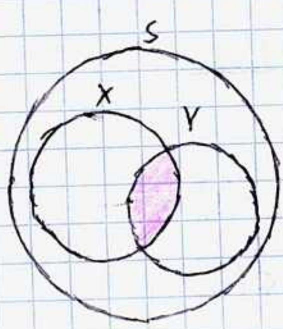
Unione



Consideriamo gli insiemi S, X, Y

$$X \cup Y \overset{def}{\Longleftrightarrow} \{x \in S : x \in X \underbrace{\vee}_{\text{non esclusivo: uno, l'altro o entrambi.}} x \in Y\}$$

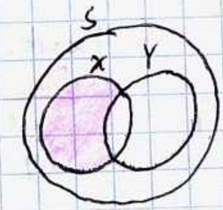
Intersezione



Consideriamo gli insiemi S, X, Y

$$X \cap Y = \{x \in S : x \in X \wedge x \in Y\}$$

Complemento (o differenza insiemistica)



$$X \setminus Y = \{x \in S : x \in X \wedge x \notin Y\}$$

Inclusione

Consideriamo gli insiemi X, Y; con X sottoinsieme di Y

$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow \forall x \in X, x \in Y$$

X e Y possono essere due insiemi coincidenti

Inclusione Propria

$$X \subset Y \Longleftrightarrow \forall x \in X, x \in Y \wedge \exists y \in Y : y \notin X$$

$\exists$ "esiste almeno uno"; $\exists!$ = "esiste ed è unico"

Due insiemi si dicono disgiunti se non hanno elementi in comune. Se un insieme non presenta elementi si dice insieme vuoto ($\emptyset$)

- Due insiemi si dicono uguali se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi. Ciò implica necessariamente che, se $A = B \Rightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$. Si osservi che non importa l'ordine: $A = \{3,2,1\} = B = \{1,2,3\}$

$$A = B \Longleftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$$

riccardo.polidoro.org

Esempio di dimostrazione di teoremi

$$X = Y \iff X \subseteq Y \land Y \subseteq X$$

$\Leftarrow\Rightarrow$ implica la necessità di dimostrare sia $\Rightarrow$ che $\Leftarrow$

$\frac{Hp}{X=Y}$	$\frac{Th}{X \subseteq Y \land Y \subseteq X}$		$\frac{Hp}{X \subseteq Y \land Y \subseteq X}$	$\frac{Th}{X=Y}$	
$x \in X = Y \Rightarrow x \in Y$ $y \in Y = X \Rightarrow y \in X$		$\Rightarrow$	$x \in X \subseteq Y \Rightarrow x \in Y$ $y \in Y \subseteq X \Rightarrow y \in X$		$\Leftarrow$

Insieme delle Parti

Considerato l'insieme S, $P(S)$ è un insieme i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di S

$$S = \{a, b, c\}$$

$$P(S) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, S \}$$

cardinalità: $\#A$ o $|A|$

Il numero di elementi di $P(S)$ è sempre uguale a 2^n, con n corrispondente al numero di elementi di S.

Esempi di appartenenza/inclusione

$S = \{0, 1, 2\}$

$\{0\} \subset S$ $\quad \{1,2\} \in P(S)$

$\emptyset \notin P(S)$ $\quad \{1,2\} \notin P(S)$

$\{1\} \subset S$

Esempi di appartenenza/inclusione con proprietà

$-1 \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$

$1 \notin \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 1\}$

$\emptyset \in \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 1\}$

$\{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1\} \subset \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 4\}$

Dim

$x \in X, x^2 \leq 1 < 4, x^2 \leq 4$ <esempio>

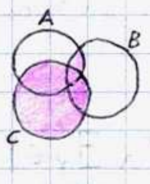
$2 \in Y \land 2 \notin X$ <controesempio>

Ricapitolando, un insieme può essere identificato per elencazione ($S = \{a, b, c, \dots, z\}$) o attraverso proprietà ($X = \{x \in S \mid P\}$); esiste l'insieme vuoto $\emptyset$, senza elementi; sono definite diverse operazioni fra insiemi. Due insiemi sono uguali se e solo se sono costituiti dagli stessi elementi; ciò si dimostra attraverso la doppia inclusione ($A = B \Rightarrow A \subseteq B \land B \subseteq A$). Se A è incluso in B, ogniqualvolta si considera un elemento di A esso appartiene anche a B.

Proprietà distributive di Unione e Intersezione

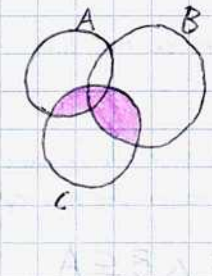
Proprietà distributiva dell'unione rispetto all'intersezione

$$A, B, C; \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



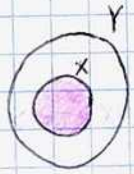
Proprietà distributiva dell'intersezione rispetto all'unione

$$A, B, C; \quad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$



riccardo.polidoro.org

Proprietà dell'inclusione e dell'intersezione



$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow X \cap Y = X$$

Dimostrazione

Dim $\Rightarrow$
$H_p: X \subseteq Y$
$T_h: X \cap Y = X$ ↗ $X \cap Y \subseteq X$ ①, ↘ $X \subseteq X \cap Y$ ②

① $x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X \wedge x \in Y \Rightarrow x \in X$

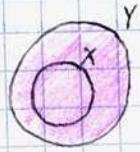
② $x \in X \underset{\substack{H_p \\ X \subseteq Y}}{\Longrightarrow} x \in Y \Rightarrow x \in X \cap Y$

Si noti l'utilizzo della dicitura "H_p" e la specifica della singola ipotesi utilizzata durante lo svolgimento della dimostrazione: oltre a garantire un ordine mentale e di procedimento, ciò rende chiaramente visibile la direzione della dimostrazione, semplificando i processi logici da compiere.

Dim $\Leftarrow$
$H_p: X \cap Y = X$
$T_h: X \subseteq Y$

$x \in X \underset{\substack{H_p \\ X \cap Y = X}}{=} X \cap Y \Rightarrow x \in Y \Rightarrow X \subseteq Y$

Proprietà dell'inclusione e dell'unione



$$X \subseteq Y \Longleftrightarrow X \cup Y = Y$$

Dimostrazione

Dim $\Rightarrow$
$H_p: X \subseteq Y$
$T_h: X \cup Y = Y$ ↗ $X \cup Y \subseteq Y$ ①, ↘ $Y \subseteq X \cup Y$ ②

① $x \in X \cup Y \Rightarrow x \in X \vee x \in Y \Rightarrow x \in Y$

② $x \in X \underset{\substack{H_p \\ X \subseteq Y}}{\Longrightarrow} x \in Y \Rightarrow x \in X \cancel{\cup Y} \vee x \in Y \Rightarrow x \in X \cup Y$

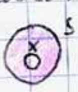
Dim $\Leftarrow$
$H_p: X \cup Y = Y$
$T_h: X \subseteq Y$

$x \in X \cup Y = Y \Rightarrow \cancel{x \in X \vee x \in Y} \Rightarrow x \in X \cancel{\cup Y} \vee x \in Y = x \in Y$

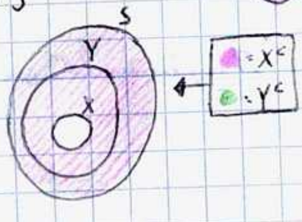
Complemento e proprietà ad esso relative

Definiti gli insiemi S, $A \subseteq S$ e $B \subseteq S$, si definisce complemento di B rispetto ad A: $A \setminus B = \{x \in S \mid x \in A \wedge x \notin B\}$.
Il complemento si può operare anche rispetto all'insieme S attraverso la seguente notazione:

$$X^c = S \setminus X = \{x \in S \mid x \notin X\}$$



Proprietà



- $X \subseteq Y \Longleftrightarrow Y^c \subseteq X^c$

Dim $\Rightarrow$
$H_p: X \subseteq Y$
$T_h: Y^c \subseteq X^c$

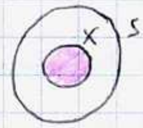
$y \in Y^c \Rightarrow y \in S \wedge y \notin Y \underset{\substack{H_p \\ X \subseteq Y}}{\Longrightarrow} y \in S \wedge y \notin X \Rightarrow y \in X^c$

Dim $\Leftarrow$
$H_p: Y^c \subseteq X^c$
$T_h: X \subseteq Y$

$x \in X \Rightarrow x \notin X^c \underset{\substack{H_p \\ Y^c \subseteq X^c}}{\Longrightarrow} x \notin Y^c \Rightarrow x \in Y$

riccardo.polidoro.org

$\boxed{\cdot (X^c)^c = X}$



Dim

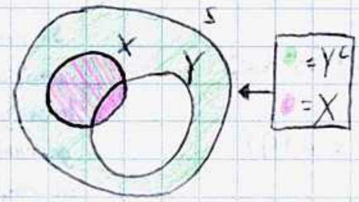
Hp: $S, X \subseteq S$

Th: $\underset{①}{(X^c)^c \subseteq X} \wedge \underset{②}{X \subseteq (X^c)^c}$

① $x \in (X^c)^c \Rightarrow x \notin X^c \Rightarrow x \in X$

② $x \in X \Rightarrow x \notin X^c \Rightarrow x \in (X^c)^c$

$\boxed{\cdot X \setminus Y = X \cap Y^c}$



Dim

$X \setminus Y \subseteq X \cap Y^c$ ①

$X \cap Y^c \subseteq X \setminus Y$ ②

① $x \in X \setminus Y \Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \Rightarrow x \in X \wedge x \in Y^c \Rightarrow x \in X \cap Y^c$

② $x \in X \cap Y^c \Rightarrow x \in X \wedge x \in Y^c \Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \Rightarrow x \in X \setminus Y$

Se si considerano più di due insiemi, per rappresentare le varie operazioni insiemistiche si ricorre ad una notazione più breve:

Definiti gli insiemi $X_0, X_1, \dots, X_n$ $(n \in \mathbb{N})$,

$$X_0 \cup X_1 \cup \dots \cup X_n = \bigcup_{k=0}^{n} X_k$$

Per un numero infinito di insiemi la notazione è: $\bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$

Analogamente per l'intersezione (e, di conseguenza, le altre operazioni insiemistiche)

$$\bigcap_{k=0}^{n} X_k \; ; \quad \bigcap_{k \in \mathbb{N}_0} X_k$$

Esercizio

$\forall k \in \mathbb{N}, X_k = \{1, 1/2, 1/3, \dots, 1/k\}$	$\forall k \in \mathbb{N}, X_k = \{n \in \mathbb{N} \mid n > k\}$
Determinare $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$	$\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$?
$[A = \{1\}]$	$[\emptyset]$

Essendo il primo esercizio di risoluzione elementare, dimostreremo il secondo, introducendo il concetto di **dimostrazione per assurdo**, in cui si nega la tesi giungendo infine ad un assurdo che dunque verifica la ~~te~~tesi stessa.

Procedendo per assurdo, supponiamo che $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k \Rightarrow x \in X_k \, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \underbrace{x \in \mathbb{N}, x > k \;\; \forall k \in \mathbb{N}}_{\text{ASSURDO}}$

Leggi (o relazioni) di De Morgan

"Il complementare dell'unione è uguale all'intersezione dei complementari" (vale anche per $\cap \to \cup$)

① $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$

② $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$

Dimostrazione ①

Dovendo dimostrare un'uguaglianza, occorrerà dimostrare la doppia inclusione

1. $(X \cup Y)^c \subseteq X^c \cap Y^c$: $\quad x \in (X \cup Y)^c \Rightarrow x \in S \wedge x \notin X \cup Y \Rightarrow x \in S \wedge x \notin X \wedge x \notin Y \Rightarrow$
$\Rightarrow x \in X^c \wedge x \in Y^c \Rightarrow x \in X^c \cap Y^c$

2. $X^c \cap Y^c \subseteq (X \cup Y)^c$: $\quad x \in X^c \cap Y^c \Rightarrow x \in S \wedge x \notin X \wedge x \notin Y \Rightarrow x \in S \wedge x \notin X \cup Y \Rightarrow x \in (X \cup Y)^c$

La dimostrazione ②, del tutto analoga alla precedente, è lasciata come esercizio.

riccardo.polidoro.org

Prodotto Cartesiano di due insiemi

A, B $\quad A \times B = \{ \underbrace{(a,b)}_{} \mid a \in A,\ b \in B \}$ $\quad (a,b) = (a',b') \iff a = a' \wedge b = b'$

coppia ordinata; importa l'ordine

Esercizi

- $A = \{ x \in \mathbb{R} \mid x > 3{,}75 \}$, $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid x > 3{,}14 \}$ confrontare A e B $\quad [B \subset A]$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, sia $X_k = \{k, k+1, \dots, 2k\}$, determinare $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ e $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$. $\quad [\emptyset ; \mathbb{N}]$
- $\forall k \in \mathbb{N}$, sia $X_k = \{ x \in \mathbb{R} \mid x \leq 1 - 1/k \}$. Determinare $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} X_k$ e $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} X_k$. $\quad [X_1 ; \{ x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \}]$

Per gli ultimi due esercizi, lo svolgimento si prova attraverso l'esplicitazione delle prime interazioni in k degli insiemi.

Teoria Assiomatica dei Numeri Reali

$\mathbb{R}$, $\underbrace{+, \cdot,}_{\text{operazioni definite}}$ $\leq \rightarrow$ ordinamento

Parlando di teoria assiomatica, risulterà evidente la necessità di dare degli **assiomi** (regole di cui non si opera la dimostrazione) ad $\mathbb{R}$:

Proprietà relative alle operazioni di somma e prodotto in $\mathbb{R}$

Operazione è interna	+	$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}$
	$\cdot$	$a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \cdot b \in \mathbb{R}$
Proprietà commutativa		$a + b = b + a$ $a \cdot b = b \cdot a$ $\quad \forall a, b \in \mathbb{R}$
Proprietà associativa:		$(a+b)+c = a+(b+c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
Proprietà distributiva:		$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ $\quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$
esist. Elementi neutri:	+	$a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
	$\cdot$	$a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$
Esistenza degli opposti:		$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists! (-a) \in \mathbb{R} \mid a + (-a) = 0$
Esistenza degli inversi:		$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists! (a^{-1}) \in \mathbb{R} \mid a \cdot a^{-1} = 1$ $\quad$ per assioma non esiste l'inverso di zero

Proprietà relative all'ordinamento (relazione di ordine) $\leq$ "minore o uguale"

Proprietà di dicotomia	$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow a \leq b \vee b \leq a$ (elementi sempre confrontabili)
Proprietà asimmetrica	Se $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b$
Compatibilità dello ordinamento con le operazioni	Se $a \leq b, \forall c \in \mathbb{R} \Rightarrow a + c \leq b + c$
	Se $0 \leq a \wedge 0 \leq b \Rightarrow 0 \leq a + b,\ 0 \leq a \cdot b$

riccardo.polidoro.org

Assioma di Completezza

Dato che vale in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è detto *insieme completo*

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $B \subseteq \mathbb{R}$ tali che $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

allora necessariamente $\exists c \in \mathbb{R}: a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Poiché valgono le proprietà elencate in precedenza, ed essendo definite le operazioni di somma e prodotto e la relazione di ordine, $\mathbb{R}$ è definito *campo dei numeri reali*, viene indicato con la notazione:

$$(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$$

Le operazioni di sottrazione e divisione non sono state elencate fra gli assiomi in quanto sono da essi deducibili:

Sottrazione: $\quad a - b = a + (-b)$

Divisione: $\quad a : b = a \cdot b^{-1} \quad (b \neq 0)$

Maggiore o uguale: $\quad a \geq b \overset{def}{\iff} b \leq a$

Minore / Maggiore stretto $\quad a < b \overset{def}{\iff} a \leq b \wedge a \neq b$

$\quad a > b \overset{def}{\iff} a \geq b \wedge a \neq b$

Ulteriori proprietà algebriche dei numeri reali dedotte dagli assiomi definiti in precedenza

$a + c = b + c \Rightarrow a = b$

Dimostrazione: $a = a + 0 = a + (c + (-c)) = (a+c) + (-c) \underset{\substack{Hp \\ a+c=b+c}}{=} (b+c) + (-c) = b + (c + (-c)) = b + 0 = b$

$c \neq 0, \quad a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b$

Dimostrazione analoga alla precedente attraverso l'esistenza dell'elemento neutro per il prodotto e l'esistenza dell'inverso di un generico elemento $k \in \mathbb{R}$

$a \cdot b = 0 \iff a = 0 \vee b = 0$

legge di annullamento del prodotto

Dimostrazione: $(\Leftarrow)$ sappiamo che $a+c=b+c \Rightarrow a=b$

$a + a \cdot 0 = a \cdot 1 + a \cdot 0 \Rightarrow a(1+0) = a \cdot 1 = a = a + 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow a \cdot 0 = 0$

$(\Rightarrow)$ Se $a = 0 \Rightarrow$ verificato; consideriamo $a \neq 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$

$b = b \cdot 1 = b(a \cdot a^{-1}) = (b \cdot a) a^{-1}$

$-(-a) = a$

$(-a) \cdot b = -(a \cdot b)$

$a \leq b \iff b - a \geq 0$

$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad$ proprietà transitiva dell'ordinamento

$a \leq 0 \Rightarrow (-a) \geq 0$

$a \leq b, \; c \geq 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

$a \leq b, \; c \leq 0 \Rightarrow a \cdot c \geq b \cdot c$

riccardo.polidoro.org

Numeri Naturali (interi positivi)

Definito l'elemento $1 \in \mathbb{R}$,
$$1+1 \overset{def}{=} 2$$
$$2+1 \overset{def}{=} 3$$
$$\dots$$

L'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$ è dunque un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$

$$n \in \mathbb{N} \Rightarrow n+1 \in \mathbb{N}$$

⚠ : $0 \notin \mathbb{N}$; $0 \in \mathbb{N}_0$

Poiché $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, su di esso sono definite le operazioni di addizione e moltiplicazione e l'ordinamento indotto da $\mathbb{R}$.

$(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ non gode dell'esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma
non gode dell'esistenza degli opposti e dei reciproci

$$a \in \mathbb{N} \Rightarrow (-a) \notin \mathbb{N},\ a^{-1} \notin \mathbb{N}$$

Tra i vari sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, definiamo gli insiemi $\mathbb{N}_p \subset \mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}_d \subset \mathbb{N}$, formati rispettivamente dagli interi positivi pari e dagli interi positivi dispari:

$$\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$$
$$\mathbb{N}_d = \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k-1\}$$

logicamente, ciò implica che $\mathbb{N}_p \cap \mathbb{N}_d = \emptyset$
$\mathbb{N}_p \cup \mathbb{N}_d = \mathbb{N}$

Si dimostrano inoltre le seguenti proprietà:

$$n \in \mathbb{N}_p \Leftrightarrow n \cdot n = n^2 \in \mathbb{N}_p$$
$$n \in \mathbb{N}_d \Leftrightarrow n \cdot n = n^2 \in \mathbb{N}_d$$

Proprietà di Archimede: importante proprietà dei numeri naturali

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x$$

Definiamo inoltre un altro insieme, detto $\mathbb{N}_0$, in cui viene incluso l'elemento neutro rispetto alla somma:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Numeri Interi (interi relativi)

In tale insieme esistono gli elementi opposti:

$$\mathbb{Z} = \{\dots,-2,-1,0,1,2,\dots\} \equiv \{0\} \cup \{\pm n : n \in \mathbb{N}\} \qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$$

Si osserva che in $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$ non vale l'esistenza del reciproco

Numeri Razionali

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

si osservi che, se si fosse posta la condizione $n \in \mathbb{Z}$, essa sarebbe risultata ridondante.

gode dell'esistenza del reciproco $\qquad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

non gode dell'assioma di completezza

per dimostrare ciò, si parte dalla seguente proposizione: $\nexists\, q \in \mathbb{Q} : q^2 = \boxed{2}$

vale per qualunque numero primo

riccardo.polidoro.org

Per procedere nella dimostrazione della non validità dell'assioma di completezza in $\mathbb{Q}$, si procede per assurdo:

Supponiamo che $\exists\, q \in \mathbb{Q} \mid q^2 = 2 \Rightarrow \frac{m^2}{n^2} = 2$ con $m, n \in \mathbb{N}$ e m, n **primi tra loro** (fraz. ridotta ai minimi termini)

Poiché $\frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$, m^2 è pari. di conseguenza, anche m è pari: $m \in \mathbb{N}_p$ $(\exists k \in \mathbb{N} \mid m = 2k)$

Sostituendo, $2n^2 = m^2 = 4k^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2 \Rightarrow n^2 \in \mathbb{N}_p \Rightarrow n \in \mathbb{N}_p$ Assurdo: m ed n non sono primi tra loro

Dunque $\mathbb{Q}$ non è completa: se consideriamo gli insiemi:

$$A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0 \wedge a^2 < 2\} \cup \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0\} \qquad A \subset \mathbb{R}$$

$$B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \wedge b^2 > 2\} \qquad B \subset \mathbb{R}$$

Confrontandoli, risulta che $a \leq b \ \forall a \in A, \forall b \in B$.
L'unico elemento che separa tali insiemi, facendo dunque valere l'assioma di completezza, è un elemento $c > 0 \mid c^2 = 2$ che non appartiene a $\mathbb{Q}$. Sebbene non in maniera rigorosa, ciò dimostra che l'insieme dei numeri ~~irrazionali~~ non è completo.

$$c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : c^2 = 2$$

Il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \{x \in \mathbb{R} : x \notin \mathbb{Q}\}$ è detto insieme dei numeri irrazionali, composto da numeri non esprimibili come frazioni (radici)

Intervalli di $\mathbb{R}$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Introduciamo ora la notazione per intervalli, utile per le successive osservazioni sulle funzioni.

Intervallo	Notazione insiemistica	Dicitura
$(a,b) =]a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$	intervallo aperto di estremi a e b
$(a,b] =]a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$	intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra di estremi a e b
$[a,b) = [a,b[$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$	intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra di estremi a e b
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$	intervallo chiuso di estremi a e b
$(a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : a < x\}$	
$[a,+\infty)$	$\{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$	
$(-\infty,b)$	$\{x \in \mathbb{R} : x < b\}$	
$(-\infty,b]$	$\{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$	

Densità di $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono densi in $\mathbb{R}$:

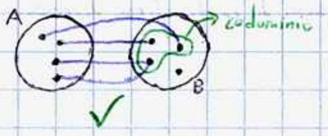
$$\forall a, b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \exists\, x \in \overset{\mathbb{Q}}{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} : a < x < b$$

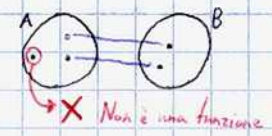
riccardo.polidoro.org

Funzioni

Siano A e B due generici insiemi.
Una funzione di A in B è una particolare legge, indicata con f o con $f: A \to B$, tale che:

$$\forall x \in A \ \exists! \ y \in B : y \text{ corrisponde ad } x \text{ mediante } f$$





$y \in B$, corrispondente di $x \in A$, si indica con $y = f(x)$ e si dice immagine di x mediante f.
L'insieme A si dice insieme di definizione, o dominio, di f; l'insieme B viene detto insieme dei valori e in esso è contenuto un sottoinsieme costituito da tutte e sole le immagini di A. Tale insieme, indicato con $f(A)$, si dice codominio della funzione.

$$f(A) = \{ y \in B \mid \exists x \in A : y = f(x) \}$$

Osserviamo inoltre una sottigliezza di notazione: $f: \mathbb{R} \xrightarrow{\text{tra insiemi}} \mathbb{R} \qquad x \xmapsto{\text{tra elementi; associazione}} a \in \mathbb{R}$

Esempi generici di funzioni

Consideriamo $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$

$f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow a \in \mathbb{R}$ $\quad (a = \text{cost.})$ funzione costante

$f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ $\quad$ funzione identica: $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Funzioni iniettive, suriettive, biiettive

$f: A \to B$ si dice: **iniettiva** $\iff$ $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
$\qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

> Poiché se $P \Rightarrow Q$ allora $\neg Q \Rightarrow \neg P$, valgono equivalentemente le due relazioni

suriettiva $\iff$ $\forall y \in B \ \exists x \in A \mid f(x) = y$ $\quad$ (dunque, $f(A) = B$)

biiettiva $\iff$ $\forall y \in B \ \exists! \ x \in A \mid f(x) = y$ $\quad$ (è iniettiva e suriettiva)

Esempio

$f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R}$ $\qquad$ la funzione risulta essere iniettiva, infatti:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{1}{x_1} \neq \frac{1}{x_2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Questa funzione **non** è suriettiva: $0 \in B$, $\nexists x \in A \mid f(x) = y$. (dimostrato fornendo un controesempio)

Considerando invece $f: x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, essa è sia iniettiva che suriettiva.

