# Disegno e Geometria delle Forme

2019-2020 - Facoltà di Ingegneria Edile-Architettura
prof.ssa Maria Ines PASCARIELLO
Appunti di Riccardo M. Polidoro - riccardo.polidoro.org

## Premessa

Un manuale di disegno, a differenza di un testo di Storia, non va consultato in ordine ma in maniera opportuna per approfondire gli argomenti spiegati nelle lezioni frontali; essi contengono inoltre dei richiami ai fondamentali.

Chi non disegna perde la manualità, se non della matita, delle tecniche (come ad esempio la china)
Sebbene questo corso analizzerà e risolverà problemi in maniera grafica, bisogna sempre ricordare che in un processo propriamente scientifico il numero prova la bontà del grafico e viceversa.

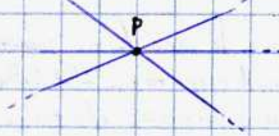
## Geometria Euclidea

La geometria euclidea lavora nel piano; Euclide elenca gli elementi appartenenti ad esso senza però definirlo o distinguerlo da altro: quando si pensa ad un piano, infatti, ci si rapporta sempre con quello **cartesiano**, definito molto tempo dopo.

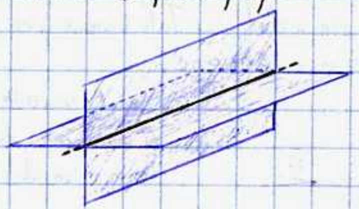
In geometria esistono 3 enti fondamentali: **punto, retta, piano.**

Partendo da ciò, Euclide definì le figure piane, enunciò i postulati per il parallelismo di rette ...
Nelle tre dimensioni, si ragiona anche con i piani; se i punti e le rette considerate giacciono su uno stesso piano allora si parla di geometria piana, ma in realtà sappiamo che il mondo è tridimensionale.

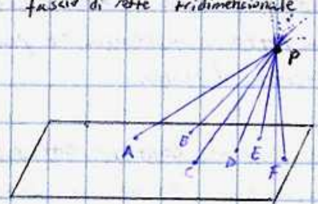
fascio di rette con centro proprio



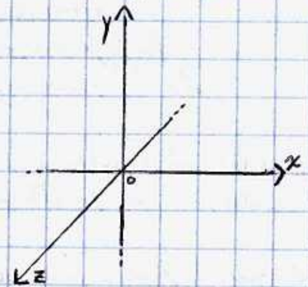

fascio di piani proprio



Stella di rette (in comune su un piano)
"fascio di rette" tridimensionale




Stella di piani (es. spazio cartesiano)




## Geometria Proiettiva

Estende i concetti della geometria euclidea: dato che una regola è così definita solo se è universalmente valida, i fasci di rette parallele devono avere le stesse "proprietà base" del fascio di rette proprio. Euclide intuì ma non riuscì a spiegare la duplice natura degli enti geometrici fondamentali:

- Gli enti geometrici fondamentali possono essere propri o **impropri**; nel secondo caso, vengono indicati col simbolo $\infty$:

$$r /\!/ s \iff r \cap s = \infty \Rightarrow P_\infty$$ unico punto in comune (punto improprio)

Di conseguenza, due rette sono parallele se e soltanto se si incontrano all'infinito. È dunque necessario dare una nuova definizione al concetto di retta:

Una retta è un insieme di punti propri allineati ed un unico punto improprio (che la caratterizza) tale che costruendo un raggio proiettante da un generico punto P che includa un punto della retta e procedendo all'infinito, il raggio proiettante che include il punto improprio risulterà parallelo alla retta stessa.
Un punto improprio è dunque definibile come la direzione della retta cui appartiene; è visibile (punto di fuga), misurabile ($\infty$).

Definito il punto improprio, definiamo anche gli altri due enti:

Retta impropria: retta comune a due piani paralleli, considerabile come la "giacitura" di un piano; è composta da una successione allineata di punti impropri (la linea di orizzonte in mare è assimilabile a retta impropria)

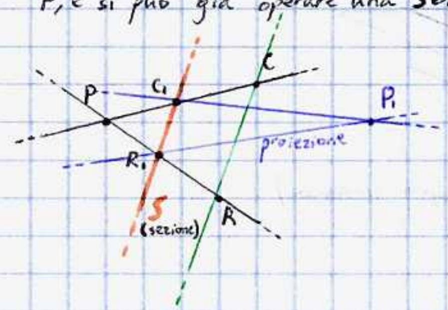
Piano improprio: insieme infinito di punti e rette impropri.