Infatti, $\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ \exists x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid f(x) = y$

Si nota dunque che f una funzione può non essere biettiva anche solo a causa dell'insieme dei valori (o del dominio).

Altro esempio: $f: x \in \mathbb{R} \to x^2 = x \cdot x \in [0, +\infty)$ $\quad$ non iniettiva: $-\sqrt{2} \neq \sqrt{2}$; $f(-\sqrt{2}) = f(\sqrt{2}) = 2$
$\qquad f: x \in [0, +\infty) \to x^2 \in [0, +\infty)$ $\quad$ iniettiva.

riccardo.polidoro.org

Funzione Inversa

Una funzione è invertibile se e solo se è biettiva.

$$y \in B \to x \in A : f(x) = y \implies f^{-1}(y) = x$$

Logicamente, ~~un~~ una funzione non può essere biettiva se mette in relazione insiemi di cardinalità diversa.
Valgono le seguenti relazioni:

- $f(f^{-1}(y)) = y \quad \forall y \in B$
- $f^{-1}(f(x)) = x \quad \forall x \in A$

Esempio di calcolo della funzione inversa

$f: x \in \mathbb{R} \to 2x - 1 \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$y \in \mathbb{R} \mapsto x : f(x) = 2x - 1 = y \Rightarrow x = \frac{y+1}{2} \implies f^{-1}: y \in \mathbb{R} \mapsto \frac{y+1}{2} \in \mathbb{R}$$

Funzioni Composte

X, Y, Z

$g: X \to Y$
$f: Y \to Z$
$h: X \to Z$

$$x \in X \xrightarrow{g} g(x) \in Y \xrightarrow{f} \overbrace{f(g(x))}^{\text{funzione composta}} \in Z$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$$

simbolo della composizione $\qquad$ "f di g di x"

Condizione essenziale: il codominio della prima ($g(x)$) funzione (essendo coincidente detta funzione con l'argomento della seconda) deve coincidere con il dominio della seconda ($f(x)$) (funzione più esterna)

Esempio di funzione composta

① $g: x \in \mathbb{R} \to 3x + 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$f: y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{3x+1}$$

② $g: x \in \mathbb{R} \to x - 5 \in \mathbb{R}$
$f: y \in \mathbb{R} \to y^2 \in \mathbb{R}$

$f \circ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (f \circ g)(x) = (x-5)^2$

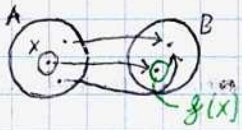
$g \circ f: \mathbb{R} \to \mathbb{R};\ (g \circ f)(y) = y^2 - 5$

Se è possibile comporre le funzioni in ambo gli ordini, si osserva che le composte sono diverse. Inoltre, se una funzione ha Dominio e Codominio coincidenti, è possibile fare $f(f(f(\ldots(f(x))\ldots)))$

Immagine e Antimmagine di una funzione

Immagine

$f: A \to B,\ X \subseteq A$

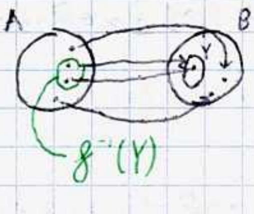


$$f(X) = \{y \in B : \exists x \in X : f(x) = y\}$$

immagine mediante f di X sottoinsieme di A, è a sua volta sottoinsieme di B

Antimmagine

$f: A \to B,\ Y \subseteq B$



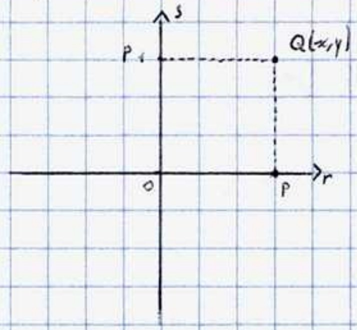
$$f^{-1}(Y) = \{x \in A \mid f(x) \in Y\}$$

↳ antimmagine, non funzione inversa ("argomento" è un insieme)

riccardo.polidoro.org

Rappresentazione Cartesiana di una funzione

$f: A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$



$P \in r$, $\overline{OP}$ = lunghezza del segmento OP

$$\text{Ascissa di } P = \begin{cases} \overline{OP} & \text{se } P \text{ segue } O \\ 0 & \text{se } P \equiv O \\ -\overline{OP} & \text{se } O \text{ segue } P \end{cases}$$

analogo per l'ordinata ma su s.

La funzione $P \in r \mapsto$ ascissa di P risulta essere biettiva

$Q \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ dunque, il grafico G_f di una funzione risulta essere determinato come:

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \in A, y \in f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \mid x \in A\}$$

Funzioni Monotone

$f: A \to B$

f è crescente [decrescente] $\overset{def}{\iff} \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq [\geq] f(x_2)$

La funzione costante è sia crescente che decrescente

Osservazione: ogni funzione strettamente monotona è iniettiva. Infatti:

f è strettamente crescente [decrescente] $\overset{def}{\iff} \forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < [>] f(x_2)$

Osservazione sull'andamento di funzioni composte:

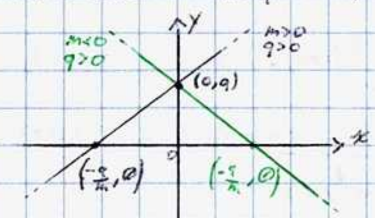
$g: X \to Y \quad f: Y \to Z \qquad f \circ g: X \to Z$

An	g	f	$f \circ g$
Andamento	↗	↗	↗
	↘	↘	↗
	↘	↗	↘
	↗	↘	↘

Funzioni Lineari o Affini

Graficamente rappresentano rette, sono sempre suriettive mentre sono iniettive per $m \neq 0$

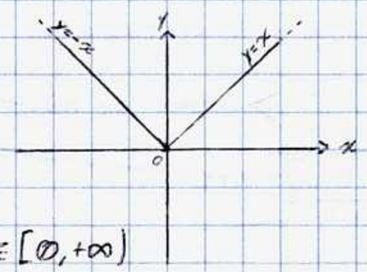
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto mx + q \qquad m, q \in \mathbb{R}$



Funzione Valore Assoluto

$f: x \in \mathbb{R} \to |x| \in \mathbb{R}$

$$|x| \overset{def}{=} \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$



La funzione è suriettiva ma non iniettiva: $f: x \in \mathbb{R} \to |x| \in [0, +\infty)$

riccardo.polidoro.org

Proprietà della funzione valore assoluto

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad |x| = 0 \iff x = 0$ $\qquad |-x| = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\qquad \left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|} \quad \forall x_1 \in \mathbb{R},\ \forall x_2 \in \mathbb{R} - \{0\}$

Vale la disuguaglianza triangolare: $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$

Per procedere in tale dimostrazione, si sfrutta la seguente proposizione:

Sia $r > 0$; risulta $\mathbf{|x| \leq r \iff -r \leq x \leq r}$. Analogamente, $|x| < r \iff -r < x < r$.

Dimostriamo la relazione in grassetto (la seconda si dimostra analogamente): $|x| \leq r \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -r \end{cases} \to -r \leq x \leq r$

$$|x_1| \leq |x_1| \quad \forall x_1 \in \mathbb{R} \xrightarrow{\text{proposiz.}} -|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|$$

$$|x_2| \leq |x_2| \quad \forall x_2 \in \mathbb{R} \longrightarrow -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|$$

Sommando membro a membro:

$$-|x_1| - |x_2| \leq \underbrace{x_1 + x_2 \leq |x_1| + |x_2|}_{\text{Q.E.D.}}$$

Principio di induzione

Utile per verificare proprietà relative ai numeri naturali (successioni)

Data una proprietà $P(n)$, valida in $\mathbb{N}$, per verificarla bisogna dimostrare che:

1. $P(1)$ è vera — base di induzione
2. se $P(n)$ è vera allora $P(n+1)$ è vera — ipotesi di induzione
   (n → fissato ma generico)

Il più celebre esempio in relazione alla dimostrazione di una proprietà attraverso il principio di induzione è quello relativo alla somma dei primi n numeri naturali, dimostrato empiricamente da Gauss:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Per il principio di induzione:

$P(1)$: $\quad 1 = \dfrac{1(2)}{2} = 1 \quad \boxed{\text{vera}}$

$P(n)$ è vera; $P(n+1)$: $\quad 1 + 2 + \ldots + (n+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$

→ Dim: $\underbrace{1 + 2 + \ldots + n}_{\text{per ipotesi } = \frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \dfrac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2} \quad \boxed{\text{vera}} \qquad \boxed{\text{QED}}$

Per la dimostrazione di Gauss (supponiamo $n = 5$)

1	2	3	4	5
5	4	3	2	1
6	6	6	6	6

> sommati due volte → $\dfrac{n(n+1)}{2}$

6 → $n+1$

n volte

riccardo.polidoro.org

Disuguaglianza di Bernoulli

$$\forall x \in \mathbb{R}: x \geq -1,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad (1+x)^n \geq 1+nx$$

Sfruttiamo il principio di induzione

① $(1+x)^1 \geq 1+1x \Rightarrow 1+x \geq 1+x$ $\boxed{\text{vero}}$

② $(1+x)^n \geq 1+nx$, dim. $(1+x)^{n+1} \geq (n+1)x+1$:

$$(1+x)^{n+1} = \underbrace{(1+x)^n}_{\substack{\geq 1+nx \\ \text{per ipotesi}}} \cdot \overbrace{(1+x)}^{\geq 0,\ \text{se no si inverte la disuguaglianza} \Rightarrow x \geq -1} \geq (1+nx)(1+x) \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+x+\underbrace{nx^2}_{\text{essendo} \geq 0 \text{ lo minoro con } 0}+nx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq 1+nx+x\ ;\quad (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x \qquad \boxed{\text{QED.}}$$

Minimo, Massimo, minorante, maggiorante, Estremi di un Insieme

• Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

Massimo e minimo di un insieme

$$M = \max A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} M \geq a,\ \forall a \in A \\ M \in A \end{cases}$$

$$m = \min A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m \leq a,\ \forall a \in A \\ m \in A \end{cases}$$

Non tutti gli insiemi hanno un massimo e/o un minimo a causa della condizione di appartenenza di tali punti all'insieme stesso.
$[0,1[$ ha un minimo, ma non un massimo.

Osservazione: $\min A \leq \max A$

Osservazione: Se esistono il massimo e/o il minimo di un dato insieme, essi sono **unici**.
Dimostriamo tale osservazione per il massimo, quella per il minimo è analoga.

Procediamo per assurdo: $M_1 = \max A,\ M_2 = \max A,\ M_1 \neq M_2 \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \begin{cases} M_1 \geq a\ \forall a \in A \\ M_1 \in A \end{cases},\ \begin{cases} M_2 \geq a\ \forall a \in A \\ M_2 \in A \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} M_1 \geq M_2 \\ M_2 \geq M_1 \end{cases} \Rightarrow M_1 = M_2 \qquad \boxed{\text{ASSURDO}}$$

• Sia $A \subseteq \mathbb{R}$

Maggiorante e minorante di un insieme

$$L \in \mathbb{R} \text{ maggiorante di } A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} L \geq a \quad \forall a \in A$$

$$l \in \mathbb{R} \text{ minorante di } A \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} l \leq a \quad \forall a \in A$$

Se esiste un maggiorante o un minorante per un dato insieme, ne esistono infiniti. Se esistono, l'insieme si dice **limitato** (superiormente o inferiormente; se ci sono entrambi è limitato)

$$A \text{ è limitato superiormente [inferiormente]} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \{L\ [l] \in \mathbb{R} : L \geq a\ [l \leq a]\ \forall a \in A\} \neq \emptyset$$

riccardo.polidoro.org

Proposizione: ~~∃ minimo~~ Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A è dotato di minimo.
[inferiormente] [minoranti] [massimo]

Dimostriamo tale osservazione per A limitato superiormente, l'altra dimostrazione è analoga.

$B = \{L \in \mathbb{R} : L \geq a \ \forall a \in A\}$; $L \geq a \ \forall a \in A, \forall L \in B$.

Per l'assioma di completezza, $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq L \quad \forall a \in A, \forall L \in B$

$\Rightarrow c \in B, c \leq L \ \forall L \in B \overset{def}{\Longleftrightarrow} c$ è $\min B$

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato.

Estremi superiore e inferiore di un insieme

$$M \in \mathbb{R} = \sup A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} M \geq a & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : M - \varepsilon < a \end{cases}$$

Se un insieme è dotato di massimo e/o minimo, esso coincide col relativo estremo

$$m \in \mathbb{R} = \inf A \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m \leq a & \forall a \in A \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists a \in A : m + \varepsilon > a \end{cases}$$

- Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ NON limitato

$$\sup A = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall L \in \mathbb{R} \ \exists a \in A : a > L$$

$$\inf A = -\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall l \in \mathbb{R} \ \exists a \in A : a < l$$

- Siano $A \subseteq \mathbb{R}, B \subseteq \mathbb{R}$.

A, B separati $\Longleftrightarrow a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Segue necessariamente che $\sup A \leq \inf B$: $\sup A \leq b \ \forall b \in B \Rightarrow \sup A \leq \inf B$

Per l'assioma di completezza, $\exists c : a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

Se c è unico, tali insiemi si dicono **contigui**.

Insiemi Finiti e Infiniti

Un insieme si dice equipotente a un altro insieme se esiste un'applicazione biunivoca di A su B.

- Un insieme si dice finito se è vuoto o se esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che l'insieme risulta equipotente all'insieme $\{1, 2, \dots, n\}$

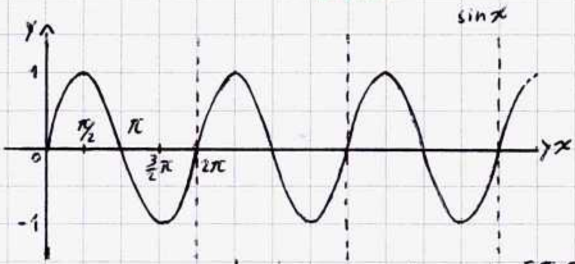
- Un insieme si dice infinito se non è finito.

riccardo.polidoro.org

Funzioni elementari: Seno, Coseno, inverse

Seno

$x \in \mathbb{R} \longrightarrow \sin x \in [-1,1]$



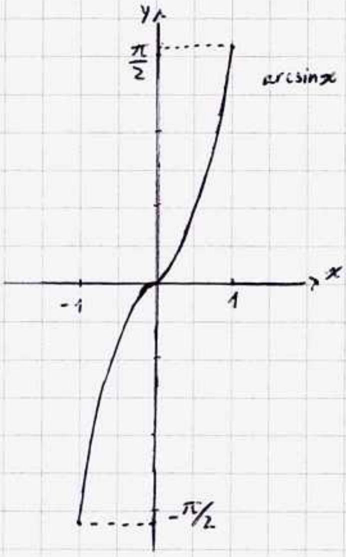
- Periodica di periodo 2π $\qquad \sin x = \sin(x + 2k\pi)$
- dispari $\qquad \sin(-x) = -\sin x$
- suriettiva su $[-1,1]$

Negli intervalli $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$, $\sin x$ è strettamente crescente; restringendo il dominio all'intervallo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ tale funzione è anche iniettiva:

$x \in [-1,1] \longrightarrow \arcsin(x) \in [-\pi/2, \pi/2]$

- Strettamente crescente di $[-1,1]$ in $[-\pi/2, \pi/2]$

$\sin(\arcsin(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arcsin(\sin(x)) = x \quad \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$



Coseno

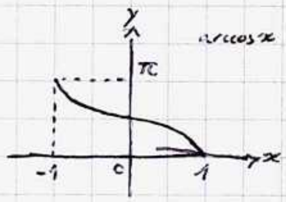
$x \in \mathbb{R} \rightarrow \cos x \in [-1,1]$

- Periodica di periodo 2π $\qquad \cos x = \cos(x + 2k\pi)$
- pari $\qquad \cos(-x) = \cos x$
- suriettiva su $[-1,1]$

risulta essere sfasata di $\pi/2$ rispetto a $\sin x$; $\cos(0) = 1$

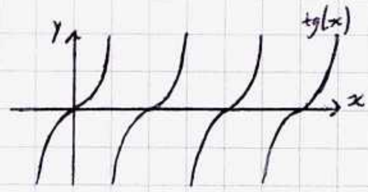
$x \in [-1,1] \longrightarrow \arccos(x) \in [0, \pi]$ strett. decrescente

- Strettamente decrescente di $[-1,1]$ in $[0,\pi]$



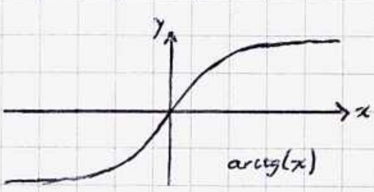
$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

Funzione tangente e relativa inversa



$x \in \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\} \longrightarrow tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \in \mathbb{R}$

- Periodica di periodo π $\qquad tg(x) = tg(x + k\pi)$
- dispari $\qquad tg(-x) = -tg(x)$
- suriettiva su $\mathbb{R}$



$x \in \mathbb{R} \longrightarrow arctg(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

- Strettamente crescente su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$tg(arctg(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
$arctg(tg(x)) = x \quad \forall x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$

riccardo.polidoro.org

riccardo.polidoro.org

Successioni

Un insieme si dice *numerabile* se è equipotente ad $\mathbb{N}$, ovvero se esiste $f: \mathbb{N} \to A$ biunivoca:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; f(n) = a_n \in A$$

$\mathbb{N}$ risulta ovviamente numerabile; $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{Z}$ sono numerabili. $[0,1]$, equipotente ad $\mathbb{R}$, non è numerabile (neanche $\mathbb{R}$)

Funzioni elementari: potenza n-ma e radice n-ma

Si distinguono due casi, a seconda di n:

① $n \in \mathbb{N}_d$

$$f: x \in \mathbb{R} \to x^n \in \mathbb{R} \qquad x^n \overset{\text{def}}{=} x \cdot x \cdot \ldots \cdot x \quad n \text{ volte}$$

Tale funzione risulta essere:

- Strettamente crescente
- Suriettiva
- Dispari $\quad (-x)^n = -(x^n) \qquad f(-x) = -f(x)$

Essa risulta dunque invertibile, la sua inversa è la funzione **radice n-ma** con $n \in \mathbb{N}_d$

$$f: x \in \mathbb{R} \to \sqrt[n]{x} \in \mathbb{R} \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Anche la funzione inversa è strettamente crescente, suriettiva e dispari $\quad \sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$

② $n \in \mathbb{N}_p$

$$f: x \in \mathbb{R} \to x^n \in [0, +\infty[$$

Tale funzione risulta essere:

- Strettamente decrescente in $]-\infty, 0[$ e strettamente crescente per $[0, +\infty[$
- Suriettiva da $[0,+\infty[$ su $[0,+\infty[$
- Pari $\quad (-x)^n = x^n \qquad f(-x) = f(x)$

Segue che $\forall y \in [0,+\infty[\; \exists! \, x \in \underline{[0,+\infty[} : x^n = y$; restringendo il dominio è possibile ricavare la funzione inversa

$$f: x \in [0,+\infty[\to \sqrt[n]{x} \in [0+\infty[$$

Essa eredita le proprietà della ristretta della funzione potenza: è strettamente crescente e suriettiva da $[0,+\infty[$ in $[0,+\infty[$.

⚠ : $\sqrt[n]{x^n} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$

riccardo.polidoro.org

Disequazioni Irrazionali

del tipo:

$$\sqrt[n]{p(x)} \geq q(x)$$

Si distinguono più casi:

- $n \in \mathbb{N}_d \Rightarrow p(x) \geq [q(x)]^n$

- $n \in \mathbb{N}_p \longrightarrow q(x) \geq 0 \Rightarrow p(x) \geq [q(x)]^n$ ingloba le C.E: $q(x) \geq 0, \sqrt[n]{p(x)} \geq q(x) \Rightarrow p(x) \geq 0$

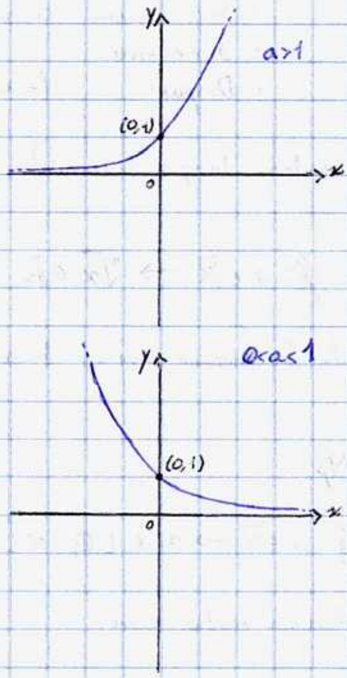
  $\hookrightarrow q(x) \leq 0 \Rightarrow \sqrt[n]{p(x)} \geq q(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \cap C.E. \Rightarrow \forall x: p(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}$

Se $\sqrt[n]{p(x)} \leq q(x)$, $n \in \mathbb{N}_p \longrightarrow q(x) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} q(x) \geq 0 \\ p(x) \geq 0 \quad C.E \\ p(x) \leq [q(x)]^n \end{cases}$

$\hookrightarrow q(x) < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : \sqrt[n]{p(x)} \leq q(x)$

Funzioni elementari: Esponenziale e Logaritmo

$$x \in \mathbb{R} \rightarrow a^x \in (0, +\infty), \ \underbrace{a}_{\text{fissato}} \in (0, +\infty), a \neq 1$$



Tale funzione risulta essere:

- Strettamente crescente se $a > 1$
  decrescente se $0 < a < 1$
- Suriettiva su $(0, +\infty)$

Si osserva che l'esponenziale è sempre positiva

Esponenziali di elementi appartenenti agli insiemi notevoli

$n = x \in \mathbb{N} \Rightarrow a^x = a^n = a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$ n volte

$-n = x \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \Rightarrow a^x = a^{-n} = 1/a^n$

$\frac{m}{n} = x \in \mathbb{Q} \Rightarrow a^x = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$ $a > 1$, consideriamo
$A = \{a^q : q \in \mathbb{Q}, q < x\}$
$a^q \in \mathbb{R}, A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente
$a^x = \sup A$ per definizione

Se $0 < a < 1$ (f. decrescente), consideriamo
$B = \{b^q : q \in \mathbb{Q}, q > x\} \subseteq \mathbb{R}$
essendo f decrescente, B è limitato superiormente
$0 < a < 1, q > x \Rightarrow a^q < a^x$
$a^x = \sup B$ per definizione

Essendo una funzione suriettiva ed iniettiva, essa è invertibile:

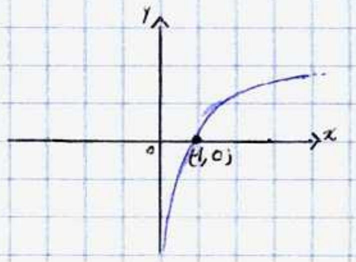
$$\log_a : (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \log_a x$$

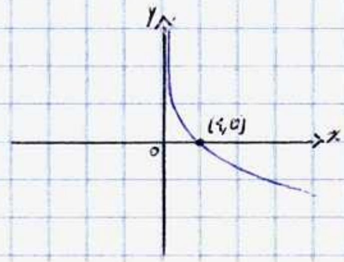
$$y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$$

Notazione notevole:

$$\log x \equiv \log_e x$$

e: numero di Nepero, $e > 1$





Nelle equazioni si applica l'esponenziale al logaritmo.
Si considerano note le proprietà dei logaritmi rispetto alle operazioni.

riccardo.polidoro.org

Limiti di Successioni: Successioni convergenti, divergenti, indeterminate

$(a_n)_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$n \mapsto a_n$

Una successione si dice convergente ad un valore $a \in \mathbb{R}$ se

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \overset{def}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu$$

si applica la definizione di limite

Proposizione: Se esiste il limite di una successione, esso è unico.

Per le dimostrazioni di unicità si procede sempre per assurdo

Dim: $\exists a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = a \ , \ \lim_{n\to+\infty} a_n = b$

Applicando la definizione di limite,

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 : |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > \nu_1$$

Valendo la definizione $\forall \varepsilon$ piccolo a piacere, vale anche per $\varepsilon/2$

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} b \quad \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 : |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n > \nu_2$$

$$|a-b| = |(a - a_n) + (a_n - b)| \leq |a - a_n| + |a_n - b| =$$

disuguaglianza triangolare

stesso v.ass.

$$= |a_n - a| + |a_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

per definizione, dopo aver considerato $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}, n > \nu$

Posto $\varepsilon = |a-b|$ (>0 per ipotesi), $|a-b| < |a-b|$ ASSURDO

Una successione si dice divergente se:

① $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ diverge positivamente : $\forall M > 0 \ \exists \nu_M : a_n > M \ \forall n > \nu$

② $\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ diverge negativamente: $\forall M > 0 \ \exists \nu_M : a_n < -M \ \forall n > \nu$

Se ammette limite, una successione si dice regolare. Una proposizione si dice definitivamente vera se vale a partire da un determinato punto.

Una successione si dice indeterminata se non è regolare $\Rightarrow \nexists \lim_{n\to+\infty} a_n$ esempio: $((-1)^n)_n$

Successioni infinite e infinitesime

Una successione si dice infinita se tende a $\pm\infty$; si dice infinitesima se tende a 0

Successioni limitate

Una successione si dice limitata se $\exists M > 0 : |a_n| \leq M \ \forall n \in \mathbb{N}$ Vale anche per le successioni indeterminate

ricardo.polidoro.org

Proposizione: Se una successione è convergente, essa è limitata.

Dim: $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \Rightarrow (a_n)_n$ è limitata

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu$ Supposto $\varepsilon = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow |a_n - a| < 1 \Rightarrow \underbrace{a-1}_{\text{minorante}} < a_n < \underbrace{a+1}_{\text{maggiorante}} \quad \forall n > \nu$$

Per $n \leq \nu$, poniamo:

$$\overline{M} = \max\{a_1, a_2, \dots, a_\nu, a+1\}$$

$$\overline{m} = \min\{a_1, a_2, \dots, a_\nu, a-1\}$$

Proposizione: $(a_n)_n \to 0 \Longleftrightarrow |a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\quad \nexists (a_n)_n$ indeterminata: $|a_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Dim: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n| < \varepsilon \ \forall n > \nu \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : ||a_n|| < \varepsilon \ \forall n > \nu$

$||a_n|| = |a_n| \Rightarrow$ le proposizioni sono logicamente equivalenti.

Operazioni con i limiti di successioni

Somma Se $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = b$, $\boxed{a, b \in \mathbb{R}}$

allora $\lim_n (a_n + b_n) = \lim_n a_n + \lim_n b_n = a + b$

$n \to +\infty$ si può omettere poiché in $\mathbb{N}$ l'unico punto di accumulazione è $+\infty$

Dimostrazione:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon \ \forall n > \nu_2 \end{array}\right\} \Rightarrow |(a_n+b_n) - (a+b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \overbrace{|a_n - a|}^{<\varepsilon \text{ se } n > \nu_1} + \overbrace{|b_n - b|}^{<\varepsilon \text{ se } n > \nu_2} \Rightarrow \text{fissiamo } \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$$

$$\Rightarrow \forall n > \nu, \ |(a_n + b_n) - (a+b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \quad \square$$

Sottr. analogamente, si dimostra che $\lim_n (a_n - b_n) = a - b = \lim_n a_n - \lim_n b_n$

Ragionando con gli infiniti, si dimostra che:

$\lim_n a_n$	$\lim_n b_n$	$\lim_n (a_n + b_n)$
a	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\mp\infty$	IND

Prodotto Se $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, allora $\lim_n (a_n b_n) = \lim_n a_n \cdot \lim_n b_n = ab$ $\quad$ dim. con def. di limite

Divisione: $\lim_n \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim_n \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \frac{\lim_n a_n}{\lim_n b_n} = \frac{a}{b}$ $\quad$ dimostrazione analoga alla precedente

$\lim_n a_n$	$\lim_n b_n$	$\lim_n (a_n b_n)$	$\lim_n \frac{a_n}{b_n}$
a	$+\infty$	$+\infty$ se $a > 0$ $-\infty$ se $a < 0$	0
$-\infty$	b	$-\infty$ se $b > 0$ $+\infty$ se $b < 0$	$-\infty$ se $b > 0$ $+\infty$ se $b < 0$
$\pm\infty$	0	IND	$\pm\infty$
$\pm\infty$	$\pm\infty$	$+\infty$ se concordi $-\infty$ se discordi	IND
0	0	0	IND

Esempio

$$\lim_n \frac{n^2 + 5n + 6}{n} \simeq \lim_n \frac{n^2}{n} = +\infty$$

forma indeterminata è risolvibile!

Negli esercizi è buona norma esplicitare sempre "perché" una certa cosa vale.

riccardo.polidoro.org

Teorema della permanenza del segno

Se $\lim_n a_n = a$, allora: vale anche per $a \notin \mathbb{R} \Rightarrow a = \pm\infty$

$$a > 0 \Rightarrow \exists \nu : a_n > 0 \ \forall n > \nu$$

$$a < 0 \Rightarrow \exists \nu : a_n < 0 \ \forall n < \nu$$

Dimostrazione:

$a = +\infty$, $a_n \to +\infty$

$\forall M \ \exists \nu : a_n > M \ \forall n > \nu \Rightarrow \exists \nu : a_n > 0 \ \forall n > \nu$ poiché $M > 0$ analogo per $-\infty$

$a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ analogo per $a < 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu;$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \ \forall n > \nu;$ fissiamo $\varepsilon = a/2$; $a > 0$ per ipotesi

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \frac{a}{2} < a_n < \frac{3}{2}a \ \forall n > \nu \Rightarrow \exists \nu : a_n > \frac{a}{2} > 0 \ \forall n > \nu$

Corollario: se $\lim_n a_n = a$ e $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq 0$

Dimostrazione per assurdo: $a < 0$.
Per il teorema di permanenza del segno, $\exists \nu : a_n < 0 \ \forall n > \nu$ ASSURDO per ipotesi

Corollario 2: Se $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = b$ con $a_n \geq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a \geq b$

Dimostrazione: $(a_n - b_n)_n$ fissiamo $c_n = a_n - b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$; $c_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ per ipotesi

$\lim_n c_n = a - b$; per il Corollario 1 $a - b \geq 0 \Rightarrow a \geq b$

Teorema dei Carabinieri (o del confronto)

Siano $(a_n)_n, (b_n)_n, (c_n)_n$ tre successioni di numeri reali tali che:

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Allora se $\lim_n a_n = a$ e $\lim_n b_n = a \Rightarrow \lim_n c_n = a$.

Dimostrazione:

$$\left.\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu_1 \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon \ \forall n > \nu_2 \end{array}\right\} \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \underline{\underline{a - \varepsilon}} < a_n \leq \underline{\underline{c_n}} \leq b_n < \underline{\underline{a + \varepsilon}} \ \forall n > \nu$$

$\to \lim_n c_n = a$

Teorema:

Siano $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ due successioni tali che $a_n \geq b_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

1. Se $b_n \to +\infty \Rightarrow a_n \to +\infty$
2. Se $a_n \to -\infty \Rightarrow b_n \to -\infty$

Dim. 1: $\forall M > 0 \ \exists \nu : b_n > M \ \forall n > \nu$; $a_n \geq b_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \geq b_n > M \ \forall n > \nu \Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$ analogo per la 2

riccardo.polidoro.org

Proposizione: Siano $(a_n)_n$ una successione limitata e $(b_n)_n$ una successione infinitesima, allora:
utile in es.

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n b_n)_n = 0$$

Dimostrazione: dalla definizione di successione limitata, $\exists \ell, L \in \mathbb{R}: \ell \leq a_n \leq L \quad \forall n \in \mathbb{N}$

dalla definizione di limite, $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu : |b_n| < \varepsilon \quad \forall n > \nu$

Moltiplicando la prima relazione per $|b_n|$ (sempre positivo $\Rightarrow$ non inverte la disuguaglianza) si ottiene che:

$$\ell|b_n| \leq a_n|b_n| \leq L|b_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Per il teorema dei carabinieri, $a_n|b_n|$ tende a 0 all'infinito Q.E.D.

Esempi:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$ non dimostrato

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \\ \nexists & a \leq -1 \end{cases}$$

Dim:

$a>1$: sfruttiamo la disuguaglianza di Bernoulli: $\underbrace{a^n \geq 1+n(a-1)}_{>0}$; per l'osservazione derivata dal teorema dei Carabinieri, tendendo il secondo membro a $+\infty$, anche a^n tende a $+\infty$.

$|a|<1$: Sappiamo che $1/|a| > 1$ per ipotesi; ~~per~~ come per il caso precedente dunque $\left(\left(\frac{1}{|a|}\right)^n\right)_n$ tende a $+\infty \Rightarrow |a|^n = |a^n|$ tende a 0. ~~Per a = -1 abbiamo già dimostrato~~

$a \leq -1$: Il caso $a=-1$ è stato già elencato precedentemente (alternanza $-1/1$); per $a<-1$ consideriamo tale successione come la composizione di due successioni, una con esponente pari ed una con esponente dispari. $a^{2k} \to +\infty$, mentre $a^{2k-1} \to -\infty \Rightarrow$ la successione non ammette limite.

Una successione di numeri reali $(a_n)_n$ si dice **monotona** se si verifica una delle seguenti proprietà:

- $(a_n)_n$ è crescente, ovvero $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_n$ è strettamente crescente, ovvero $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_n$ è decrescente, ovvero $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)_n$ è strettamente decrescente, ovvero $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Criterio del rapporto per le successioni

Sia $(a_n)_n$ una successione a termini positivi ($a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$). Nel caso in cui $\lim_n a_n$ sia di difficile calcolo (per esempio se si hanno infiniti di ordine diverso non facilmente discutibili) si può adoperare tale criterio:

Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = b$

$b \in [0,1[\Rightarrow \lim_n a_n = 0$

$b \in (1,+\infty) \Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$

se $b=1$ tale criterio non è applicabile.

Esempio: $\lim_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} = +\infty$. Infatti, applicando il criterio del rapporto per le successioni:

$$\lim_n \frac{(3(n+1))!}{((n+1)!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_n \frac{(3n+3)!}{(n+1)^3 \cdot (n!)^3} \cdot \frac{(n!)^3}{(3n)!} = \lim_n \frac{(3n+3)\cdot(3n+2)\cdot(3n+1)\cdot\cancel{(3n)!}}{(n+1)^3 \cdot \cancel{(n!)^3}} \cdot \frac{\cancel{(n!)^3}}{\cancel{(3n)!}} \simeq \lim_n \frac{27n^3}{n^3} = 27 > 1 \Rightarrow \lim_n \frac{(3n)!}{(n!)^3} = +\infty$$

riccardo.polidoro.org

Ordine di infinito nei limiti di successioni

$$\log n \to \underset{b>0}{n^b} \to \underset{a>1}{a^n} \to n! \to n^n$$

Tutte queste successioni tendono all'infinito, ma a diverse "velocità"; ne segue che $\lim_n \frac{\log n}{n^b} = 0$; $\lim_n \frac{n^b}{a^n} = 0$; ...; $\lim_n \frac{n!}{n^n} = 0$. Ciò può essere utile nella risoluzione di diversi limiti di successioni particolari; si veda il seguente esempio:

$$\lim_n \frac{n!}{3^{n+1}} = \lim_n \frac{n!}{3 \cdot 3^n} = \frac{1}{3} \lim_n \frac{n!}{3^n} = +\infty \quad \text{poiché} \quad \text{ord}\, n! > \text{ord}\, 3^n$$

$$\boxed{\lim_n n^b = \begin{cases} +\infty & b>0 \\ 1 & b=0 \\ 0 & b<0 \end{cases}}$$

Teorema sulle successioni monotone

Ogni successione monotona è regolare (cioè ammette limite). In particolare:

① Se $(a_n)_n$ è monotona e limitata, essa è convergente; in particolare:

a) se $(a_n)_n$ è crescente, $\lim_n (a_n)_n = \sup_n a_n$

b) se $(a_n)_n$ è decrescente, $\lim_n (a_n)_n = \inf_n a_n$

② Se $(a_n)_n$ non è limitata, essa tende all'infinito

a) $\sup_n a_n = +\infty$

b) $\inf_n a_n = -\infty$

Dimostrazione del caso a) (analoga per b)

①: $(a_n)_n$ è limitata. Sia $\ell \in \mathbb{R}$, $\ell = \sup_n a_n \Rightarrow \ell \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \ell \geq a_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu : \ell - \varepsilon < a_\nu \end{cases}$

Essendo una successione crescente, $\forall n > \nu \quad a_n \geq a_\nu \Rightarrow \ell - \varepsilon < a_\nu \leq a_n < \ell < \ell + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu : \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

$$\Downarrow$$

$$\lim_n a_n = \ell$$

②: $\sup_n a_n = +\infty$; per definizione, $\forall M > 0\ \exists \nu : a_\nu > M$

Essendo $(a_n)_n$ crescente, $\forall n > \nu \quad a_n > a_\nu > M \Rightarrow \forall M > 0\ \exists \nu : a_n > M\ \forall n > \nu \Rightarrow \lim_n a_n = +\infty$

Alcuni limiti notevoli di successioni

$$\lim_n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad\qquad \lim_n \frac{\text{sen}(a_n)}{a_n} = 1 \iff (a_n)_n \to 0$$

Operando opportuni ragionamenti, si osserva che:

$a_n \to +\infty$ $\lim_n \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$	$\lim_n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \lim_n \left(1 + \frac{1}{n/x}\right)^{\frac{n}{x} \cdot x} = e^x$

Esempi

- $\lim_n \left(\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \lim_n \left(\frac{n^2+n\overset{\text{aggiungi e sottrai}}{+1-1}}{n^2+n+1}\right)^{n^2} \overset{\text{num = denom.}}{=} \lim_n \left(1 \overset{\text{spezza frazione}}{-} \frac{1}{n^2+n+1}\right)^{n^2} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{-(n^2+n+1)}\right)^{n^2} \overset{\text{riconduci alla forma } 1+1/k}{=} \lim_n \left(1 + \frac{1}{-(n^2+n+1)}\right)^{-(n^2+n+1) \cdot \frac{n^2}{-(n^2+n+1)}} \overset{\text{moltiplica per } k/k}{=}$

$$= \lim_n \Bigg[\overbrace{\left(1 + \frac{1}{-(n^2+n+1)}\right)^{-n^2+n+1}}^{e}\Bigg]^{\frac{n^2}{-(n^2+n+1)}} \simeq \lim_n e^{-\frac{n^2}{n^2+n+1}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

- $\lim_n n^2\left(1 - \cos\frac{1}{n}\right) = \lim_n \frac{n^2\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)}{\left(1+\cos\frac{1}{n}\right)} \overset{\text{riconduci a sen}}{=} \lim_n \frac{n^2\left(\text{sen}^2 \frac{1}{n}\right)}{1 + \cos\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{\Big(\overbrace{\frac{\text{sen}\, 1/n}{1/n}}^{1}\Big)^2}{\underbrace{1 + \cos\frac{1}{n}}_{1+1}} = \frac{1}{2}$

- $\lim_n n^2\left(1 - \cos\frac{2}{n}\right) \overset{\text{analogo}}{=} \dots = \lim_n \frac{\left(\frac{\text{sen}\, 2/n}{1/n}\right)^2}{1+\cos 2/n} \overset{\text{molt. 2/2}}{=} \lim_n \frac{\left(\frac{2\,\text{sen}\, 2/n}{2/n}\right)^2}{1+\cos 2/n} \overset{\text{porto fuori}}{=} \lim_n \frac{4\Big(\overbrace{\frac{\text{sen}\, 2/n}{2/n}}^{1}\Big)^2}{1+\cos 2/n} = \frac{4}{2} = 2$

riccardo.polidoro.org

Successioni Estratte o sottosuccessioni

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

es. $(a_{2k-1})_k$ esempio di successioni estratte, ovvero ricavate da alcuni elementi di $(a_n)_n$

$(a_{2k})_k$

Ad esempio, la successione limitata $a_n = (-1)^n$, già discussa precedentemente, è composta da due sottosuccessioni che ammettono limite:

$$(a_{2k})_k = (1)_k \xrightarrow[k]{} 1$$

$$(a_{2k-1})_k = (-1)_k \xrightarrow[k]{} -1$$

Sia $(a_n)_n$ una successione, $f: n \in \mathbb{N} \to a_n = f(n) \in \mathbb{R}$

Sia $g: k \in \mathbb{N} \to g(k) = n_k \in \mathbb{N}$ una successione strettamente crescente

Allora la funzione $f \circ g: k \in \mathbb{N} \to a_{n_k} \in \mathbb{R}$ è una successione **estratta** dalla successione $(a_n)_n$.

Teorema: Sia $(a_n)_n$ una successione **regolare**, allora ogni estratta di $(a_n)_n$ è regolare. In particolare:

$$\lim_n a_n = a \implies \lim_k a_{n_k} = a$$

Dimostrazione: Per il principio di induzione, risulta:

(*) $n_k \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N}$; infatti: $k=1 \Rightarrow n_1 \geq 1$ poiché n_k è una successione di numeri naturali $n_1 = 1_1 \geq 1$, gli altri per definizione sono >1

~~k+1~~ $\underline{H_p}$ $\underline{T_h}$

$n_k \geq k \quad n_{k+1} \geq k+1 \Rightarrow \overbrace{k+1 \leq n_k + 1}^{\text{maggioro } n_k \text{ di 1 per renderlo confrontabile con } k+1 \text{ e applicare la def.}} \leq n_{k+1},$

$\hookrightarrow n_k$ è una successione strettamente crescente

$a \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu \in \mathbb{N}: |a_n - a| < \varepsilon \; \forall n > \nu$

Sia $k > \nu$, per la (*) $n_k \geq k > \nu \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu: |a_n - a| < \varepsilon \; \forall k > \nu \Rightarrow \lim_{k\to+\infty} a_{n_k} = a$ QED

Se $a = \pm\infty$ si ragiona analogamente.

Teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia $(a_n)_n$ una successione limitata. Allora esiste almeno un'estratta $(a_{n_k})_k$ convergente.

La dimostrazione si basa sul metodo di bisezione (non considerata nel corso)

Successioni di Cauchy

Una successione $(a_n)_n$ si dice di Cauchy se:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu: |a_h - a_k| < \varepsilon \quad \forall h,k > \nu$$

riccardo.polidoro.org

Criterio di Cauchy

$(a_n)_n$ è convergente $\Longleftrightarrow$ $(a_n)_n$ è di Cauchy

Dim $(\Rightarrow)$ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon \;\; \forall n > \nu$

Sia $h,k > \nu$; $|a_h - a_k| = |a_h - a + a - a_k| \leq |a_h - a| + |a - a_k| < 2\varepsilon$

$(\Leftarrow)$ $(a_n)_n$ è di Cauchy $\xRightarrow{\text{teorema}}$ è limitata; per il teorema di Bolzano-Weierstrass esiste almeno un'estratta $(a_{n_k})_k$ convergente ad $a \Rightarrow \lim_k a_{n_k} = a$

Per la definizione di successione di Cauchy, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \nu : |a_h - a_k| < \varepsilon \;\; \forall h,k > \nu$

Poiché tende ad a, $\forall \varepsilon > 0 \, \exists k_0 > \nu : |a_{n_{k_0}} - a| < \varepsilon \;\; \forall k \geq k_0$

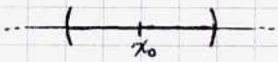
Per dimostrazione precedente, $n_k \geq k \;\; \forall k$, in particolare $n_{k_0} \geq k_0 > \nu$

$n > \nu$; $|a_n - a| = |a_n - a_{n_{k_0}} + a_{n_{k_0}} - a| \leq \underbrace{|a_n - a_{n_{k_0}}|}_{<\varepsilon \text{ perché di Cauchy}} + \underbrace{|a_{n_{k_0}} - a|}_{<\varepsilon \text{ perché estratta } a_{n_k} \to a} < 2\varepsilon \Rightarrow a_n \to a$

Intorno di un numero reale

Un intorno di x_0 è un qualunque intervallo aperto di centro x_0.

I intorno di $x_0 \Longleftrightarrow \exists \delta > 0 : I = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



Se $x_0 = \pm\infty$:

I intorno di $+\infty \Longleftrightarrow \exists a \in \mathbb{R} : I = (a, +\infty)$

I intorno di $-\infty \Longleftrightarrow \exists b \in \mathbb{R} : I = (-\infty, b)$

Punto di Accumulazione di un Insieme

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, sia $A \subseteq \mathbb{R}$

x_0 è un **punto di accumulazione** per A se per ogni intorno di x_0 esiste almeno un punto appartenente ad A distinto da x_0 che appartiene a detto intorno.

x_0 è di accumulazione per $A \Longleftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}(x_0),\; I \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

$\mathcal{J}(x_0)$: insieme (o famiglia) degli intorni di x_0

Esempi
$A = (a,b) \cup \{c : c > b\}$
a è di accumulazione
c non è di accumulaz.
In $\mathbb{N}$, l'unico punto è $+\infty$
$\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ essendo densi hanno infiniti punti di accumulaz.

L'insieme dei punti di accumulazione di un insieme si dice **derivato** dell'insieme

Proposizione: Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $A \subseteq \mathbb{R}$

- x_0 è di accumulazione per $A \Longleftrightarrow \forall I \in \mathcal{J}(x_0)$, $I \cap A$ è infinito.
- Se $x_0 \in A$ e $x_0 \notin D_A$, x_0 si dice **punto isolato**.