Lo spazio tridimensionale è semplificabile e schematizzabile in due dimensioni: da questa possibilità deriva l'utilizzo di schermi e simulazioni; la terza dimensione va opportunamente trasformata per mantenerla il più possibile simile al vero; per compiere tale trasformazione si ricorre a due operazioni matematiche attuabili all'infinito, che verranno risolte in maniera grafica in questo corso.

- **Proiezione**: unica operazione possibile in assenza di linee; proiettare un punto R da un punto P significa condurre un raggio proiettante da P che includa R.
  *Nell'enunciato riportato risulta di vitale importanza il verso.*

Quando osserviamo un oggetto, stiamo compiendo una proiezione: conduciamo un raggio visivo dall'occhio al punto che stiamo osservando.

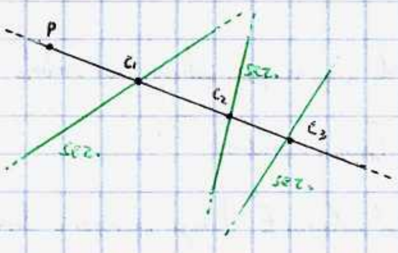

Nel caso in cui P continui ad essere il centro proiettivo e bisogna proiettare un ulteriore punto C, si costruisce un raggio proiettante da P che include C. Tale insieme può già essere considerato un fascio di rette proprio di centro P, e si può già operare una **sezione**.




Attraverso iterazioni successive si possono dedurre le varie forme geometriche, si instaurano delle relazioni proiettive (ad esempio, il rapporto tra CR e $C_1R_1$) che sono misurabili e calcolabili e si instaurano tra enti fondamentali e/o forme.

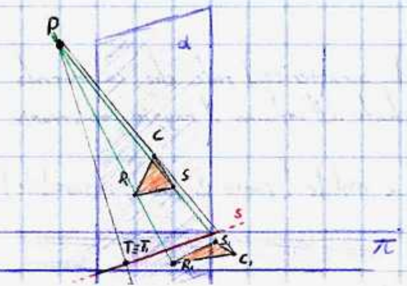
La proiezione di una retta da un punto si risolve attraverso il punto che la caratterizza, ovvero il suo punto improprio (gli altri punti hanno lo "stesso valore").
Analogamente, per la proiezione di un piano da una retta si costruisce un piano che dal punto include la retta impropria che caratterizza il piano.

Per rendere più semplice la comprensione del concetto di proiezione, la si consideri come un'operazione che contiene entrambi gli enti coinvolti. Ne segue necessariamente che per effettuare una proiezione tra enti occorrerà utilizzare un ente di ordine superiore.
Se due punti sono allineati con il centro di proiezione, essi ricevono la stessa proiezione. Operando una sezione passante per uno di tali punti si ha un accenno di definizione di un punto, che non è però propriamente identificato in quanto esso è immagine di ogni punto; introducendo una nuova sezione su un altro punto è possibile dire che tali sezioni sono collegate dalla proiezione su cui si è operato.
Avendo ottenuto un rapporto di due sezioni su una proiezione precedente si è instaurata una relazione in prospettività (Se i punti tagliati da sezione sono 3, vi saranno 3 prospettività tra i punti, considerati a due a due.




## Prospettività

Considerando l'esempio precedente, è possibile effettuare una sezione con un piano, nel quale il punto C è immagine di tutti i punti del raggio proiettante; per identificarlo bisogna operare una successiva sezione con un piano, la quale identifica un punto $C_1$ sul secondo piano. In questo modo, per qualunque segmento RC proiettato da un centro di proiezione P e una sezione con un piano $\alpha$ si ottiene la sua proiettività su $\pi$.
Ciò significa che ogni punto di $\alpha$ ha una sua proiezione su $\pi$.