D_A: derivato di A, dunque x_0 non è di accumulazione per ~~l'insieme~~ A

riccardo.polidoro.org

Definizione di Limite di Funzione

A seconda dei casi, si distinguono diverse definizioni; tutte sono riconducibili alla **definizione per intorni**:

Sia $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, $l \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$; Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 punto di accumulazione per A:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall J \in \mathcal{J}(l)\ \exists I \in \mathcal{J}(x_0) : f(x) \in J\ \forall x \in I \cap (A \setminus \{x_0\})$$

Esempi

- $x_0 \in \mathbb{R}$, $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall \overset{\substack{\text{semiampiezza dell'intorno di } l}}{\varepsilon > 0}\ \exists \underbrace{\delta > 0}_{\substack{\text{semiampiezza}\\ \text{dell'intorno di } x_0,\\ \text{dipende da } \varepsilon}} : \overbrace{|f(x) - l| < \varepsilon}^{\text{semiampiezza dell'intorno: } l-\varepsilon < f(x) < l+\varepsilon}\ \underbrace{\forall x \in A}_{f(x) \text{ è definita}} : \underbrace{0 \neq |x - x_0| < \delta}_{x \in I_{x_0},\ x \neq x_0}$$

- $x_0 = +\infty$, $l \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : |f(x) - l| < \varepsilon\ \forall x \in A : \underbrace{x > M}_{①}$$

①: se $x_0 = -\infty$, $x < -M$

- $l = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall k > 0\ \exists \delta > 0 : \underbrace{f(x) > k}_{②}\ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

②: se $l = -\infty$, $f(x) < -k$

- $l = +\infty$, $x_0 = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall k > 0\ \exists M > 0 : \underbrace{f(x) > k}_{②}\ \forall x \in A : \underbrace{x > M}_{①}$$

Esercizio: $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ C.E: $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$; $\lim_{x \to x_0} f(x)$ calcolabile $\forall x_0 \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$

Verificare attraverso la definizione di limite che $\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$ ciò implica di sfruttare la def. di limite.

$$\forall k > 0\ \exists \delta > 0 : f(x) > k\ \forall\, 0 \neq |x - x_0| < \delta$$

per verificare il limite occorre trovare δ in funzione di k

$$\frac{1}{x^2} > k \Rightarrow x^2 < \frac{1}{k}, \text{ essendo } \sqrt{x^2} = |x| \Rightarrow \underbrace{|x|}_{|x - x_0|,\ x_0 = 0} < \frac{1}{\sqrt{k}} \to \delta_k \qquad \square$$

passaggio ai reciproci

Teorema Ponte

Lega i limiti di funzioni a quelli di successioni, traslando alle funzioni le proprietà e i limiti notevoli considerati nelle successioni.

$$\lim_n a_n = a \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \nu : |a_n - a| < \varepsilon\ \forall n > \nu \iff \forall J \in \mathcal{J}(a)\ \exists M > 0 : a_n \in J\ \forall n > M$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \iff \forall J \in \mathcal{J}(l)\ \exists I \in \mathcal{J}(x_0) : f(x) \in J\ \forall x \in I \cap (A \setminus \{x_0\}) \iff \forall \underbrace{x_n}_{x_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}} \to x_0,\ x \in A - \{x_0\} \Rightarrow \underbrace{f(x_n)}_{f(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}} \to l$$

riccardo.polidoro.org

Continuità di una funzione

Sia $f: A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. *Si noti che x_0 appartiene al dominio*

f si dice continua nel punto x_0 se il limite di $f(x)$ esiste e se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Applicando la definizione di limite, f è continua in $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \forall x \in A : 0 \neq |x - x_0| < \delta$

Ne segue logicamente che una funzione è continua in un dato insieme se è continua in ogni punto dell'insieme, ovvero se tutti i punti appartenenti al dominio sono di accumulazione.

Esempi

> ⚠ • Sottolinea sempre **dove** $f(x)$ è continua!
> • Inizia sempre dall'analisi dei punti di raccordo di funzioni elementari
> • Tutte le funzioni elementari sono continue

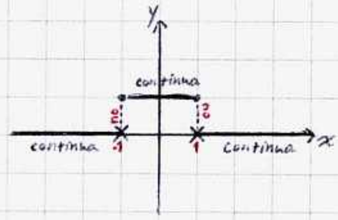
- $f: x \in \mathbb{R} \to x \in \mathbb{R}$ continua in $\mathbb{R}$
- $f: x \in \mathbb{R} \to |x| \in [0, +\infty]$ continua in $\mathbb{R}$

Dim: Studio la continuità di f in $x_0 = 0$: $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0$ $f(0) = 0$

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} |x| = \lim_{x \to 0^+} x = 0$ $\lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$

- $f: x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ discontinua in $\mathbb{R}$, continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

- $f: x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$ continua in $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, non continua in $x = \pm 1$



- $f: x \in \mathbb{R} \to \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ non è mai continua

Esercizio: Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ \alpha & \text{se } x = 0 \end{cases}$ è continua in $\mathbb{R}$.

Per essere continua, $\lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = \alpha$

$\lim_{x \to 0} 1 - \frac{1}{|x|}$ → $\lim_{x \to 0^+} 1 - \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim_{x \to 0^-} 1 + \frac{1}{x} = +\infty$

$\nexists\, \alpha \in \mathbb{R}$; inoltre non esiste il limite.

Si noti che già al primo calcolo di limite era possibile affermare la non esistenza di un parametro α che verificasse la richiesta.

Punti di discontinuità di una funzione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; se $x_0 \in A \cap D_A$ (ovvero se x_0 è punto di accumulazione appartenente al dominio) e f non è continua in x_0, x_0 si dirà punto di discontinuità per f.
A seconda dei casi, i punti di discontinuità si dividono in tre categorie, o specie; nella categorizzazione si ricorre spesso al concetto di limite

riccardo.polidoro.org

Punti di discontinuità eliminabile: discontinuità di III specie

Un punto di discontinuità si dice eliminabile se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste e se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \qquad l \neq f(x_0)$$

Tale discontinuità è <u>eliminabile</u>: per "rendere" la funzione continua sarà sufficiente considerare $\tilde{f}(x)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ \lim_{x \to x_0} f(x) & \text{se } x = x_0 \end{cases}$$

Salti di discontinuità: discontinuità di I specie

Un punto di discontinuità si dice di prima specie se $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esiste e:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \equiv f(x_0^-) \in \mathbb{R} \qquad f(x_0^-) \neq f(x_0^+) \qquad |f(x_0^+) - f(x_0^-)| \text{ viene detto salto della funzione}$$
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \equiv f(x_0^+) \in \mathbb{R}$$

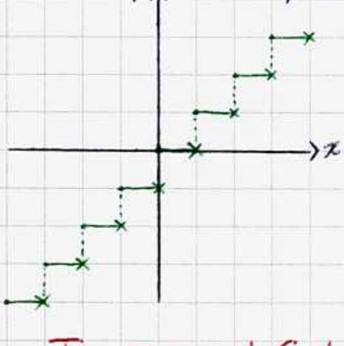
Discontinuità di II specie

Raccoglie tutti i casi non esplicitati in precedenza: non esistenza del limite, limiti tendenti all'infinito...

Ad esempio, la funzione $f: x \in \mathbb{R} \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ ha discontinuità di II specie in ogni punto ($\nexists$ limite)

Funzione Parte intera di x

$f(x) = [x]$ associa il numero intero relativo minore o uguale a $x \in \mathbb{R}$ più vicino, la funzione è continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ e presenta unicamente discontinuità di prima specie.



Teoremi sul Calcolo differenziale

Teorema di Weierstrass

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ e continua in $[a,b]$, allora f è dotata di minimo e massimo assoluto.

- $x_1 \in [a,b]$ si dice punto di minimo assoluto per f se:

$$f(x_1) \leq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

- $x_2 \in [a,b]$ è detto punto di massimo assoluto per f se:

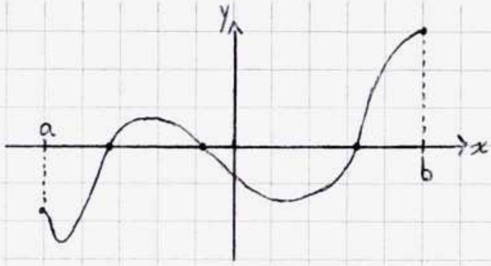
$$f(x_2) \geq f(x) \quad \forall x \in [a,b]$$

⚠ L'ipotesi del teorema è <u>estremamente</u> importante:
- $f: x \in (0,1] \to 1/x$ no max
- $f: x \in (-\infty,1] \to x$ no min
- $f: x \in [0,1) \to x^2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \sup x^2 = 1$ non max

Dunque, f deve essere definita in un <u>intervallo chiuso e limitato</u>!

riccardo.polidoro.org

Teorema degli Zeri



Sia $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$.

Se $f(a)\cdot f(b) < 0$, allora $\exists\, x_0 \in (a,b) : f(x_0)=0$

Dimostrazione

Supponiamo, per fissare le idee: $f(a)<0$, $f(b)>0$. Procediamo nella dimostrazione sfruttando il metodo di bisezione:

Sia $c=\dfrac{a+b}{2}$; $f(c)$: $\begin{cases} >0 \Rightarrow \text{consideriamo } [a,c]=[a_1,b_1] \\ =0 \text{ risolto} \\ <0 \Rightarrow \text{consideriamo } [c,b]=[a_1,b_1] \end{cases}$

Dunque: $a \le a_1 < b_1 \le b$ $\quad b_1-a_1=\dfrac{b-a}{2}$

$f(a_1)\cdot f(b_1)<0$; in particolare $f(a_1)<0$, $f(b_1)>0$

Iterando il procedimento:

Sia $c_1=\dfrac{a_1+b_1}{2}$; $f(c_1)$: $\begin{cases} >0 \Rightarrow \text{consideriamo } [a_1,c_1]=[a_2,b_2] \\ =0 \text{ risolto} \\ <0 \Rightarrow \text{consideriamo } [c_1,b_1]=[a_2,b_2] \end{cases}$

Analogamente: $a \le a_1 \le a_2 < b_2 \le b_1 \le b$ $\quad b_2-a_2=\dfrac{b_1-a_1}{2}$

$f(a_2)\cdot f(b_2)<0$; in part. $f(a_2)<0$, $f(b_2)>0$

Si osserva dunque che, iterando successivamente, si costruiscono due successioni:

$\exists\, \bar{n}\in\mathbb{N} : f(c_{\bar{n}})=0$, altrimenti

$\forall n\in\mathbb{N}, f(c_{\bar{n}})\neq 0 \Longrightarrow$ consideriamo $[a_{n+1},b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n,c_n] & \text{se } f(c_n)>0 \\ [c_n,b_n] & \text{se } f(c_n)<0 \end{cases}$

$a \le a_n \le a_{n+1} < b_{n+1} \le b_n \le b$

$b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$; $f(a_{n+1})<0$, $f(b_{n+1})>0$

Analizziamo le due successioni:

$(a_n)_n$ è crescente e limitata

$(b_n)_n$ è decrescente e limitata

$\Rightarrow$ Per il teorema di regolarità delle successioni monotone, entrambe convergono ad un valore finito.

Supponiamo che $\lim\limits_n (a_n)_n = x_0$, analizziamo $\lim\limits_n (b_n)_n$ sfruttando l'uguaglianza $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b-a}{2^{n+1}}$:

$$\lim_n \overset{b_{n+1}}{\overset{\uparrow}{(b_n)_n}} = \lim_n\left(a_n+\frac{b-a}{2^n}\right) \quad \text{poiché } \lim_n 2^n=+\infty, \quad \lim(b_n)=\lim(a_n)=x_0$$

Per costruzione delle ~~su~~ successioni, sappiamo che:

- $f(a_{n+1})<0 \Longrightarrow \lim\limits_n (a_{n+1}) \le 0$ per il corollario del teorema di permanenza del segno
- $f(b_{n+1})>0 \Longrightarrow \lim\limits_n (b_{n+1}) \ge 0$ per lo stesso motivo

Essendo f continua:

Si noti che l'ipotesi iniziale viene sfruttata solo a questo punto.

$$\lim_n f(a_{n+1}) = \lim_n f(b_{n+1}) = f(x_0)=0 \quad \square$$

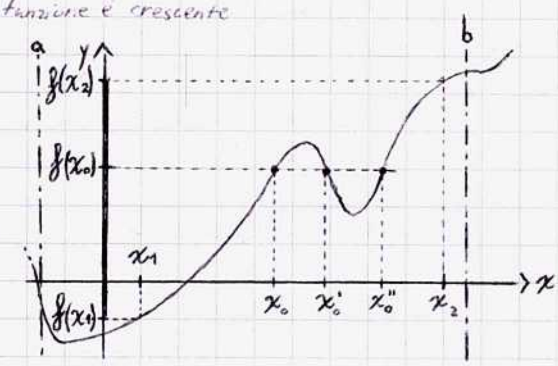
riccardo.polidoro.org

Teorema di Bolzano o I teorema dei valori intermedi

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. ovvero vale Weierstrass

Siano $x_1, x_2 \in [a,b]: f(x_1) < f(x_2)$ ovvero la funzione è crescente

Allora, $\forall y_0 \in [f(x_1), f(x_2)], \exists x_0 \in [a,b]: f(x_0) = y_0$



Dimostrazione: Si distinguono 3 casi: ① $y_0 = f(x_1) \Rightarrow x_0 = x_1$
② $y_0 = f(x_2) \Rightarrow x_0 = x_2$

③ $y_0 \in (f(x_1), f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) < y_0 < f(x_2)$

Consideriamo una funzione ausiliaria $g(x) = f(x) - y_0$. g è necessariamente definita in $[a,b]$ e continua nel medesimo intervallo, oltre ad essere crescente.
Ne segue che:

$g(x_1) = f(x_1) - y_0$ è minore di $\emptyset$ per ipotesi $(f(x_1) < y_0 < f(x_2))$

$g(x_2) = f(x_2) - y_0$ è maggiore di $\emptyset$ per ipotesi

Per il teorema degli zeri applicato a g, $\exists x_0 \in (x_1, x_2): g(x_0) = \emptyset$; di conseguenza $f(x_0) - y_0 = \emptyset \Rightarrow f(x_0) = y_0$ □

Secondo teorema dei valori intermedi (alle volte inteso come Corollario)

Sia f una funzione definita in un intervallo chiuso e limitato $[a,b]$ e continua nel medesimo intervallo (Vale Weierstrass). Allora

$$\forall y_0 \in \left[\min_{x\in[a,b]} f(x), \max_{x \in [a,b]} f(x) \right], \exists x_0 \in (a,b): f(x_0) = y_0$$

Prova intercorso del 31/01/2020 - "Errori"

- $\lim_n \log(2e^n - 1) - n =$ fissando $n = \log e^n$, (metodo più lineare)

$= \lim_n \log(2e^n - 1) - \log e^n = \lim_n \log\left(\frac{2e^n - 1}{e^n}\right) =$

$= \lim_n \log(2 - 1/e^n) = \log 2$

✗: $\lim_n \log\left(e^n\left(2 - \frac{1}{e^n}\right)\right) - n =$ → elidere questo fattore nel calcolo del limite non è un'operazione lecita formalmente; è necessario invece spezzare il limite.

✓: $= \lim_n (\log e^n - n) + \lim_n \log\left(2 - \frac{1}{e^n}\right) = \emptyset + \log 2 = \log 2$

- $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \ldots + n \cdot n! = (n+1)! - 1$

Quando si converte il primo termine in una sommatoria, bisogna far attenzione alla variabile:

✗: $\sum_{k=1}^{n} n \cdot n!$ ✓: $\sum_{k=1}^{n} \underbrace{k \cdot k!}_{\text{varia } k} \xRightarrow{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot k!$

Orale intercorso del 10/02/2020 - Richieste:

Valutazione
30/30

- Criterio di Cauchy ⇒ induzione $n_k \geq k$
- Teorema dei Carabinieri
- $\forall A \subseteq \mathbb{R} \, \exists$ sup/inf A + def
- f monotona/strett. m. iniettiva
- cos / arccos + grafico

riccardo.polidoro.org

Derivata di una funzione

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, e sia $x_0 \in (a,b)$

Consideriamo la funzione $h \in (-\delta, \delta) \longrightarrow \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ tale funzione prende il nome di rapporto incrementale di f nel punto x_0

⚠: Si noti l'importanza dell'ipotesi $x_0 \in (a,b)$: il termine $x+h$ (con $h \in (-\delta,\delta)$) deve appartenere all'intervallo di definizione $[a,b]$

Si definisce **derivata prima della funzione nel punto x_0** il limite del rapporto incrementale per $h \to 0$. In altre parole, una funzione è derivabile se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

In simboli, la derivata prima si indica con: $f'(x_0)$ $\dfrac{\partial f(x_0)}{\partial x}$, $Df(x_0)$, y' (se $y=f(x)$)

Derivate elementari

Funzione Costante: $f(x) = c \Longrightarrow f'(x) = 0$

Infatti $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$

Funzione Lineare: $f(x) = mx+q \Longrightarrow f'(x) = m$

Infatti $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h)+\cancel{q}-mx-\cancel{q}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(\cancel{x}+h-\cancel{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m$

Funzione potenza: $f(x) = x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x$

analogamente, $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Funzione Valore assoluto: $f(x) = |x| \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{|x|}{x} = \dfrac{x}{|x|}$ $\boxed{\forall x \neq 0}$

La funzione è derivabile in $\mathbb{R}-\{0\}$: non è derivabile in 0 poiché i limiti destra e sinistro esistono, sono finiti MA non coincidono:

$$\underbrace{f'_+(x)}_{\text{derivata destra}} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \qquad \underbrace{f'_-(x)}_{\text{derivata sinistra}} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h|-|0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$$

Osservazione: Ponendo $x = x_0+h$, ed effettuando un cambio di variabile:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \equiv \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \equiv f'(x_0)$$

Proposizione: **Sia f derivabile nel punto x_0. Allora f è continua in x_0.** (Non vale il viceversa)

Dim: Hp: $\exists \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$

Th: $\displaystyle\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ (continuità mediante incremento)

Operiamo sulla tesi:

$$\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} \left[h \left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right) + f(x_0) \right] = f(x_0) + \lim_{h\to 0} h \underbrace{\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \right)}_{\in \mathbb{R} \text{ poiché } f \text{ è derivabile in } x_0 \Rightarrow \text{ limite tende a } 0} = f(x_0) + 0 = f(x_0)$$

riccardo.polidoro.org

Derivate di ordine superiore al primo

Coincidono col limite del rapporto incrementale della derivata di ordine inferiore:

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \mathcal{D}^2 f \equiv y'' = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Esempio: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f'''(x) = \emptyset$

Derivata della somma / differenza di funzioni

Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni continue e derivabili.

$$\mathcal{D}\left(f(x) + g(x)\right) = \mathcal{D} f(x) + \mathcal{D} g(x)$$

analogamente, $\mathcal{D}\left(f(x) - g(x)\right) = \mathcal{D} f(x) - \mathcal{D} g(x)$

Esempio: $\mathcal{D}(3x + x^2) = \mathcal{D}(3x) + \mathcal{D}(x^2) = 3 + 2x$

Derivata del prodotto di funzioni

Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni continue e derivabili

$$\mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f(x))\, g(x) + f(x)\, \mathcal{D}(g(x))$$

⚠ In particolare, $\mathcal{D}(c \cdot f(x)) = c \cdot \mathcal{D}(f(x))$ con $c =$ cost

Derivata del quoziente (rapporto) di funzioni

Siano $f(x)$, $g(x)$ funzioni continue e derivabili, $g(x) \neq \emptyset$

$$\mathcal{D}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\mathcal{D}(f(x))\, g(x) - f(x)\, \mathcal{D}(g(x))}{[g(x)]^2}$$

Esempio: $\mathcal{D}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\emptyset x^2 - 1 \cdot \mathcal{D}(x^2)}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$

Derivate di alcune funzioni elementari

$\mathcal{D}(x^n)$ —— $n x^{n-1}$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathcal{D}(a^x)$ —— $a^x \log a$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\mathcal{D}(e^x)$ —— $e^x \log e = e^x$

(regola di derivazione di f. inverse)

$\mathcal{D}(\log_a x)$ —— $\frac{1}{x \log a}$

$\mathcal{D}(\sin x)$ —— $\cos x$

$\mathcal{D}(\cos x)$ —— $-\mathrm{sen}\, x$

$$\mathcal{D}(\mathrm{tg}\, x) = \mathcal{D}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$

$$\mathcal{D}(\sqrt[n]{x}) = \mathcal{D}(x^{1/n}) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n} - 1} = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$\mathcal{D}(\sqrt[n]{x^m}) = \mathcal{D}(x^{m/n}) = \frac{m}{n} x^{\frac{m}{n} - 1} = \frac{m}{n} x^{\frac{m-n}{n}} = \frac{m}{n} \cdot \frac{1}{x^{\frac{n-m}{n}}} = \frac{m}{n \sqrt[n]{x^{n-m}}}$$

$\mathcal{D}(\arcsin(x)) = 1 / \sqrt{1 - x^2}$

$\mathcal{D}(\arccos(x)) = -1 / \sqrt{1 - x^2}$

$\Rightarrow \mathcal{D}(\mathrm{arctg}(x)) = 1 / (1 + x^2)$

riccardo.polidoro.org

Regola di derivazione delle funzioni composte

Sia g derivabile in x, f derivabile in $g(x)$ $\Rightarrow f\circ g$ è derivabile in x

$$D(f\circ g(x)) = D(f(g(x)))\cdot D(g(x))$$

Si deriva f rispetto a $\underset{\text{argomento di } f}{g(x)}$ e $g(x)$ rispetto a x.

Esempi

- $D(\operatorname{sen} x^2) = 2x\cos x^2$

  $\hookrightarrow D(\operatorname{sen} x^2)\cdot D(x^2) = \cos x^2 \cdot 2x$

- $D(\operatorname{tg}(x-1)) = 1/\cos^2(x-1)$

  $\hookrightarrow D(\operatorname{tg}(x-1))\cdot D(x-1) = \dfrac{1}{\cos^2(x-1)}\cdot 1$

- $D(\operatorname{arctg}(e^{x-5})) = \dfrac{e^{x-5}}{1+(e^{x-5})^2}$

  $\hookrightarrow D(\operatorname{arctg}(e^{x-5}))\cdot D(e^{x-5}) = D(\operatorname{arctg}(e^{x-5}))\cdot D(e^{x-5})\cdot D(x-5) = \dfrac{1}{1+(e^{x-5})^2}\cdot e^{x-5}\cdot 1$

- $D(\log_3(\log(x^2-2))) = \dfrac{2x}{(x^2-2)\log(x^2-2)\cdot\log 3}$

  $\hookrightarrow \dfrac{1}{\log(x^2-2)\cdot\log 3}\cdot\dfrac{1}{x^2-2}\cdot 2x$

- $D(\operatorname{arcsen}(e^{x^2}+2x-5)) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(e^{x^2}+2x-5)^2}}\cdot D(e^{x^2}+2x-5) = \dfrac{2+e^{x^2}\cdot 2x}{\sqrt{1-(e^{x^2}+2x-5)^2}} = \dfrac{2(xe^{x^2}+1)}{\sqrt{1-(e^{x^2}+2x-5)^2}}$

- Supponendo f derivabile, sia $g(x) = f(\cos 2x)$

  $D(g(x)) = f'(\cos 2x)\cdot D(\cos 2x) = f'(\cos 2x)(-2\operatorname{sen} 2x)$

- Sia $x>0$. Calcolare $D(x^{1/x})$ e calcolarla in $x=\frac{1}{2}$

  ⚠: Né la base né l'esponente sono costanti $\Rightarrow$ si ricorre alla forma $e^{\log x^{1/x}}$, equivalente a $x^{1/x}$ $(x>0)$

  $D(x^{1/x}) = D\left(e^{\log x^{1/x}}\right) = D\left(e^{\frac{1}{x}\log x}\right) = e^{\frac{1}{x}\log x}\cdot D\left(\frac{1}{x}\log x\right) = e^{\frac{1}{x}\log x}\left(-\frac{\log x}{x^2}+\frac{1}{x\cdot x}\right) = e^{\frac{1}{x}\log x}\left(\frac{-\log(x)+1}{x^2}\right) =$

  $= \left(e^{\log x}\right)^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-\log(x)+1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{-\log(x)+1}{x^2}\right) = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\log x)$

  $f'(1/2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2-2}\left(1-\log\frac{1}{2}\right) = 1-\log\frac{1}{2} = 1+\log\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 1+\log 2$

- $D(x|x|+2x)$ in $x=0$?

  $D(x|x|)+2 = |x| + x\cdot\dfrac{|x|}{x}+2 \Rightarrow \nexists$ in 0

  Analogamente, $D(x(|x|+2)) = |x|+2+x\dfrac{|x|}{x} = 2|x|+2$ $\nexists$

- $D(\operatorname{arctg}(\log|e^x-\operatorname{sen}^2 x+1| - 5e^{\operatorname{tg} x})) =$

  $= \dfrac{1}{1+(\log|e^x-\operatorname{sen}^2x+1|-5e^{\operatorname{tg}x})^2}\left(\dfrac{1}{\cancel{|e^x-\operatorname{sen}^2x+1|}}\cdot\dfrac{\cancel{|e^x-\operatorname{sen}^2x+1|}}{e^x-\operatorname{sen}^2x+1}\left(e^x-\overset{D(\operatorname{sen}^2 x)}{\overbrace{2\operatorname{sen}x\cos x}}\right)-5e^{\operatorname{tg}x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)$

riccardo.polidoro.org

Regola di derivazione della funzione inversa

[derivabilità $\Rightarrow$ continuità (non viceversa)]

Sia $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua e strettamente monotona in $[a,b]$

Sia f derivabile in (a,b)

Se $f^{-1}(x) \neq 0$, f^{-1} è derivabile in $f(x) = y$;

$\mathcal{D}(f^{-1}(y)) =$

$$\mathcal{D}(f^{-1}(y)) = \frac{1}{\mathcal{D}(f(x))} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{f'(f^{-1}(x))}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Da ciò si ricavano le derivate di log, arcsen, etc.

Esempio

$\mathcal{D}(\log x)$ noto $\mathcal{D}(e^x) = e^x$, sia $f(x) = e^x \Rightarrow f^{-1}(y) = \log y \Rightarrow x = \log y$

$$\mathcal{D}(\log y) = \frac{1}{\mathcal{D}(e^x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{e^{\log y}} = \frac{1}{y}$$

Esercizi

① Determinare h, k tale che la seguente funzione sia continua e derivabile in $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 4\,\mathrm{arctg}\,x & \text{per } x < 1 \\ 2hx + k & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

f continua $\Leftrightarrow \lim_{x\to1^+} 2hx + k = \lim_{x\to1^-} 4\,\mathrm{arctg}\,x = 2 + k$; $\frac{4\pi}{4} = 2 + k$; $k = \pi - 2$

⚠: Per determinare l'esistenza della derivata, bisogna calcolare il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale; imporre la continuità della derivata non implica necessariamente la sua esistenza!

$$\lim_{\bar{h}\to0^+} \frac{f(1+\bar{h}) - f(\bar{h})}{\bar{h}} = \lim_{\bar{h}\to0^+} \frac{2h(1+\bar{h}) - 2h\bar{h}}{\bar{h}} = \lim_{\bar{h}\to0^+} \frac{2h}{\bar{h}} = \boxed{+\infty} \Rightarrow$$ f non è mai derivabile in $\mathbb{R}$

② Sia $f(x) = \sqrt{x^2+1}\,(x + \mathrm{sen}(\pi x))$. Calcolare $f'(1)$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x\,(x + \mathrm{sen}(\pi x)) + \sqrt{x^2+1}\,(1 + \cos(\pi x)\cdot\pi)$$

$$f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + \mathrm{sen}\,\pi) + \sqrt{2}\,(1 + \pi\cos\pi) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,(1-\pi)$$

③ Supposta la seguente $f(x)$ derivabile in tutto $\mathbb{R}$, calcolarne la derivata:

$$f(x) = (\log^2 x + 5\log x - 3)^{-1}$$

$$f'(x) = \frac{-\left(\frac{2\log x}{x} + \frac{5}{x}\right)}{(\log^2 x + 5\log x - 3)^2}$$

Il calcolo delle C.E. è lasciato come esercizio.

Si ricorda che:
$\log^2 x = (\log x)^2$
$f'(\log^2 x) = 2\log x \cdot \frac{1}{x}$

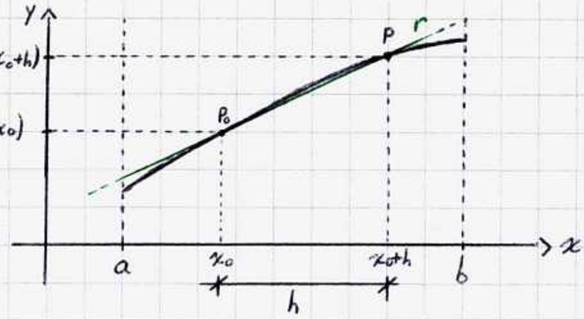
riccardo.polidoro.org

Significato geometrico della derivata prima

Sia $G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}$

$P \in G_f,\ P = (x_0+h,\ f(x_0+h))$

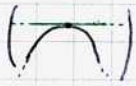
$P_0 \in G_f,\ P_0 = (x_0, f(x_0))$



Per costruzione, $r: y = f(x_0) + \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}(x - x_0)$ retta secante congiungente P e P_0

Con $h \to 0$, la retta secante P_0P diventa tangente; dunque il coefficiente angolare della secante "diventa" uguale a quello della tangente al grafico nel punto P_0, il quale coincide con la **derivata prima** di f nel punto x_0.

$$r: y = f(x_0) + [f'(x_0)] \cdot (x - x_0)$$ equazione della retta tangente al grafico della funzione nel punto P_0

Se $f'(x_0) = 0$, la retta tangente al grafico nel punto x_0 è parallela all'asse x ()

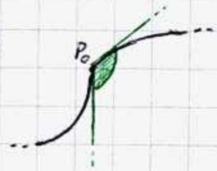
Se invece $f'(x_0) = \pm\infty$, la retta tangente al grafico nel punto x_0 è parallela all'asse y ($r: x = x_0$; )

Punti di non derivabilità di una funzione

Sia f continua in x_0 ma non derivabile nel punto; allora x_0 è un punto di non derivabilità. Si distinguono 3 casi:

Caso 1: $\exists f'_+(x_0),\ f'_-(x_0);\ f'_+(x_0) \vee f'_-(x_0) \in \mathbb{R},\ f'_+(x_0) \neq f'_-(x_0)$

Il punto P_0 è detto **punto angoloso**

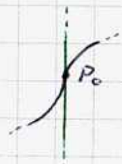


Caso 2: $\exists f'_+(x_0),\ f'_-(x_0)$ distinte e infinite

Il punto P_0 è detto **cuspide** o **punto cuspidale**

Caso 3: $\exists f'_+(x_0),\ f'_-(x_0)$ infinite e concordi

Il punto P_0 è detto **flesso a tangente verticale**



Esercizio

Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $x = 1$ ⚠: Esercizio da Compito

$f(x) = \cos^2(\pi x^2) + x^2$

$$f'(x) = 2\cos(\pi x^2)\cdot(-\operatorname{sen}(\pi x^2)\cdot 2\pi x + 2x$$

$y = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) = f(1) + f'(1)\cdot(x-1) \implies y = 2 + 2(x-1) \implies y = 2x$

riccardo.polidoro.org

Esercizio

Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definita da $f(x)=x+e^x$, sia f^{-1} la relativa inversa.

Calcolare la retta tangente al grafico di f^{-1} nel punto $(1,0)$.

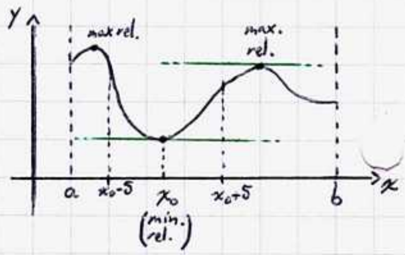
Si ricordi che $(1,0)\equiv(y_0, f^{-1}(y_0))$

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \cancel{\frac{1}{f'(x)}} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(\underbrace{f^{-1}(y_0)}_{\text{è un PUNTO}})} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$$

$$r:\ x = f^{-1}(y_0) + \left(f^{-1}(y_0)\right)'(y-y_0);\qquad x = 0+\frac{1}{2}(y-1) \Rightarrow x=\frac{1}{2}y-\frac{1}{2} \Rightarrow x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y \Rightarrow \boxed{y=2x+1}$$

Estremi Relativi



Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$x_0\in[a,b]$ è un punto di minimo relativo per f se $\exists\, I(x_0): f(x)\geq f(x_0)\ \forall x\in I(x_0)$
$\exists\, \delta>0: f(x)\geq f(x_0)\ \forall x: |x-x_0|<\delta$

⚠ $\exists$ più min/max rel, $\exists!$ max/min ASS.

Analogamente, $x_0\in[a,b]$ è un punto di massimo relativo se $\exists\, I(x_0): f(x)\leq f(x_0)\ \forall x\in I(x_0)$
$\exists\, \delta>0: f(x)\leq f(x_0)\ \forall x: |x-x_0|<\delta$

Se un punto è di minimo assoluto [massimo assoluto] ed è interno ad $[a,b]$, esso è anche un estremo relativo (non vale il viceversa)
Si osserva inoltre che nei punti di minimo [massimo] relativo la derivata prima è uguale a 0.

Teorema di Fermat

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a,b) e sia x_0 un punto di massimo [minimo] relativo interno ad (a,b).
Allora, necessariamente:

$$f'(x_0)=0$$

Non vale il viceversa

Dim Supponiamo che x_0 sia un punto di minimo relativo (dim. analoga per il max. rel.). Allora:

x_0 minimo relativo $\overset{\text{def}}{\Longrightarrow} \exists\, I(x_0): f(x)\geq f(x_0)\ \forall x\in I(x_0) \Longleftrightarrow \exists\,\delta>0: f(x)\geq f(x_0)\ \forall x: x_0-\delta<x<x_0+\delta$

Valutiamo $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \begin{cases} >0 \text{ se } h>0 & \text{num}>0,\ \text{den}>0 \\ <0 \text{ se } h<0 & \text{num}>0,\ \text{den}<0 \end{cases}$ Essendo f derivabile per ipotesi, $\lim_{h\to0^+}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to0^-}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Per il corollario del teorema della permanenza del segno, $f'_-(x_0)\leq 0$ e $f'_+(x_0)\geq 0$

Essendo f derivabile, segue che $f'(x_0)=0$

Si noti che tale teorema offre una condizione necessaria MA non sufficiente: si analizzi ad esempio il punto $x_0=0$ della $f(x)=x^3$: esso ha $f'(x_0)=0$ ma non è un estremo relativo. A tal proposito risulterà invece utile studiare la crescenza/decrescenza della funzione (studio della positività di $f'(x)$).

riccardo.polidoro.org

La ricerca di minimi e massimi assoluti di una funzione è di vitale importanza per tracciare un grafico approssimativo delle funzioni.

I punti critici vanno ricercati nei seguenti punti: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, derivabile in (a,b) \ punti non deriv

1. $x_0 \in (a,b)$ tali che $f'(x_0)=0$ — T. Fermat
2. $x_0 = a$, $x_0 = b$ — confronta con 1
3. $x_0 \in (a,b)$ e f non è derivabile in x_0 — confronta con 1, 2

Si ricorda che:
"Punto" di minimo $\Rightarrow x$
"minimo" $\Rightarrow y$

In seguito al confronto, il punto di ordinata maggiore [minore] coinciderà col massimo [minimo] assoluto della funzione.

Esercizio Sia $f:[-2,2]\to\mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{|x-1|}{\sqrt{x^2+1}}$$

C.E. $= X = \mathbb{R}\cap[-2,2]=[-2,2]$

f è continua in $[-2,2]$ (rapporto di polinomi) $\xRightarrow{\text{Weierstrass}}$ ammette minimo e massimo assoluti.

Studiamo $f'(x)$:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & \text{se } x\geq 1 \\ 1-x & \text{se } x<1 \end{cases}$$

$$f'(x)=\begin{cases} f'\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}\right) & 1\leq x\leq 2 \\ f'\left(\frac{1-x}{\sqrt{x^2+1}}\right) & -2\leq x<1 \end{cases} ; \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-(x-1)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+1} & \text{se } 1\leq x\leq 2 \\ \dfrac{-\sqrt{x^2+1}-(1-x)\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}\cdot\cancel{2}x}{x^2+1} & \text{se } -2\leq x<1 \end{cases};$$

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+1-x^2+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & \text{se } 1\leq x\leq 2 \\ \dfrac{-(x^2+1)-x+x^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & \text{se } -2\leq x<1 \end{cases} ; \quad f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1+x}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & \text{se } 1\leq x\leq 2 \\ -\dfrac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}} & \text{se } -2\leq x<1 \end{cases}$$

f è derivabile $\forall x\in(-2,2)\setminus\{1\}$

$$f'(x)=0 \iff \frac{x+1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}=0 \Rightarrow x=-1 \in X$$

possibile candidato min/max $\Rightarrow f(-1)=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Valutiamo la funzione agli estremi dell'intervallo:

$$f(-2)=\frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{3}{5}\sqrt{5} \quad ; \quad f(2)=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

Valutiamo la funzione nel punto di non derivabilità:

$$f(1)=0$$

Confrontando, si osserva che $0<\frac{\sqrt{5}}{5}<\frac{3}{5}\sqrt{5}<\sqrt{2}$

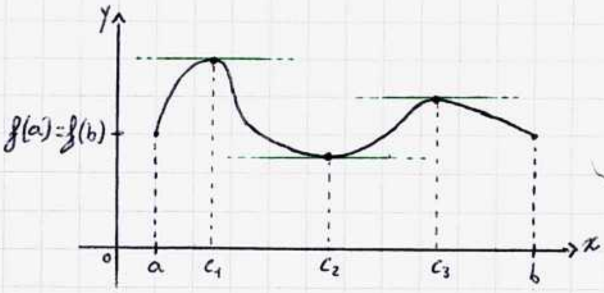
Dunque, $x=-1$ è il punto di massimo assoluto (poiché $f(-1)=\sqrt{2}$ è il massimo assoluto)

$x=1$ è il punto di minimo assoluto (poiché $f(1)=0$ è il minimo assoluto)

riccardo.polidoro.org

Teoremi sul Calcolo Differenziale

Teorema di Rolle



Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b).

Se, inoltre, $f(a)=f(b)$, allora $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$

Per il teorema di Weierstrass, $\exists x_1, x_2 \in[a,b]: f(x_1)\le f(x), f(x_2)\ge f(x) \quad \forall x\in[a,b]$

<u>Caso 1</u>: $x_1 \vee x_2 \in (a,b)$

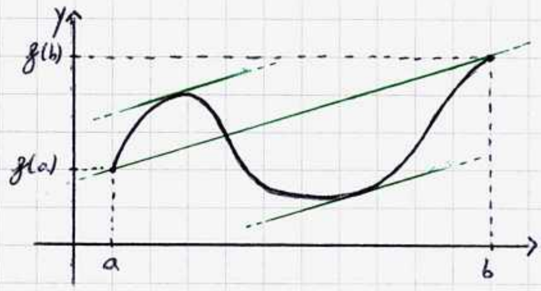
Per il teorema di Fermat, $f'(x_1)\vee f'(x_2)=0$ $\square$

<u>Caso 2</u>: $x_1=a,\ x_2=b$ o viceversa

$f(a)\le f(x)\le f(b)\ \forall x\in[a,b]$ ma, per ipotesi, $f(a)=f(b)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$

La funzione è costante $\Rightarrow f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$ $\square$

Teorema di Lagrange



Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Allora, $\exists c\in(a,b): f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

in particolare, se $f(a)=f(b)$ ottieni il t. di Rolle

$\boxed{\text{Dimostrazione}}$

Consideriamo la funzione ausiliaria $g(x)=f(x)-\Big[\overbrace{\underbrace{f(a)}_{\text{costante}}+\underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}_{\text{costante}}\underbrace{(x-a)}_{\text{polinomio di I grado}}}^{\text{equazione della retta passante per AB}}\Big]$ $g(x)$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

Analizziamo g agli estremi:

$$\left.\begin{aligned} g(a) &= f(a)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}\cdot(a-a)\right]=f(a)-f(a)=0 \\ g(b) &= f(b)-\left[f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{\cancel{(b-a)}}\cancel{(b-a)}\right]=f(b)-f(a)-f(b)+f(a)=0 \end{aligned}\right]\Rightarrow g(a)=g(b)$$

Per il teorema di Rolle, $\exists c\in(a,b): g'(c)=0$; analizziamo $g'(x)$ e, di conseguenza, $g'(c)$:

$g'(x)=f'(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$; (riferirsi a quanto specificato in verde nella definizione di $g(x)$)

$$g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\overset{\text{Rolle}}{=}0 \Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \square$$

riccardo.polidoro.org

Teorema di Cauchy

Siano f, g continue in $[a,b]$ e derivabili in (a,b).

Se risulta che $g(b) \neq g(a)$ e se f' e g' non sono entrambe nulle in uno stesso punto, allora:

$$\exists c \in (a,b): \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}}_{\substack{g(b)\neq g(a) \\ \text{per } H_p}} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$ non nulle in uno stesso punto per H_p

$\boxed{\text{Non dim.}}$

In particolare, se $g(x)=x$ si ottiene il T di Lagrange

Criterio di Monotonia (applicazione del T di Lagrange)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b):

① $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ è crescente in $[a,b]$

② $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b) \iff f$ è decrescente in $[a,b]$

Dim ① (Analogo per 2)

($\Rightarrow$) H_p: $f' \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$ $\qquad$ T_h: $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, $f(x_1) \leq f(x_2)$

Consideriamo l'intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a,b) \Rightarrow$ valgono le ipotesi di $[a,b]$ su $[x_1, x_2]$

Applichiamo Lagrange a f ristretta all'intervallo $[x_1, x_2]$:

$$\exists x_0 \in (x_1, x_2): f'(x_0) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \iff \underbrace{f'(x_0)}_{\geq 0 \text{ per } H_p}\underbrace{(x_2-x_1)}_{>0} = \underbrace{f(x_2)-f(x_1)}_{\geq 0} \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \quad \square$$

($\Leftarrow$) H_p: $f(x)$ crescente $\qquad$ T_h: $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$

Consideriamo $x \in (a,b)$; $h > 0$, $x+h \in (a,b)$; $\quad x < x+h \overset{H_p}{\Longrightarrow} f(x) \leq f(x+h)$

Valutiamo $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$: $h>0$, numeratore $\geq 0 \Rightarrow$ rapporto ≥ 0

Consideriamo ora $x \in (a,b)$: $h<0$, $x+h \in (a,b)$; $\quad x+h < x \Rightarrow f(x+h) \leq f(x)$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$ (≤ 0 numeratore, < 0 denominatore)

Per il corollario del teorema della permanenza del segno (il limite esiste poiché f è derivabile per H_p),

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0 \quad \square$$

Criterio di Stretta Monotonia

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)

$\boxed{\text{Dim analoga a crit monotonia}}$

① $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ è strettamente crescente in $[a,b]$

② $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a,b) \Longrightarrow f$ è strettamente decrescente in $[a,b]$

Non vale il viceversa!

riccardo.polidoro.org

Esercizio

Studio approssimativo del grafico di una funzione sfruttando il criterio di monotonia

$$f(x) = \log x + |x^2 - 3x + 2|$$

Procedimento

- Individuare il C.E. $= X$
- Calcolare i limiti agli estremi aperti dell'intervallo (punti di acc. notevoli)
- Valutare e studiare la derivata prima della funzione
- Valutare la crescenza della f applicando il criterio di monotonia

$X = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2-3x+2}{|x^2-3x+2|}(2x-3)$$

f' è derivabile $\iff \begin{cases} x \neq 0 & \text{condizione inclusa in } X \\ x^2-3x+2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1, x \neq 2 \end{cases}$

$\boxed{x=1,\ x=2 \quad \text{Punti di non derivabilità}}$

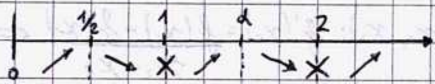
$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + 2x - 3 & \text{se } x \in (0,1) \cup (2,+\infty) \\ \frac{1}{x} - 2x + 3 & \text{se } x \in (1,2) \end{cases}$$

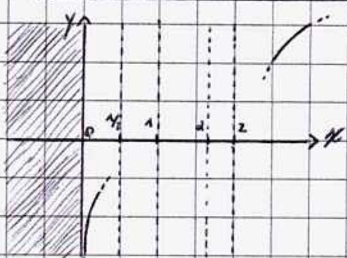
Valutiamo la derivata in questi due sottoinsiemi di X:

$$f'(x) \geq 0 \text{ con } x \in (0,1) \cup (2,+\infty) \iff \frac{1+2x^2-3x}{\underbrace{x}_{>0 \text{ per C.E.}}} \geq 0 \iff 1+2x^2-3x \geq 0 \Rightarrow 0 \leq x \leq \tfrac{1}{2} \cup x > 2$$

$$f'(x) \geq 0 \text{ con } x \in (1,2) \iff \frac{2x^2-3x-1}{x} \leq 0 \iff 2x^2-3x-1 \leq 0 \Rightarrow \frac{3-\sqrt{17}}{4} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{17}}{4} \cap x \in (1,2) \Rightarrow 1 < x \leq \overbrace{\frac{3+\sqrt{17}}{4}}^{\alpha} = \alpha$$

$\boxed{\text{Dunque, } x = \tfrac{1}{2},\ x = \alpha \text{ sono dei punti di massimo relativo}}$





Caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è costante in $[a,b] \iff f$ è derivabile in $[a,b]$ e $f'(x) = 0 \ \forall x \in [a,b]$

Dimostrazione:

($\Rightarrow$) Segue dalla definizione di derivata di funzione costante

($\Leftarrow$) Segue dall'applicazione del criterio di monotonia ($f'(x) = 0 \Rightarrow f$ crescente $\cap$ decrescente $\Rightarrow$ costante)

Primo [Secondo] Teorema di de l'Hôpital

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e $g: X \to \mathbb{R}$, con $X = (a, x_0)$ oppure $X = (x_0, b)$ <eventualmente, $a = -\infty$, $b = +\infty$; idem per x_0>

Se $g'(x) \neq 0$ e f e g sono derivabili e risulta $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ allora:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

riccardo.polidoro.org

Applicazioni dei Teoremi di de l'Hôpital

- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + x - \cos x}{x^2+x} = \frac{0}{0}$ ma derivabili $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+1+\operatorname{sen}x}{2x+1} = 2$

- $\lim_{x\to 0} x\log x^2 = \lim_{x\to 0}\frac{\log x^2}{1/x} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2/x}{-1/x^2} = 0$

- $\lim_{x\to 0}\frac{\log(\operatorname{sen}x)}{\log(\operatorname{tg}x)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\operatorname{sen}x}\cdot\cos x}{\frac{1}{\operatorname{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x\to 0}\cos^2 x = 1$

⚠: Può esistere il limite di f/g e non esistere il limite di f'/g', come nel seguente esempio:

- $f(x) = x^2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$; $g(x) = x$

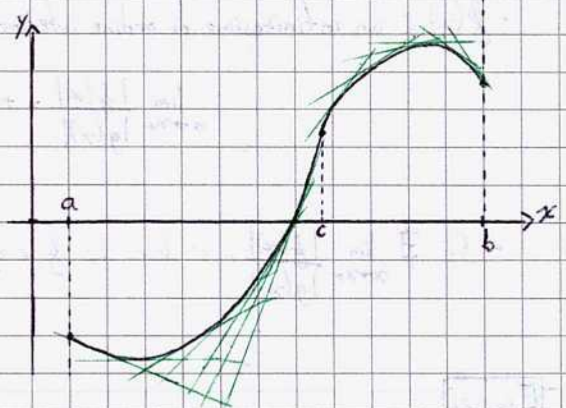
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{\cancel{2}}\cos(1/x)}{\cancel{x}} = \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$ (f limitata moltiplicata per f infinitesima)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0} 2x\cos\left(\frac{1}{x}\right) + \cancel{x^2}\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{\cancel{x^2}}\right) \quad \nexists$$

Concavità e Convessità di una funzione

Una funzione si dice **convessa [concava]** in un determinato intervallo $[a,c]$ $[[c,b]]$ se il grafico della funzione in quell'intervallo risulta essere al di sopra [al di sotto] della retta tangente al grafico in ogni punto dell'intervallo.