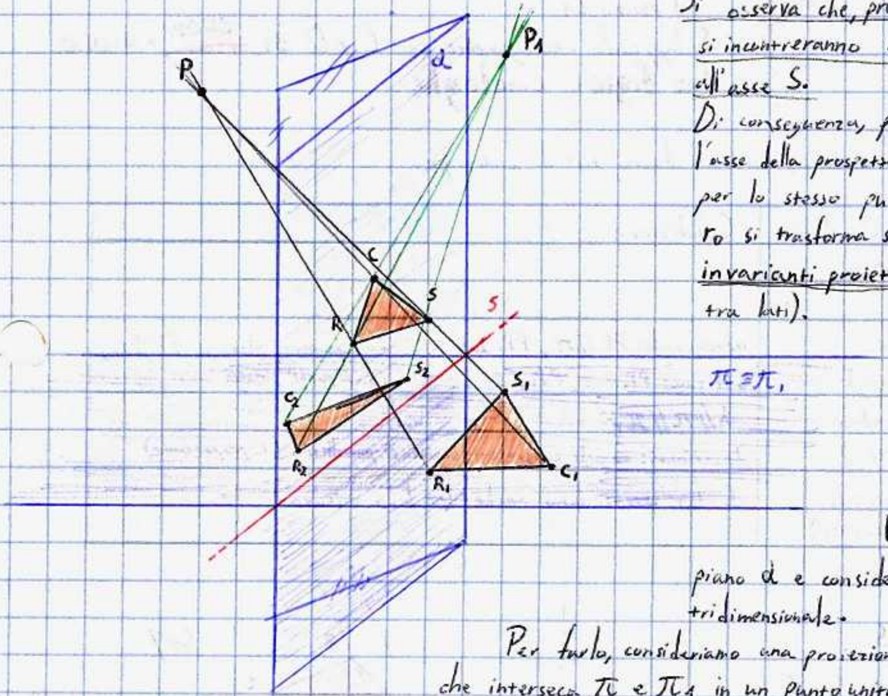

Si nota che il centro di proiezione è esterno ai piani.
La retta s, intersezione tra i piani, è detta asse della prospettività; è composta da infiniti punti uniti (ovvero comuni a entrambi i piani)

$$T \in \alpha,\ T_1 \in \pi;\ T \equiv T_1$$

Considerando una nuova prospettività con centro $P_1$ sempre esterno ai piani, è possibile effettuare un prodotto di prospettività (geometrico) che permetterà di costruire un riferimento geometrico spaziale, ovvero un espediente grafico per rappresentare lo spazio: sarà possibile escludere tutto ciò che ha una condizione di tridimensionalità, poiché considerando il prodotto delle prospettività sarà possibile immaginare l'immagine tridimensionale o comunque ricondurre l'immagine planare alla sua forma spaziale.

$P(\alpha-\pi)$
$s \to$ asse
$A \to A_0$
$C \to C_1$
...

① ⟷ ② $P_1(\alpha-\pi_1)$ → numericamente, tutti i punti sono esauriti in quanto proiettati; si considera dunque un piano omografico sovrapposto, "unito" al precedente.



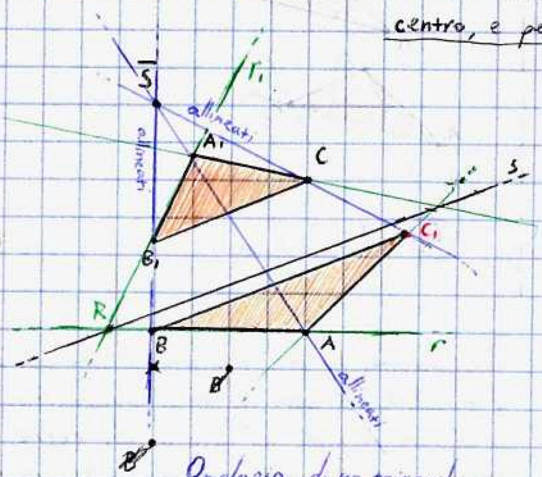

Si osserva che, prolungando i segmenti omologhi, tali prolungamenti si incontreranno in uno stesso punto unito $T \equiv T_1 \equiv T_2$ appartenente all'asse $S$.
Di conseguenza, presa una retta generica $r_0$ su $\alpha$, che interseca l'asse della prospettività in $R$, le sue rette corrispondenti passeranno per lo stesso punto; ne segue che qualunque punto appartenente ad $r_0$ si trasforma su tali rette, preservando determinate proprietà dette invarianti proiettivi (come l'appartenenza a una retta, la proporzione tra lati). → birapporto

Oltre a tale proprietà, si osserva inoltre che il punto appartenente a $\pi$ corrispondente ad un punto appartenente ad $\alpha$ risulterà allineato alla proiezione di tale punto dal centro della prospettività.

Utilizzando tali regole, sarà possibile elidere il piano $\alpha$ e considerare la schematizzazione planare della figura tridimensionale.

Per farlo, consideriamo una proiezione da $P$ a $P_1$ e da $P_1$ a $P$, ottenendo una retta che interseca $\pi$ e $\pi_1$ in un punto unito denotato con $\overline{S}$ ($S \equiv S_1$). Tale punto è detto centro, e permette di elidere il piano $\alpha$.

$$\begin{cases} ① \; P(\cancel{\alpha}-\pi)_s \quad A_0 \to A \\ ② \; P_1(\cancel{\alpha}-\pi_1)_s \quad A_0 \to A_1 \end{cases}$$




Omologia di un triangolo A, B, C

## Omologia

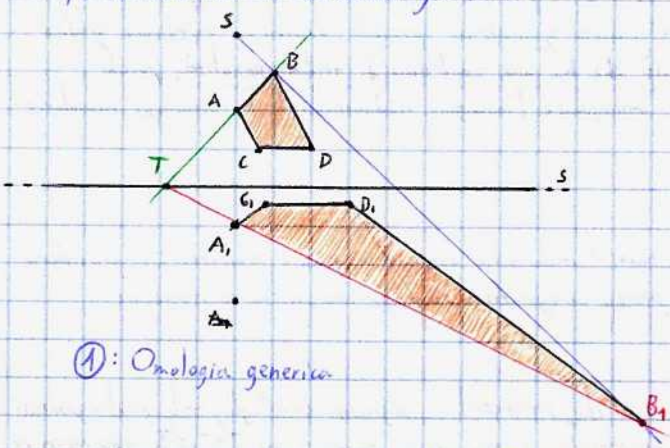
Un'omologia è un prodotto di due prospettività in cui esiste un asse (una unica retta) e un centro (un punto unico) in cui rette corrispondenti s'incontrano sull'asse e punti corrispondenti sono allineati con il centro. Essa si indica con il simbolo $\omega$.

$$\omega(\overline{S}, s)$$

Per ottenere l'omologo di $C$, sappiamo che $C_1$ sarà allineato a $C$ e ad $\overline{S}$. Unendo un generico punto con $C$ otterremo una retta che, intersecando l'asse, stacca su di esso un punto unito $T$, costruendo un triangolo in cui si preservano certi invarianti.

Un'omologia si può eseguire partendo da un asse, un centro e una coppia di punti corrispondenti ($A$ e $A'$)

Esempio di risoluzione di un esercizio grafico:




①: Omologia generica

I dati sono stati rappresentati in nero; si chiede di trovare l'omologo di B e, operando analogamente per i punti C e D definiti in un secondo momento, di rappresentare le due figure omologhe così ottenute.

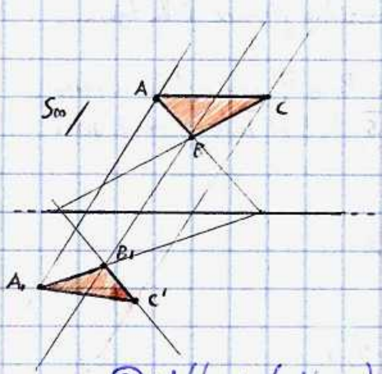
- Allineiamo B con il centro, identificando la retta cui appartiene $B_1$.
- Prolunghiamo il segmento AB fino ad incontrare in T l'asse dell'omologia
- Uniamo T con $A_1$; prolungando tale segmento otterremo una retta incidente alla retta congiungente S e B, identificando il punto $B_1$

Sviluppando analogamente per C e D si costruiscono due figure omologhe

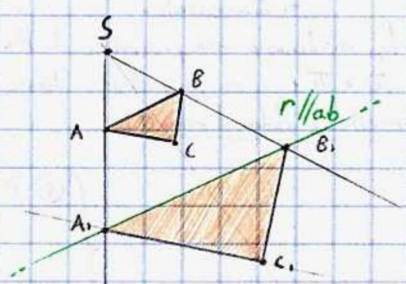
Poiché gli enti geometrici sono di duplice natura, esistono diversi tipi di omologia.

Aumentano gli invarianti ↓

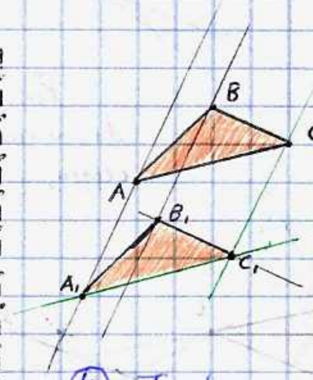
| n° | Omologia | Centro | Asse | Tipo di Omologia | Condizione |
|---|---|---|---|---|---|
| ① | $\omega(S, s)$ | proprio | proprio | Generica | |
| ② | $\omega(S_\infty, s)$ | improprio | proprio | Affine (Affinità) | ortogonale: $PP_1 // \pi$, $PP_1 \perp s$<br>obliqua: $PP_1 // \pi$, $PP_1 \not\perp s$<br>Logicamente, oltre a $PP' // \pi$, i due punti possono essere impropri |
| ③ | $\omega(S, s_\infty)$ | proprio | improprio | Similitudine (Omotetia) | $\alpha // \pi // \pi_1$<br>Invarianti: angoli congruenti, segmenti paralleli (in proporzione) |
| ④ | $\omega(S_\infty, s_\infty)$ | improprio | improprio | Traslazione (Congruenza) | I lati preservano anche la loro misura |