Il punto "di passaggio" da concavità a convessità (e viceversa) della funzione si dice **punto di flesso**:



$$f \text{ convessa in } [a,c] \;[\text{concava}]\;[[c,b]] \iff \begin{cases} f(x) \underset{[\leq]}{\geq} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) \\ \forall x\in[a,c]\;[[c,b]],\ \forall x_0\in(a,c)\;[(c,b)] \end{cases}$$

Criterio di Convessità e di Concavità

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, sia f derivabile due volte in (a,b). Sono equivalenti:

• f è convessa in $[a,b]$	• f è concava in $[a,b]$
• $f''(x)\geq 0 \ \forall x\in(a,b)$	• $f''(x)\leq 0 \ \forall x\in(a,b)$
• $f'(x)$ è crescente in $[a,b]$	• $f'(x)$ è decrescente in $[a,b]$

Anche se non dimostrato, si osservi che per dimostrare le ultime due condizioni è sufficiente applicare il criterio di monotonia a f'

① Complementi ai limiti di funzione

Infinitesimi e Ordini di Infinitesimo

Ⓐ Limiti Notevoli

- $\forall \alpha\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{\alpha}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+\alpha x)^{1/x} = e^\alpha$
- $\forall \alpha\in\mathbb{R},\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$
- $\forall \alpha\in(0,+\infty),\ \lim_{x\to 0}\frac{\alpha^x-1}{x} = \log\alpha$; $\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$

riccardo.polidoro.org

Infinitesimi e Ordini di Infinitesimo

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto di accumulazione per X. Si dice che f è infinitesima nel punto x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

Definizione: Siano $f, g : X \to \mathbb{R}$ due funzioni infinitesime in x_0 e supponiamo che esista un intorno $I \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che $f(x) \neq 0$ e $g(x) \neq 0$ $\forall x \in I \cap X \setminus \{x_0\}$. Diciamo che:

- f e g sono infinitesimi dello stesso ordine in x_0 se esiste:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = l > 0$$

- $f(x)$ è un infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$ in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0$$

Si dice anche che $f(x)$ è un "o piccolo" di $g(x)$, e si scrive: $f(x) = o(g(x))$

- $f(x)$ è un infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$ in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = +\infty$$

- Se $\nexists \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|}$, si dice che f e g non sono confrontabili.

Esempi

① $\sin x$ e x sono infinitesimi dello stesso ordine, infatti $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (per $x \to 0$)

② Per $x \to 0$, $1 - \cos(x) = o(x)$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x(1+\cos^2 x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x \cdot x}{x^2(1+\cos x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{(1+\cos x)} = 0$$

③ $\operatorname{arctg}(x^3) = o(x^2)$ per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg}(x^3)}{x^3} \cdot x = \lim_{x \to 0} x = 0$$

moltiplico e divido per x in modo tale da poter applicare il limite notevole.

④ $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x$, $g(x) = x$ non sono confrontabili per $x \to 0$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \nexists$$

riccardo.polidoro.org

Definizione: Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Si dice che:

- f è un infinitesimo di ordine α in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} = l > 0$$

- f è un infinitesimo di ordine superiore ad α in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} = 0$$

- f è un infinitesimo di ordine inferiore ad α in x_0 se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|x-x_0|^\alpha} = +\infty$$

Esempi

$\sin x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 1

$1-\cos x$ è un infinitesimo per $x \to 0$ di ordine 2 $\left(\text{poiché } \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$

Proprietà algebriche di o piccolo

Supponiamo: $f_1 = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $f_2 = o(g(x))$ per $x \to x_0$.

- $f_1(x) + f_2(x) = o(g(x))$; $\quad o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$ (idem per la differenza)

  Dim: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)+f_2(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} + \lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0$

- $a \cdot f_1(x) = o(g(x))$; $\quad a \cdot o(g(x)) = o(g(x)) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

  Dim: $\lim_{x \to x_0} \frac{a \cdot f_1(x)}{g(x)} = a \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} = a \cdot 0 = 0$

- $f_1(x) \cdot f_2(x) = o(g^2(x))$; $\quad o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$

  Dim: $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x) \cdot f_2(x)}{g^2(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)} \cdot \frac{f_2(x)}{g(x)} = 0$ Non vi sono forme indeterminate per Hp.

- Non si può dire nulla a priori per quanto concerne il rapporto (IND)

Transitività di o piccolo

Se $f(x) = o(g(x))$ per $x \to x_0$ e $g(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$, allora: $f(x) = o(h(x))$ per $x \to x_0$.

Dim: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{h(x)} = 0$

Altre Proprietà

$o(g_1 + g_2) = o(g_1) + o(g_2)$

$o(a(g)) = o(g)$

Esempi

- $\sin x^2 = o(x)$ per $x \to 0$ $\left(\lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x^2}{x^2} \cdot x = \lim_{x \to 0} x = 0\right)$
- $x = o(\sqrt{x})$ per $x \to 0^+$ $\left(\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0\right)$

Per la transitività, $\sin(x^2) = o(\sqrt{x})$ per $x \to 0^+$

riccardo.polidoro.org

Sviluppi per $x \to 0$

- $\sin x = x + o(x)$
- $tg(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 + o(x)$
- $e^x = 1 + x + o(x)$
- $arctg(x) = x + o(x)$
- $arcsin(x) = x + o(x)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2)$
- $\log(1+x) = x + o(x)$

Dimostriamo il primo sviluppo (gli altri si dimostrano sfruttando i limiti notevoli)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} - 1 = 0$$

Il limite si applica dopo aver fatto la seguente considerazione:

$$\sin x = x + o(x) \iff \sin x - x = o(x)$$

Esempio: Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{2x + 3arctg x}$ forma indeterminata $0/0$

Sfruttiamo gli sviluppi al primo ordine per $x \to 0$: $e^x = 1 + x + o(x)$; $\cos(x) = 1 + o(x)$; $arctg(x) = x + o(x)$

Al Numeratore: $\cancel{1} + x + o(x) - \cancel{1} - o(x) = x + o(x)$

Al Denominatore: $2x + 3(x + o(x)) = 2x + 3x + o(x) = 5x + o(x)$

Ricomponendo la frazione: $\lim_{x\to 0} \frac{x + o(x)}{5x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(5 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \frac{1}{5}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x) + 3tg x}{arcsen(7x) + 2arctg x} =$$

Sfruttiamo gli sviluppi: $sen x = x + o(x) \Rightarrow sen(2x) = 2x + o(x)$
$arcsen x = x + o(x) \Rightarrow arcsen(7x) = 7x + o(x)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2x + o(x) + 3x + o(x)}{7x + o(x) + 2x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{5x + o(x)}{9x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(5 + \frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(9 + \frac{o(x)}{x}\right)} = 5/9$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{arctg x + 3sen x}{e^x - 1 + 2arcsen x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x + o(x) + 3x + o(x)}{x + o(x) + 2x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{4x + o(x)}{3x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(4 + \frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(3 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \frac{4}{3}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x^2) + 3tg x}{arcsen(7x) + 2arctg(x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{3x + o(x)}{7x + o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x\left(3 + \frac{o(x)}{x}\right)}{x\left(7 + \frac{o(x)}{x}\right)} = \frac{3}{7}$$

Valutiamo $sen(2x^2)$, sapendo che $sen x = x + o(x)$

$sen(2x^2) = 2x^2 + o(x^2) =$
$= o(x) + o(o(x)) \Rightarrow$
$\Rightarrow sen(2x^2) = o(x)$

dobbiamo rapportare $o(x^2)$ a x, per confrontare con gli altri argomenti delle f
Si osserva che $x^2 = o(x)$.

Analogamente per $arctg(x^2)$

riccardo.polidoro.org

Dagli esercizi precedenti è intuibile che è possibile approssimare funzioni non lineari con funzioni polinomiali, con un "errore" di $o(x)$. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione:

Siano f, f_1 e g, g_1 infinitesimi in x_0, e sia:

$$f_1(x) = o(f(x)), \quad g_1(x) = o(g(x))$$

Allora, se esiste il limite di uno dei due rapporti seguenti per $x \to x_0$:

$$\frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} \quad ; \quad \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

Esiste anche il limite dell'altro rapporto e, in particolare:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)+f_1(x)}{g(x)+g_1(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

"gli ordini inferiori di infinitesimo si elidono"

⚠ Spesso, la somma/differenza di infinitesimi dello stesso ordine CAMBIA l'ordine:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - tg\, x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x\left(1-\frac{1}{\cos x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x -1)}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\cos x-1}{\cos x} = 0$$

$\sin x - tg\, x$ è un infinitesimo di ordine superiore a x, infatti:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - tg\, x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x(\cos x-1)}{x^3\cos x} = -\frac{1}{2} \implies \text{è un infinitesimo di ordine } 3!$$

La Formula di Taylor

Detta formula è alla base di un metodo di carattere locale per risolvere l'approssimazione di una funzione mediante polinomi.

Per semplicità, inizieremo lo studio della formula partendo dall'ipotesi $x_0 = 0$.

Sia $f(x)$ una funzione e sia $n \in \mathbb{N}$ (fissato)

Se si verificano le seguenti ipotesi:
- f derivabile almeno $(n-1)$ volte in tutto l'intervallo
- f derivabile n volte nel punto $x_0 = 0$

Allora esiste un unico polinomio $P_n(x)$, di grado minore o uguale ad n, tale che:

$$f(x) = P_n(x) + o(x^n) \qquad \text{per } x \to 0$$

Inoltre, $P_n(x)$ è dato dalla seguente formula:

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\overbrace{f^{(k)}}^{\text{derivata } k\text{-ma}}(0)}{k!}x^k$$

Dunque, è possibile approssimare $f(x)$ con $P_n(x)$ commettendo un errore dato da $o(x^n)$. Questa operazione si rivela utile nel calcolo di limiti per $x \to 0$.

riccardo.polidoro.org

La formula $f(x) = P_n(x) + o(x^n)$ è detta Formula di Taylor con resto di Peano; il resto è scritto sotto forma di o piccolo:

$$f(x) - P_n(x) = \underbrace{o(x^n)}$$ Resto, ovvero l'errore di approssimazione commesso sostituendo $P_n(x)$ a $f(x)$.

Per dimostrare la validità della ~~sua~~ formula, sfruttiamo il seguente lemma:

Lemma

Sia $\varphi(x)$ una funzione tale che:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \dots = \varphi^{(n)}(0) = 0$$

Ovvero una funzione che si annulla in $x_0 = 0$ insieme a tutte le sue derivate fino all'ordine n.

Allora, $\varphi(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$

Dimostriamo il lemma nel caso $n = 3$

Sfruttando la definizione di o piccolo, basta dimostrare che:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^3} = 0$$

Applicando de l'Hôpital tre volte:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi'(x)}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi''(x)}{6x} = \lim_{x \to 0} \frac{\varphi'''(x)}{6} = 0$$ poiché $\varphi'''(x) = 0$ per ipotesi $\square$

Sfruttando la dimostrazione del lemma, operiamo la dimostrazione della formula di Taylor nel caso $n=3$:

Bisogna dimostrare che $f(x) = P_3(x) + o(x^3)$ per $x \to 0$, ovvero che $f(x) - P_3(x) = o(x^3)$.

Poniamo $\varphi(x) = f(x) - P_3(x)$

e tentiamo di sfruttare il lemma, ovvero a verificare che $\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(0) = \varphi'''(0) = 0$.

In questo caso, $\varphi(x) = f(x) - P_3(x) = f(x) - f(0) - \frac{f'(0)}{1!}x - \frac{f''(0)}{2!}x^2 - \frac{f'''(0)}{3!}x^3$

Dunque, $\varphi(0) = f(0) - f(0) = 0$ sostituiamo 0 alla x

Calcoliamo: $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f'(0)}{1!} - \frac{f''(0) \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{3}f'''(0) \cdot x^2}{\cancel{3} \cdot 2} = f'(x) - \overbrace{f'(0)}^{\in \mathbb{R}} - \underbrace{f''(0)x} - \underbrace{\frac{f'''(0)}{2}x^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi'(0) = f'(0) - f'(0) = 0$

$\cdot\ \varphi''(x) = f''(x) - \underbrace{f''(0)}_{\in \mathbb{R}} - f'''(0)x \Longrightarrow \varphi''(0) = f''(0) - f''(0) = 0$

$\cdot\ \varphi'''(x) = f'''(x) - f'''(0) \Longrightarrow \varphi'''(0) = 0$ $\square$

⚠ Si nota che i membri di grado superiore a quello considerato non vanno valutati

Nel caso generale $n \in \mathbb{N}$, si pone $\varphi(x) = f(x) - P_n(x)$ e si deriva n volte

riccardopolidoro.org

Più in generale, vale la seguente Proposizione:

Proposizione: Sia $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ (con $a,b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$) una funzione derivabile $n-1$ volte in (a,b) ed n volte in $x_0 \in (a,b)$.
Allora, esiste un unico polinomio $P_n(x)$ di grado n in x tale che:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

In particolare, risulta:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

P_n è detto "Polinomio di Taylor di f di grado n e punto iniziale x_0".

Di conseguenza, detto $E_n(x) = f(x) - P_n(x)$ l'errore di approssimazione commesso approssimando f con P_n, risulta:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{E_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Ciò implica che E_n è un infinitesimo di ordine superiore ad n per $x \to x_0$.
Indichiamo dunque $E_n(x) = o((x-x_0)^n)$

Dunque è possibile riscrivere la relazione individuata dal limite (vedi la proposizione) come segue:

$$f(x) = P_n(x) + o((x-x_0)^n)$$
$$= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

Quest'ultima identità è nota come **Formula di Taylor di f di ordine n, punto iniziale x_0 e resto di Peano.**

Esempi

Formula di T. ordine n, punto iniz. x_0 e resto Peano delle seguenti f:

- $f(x) = e^x$

e^x è indefinitamente derivabile; $f^{(k)}(e^x) = e^x \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(0) = 1$, dunque:

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + o(x^n)$$

- $f(x) = \sin x$

$\sin x$ è indefinitamente derivabile, e $f'(x) = \cos x$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$; ...

Ne segue che $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k-1)}(0) = (-1)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$

Di conseguenza, $\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}x^{2k-1} + o(x^{2k})$

Oss: La presenza di sole potenze dispari riflette il fatto che $f(x)$ è dispari

- $f(x) = \cos x$

$\cos x$ è indefinitamente derivabile, e $f'(x) = -\sin x$; $f''(x) = -\cos x$; $f'''(x) = \sin x$; $f^{(4)}(x) = \cos x$; ...

Ne segue che $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k-1)}(0) = 0 \ \forall k \in \mathbb{N}$

Di conseguenza, $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 + \ldots + \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} + o(x^{2k+1})$

Oss: La presenza di sole potenze pari riflette il fatto che $f(x)$ è pari.

riccardo.polidoro.org

Tabella degli Sviluppi Notevoli

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

- $\mathrm{tg}(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + o(x^8)$

- $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o(x^n)$

- $\mathrm{arcsen}\, x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \dots + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

- $\arccos x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40} x^5 - \dots - \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

- $\mathrm{arctg}\, x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$

- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n} x^n + o(x^n)$ con $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}$ ⚠

Esempi

- $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!} x^n + o(x^n)$ $(n \geq 1)$

- $\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8} x^2 - \frac{15}{48} x^3 + \dots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^n + o(x^n)$

Osservazioni ed esempi

- Dallo sviluppo di Taylor di e^x di punto iniziale $\emptyset$ possiamo ricavare lo sviluppo di Taylor di $e^{g(x)}$, supponendo che $g(x) \to \emptyset$ per $x \to \emptyset$.
  Ad esempio, dallo sviluppo di e^x (in questa pagina) ricaviamo:

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!} + o(x^{2n})$$

- Analogamente,
  - $\log(1+2x) = 2x - 2x^2 + \frac{8}{3} x^3 + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} (2x)^n + o(x^n)$
  - $\cos\sqrt{x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4!} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{(2n)!} x^n + o(x^n)$

riccardo.polidoro.org

⚠ $e^{\underset{\downarrow}{2x+3}}$

non tende a $\emptyset$ per $x \to \emptyset$ $\Rightarrow e^{2x+3} = e^{2x}\cdot e^3 = e^3\left(1+2x+\frac{(2x)^2}{2}+o((2x)^2)\right) = (1+2x+2x^2+o(x^2))\,e^3$

Esempio

ordine 2, punto iniziale $\emptyset$ e resto di Peano di:

$$f(x) = e^{3x}\sqrt{1+2x} \qquad e^{3x} = 1+3x+\tfrac{9}{2}x^2+o(x^2)$$

$$\sqrt{1+2x} = 1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$

$$f(x) = \left(1+3x+\frac{9}{2}x^2+o(x^2)\right)\left(1+x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = 1+4x+7x^2+o(x^2)$$

Osservazione: Essendo richiesto l'ordine 2, i prodotti che determinano un ordine superiore a 2 non sono richiesti, in quanto P_n è un polinomio di grado ≤ 2

Calcolo di Limiti

- $\lim_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)-\log(1-x)-2x}{e^x-\cos x-x} = \emptyset$

Infatti: $$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)-\log(1-x)-2x}{e^x-\cos x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)-\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+o(x^3)-2x\right)}{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{3}x^3+o(x^3)}{x^2+o(x^2)} = \emptyset$$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\sin(x^2)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$

Infatti: $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\sin(x^2)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x-x^2+\frac{x^6}{6}+o(x^6)}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

- $\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}^2 x - x\sin x}{x^4} = -\dfrac{1}{2}$

Infatti: $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}^2 x-x\sin x}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(x-\frac{x^3}{3}+o(x^4)\right)^2-x\left(x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right)}{x^4} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{2}{3}x^4+\frac{x^6}{9}+o(x^5)-x^2+\frac{x^4}{6}+o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{2}$$

Si noti che nel calcolo dei limiti si applicano gli sviluppi fino al minimo ordine possibile: se, come nel terzo esercizio, il denominatore ci suggerisce un ordine 4, bisogna sviluppare fino a quell'ordine il numeratore.

Osservazione: Se ho, nel limite, una forma tipo $\dfrac{o(x^7)}{x^3} = \dfrac{o(x^7)}{x^7}\cdot x^4 = \emptyset \left(\text{se } \lim_{x\to 0} f(x)\right)$

riccardo.polidoro.org

Serie Numeriche

L' operazione di limite consente di estendere l'elementare operazione di somma ad un numero infinito di addendi.

Data una successione di numeri reali a_n, diciamo serie di termine generale a_n, ed indichiamo con:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

La somma degli infiniti termini della successione.
Si definiscono somme parziali gli elementi della successione S_n così definita:

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$\dots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definizione:

La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ coincide con il limite della successione S_n:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_n S_n$$

Serie convergenti, divergenti, oscillanti

Una serie si dice convergente, divergente (positivamente/negativamente), oscillante se tale è la successione delle sue somme parziali.
Si dice regolare una successione non oscillante.

Se una serie è regolare, il limite della successione delle sue somme parziali è detto somma della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

Ciò che è importante negli esercizi è proprio studiare il carattere di una serie (ovvero stabilire se essa converge, diverge positivamente, diverge negativamente od oscilla.
Nel seguito elencheremo alcuni criteri di convergenza, che forniscono alcune condizioni necessarie o sufficienti affinché una serie converga. Il problema di calcolarne esplicitamente la somma non è generalmente considerato.

Serie di Mengoli

Consideriamo la successione $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$. La serie di termine generale a_n:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Negli esercizi conviene sempre studiare la successione S_n

coincide con la seguente successione di somme parziali:

$S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$; $S_2 = a_1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3}$; $S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{4}$ ...

$$\dots \quad S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

riccardo.palidoro.org

Si definisce serie geometrica di ragione a una serie del tipo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n \qquad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

In questo caso la serie parte da $n=0$, dunque:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$$

La successione delle somme parziali è così definita:

$$S_0 = a^0 = 1$$
$$S_1 = 1 + a$$
$$S_2 = 1 + a^2 = 1 + a + a^2$$
$$\ldots$$
$$S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n$$
$$\ldots$$

Per analizzare il carattere di questa serie, distinguiamo vari casi:

<u>$a=1$</u>

$$S_n = 1 + 1 + \ldots + 1 = n+1 \quad (\text{inizia da } 0) \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1^n = \lim_n S_n = \lim_n (n+1) = +\infty$$

La serie diverge positivamente.

<u>$a \neq 1$</u>

Attraverso il principio di induzione, si dimostra che:

$$S_n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

<u>In particolare:</u>

<u>$a>1$</u> : $\lim_n S_n = \lim_n \dfrac{a^{n+1} - 1}{a-1} = +\infty$ La serie diverge positivamente

<u>$-1<a<1$</u> $\lim_n S_n = \lim_n \dfrac{a^{n+1} - 1}{a-1} = \dfrac{1}{1-a}$ La serie converge a $\dfrac{1}{1-a}$

<u>$a=-1$</u> La serie diventa:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \quad \text{è una serie oscillante}$$

<u>$a<-1$</u> $\lim_n S_n = \lim_n \dfrac{a^{n+1} - 1}{a-1} \nexists$, poiché $\nexists \lim_n a^{n+1}$ se $a < -1$

<u>Osservazione</u>: $\nexists \lim_n S_n$ in quanto:

$$S_{2n} = \frac{a^{2n+1} - 1}{a-1} = +\infty \quad ; \quad S_{2n+1} = \frac{a^{2n+2} - 1}{a-1} = -\infty$$

Riassumendo, $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots$
- diverge a $+\infty$ se $a \geq 1$
- converge a $\frac{1}{1-a}$ se $-1 < a < 1$
- oscilla se $a \leq -1$

riccardo.polidoro.org

Dalla successione S_n ricaviamo:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 \implies \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$$

Questa serie, detta *Serie di Mengoli*, è un caso particolare di *serie telescopica*, ovvero una serie le cui somme parziali sono date dalla somma tra un termine e il termine successivo/precedente.

Esercizio

Assegnata la successione a_n, convergente ad a, verificare che la serie telescopica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n) \quad \text{è regolare e la sua somma vale } a - a_1.$$

Valutiamo la successione delle somme parziali:

$$S_1 = a_2 - a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2 = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 = a_3 - a_1, \dots \quad S_n = a_n - a_1$$

$$\lim_n S_n = \lim_n a_n - a_1 = a - a_1 \qquad \boxed{QED}$$

Concludiamo osservando che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1)^n \quad \text{diverge positivamente}$$

e la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n$ è oscillante.

Esercizio

Studiare il carattere della serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$

Abbiamo una serie di termine generale $a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

$$a_n = \log\left(1+\frac{2}{n}\right) = \log\left(\frac{n+2}{n}\right) = \log(n+2) - \log n$$

Costruisco la successione $(S_n)_n$ delle somme parziali:

$$S_1 = a_1 = \log(1+2) - \log 1 = \log 3 - \log 1$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = S_1 + a_2 = \log 3 - \log 1 + \log 4 - \log 2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \log 3 - \log 1 + \log 4 - \log 2 + \log 5 - \cancel{\log 3} = \log 5 + \log 4 - \log 2 - \log 1$$

$\dots$

$$S_n = \log(n+2) + \log n - \log 2 - \log 1 \qquad \underline{\text{Dimostrabile per induzione } \forall n \in \mathbb{N} - \{1,2\}}$$

$\dots$

Per definizione, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \log\left(1+\frac{2}{n}\right) = \lim_n S_n = \lim_n \left(\log(n+2) + \log n - \log 2 - \log 1\right) = +\infty \implies$ la serie diverge positivamente

riccardo.polidoro.org

Esempi

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n = +\infty$$ serie geometrica di ragione 2

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{2/3} = \frac{3}{2}$$ serie geometrica di ordine $1/3$ $\Rightarrow$ converge a $3/2$

⚠ Se $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ Il carattere non cambia: $\sum_{n=1}^{+\infty} a^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a^n\right) - a_0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ è una serie geometrica di ragione $1/2$ $\Rightarrow$ converge. Per calcolarne la somma, sfruttiamo la somma della serie a noi nota:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1/2^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots \quad ; \quad \sum_{n=2}^{+\infty} 1/2^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

Dunque, $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \underbrace{\left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right]}_{\text{converge a } \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2} - 1 - 1/2 = 2 - 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

Le serie telescopiche e geometriche sono essenzialmente le uniche serie che permettono il calcolo esplicito della formula di S_n.
Negli altri casi, per determinare il carattere della serie, si sfruttano alcuni strumenti: teoremi algebrici, condizione necessaria, serie di cui è noto il comportamento, criteri di convergenza.

Teoremi Algebrici

Le dimostrazioni (non richieste) si basano sulle definizioni di serie e sui criteri studiati per i limiti di successione.

Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Si dimostra che, se:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = A \in \overline{\mathbb{R}} \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = B \in \overline{\mathbb{R}}$$ fissato un $\lambda \in \mathbb{R}$

Allora (Se i simboli $[A+B]$ e $[\lambda A]$ hanno senso in $\overline{\mathbb{R}}$):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = A + B \quad ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \lambda A$$

Oss: Se $\lambda = 0$, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 0 \ \forall a_n$

Criterio di convergenza di Cauchy per le serie

Applicando il criterio di Cauchy per le successioni alla successione delle somme parziali, si ottiene il seguente criterio:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \text{ converge} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu : \forall n > \nu, \forall k \in \mathbb{N}, |a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}| < \varepsilon$$

La quantità $R_{n,k} = a_{n+1} + \ldots + a_{n+k}$ è detta resto n-mo di indice k della serie numerica.

riccardo.polidoro.org

Proposizione (Condizione necessaria per la convergenza)

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è convergente, allora la successione a_n è infinitesima.

⚠: Il viceversa NON È GENERALMENTE VERO: vedremo un esempio con la serie armonica.

Utilizzo operativo: Se a_n non tende a $\emptyset$, (Σ) SICURAMENTE non converge (o diverge, o oscilla)
Se a_n tende a $\emptyset$, la serie potrebbe convergere (ma anche no)

Dim.

Sia $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = S \in \mathbb{R}$. Ciò implica che $\lim_n S_n = S$

Di conseguenza, $\lim_n a_n = \lim_n \left(S_n - S_{n-1} \right) = S - S = \emptyset$

$\hookrightarrow S_n = S_{n-1} + a_n$

Osservazione: Se il termine generale di una serie non è infinitesimo, possiamo solo dire che la serie NON CONVERGE.

La Serie Armonica

È una serie del tipo $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Essa ha termine generale infinitesimo, ma diverge positivamente.

Dim

$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$, dobbiamo dimostrare che $\lim_n S_n = +\infty$.

Ricordiamo che $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow n \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$

Ricaviamo:

$$\log(1+1) = \log 2 < 1$$
$$\log\left(1+\tfrac{1}{2}\right) = \log 3/2 < 1/2$$
$$\dots$$
$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

Dal teorema del confronto per le successioni,

$$\lim_n S_n \geq \lim_n \log(n+1) = +\infty$$

(Sommando termine a termine, per le proprietà dei logaritmi, otteniamo $\log(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \ \forall n \in \mathbb{N}$)

Dunque, la serie armonica diverge positivamente.

La Serie Armonica GENERALIZZATA

Si dice serie armonica generalizzata di esponente $\alpha \in \mathbb{R}$ la seguente serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$$

Si può dimostrare che essa:

- converge se $\alpha > 1$
- diverge positivamente se $\alpha \leq 1$

riccardo.polidoro.org

Serie a Termini non negativi

Sia $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è detta a termini non negativi. Analogamente si definisce la serie di termini di segno non positivo.

Se $a_n > 0$ [< 0] strettamente, la serie è detta a termini positivi [negativi].

Proposizione: Se una serie è a termini non negativi, allora essa è regolare (converge o diverge positivamente).

Dim

Sia S_n la successione delle somme parziali. Essendo $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$ per ipotesi, da:

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n$$

ricaviamo che S_n è una successione crescente. Per il teorema di regolarità delle successioni monotone, essa è regolare.

Pertanto, la serie è regolare e converge o diverge a $+\infty$, a seconda che S_n sia limitata oppure no.

Criteri di convergenza per le serie a termini non negativi

Criterio del Confronto

Siano $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ due serie a termini non negativi tali che $a_n \leq b_n$ definitivamente. Allora:

- $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ convergente $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ convergente
- $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergente positivamente $\Longrightarrow$ $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergente positivamente

Esempi

① $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ serie armonica generalizzata di esponente 2

Per dimostrarne la convergenza, sfruttiamo la serie di Mengoli $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, che sappiamo essere convergente, osservando che $\frac{1}{n^2} \leq \frac{2}{n(n+1)} \ \forall n \in \mathbb{N}$

② $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\log n}$ Per prima cosa, controlliamo se verifica la condizione necessaria: $\lim_n a_n = \lim_n \log n = +\infty \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ la serie non converge. Essendo una serie a termini positivi, essa è regolare; non essendo convergente essa necessariamente diverge positivamente.

Alternativamente, sfruttiamo il Criterio del confronto, sfruttando la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n$:
Si osserva che $\frac{1}{\log n} \geq \frac{1}{n} \ \forall n \geq 2$, dunque la serie diverge positivamente.

Criterio del Confronto Asintotico

Date due serie a termini positivi (>0 stretto) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$, se

$$\lim_n \frac{a_n}{b_n} = L \in]0, +\infty[,$$

Allora le due serie hanno lo stesso carattere.

riccardo.polidoro.org

Esempio

① Consideriamo la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+\cos n}{3+2n^3}$$

$$\frac{5n+\cos n}{3+2n^3} = \frac{\cancel{n}\left(5+\underbrace{\frac{\cos n}{n}}_{\to 0 \text{ (limitata x infinitesima)}}\right)}{n^{\cancel{3}2}\left(\underbrace{\frac{3}{n^3}}_{\to 0}+2\right)} \Longrightarrow \text{Stesso ordine di } \frac{1}{n^2}$$

Poiché $\lim_n \dfrac{\frac{5n+\cos n}{3+2n^3}}{1/n^2} = \dfrac{5}{2}$ e la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, allora la serie di partenza converge.

② $\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$ confrontandola con la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ (diverge positivamente):

$$\lim_n \frac{\sin \frac{1}{n}}{1/n} = 1 \Longrightarrow \text{la serie di partenza diverge positivamente.}$$

Esercitazione 12 ING - Limiti con Taylor

① $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\operatorname{sen} x - x e^{x^2}} =$

N: $\operatorname{tg} x = x + o(x^2) \Longrightarrow x^2 \operatorname{tg} x = x^3 + o(x^4)$

D: $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$; $e^{x^2} = 1 + o(x^2) + x^2$

$$\operatorname{sen} x - x e^{x^2} = \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x} - x^3 + o(x^3) = -\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3 + o(x^4)}{-\frac{7}{6}x^3 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3\left(1 + \frac{o(x^4)}{x^4}\cdot x\right)}{x^3\left(-\frac{7}{6} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)} = -6/7$$

② $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2\log(1+x^2) + \cos(2x) - 1}{x^4} =$

N: $\log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{1}{24}(2x)^4 + o(x^5) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2x^2} - x^4 + o(x^4) - \cancel{2x^2} + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4\left(\frac{2}{3} - 1\right) + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{3}$$

③ $\displaystyle\lim_{x\to 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(e^x - \sin x)}{1-\cos(3x)}} =$

$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\sin x = x + o(x^2)$

$\cos(3x) = 1 - \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 - 1 + \frac{9}{2}x^2 + o(x^3)} \cdot \log\left(1 + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - \cancel{x} + o(x^2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{9/2\, x^2 + o(x^3)} \cdot \log\left(1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2/2 + o(x^2)}{9/2\, x^2 + o(x^3)} = \frac{1}{9} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} (e^x - \sin x)^{\frac{1}{1-\cos(3x)}} = e^{1/9}$$

Osservazioni:
1) Conviene considerare il coefficiente della f che sviluppiamo: se esso è x^n, "alza" il grado dello sviluppo di n (vedi sviluppo di $\operatorname{tg} x$ all'es. ①)
2) $o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$ con $\alpha, \beta > 0$ (vedi es. ②)

riccardopolidoro.org

Continuando sui criteri per le serie a termini non negativi:

Criterio degli infinitesimi

Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, se esiste un $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che:

$$\lim_n n^\alpha \cdot a_n = \lim_n \frac{a_n}{1/n^\alpha} = L \in]0,+\infty[$$

Allora:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1 \\ \text{diverge positivamente se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

Esempi

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{2n^3+3n-1}$ $\qquad \lim_n \frac{(n+3)/(2n^3+3n-1)}{1/n^\alpha} = \frac{1}{2}$ se $\alpha = 2 \Rightarrow$ la serie converge

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ $\qquad \lim_n \frac{1-\cos(1/\sqrt{n})}{1/n^\alpha} = \frac{1}{2}$ se $\alpha = 1$ $\quad \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \to 0,\ \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\right)$

Criterio del rapporto

Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, se esiste:

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \in \mathbb{R}, \text{ Allora:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } a < 1 \\ \text{diverge se } a > 1 \end{cases}$$

⚠: Il criterio non è applicabile se $a = 1$

Esempio

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ $\qquad \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_n \frac{1/(n+1)!}{1/n!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = \underbrace{0}_{\text{converge}}$

2) $\sum \frac{n^n}{n!}$ $\qquad$ Osservando che la serie è a termini positivi, essa è regolare. Verificando inoltre che il suo termine generale, è dimostrato che la serie diverge positivamente.

In alternativa, sfruttiamo il criterio del rapporto:

$$\lim_n \frac{(n+1)^{n+1}/(n+1)!}{n^n/n!} = \lim_n \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)n!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \lim_n \frac{(n+1)(n+1)^n}{n+1} \cdot \frac{1}{n^n} = \lim_n \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \underbrace{e > 1}_{\text{Diverge Positivamente}}$$

Osservazione: Per le serie a termini non positivi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ con $a_n \leq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$, è possibile effettuare il seguente ragionamento:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{-}_{\text{Considerì il segno dopo aver studiato il carattere}} \overbrace{\sum_{n=1}^{\infty} (-a_n)}^{\text{Serie a termini positivi}}$$

riccardo.polidoro.org

Criterio della radice

Data una serie a termini non negativi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se esiste ed è finito il limite:

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = a \in \mathbb{R} \qquad \left(\sqrt[n]{a_n} \equiv (a_n)^{1/n}\right) \qquad \text{Allora:}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \begin{cases} \text{converge se } a<1 \\ \text{diverge se } a>1 \end{cases}$$

⚠ Il criterio non è applicabile se $a=1$

Come vedremo, è utile applicare questo criterio quando è possibile semplificare esponenti n-mi

Esempio

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-n^2}$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{2n-n^2}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt[n]{2^n\left(1-\frac{n^2}{2}\right)}} = \lim \frac{1}{2\sqrt[n]{1-\frac{n^2}{2}}} = \frac{1}{2} \implies \text{la serie converge}$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{3^n}$

$$\lim_n \sqrt[n]{\frac{n^n}{3^n}} = \lim_n \frac{n}{3} = +\infty > 1 \implies \text{la serie diverge positivamente}$$

Si osserva che non poteva essere diversamente, poiché la serie è a termini positivi con termine generale non infinitesimo

Dimostrazione del criterio $\quad$ Hp. $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = a \in \mathbb{R}$

Sia $a<1$

Fissato $\varepsilon>0$ tale che $h=a+\varepsilon<1$, per la definizione di limite (sfruttando l'ipotesi):

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \nu : \sqrt[n]{a_n} < h \quad \forall n>\nu \iff a_n < h^n \quad \forall n>\nu$$

Dunque, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ risulta definitivamente maggiorata dalla serie geometrica convergente $\sum_{n=1}^{+\infty} h^n$. Per il criterio del confronto, la serie converge.

Sia $a>1$

Fissato $\varepsilon>0$ tale che $k=a-\varepsilon>1$, per la definizione di limite:

$$\varepsilon>0,\ \exists \nu : \sqrt[n]{a_n} > k \quad \forall n>\nu \iff a_n > k^n \text{ per } n>\nu$$

Dunque, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ risulta definitivamente minorata dalla serie geometrica divergente positivamente $\sum_{n=1}^{+\infty} k^n$.
Per il criterio del confronto, la serie diverge positivamente.

Osservazione: Il criterio del rapporto segue una dimostrazione del tutto analoga.

Serie a Segni Alterni

Sia $a_n \geq 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Si dice serie a segni alterni una serie del tipo:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

Esempio: La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \quad \text{è nota come serie armonica a segni alterni}$$

riccardo.polidoro.org

Criterio di Leibnitz

Sia data la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} a_n$.

Se la successione $\{a_n\}_n$ è non negativa, decrescente e infinitesima, allora la serie converge:

Inoltre, detta S_n la successione delle somme parziali ed S la somma della serie, risulta:

$$S_{2n} \leq S_{2n+2} \qquad S_{2n-1} \geq S_{2n+1}$$

$$|S_n - S| \leq a_{n+1}$$

Esempi

- La serie armonica a segni alterni è divergente, poiché sono banalmente verificate le ipotesi del criterio di Leibnitz
- La serie $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n-1}{n(n+1)}$ converge. Infatti; la successione $\frac{n-1}{n(n+1)}$ è positiva, infinitesima e decrescente:

Infatti, $\frac{n-1}{n(n+1)} \geq \frac{n}{(n+1)(n+2)} \iff n^2 \leq n^2+n-2 \iff n \geq 2$

⚠ "Punto debole" dell'applicazione del criterio di Leibnitz è la verifica della crescenza/decrescenza di $\{a_n\}_n$:

Ad esempio, la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{(-1)^n \overbrace{\frac{n^2+2}{n^3+3}}^{b_n}}_{a_n}$, usando Leibnitz:

Valutiamo $b_n = \frac{n^2+2}{n^3+3}$ È banalmente ≥ 0 $\forall n \in \mathbb{N}$ e tendente a 0

2 Verifichiamo che $a_{n+1} \leq a_n$: $\frac{(n+1)^2+2}{(n+1)^3+3} \leq \frac{n^2+2}{n^3+3}$ moltiplicando in croce il grado diventa alto; sfruttiamo un escamotage: sfruttiamo una serie di carattere noto per facilitarci nello svolgimento (armoniche o geometriche, solitamente); in questo caso aggiungiamo e sottraiamo il termine generale della serie armonica (abbiamo un n^2/n^3):

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n}\right) + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n}}_{\text{armonica a segni alterni (converge)}}$$

SE Le due serie a destra convergono, anche la serie a sinistra, data dalla loro somma, converge.

Valutiamo $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2+2}{n^3+3} - \frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n}$ Non possiamo applicare Leibnitz (gradi alti) $\Rightarrow$ studiamo l'<u>ASSOLUTA CONVERGENZA</u> (descritta più avanti):

SE Assoluta convergenza $\Rightarrow$ convergenza

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{2n-3}{n^4+3n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-3}{n^4+3n} < +\infty \qquad \left(\text{Confronto asintotico con } \sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3\right)$$

Dunque, la serie verifica il criterio di Leibnitz $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^2+2}{n^3+3}$ $\boxed{\text{converge}}$

riccardo polidoro

Serie Assolutamente Convergenti

Una serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ si dice assolutamente convergente se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ è convergente.

Proposizione

Se la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ è assolutamente convergente, essa è anche convergente.

Il viceversa non è vero: ad esempio, la serie armonica a segni alterni converge ma non è assolutamente convergente:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \text{ converge; } \sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge positivamente}$$

Osservazione: Tutte le serie a termini non negativi [positivi] convergenti, sono anche assolutamente convergenti. Infatti, se $a_n \geq 0$ [$a_n \leq 0$], allora $|a_n| = a_n$ [$|a_n| = -a_n$]

Osservazione 2: I criteri di convergenza per le serie a termini non negativi analizzati in precedenza possono essere usati come criteri di assoluta convergenza per una serie con termine generale di segno alterno (o segno qualunque), se applicati alla serie dei valori assoluti.

Esempio: Consideriamo la serie numerica:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2} \qquad \text{segno variabile; valutiamo l'assoluta convergenza.}$$

Consideriamo la serie dei valori assoluti $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ Poiché $0 \leq |\sin n| \leq 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{|\sin n|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Essendo maggiorata da una serie convergente, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n|}{n^2}$ converge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n^2}$ converge

Applicazioni

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)$ $\qquad \frac{n+3}{n^2+5} \to 0^+ \Rightarrow 0 < \frac{n+3}{n^2+5} < \pi$; $a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right) > 0$ definitivamente

$\left[a_n \sim \operatorname{sen}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}\right]$ Metodo brutale è più corretto applicare il confronto asintotico con $1/n$:

$$\lim_n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{1/n} = \lim_n \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+3}{n^2+5}\right)}{\frac{n+3}{n^2+5}} \cdot \frac{n+3}{n^2+5} \cdot n = 1 \in \mathbb{R} \qquad \text{Dunque diverge}$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n}\right)$ $\qquad$ Brutale: $\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = 0$ $\quad$ Serve a capire con quale serie confrontare, ma NON A RISOLVERE!

Sfruttiamo gli Sviluppi di Taylor:

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4) \qquad \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4) \qquad \text{con } x \to 0 \ \left(\lim_n 1/n = 0\right)$$

Dunque, $a_n \sim \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3}\right) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)\frac{1}{n^3} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{n^3}$

Applico il confronto asintotico con la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} 1/n^3$

$$\lim_n \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}1/n}{1/n^3} = \lim_n \frac{\frac{1}{6n^3}}{1/n^3} = 1/6 \Rightarrow \text{La serie } \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{n} - \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \text{ converge}$$

riccardo.polidoro.org

• $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n^2+2}$ Segno variabile, valutiamo l'assoluta convergenza:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+2} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+2} \qquad (|\cos n| \leq 1)$$

Per il criterio del confronto, $\sum \frac{\cos n}{n^2+2}$ è assolutamente convergente e dunque convergente.

Hàpax | Criterio di Dirichlet

Siano $\{a_n\}_n$, $\{b_n\}_n$ due successioni tali che:

1) $\exists M > 0 : \left|\sum_{i=1}^{n} a_n\right| \leq M, \forall n$ esiste un maggiorante della somma parziale non dipendente da n.

2) $\{b_n\}_n$ è una successione di termini positivi monotona decrescente tendente a $0 \Rightarrow \lim_n b_n = 0$

Allora, $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ è convergente

Caso particolare: Con la scelta di $a_n = (-1)^n$ si ottiene il Criterio di Leibnitz

Esempio

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ Sia $a_n = \cos n$; $b_n = \frac{1}{n+2}$

• b_n è una successione decrescente, di termini positivi e infinitesima.

• Cerchiamo una costante M tale che

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \cos i\right| \leq M, \quad \forall n$$

Sfruttiamo le Formule di Werner; in particolare $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(\alpha-\beta) + \operatorname{sen}(\alpha+\beta)]$

Considero, ad esempio, $\alpha = 1$ e $\beta = i$ e valuto:

$$2\operatorname{sen} 1 \left(\sum_{i=1}^{n} \cos i\right) = \sum_{n=1}^{n} 2\operatorname{sen} 1 \cdot \cos i = \qquad (2\operatorname{sen} 1 \text{ non dipende da } i)$$

$$\underset{\text{Formula Werner}}{=} \sum_{i=1}^{n}[\operatorname{sen}(1-i) + \operatorname{sen}(1+i)] \underset{-\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}(-\alpha)}{=} \sum_{i=1}^{n}[\operatorname{sen}(1+i) - \operatorname{sen}(i-1)] =$$

$$= \cancel{\operatorname{sen} 2} - \cancel{\operatorname{sen} 0} + \operatorname{sen} 3 - \operatorname{sen} 1 + \operatorname{sen} 4 - \cancel{\operatorname{sen} 2} + \ldots + \operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen}(n-1) = \operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1$$

Segue che $\left|\sum_{i=1}^{n} (2\operatorname{sen} 1)(\cos i)\right| = |\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1| \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left|\sum_{i=1}^{n} \cos i\right| = \frac{|\operatorname{sen}(n+1) - \operatorname{sen} 1|}{2\operatorname{sen} 1} \leq \frac{2}{2\operatorname{sen} 1} = \frac{1}{\operatorname{sen} 1} = M$$

Anche la seconda condizione del criterio di Dirichlet è rispettata, dunque

$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n}{n+2}$ è convergente

riccardo.poligoro.org

Introduzione alla Teoria dell'Integrazione

Data una funzione $f(x)$ definita in un intervallo $I \subseteq \mathbb{R}$, verifichiamo l'esistenza di una funzione $F(x)$ derivabile in I tale che $F'(x) = f(x)$. Una funzione di questo tipo prende il nome di primitiva di f:

$$f: I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} F(x) \text{ primitiva di } f$$

Esempi:

$F(x) = x$ è una primitiva di $f(x) = 1$ in $\mathbb{R}$; infatti $F'(x) = (x)' = 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$F(x) = \sin x$ è una primitiva di $f(x) = \cos x$ in $\mathbb{R}$. Infatti $F'(x) = (\sin x)' = \cos x \ \forall x \in \mathbb{R}$

Teorema di Caratterizzazione delle primitive di una funzione

Se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, per ogni costante $c \in \mathbb{R}$ risulta che $F(x)+c$ è ancora una primitiva di f.

Viceversa, se $F_1(x)$ ed $F_2(x)$ sono due primitive di f nell'intervallo I, risulta $F_1 = F_2 + c$

Dimostriamo questa seconda condizione (la prima è elementare):

F_1 ed F_2 sono primitive di una stessa funzione, dunque risulta $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$

Ne segue che $(F_1 - F_2)'(x) = 0$ e, per ~~ta~~ il criterio di caratterizzazione delle funzioni con derivata nulla in un intervallo (conseguenza del criterio di monotonia/T di Lagrange) risulta:

$$(F_1 - F_2)(x) = \text{costante} \implies F_1(x) = F_2(x) + \text{costante} \quad \text{nell'intervallo } I \subseteq \mathbb{R}$$

⚠ La condizione che I sia <u>un</u> intervallo è essenziale: consideriamo ad esempio la funzione:

$$g(x) = \operatorname{arctg}(x) + \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \text{ definita in } \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$g'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ MA: } \quad g(x) = \begin{cases} \pi/2 & x > 0 \\ -\pi/2 & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \text{NON È COSTANTE!}$$

Integrale Indefinito

L'insieme di tutte le primitive della funzione f nell'intervallo I è detto integrale indefinito di f, denotato con

$$\int f(x)\,dx$$

Per quanto detto prima, se $F(x)$ è una primitiva di f nell'intervallo I, allora:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

Osservazione: Non tutte le funzioni sono dotate di primitive, come ad esempio le funzioni a salto.

riccardo.polidoro.org

Integrali Immediati

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
k	kx	x^{α}	$x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ $(\alpha \neq -1)$
$1/x$	$\log\lvert x\rvert$ *	$\mathrm{sen}\, x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\mathrm{sen}\, x$	$1/\cos^2 x$	$\mathrm{tg}\, x$
$1/\sqrt{1-x^2}$	$\mathrm{arcsen}\, x$	$1/(1+x^2)$	$\mathrm{arctg}\, x$
e^x	e^x	a^x	$a^x/\log a$ $(a>0, a\neq 1)$

Sono integrali notevoli sfruttati nella risoluzione di integrali più complessi.

$$*\ f'(\log|x|) = \frac{1}{|x|}\cdot\frac{|x|}{x} = \frac{1}{x} \quad \square$$

Esempi

- $\int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

⚠: Nella risoluzione degli integrali indefiniti non bisogna **mai scordarsi di +c!**

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

- $\int 3^x\, dx = \frac{3^x}{\log 3} + c, \quad c \in \mathbb{R}$

Linearità degli integrali indefiniti

Dalla definizione di integrale indefinito e dalle proprietà di linearità delle derivate, si deduce che:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Dunque, l'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali, l'integrale di una costante per una funzione è uguale alla costante per l'integrale della funzione.