②: Affinità (obliqua)




③: Omotetia




④: Traslazione

| Tipo Omologia | Condizione | ~~Speciale~~ Altro |
|---|---|---|
| Speciale | Centro dell'omologia appartiene all'asse dell'omologia generica | |
| Affine Ortogonale | Distanza di enti corrispondenti congruenti | È una simmetria assiale. |
| Omotetia | fattore di scala noto | Rapidi calcoli |

Logicamente, se una retta passante per un punto è parallela all'asse la retta corrispondente sarà anch'essa parallela all'asse poiché rette corrispondenti s'incontrano in uno stesso punto (in questo caso improprio).

# Metodi di Rappresentazione

I metodi di Rappresentazione costituiscono il "linguaggio grafico"; sono stati probabilmente sempre utilizzati, sebbene in maniera intuitiva; la loro codificazione è invece molto successiva all'epoca dei loro primi utilizzi, probabilmente poiché tale linguaggio era visto più in chiave artistica che tecnica.

Tutti i metodi di rappresentazione sono inseriti nella geometria descrittiva, che si occupa di comunicare informazioni su oggetti rappresentandoli in modo inequivocabile su uno o più piani.

Come si può immaginare, questi metodi si basano sulle operazioni fondamentali di **sezione** e **proiezione**, partendo dagli enti fondamentali nella loro duplice natura.

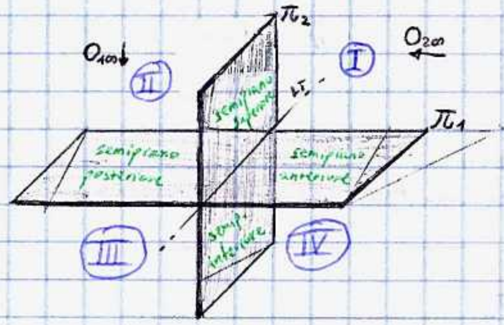
Per operare seguendo un metodo bisogna seguirne le regole. In particolare, risulta necessario fissare un sistema di riferimento, cui si aggiungono eventuali convenzioni.

# Il metodo di Monge: le Proiezioni Ortogonali

Codificato nell'~~'800~~ 1798 nel libro "Lezioni di Geometria Descrittiva" del matematico Gaspard Monge, tale metodo (detto anche di doppia proiezione) opera su uno spazio geometrico costituito da un piano orizzontale ed uno ad esso ortogonale (piano verticale, indicati con $\pi_1$ e $\pi_2$), che dividono lo spazio in 4 diedri che formano a due a due angoli diedri ortogonali.

La retta ottenuta dall'intersezione di tali piani si dice Linea di Terra; per convenzione, i diedri sono ordinati in senso antiorario (I, II, III, IV)

Affinché un oggetto riceva una rappresentazione su tale sistema, occorre fissare un sistema proiettivo con due centri di proiezione (unicità della rappresentazione) impropri, perpendicolari ai piani corrispettivi:

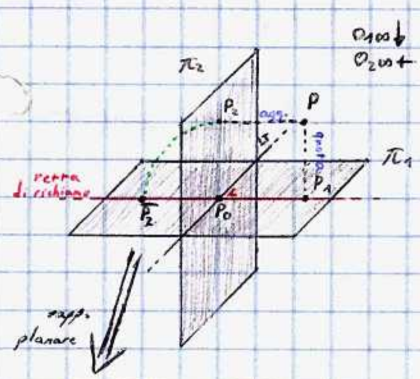



Dimostrando che è possibile rappresentare gli enti geometrici fondamentali nel piano, si dimostra (di conseguenza) che è possibile rappresentare qualsiasi oggetto reale.

### Proiezioni ortogonali del punto P:

Effettuando due proiezioni di P dai centri proiettivi, esse saranno sezionate dai piani determinandone le relative immagini sui piani:

$$P_1 \in \pi_1 \ , \ P_2 \in \pi_2$$

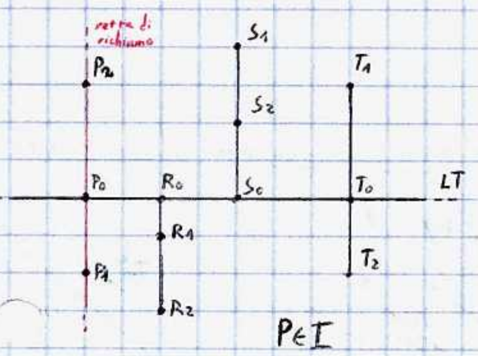



Si definisce "quota" di P la distanza di P dal piano orizzontale; si definisce invece "aggetto" di P la sua distanza dal piano verticale.

Individuando un punto $P_0$ sulla linea di terra*, ~~con~~ è possibile leggere sul piano le informazioni geometriche tridimensionali:

$$P(P', P'') \ , \ \underset{\text{quota}}{\overline{P_0P''}} \ ; \ \underset{\text{aggetto}}{\overline{P_0P'}}$$

(* ottenuto dalle perpendicolari ad essa condotte da $P_1$ e $P_2$)




$P \in I$

$R \in IV$

$S \in II$

$T \in III$

Per rendere la rappresentazione puramente planare, dopo aver effettuato le proiezioni "si ribalta" $\pi_2$ in modo tale che i relativi punti si trovino su $\pi_1$ ($\pi_2$ va ruotato con il semipiano sup. verso quello post.), determinando $(P_2) = \overline{P_2}$

Ne segue che $\overline{P_2}$, $P_0$ e $P_1$ sono allineati su una retta perpendicolare alla linea di terra; è possibile leggere quota e aggetto sul piano.

La retta su cui giacciono $\overline{P_2}$, $P_0$ e $P_1$ si dice retta di richiamo.

Si osserva che tutti i punti aventi quota [aggetto] nulla hanno la seconda [prima] proiezione sulla linea di terra; tutti i punti con quota e aggetto nulli si trovano sulla linea di terra, che risulta essere una retta unita.

$P(P_1, P_2) : |P_1| = |P_2|$ appartengono ai piani bisettori.

Per contenere un punto improprio, un piano deve essere parallelo alla sua direzione.

## Proiezioni ortogonali della retta r:

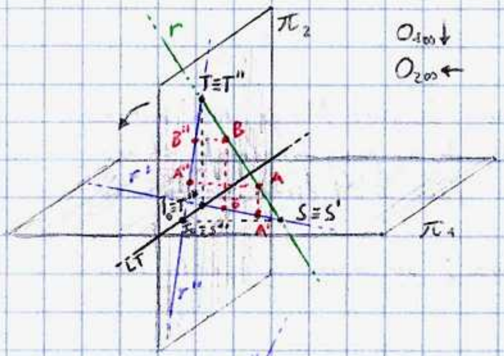
Nella rappresentazione di una generica retta nello spazio, si osserva che essa interseca i piani del sistema proiettivo in due punti particolari, detti **tracce della retta**. Poiché per due punti passa una e una sola retta, le tracce identificano la retta; per rappresentare le immagini della retta sarà infatti sufficiente proiettare le tracce e congiungere le immagini omologhe dei punti.

Osservazione: le tracce della retta hanno quota o aggetto nullo; le loro proiezioni si trovano nel punto stesso e sulla linea di terra.

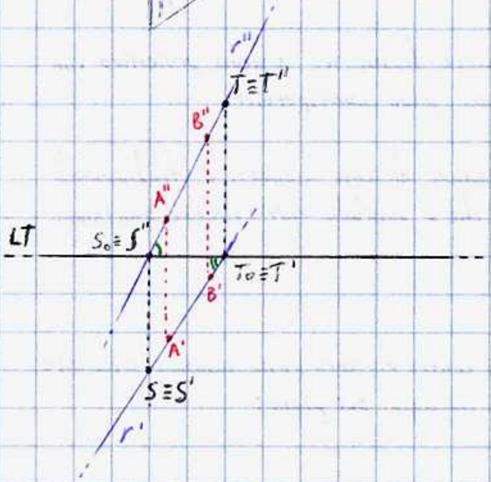
Logicamente, un segmento appartenente ad una retta r avrà le prime componenti su r' e le seconde su r''.

Si osserva inoltre che la retta forma due **angoli** con i piani del sistema proiettivo.