Esempio

$$\int 2x^2 - x + 3\, dx = 2\int x^2\, dx + \int (-x)\, dx + \int 3\, dx = 2\int x^2\, dx - 1\int x\, dx + 3\int 1\, dx = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x + c$$

Integrali "Quasi Immediati"

Dalla definizione di integrali indefiniti e dalla regola di derivazione delle funzioni composte, si deduce che (con $c \in \mathbb{R}$):

$$\int [f(x)]^{\alpha} \cdot f'(x)\, dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = \log|f(x)| + c$$

$$\int \mathrm{sen}[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = -\cos[f(x)] + c$$

$$\int \cos[f(x)] \cdot f'(x)\, dx = \mathrm{sen}[f(x)] + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\cos^2[f(x)]}\, dx = \mathrm{tg}[f(x)] + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}\, dx = \mathrm{arcsen}[f(x)] + c$$

$$\int \frac{f'(x)}{1+[f(x)]^2}\, dx = \mathrm{arctg}[f(x)] + c$$

riccardo.polidoro.org

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}+c \quad ; \quad \int a^{f(x)} f'(x)\,dx = \frac{a^{f(x)}}{\log a}+c \quad (a>0, a\neq 1)$$

$\boxed{\text{Esempi}}$

- $$\int 3^{x^2} \cdot x\,dx = \frac{1}{2}\int 3^{x^2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{3^{x^2}}{\log 3}+c$$

- $$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx =$$ simile a $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \log|x|+c$; $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

$$= -\int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = -\log|\cos x|+c$$

- $$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int (x^2+1)^{1/2}\cdot x\,dx =$$ simile a $\int [f(x)]^{\alpha}\cdot f'(x)\,dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+1)^{1/2}\cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3/2}+c = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}+c$$ $\quad (x^2+1)' = \underline{2x}$

- $$\int \sin(\alpha x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int \alpha\sin(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{\alpha}\cos(\alpha x)+c \quad (\alpha\neq 0)$$

- $$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{a}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c \quad (a\neq 0)$$

- $$\int \frac{1}{a^2+b^2x^2}\,dx = \frac{1}{ab}\int \frac{b/a}{1+(bx/a)^2}\,dx = \frac{1}{ab}\operatorname{arctg}\left(\frac{bx}{a}\right)+c \quad (a,b>0)$$

- $$\int \sin(\alpha x)\cos(\beta x)\,dx = \frac{1}{2}\int [\sin(\alpha+\beta)x + \sin(\alpha-\beta)x]\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(\alpha+\beta)x\,dx + \frac{1}{2}\int \sin(\alpha-\beta)x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos(\alpha+\beta)x}{\alpha+\beta} - \frac{1}{2}\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta}+c \quad (\alpha\neq\pm\beta)$$

- $$\int \sin(\alpha x)\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{2}\int \sin 2(\alpha x)\,dx = -\frac{1}{4a}\cos(2\alpha x)+c$$

- $$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{x}{2}-\frac{1}{4}\sin 2x+c$$

Integrazione per Parti

Siano f e g due funzioni derivabili. Allora:

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

f è detto fattore differenziale
g è detto fattore finito

$\boxed{\text{Dim}}$

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int [f'(x)g(x) + f(x)g'(x) - f(x)g'(x)]\,dx = \int (f(x)g(x))'\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx =$$

$$= f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

riccardo.polidoro.org

Esempi

- $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = (x-1)e^x + c$ $\qquad f(x) = e^x ;\ g'(x) = 1$

- $\int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{x}{x} \, dx = x(\log x - 1) + c$ $\qquad f(x) = \log x ;\ g'(x) = 1$

- $\int \operatorname{arcsen} x \, dx = \int 1 \cdot \operatorname{arcsen} x \, dx = x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c$

- $\int e^x \cos x \, dx = e^x \cos x + \int e^x \sin x \, dx =$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx \implies \int e^x \cos x \, dx = \frac{1}{2}(e^x \cos x + e^x \sin x) + c$$

Integrazione per Sostituzione

Data una funzione f definita in un intervallo I, denotiamo con F una sua primitiva. Sia $\varphi : J \to I$ una funzione derivabile nell'intervallo J e dotata di funzione inversa $\varphi^{-1} : I \to J$. Risulta:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

da cui

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c$$

Pertanto,

$$F(x) + c = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)} \implies \int f(x)\,dx = \left[\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt\right]_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Esempi

$$\int \frac{1}{3+\sin x}\,dx \qquad \text{Poniamo} \begin{cases} tg\, x/2 = t \implies x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt \end{cases}$$

Risulta

$$\int \frac{1}{3+\sin x}\,dx = \int \frac{1}{3+\frac{2tg(x/2)}{1+tg^2(x/2)}}\,dx = \int \frac{1}{3+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int \frac{1}{3t^2+2t+3}\,dt$$

Poiché

$$\int \frac{1}{3t^2+2t+3}\,dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(t+\frac{1}{3}\right)\right) + c$$

Deduciamo che:

$$\int \frac{1}{3+\sin x}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{3}{2\sqrt{2}}\left(tg\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\right)\right) + c$$

riccardo.polidoro.org

Integrazione di funzioni razionali

Cercheremo ora un metodo per calcolare integrali indefiniti di funzioni del tipo $\frac{P_n(X)}{Q_m(X)}$, dove P_n e Q_m sono polinomi di grado n-mo e m-mo (rispettivamente).

Osservazione Anzitutto, se $n \geq m$, per prima cosa eseguiamo la divisione tra polinomi; ciò porta a riscrivere la funzione integranda come somma di un polinomio (che sappiamo integrare) e di una funzione razionale con lo stesso denominatore di quella di partenza, ma con numeratore di grado inferiore ad m.

Dunque, supponiamo $n<m$. Distinguiamo vari casi:

$m=1$

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\log|ax+b|+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

Esempio

$$\int \frac{2}{3x+7}\,dx = \frac{2}{3}\log|3x+7|+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

$m=2$ Distinguiamo tre casi, a seconda del Δ (discriminante) del denominatore $Q_2(x)$

a) $\Delta>0 \Rightarrow Q_2$ ha due radici distinte, la frazione si decompone in fratti semplici

Esempio

$$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}\,dx$$

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$$

Determiniamo A, B eseguendo la somma a secondo membro ed uguagliando le frazioni:

$$\frac{x+2}{x^2+x-6} = \frac{x+2}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3} = \frac{(A+B)x+(3A-2B)}{(x-2)(x+3)}$$

Per il principio d'identità dei polinomi, $\begin{cases} A+B=1 \\ 3A-2B=2 \end{cases} \Longrightarrow A=4/5 \quad B=1/5$

Dunque, $$\int \frac{x+2}{x^2+x-6}\,dx = \int\left(\frac{4/5}{x-2}+\frac{1/5}{x+3}\right)dx = \frac{4}{5}\log|x-2|+\frac{1}{5}\log|x+3|+c \qquad c\in\mathbb{R}$$

b) $\Delta=0 \Rightarrow Q_2$ ha una radice reale doppia. In tal caso l'integrale è facilmente ricondotto a quasi immediati.

Esempio

$$\int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{(x+1)^2}\,dx = \int\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \log|x+1|+\frac{1}{x+1}+c, \quad c\in\mathbb{R}$$

riccardo.polidoro.org

c) $\Delta < 0 \Rightarrow Q$ non ammette radici reali. Per comprendere il procedimento, sarà utile analizzare i seguenti esempi:

Esempi

- $\int \frac{1}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)+c \qquad c\in\mathbb{R}$

- $\int \frac{x}{x^2+2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+4}\,dx - \int \frac{1}{x^2+2x+4}\,dx = \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \int \frac{1}{(x+1)^2+3}\,dx =$

$+1/-1$

$= \frac{1}{2}\log(x^2+2x+4) - \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+c\,,\quad c\in\mathbb{R}$

- $m>2$: È sempre possibile scomporre Q_m in un prodotto di (potenze di) fattori di primo e/o secondo grado irriducibili ($\Delta<0$). Fatto ciò è possibile scrivere la frazione come somma di frazioni a cui è possibile applicare i discorsi fatti in precedenza. Vediamo alcuni semplici esempi:

Esempi

- $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx$ Scriviamo $\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ determiniamo A, B, C

grado 1

grado 2 irriducibile

$\frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+(2B+C)x+(A+2C)}{(x+2)(x^2+1)} \Rightarrow \begin{cases} A+B=2 \\ 2B+C=3 \\ A+2C=-1 \end{cases};\quad \begin{cases} A=1/5 \\ B=9/5 \\ C=-3/5 \end{cases}$

Dunque, $\int \frac{2x^2+3x-1}{(x+2)(x^2+1)}\,dx = \frac{1}{5}\int \frac{1}{x+2}\,dx - \frac{3}{5}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{9}{10}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

$= \frac{1}{5}\log|x+2| + \frac{9}{10}\log(x^2+1) - \frac{3}{5}\,\text{arctg}\,x + c\,,\ c\in\mathbb{R}$

- $\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}\,dx$ Scriviamo $\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3}$ determiniamo A, B, C

$\frac{x+1}{x^2(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+3} = \frac{(A+C)x^2+(3A+B)x+3B}{x^2(x+3)} \Rightarrow \begin{cases} A+C=0 \\ 3A+B=1 \\ 3B=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=2/9 \\ B=1/3 \\ C=-2/9 \end{cases}$

Dunque, $\int \frac{x+1}{x^2(x+3)}\,dx = \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2} - \frac{2}{9}\int \frac{dx}{x+3} = \frac{2}{9}\log|x| - \frac{1}{3x} - \frac{2}{9}\log|x+3| + c\,,\ c\in\mathbb{R}$

riccardo.polidoro.org

Integrale Definito

Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata nell'intervallo compatto (chiuso e limitato) $[a,b]$, con $a<b$.

Consideriamo una partizione dell'intervallo, ovvero un insieme ordinato D di $n+1$ punti; con:

$$a=x_0<x_1<\ldots<x_n=b_1 \qquad D=\{x_0,x_1,\ldots,x_n\}$$

Indichiamo con $I_k=[x_k,x_{k+1}]$ il generico intervallino con estremi appartenenti a D, risulta ovviamente:

$$[a,b]=\bigcup_{k=0}^{n-1} I_k$$

Definiamo inoltre: $m_k=\inf_{x\in I_k} f(x)$ $\quad M_k=\sup_{x\in I_k} f(x)$ $\quad$ Si osserva che $m_k, M_k\in\mathbb{R}$ poiché <u>f è limitata</u>

Definiamo ora le somme integrali di f corrispondenti alla partizione D:

Si dice somma integrale inferiore della funzione f rispetto alla partizione D la quantità:

$$s(f,D)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)$$

Si dice somma integrale superiore di f rispetto alla partizione D la quantità:

$$S(f,D)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Logicamente, le somme $s(f,D)$ e $S(f,D)$ sono quantità finite, poiché <u>f è limitata</u>. Inoltre, $s(f,D)\leq S(f,D)$

Facendo variare la partizione D dell'intervallo $[a,b]$, consideriamo due insiemi numerici, $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, contenenti rispettivamente tutte le somme integrali inferiori e tutte le somme integrali superiori:

$$\mathcal{A}=\{s(f,D): D \text{ partizione dell'intervallo } [a,b]\}$$

$$\mathcal{B}=\{S(f,D): D \text{ partizione dell'intervallo } [a,b]\}$$

Si può dimostrare che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due insiemi separati, ovvero:

$$\forall u\in\mathcal{A}, \forall v\in\mathcal{B} \qquad u\leq v$$

ovvero, $\forall D_1, D_2$ decomposizioni di $[a,b]$ $\quad s(f,D_1)\leq S(f,D_2)$

Definizione

La funzione $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, limitata nell'intervallo compatto $[a,b]$ si dice integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ se i due insiemi numerici $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono contigui, ovvero se $\sup\mathcal{A}=\inf\mathcal{B}$.
In tal caso, l'unico elemento di separazione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è detto integrale di Riemann di f relativo all'intervallo $[a,b]$ e si indica:

$$\sup\mathcal{A}=\inf\mathcal{B}=\int_a^b f(x)\,dx$$

a e b sono detti estremi di integrazione, f è detta funzione integranda

riccardo.polidoro.org

Osservazione

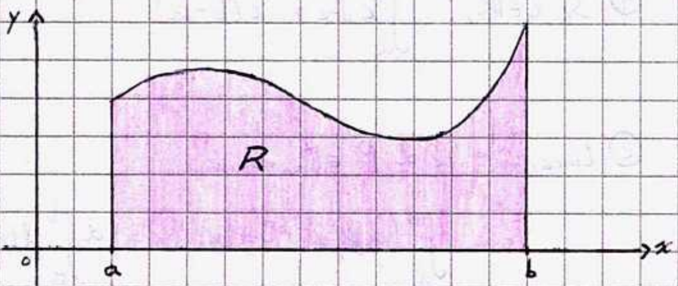
Nella definizione di integrale abbiamo supposto che gli estremi di integrazione fossero ordinati in maniera naturale, ovvero $a<b$. Le somme integrali hanno però senso anche se $a>b$. Dunque,

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \qquad\qquad \int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Area del Rettangoloide

Il rettangoloide è, per definizione, la regione piana R compresa tra il grafico della funzione (in questo caso non negativa) f, le rette verticali $x=a$ e $x=b$ e l'asse delle ascisse.

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a\le x\le b,\ 0\le y\le f(x)\}$$



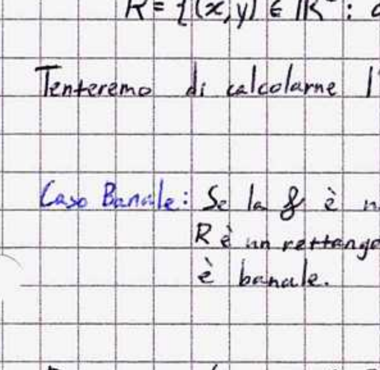
Tenteremo di calcolarne l'area.

Caso Banale: Se la f è non negativa costante, la regione R è un rettangolo e il calcolo della sua area è banale.

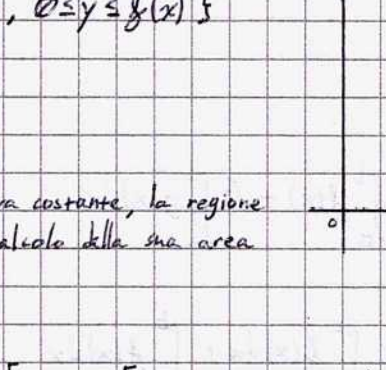
Data una funzione $f:[a,b]\to[0,+\infty[$ superiormente limitata nell'intervallo compatto $[a,b]$, ripercorriamo la costruzione delle somme integrali inferiori e superiori di f; risulta naturalmente $m_k, M_k \ge 0$.

Dunque, i prodotti $m_k(x_{k+1}-x_k)$, $M_k(x_{k+1}-x_k)$ rappresentano le aree di due rettangoli aventi per base l'intervallo I_k ed altezze di lunghezze m_k e M_k, rispettivamente.

Le somme integrali superiore e inferiore coincidono con le aree di due regioni piane, dette plurirettangoli, formate ciascuna da n rettangoli affiancati.



$$s(f,D)=\sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1}-x_k)$$



$$S(f,D)=\sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1}-x_k)$$

Si osserva che, fissata la decomposizione D, $s(f,D)$ è un'approssimazione per difetto dell'area del rettangoloide: è l'area di un plurirettangolo P contenuto in R. Analogamente, $S(f,D)$ è un'approssimazione per eccesso dell'area del rettangoloide: è l'area del plurirettangolo P' contenente R.

Ovviamente, le approssimazioni saranno tanto più accurate quanto più fitta è la partizione D.

Il rettangoloide R di base $[a,b]$ relativo alla funzione f si dice misurabile secondo Peano-Jordan se i due insiemi numerici:

$$\mathcal{A}=\{\text{area}(P) : P \text{ plurirettangolo contenuto in } R\}$$

$$\mathcal{B}=\{\text{area}(P') : P' \text{ plurirettangolo contenente } R\}$$

sono separati e contigui. In tal caso l'unico elemento di separazione di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è detto area di R, e si indica:

$$\sup\mathcal{A}=\inf\mathcal{B}=|R|$$

riccardo.poliqoro.org

Proposizione: Data una funzione f limitata nell'intervallo compatto $[a,b]$, non negativa, il rettangoloide R relativo ad f di base $[a,b]$ è misurabile secondo peano-Jordan $\iff$ f è integrabile secondo Riemann in $[a,b]$.
Inoltre,

$$|R| = \int_a^b f(x)\,dx$$

La prop. discende dalle definizioni date in precedenza.

Proprietà dell'integrale di Riemann

Siano f, g due funzioni integrabili secondo Riemann nell'intervallo compatto $[a,b]$

① Se $c \in \mathbb{R}$, $\int_a^b c\,dx = c(b-a)$

② Linearità: se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x) + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

③ Additività: Se $a < c < b$, $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

④ Monotonia: $f(x) \le g(x)\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

⑤ Positività: $f(x) \ge 0\ \forall x \in [a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \ge 0$

⑥ $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Classi di funzioni integrabili secondo Riemann

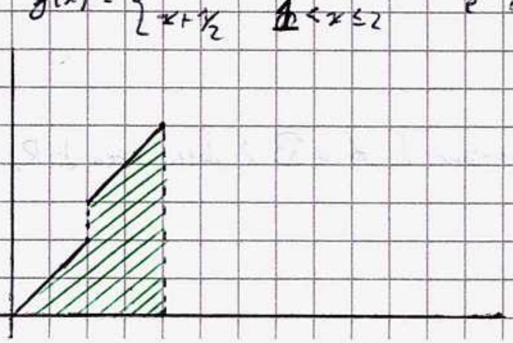
A causa della difficoltà di dimostrazione di integrabilità secondo Riemann, elencheremo diverse proposizioni:

- f continua in $[a,b] \Rightarrow f$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ — log, potenze, radici, esponenziali...
- f limitata e monotona in $[a,b] \Rightarrow f$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$ — Esempio
- $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, con un numero finito di punti di discontinuità $\Rightarrow f$ integrabile secondo Riemann in $[a,b]$

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le 1 \\ x + \frac{1}{2} & 1 < x \le 2 \end{cases}$$

è crescente in $[0,2]$ e dunque ivi integrabile



Esempio di funzione non integrabile secondo Riemann

La funzione di Dirichlet $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Per qualunque partizione D di $[0,1]$, $s(f,D) = 0$; $S(f,D) = 1$

Dunque, f non è integrabile secondo Riemann.

riccardo.polidoro.org

Teorema della Media Integrale

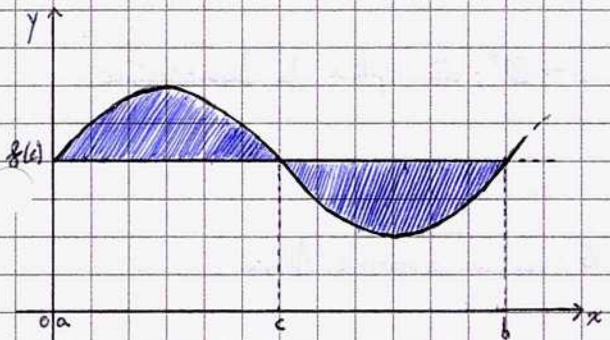
Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a,b]$. Allora esiste almeno un punto $c \in [a,b]$ tale che:

$$f(c) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}.$$

La quantità $\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$ è detta *media integrale* della funzione f sull'intervallo $[a,b]$

Osservazione

Se f è una funzione positiva, il teorema ha un'evidente interpretazione geometrica: esiste un rettangolo di base $[a,b]$ ed altezza $f(c)$ che ha la stessa area del rettangoloide di base $[a,b]$ relativo ad f.



Dimostrazione

Poiché f è continua nel compatto $[a,b]$, per il teorema di Weierstrass è dotata di minimo e massimo: esistono cioè due valori m, M assunti dalla funzione tali che:

$$m \leq f(x) \leq M \ , \ \forall x \in [a,b]$$

Per la proprietà di monotonia dell'integrale,

$$\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a) \Longrightarrow m \leq \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} \leq M$$

Poiché una funzione continua assume tutti i valori compresi tra minimo e massimo, per il Teorema dei Valori Intermedi segue l'asserto.

Teorema fondamentale del Calcolo Integrale

Questo teorema esprime il legame esistente tra integrale definito ("di Riemann) e il corrispondente integrale indefinito.

Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a,b]$. Poniamo

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Allora F è derivabile in $]a,b[$ e risulta $\quad F'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a,b[\Longrightarrow F$ è una primitiva di f

La funzione F si dice *funzione integrale di f*

Dimostrazione

Sia $x \in]a,b[$ e sia $h > 0$ tale che $x+h \in]a,b[$. Allora, per la proprietà additiva dell'integrale,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

Essendo f continua in $[x, x+h]$, per il teorema della media esiste $c_h\,[x, x+h]$ tale che

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h}$$

riccardo.polidoro.org

Effettuando il limite per $h \to 0^+$ (ovvero, applicando la definizione di derivata, in modo tale da dimostrare la derivabilità di F), $c_h \to x$, $f(c_h) \to f(x)$ per la continuità di f, dunque:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to 0^+} f(c_h) = f(x)$$ Analogo per $h<0$

$$\Rightarrow \frac{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt}{h} = \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

Essendo f continua in $[x, x+h]$ $(\subseteq\,]a,b[)$, per il T. della media integrale esiste almeno un punto c_h (dipendente da h) $\in [x, x+h]$ tale che:

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \Longrightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(c_h)$$

Verifichiamo dunque la derivabilità di F, ponendo $h \to 0^+$; ciò implica la dimostrazione sovrascritta.

Applicazione: Formula fondamentale del calcolo integrale

Sia f una funzione continua nell'intervallo compatto $[a,b]$ e sia G una sua primitiva. Allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(x)\Big]_a^b = G(b) - G(a)$$

Dimostrazione

Dal teorema di caratterizzazione delle primitive, esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $G(x) = F(x)+c$, dove F è la funzione integrale definita in $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (T. Fond. Calc. Int.). Allora:

$$\underbrace{G(b) - G(a) = F(b) + c - [F(a)+c]}\, = F(b) - F(a) = F(b) - \overset{F(a)=\int_a^a f(t)dt}{\widehat{0}} = \int_a^b f(x)\,dx$$

$G(a) = F(a)+c \Rightarrow = \int_a^a f(t)dt + c = c$

$G(b) = F(b)+c \Rightarrow = \int_a^b f(t)dt + c = \int_a^b f(t)dt + G(a) \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a)$ □

Esempi

- $\int_1^2 dx$ $\qquad G(x) = x$ è primitiva $\Rightarrow \int_1^2 dx = x\Big]_1^2 = 2-1 = 1$

- $\int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx$ $\qquad G(x) = \frac{\log^2 x}{2} \Rightarrow \int_1^e \frac{\log x}{x}\,dx = \frac{\log^2 x}{2}\Big]_1^e = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

- $\int_e^{e^2} \log x\,dx$ $\qquad$ Int. per parti: $\int \log x\,dx = x\log x - \int dx = x\log x - x + c \quad c \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x) = x(\log x - 1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_e^{e^2} \log x\,dx = x\log x - x\Big]_1^2 = (2e^2 - e^2) - (e - e) = e^2$$

riccardo.polidoro.org

Esempi Int. Def.

- $\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x-1}\,dx$ Applichiamo int per sost.: $\begin{cases} \sqrt{e^x-1} = t \Rightarrow e^x = t^2+1 \Rightarrow x = \log(t^2+1) \\ dx = \frac{2t}{t^2+1}\,dt \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sqrt{e^x-1}\,dx = \int \frac{2t^2}{t^2+1}\,dt = 2\int \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\,dt = 2\int\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2t - 2\,\text{arctg}\,t + c =$$

$$= 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\text{arctg}\sqrt{e^x-1} + c,\ c \in \mathbb{R} \Rightarrow G(x) = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\text{arctg}\sqrt{e^x-1}$$

$$\int_0^{\log 5} \sqrt{e^x-1}\,dx = 2\sqrt{e^x-1} - 2\,\text{arctg}\sqrt{e^x-1}\,\Big]_0^{\log 5} = (2\cdot 2 - 2\,\text{arctg}\,2) - 0 = 4 - 2\,\text{arctg}\,2$$

- Calcolare area del rettangoloide di base $[0, 2\pi]$ relativo alla funzione $f(x) = \cos^2 x$

$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx$ Cerchiamo primitiva $\Rightarrow \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + c,\ c \in \mathbb{R}$

Dunque, $G(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi + 0) = \pi$$

Fine

Analisi I prof.ssa Roberta Schiattarella

24.04.2020

28.05.2020 - 28

riccardo.polidoro.org

riccardo.polidoro.org