Per rappresentare una retta in proiezioni ortogonali risulta necessario avere le tracce o due immagini di punti appartenenti ad essa.

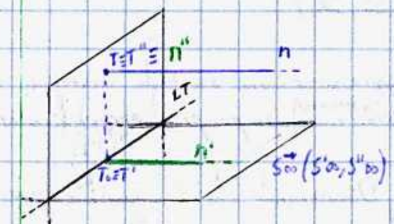



$r\,(r', r'')$ ; $S\equiv S'$, $T\equiv T''$



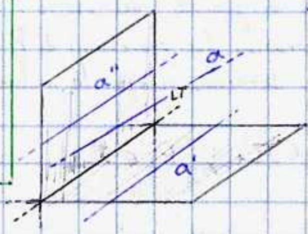

### Casi particolari

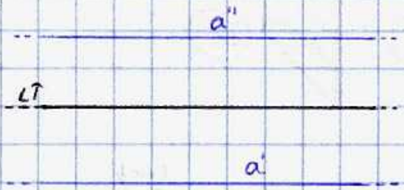
- Retta ortogonale ad uno dei piani, parallela all'altro (r. proiettante)
  Esempio: $\perp\pi_2$, $//\pi_1$ (analogo per l'altra)



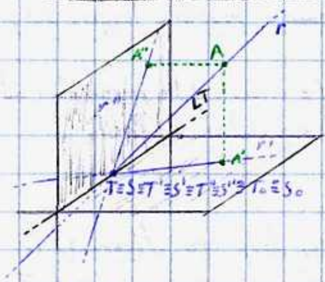


- Retta parallela a entrambi i piani:
  aggetto e quota sono fissi



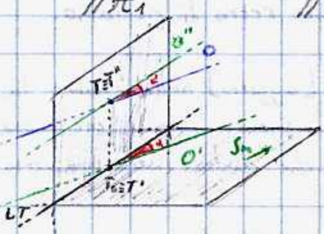



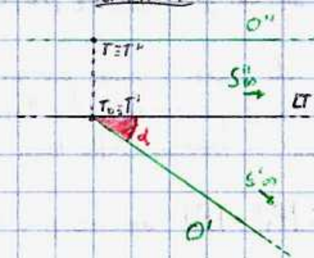

- Retta generica che interseca i piani sulla linea di terra: bisogna fissare almeno un altro punto appartenente ad essa.

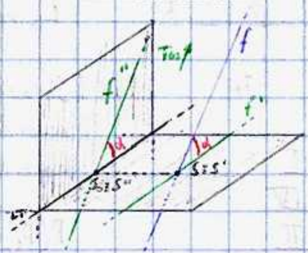


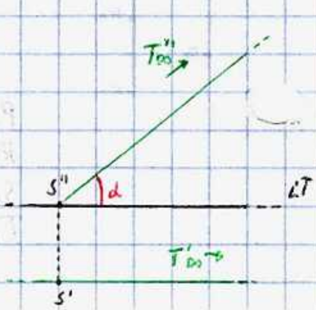


- Retta Orizzontale, Retta di fronte: Sono particolari rette parallele a un piano e genericamente inclinate rispetto all'altro.
  $//\pi_1$ $//\pi_2$



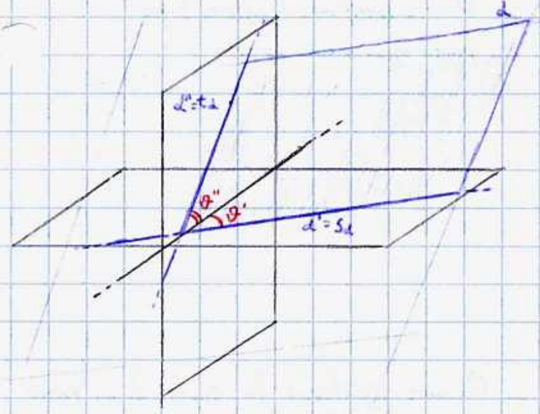



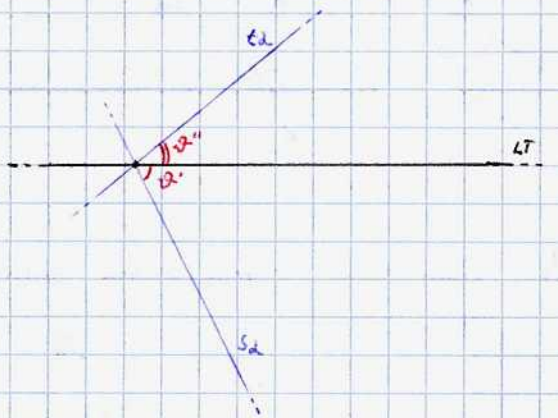




∈ piano orizz/di fr.

Proiezioni ortogonali del piano $\pi$:

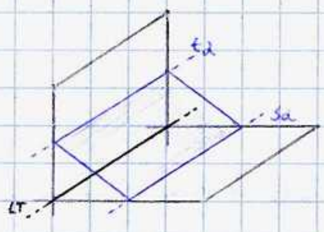
Nel proiettare un piano, esso si intersecherà con i piani del sistema di riferimento determinando due rette, che rappresentano le tracce del piano; possono essere proprie o improprie a seconda della giacitura del piano.
Affinché due rette rappresentino un piano, la loro intersezione deve appartenere alla linea di terra.

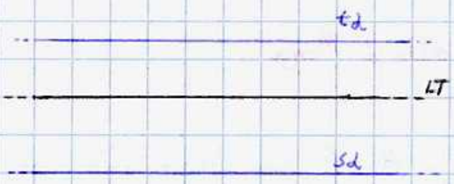


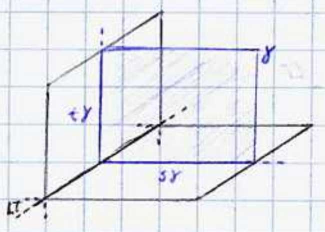

## Casi Particolari

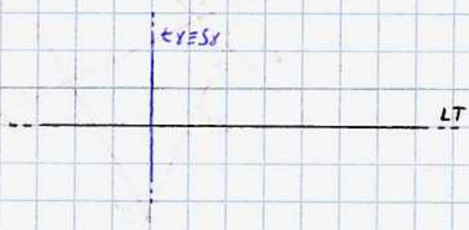
- Piano parallelo alla linea di terra:



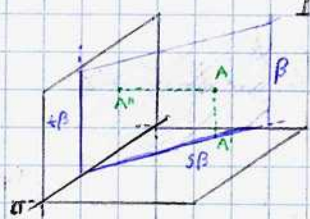

- Piano di Profilo, perpendicolare ad entrambi i piani del sistema di riferimento

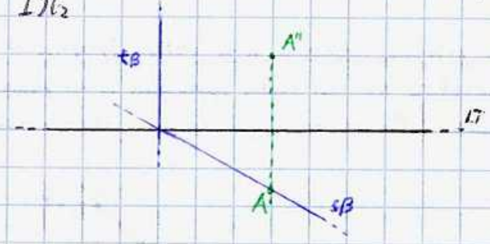



- Piano proiettante in prima ($\perp \pi_1$) / seconda ($\perp \pi_2$) ~~posizione~~ proiezione: Perpendicolare ad un piano, genericamente inclinato rispetto all'altro

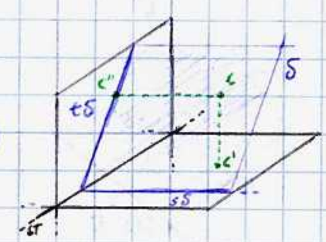
I

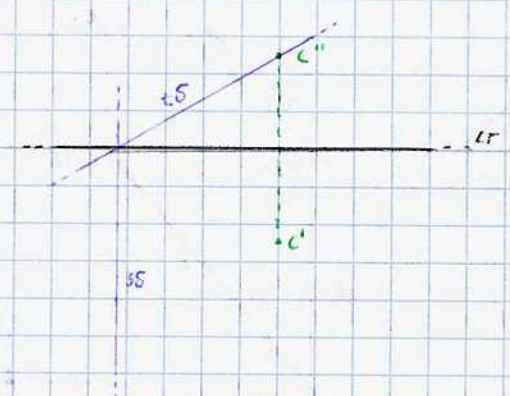



$A \in \beta \Leftrightarrow A' \in s\beta$

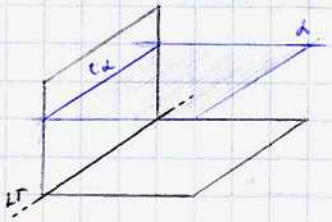
II

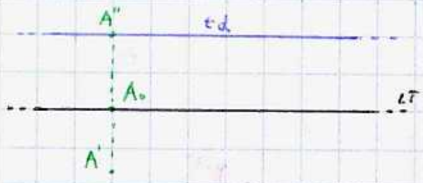



$C \in \delta \Leftrightarrow C'' \in t\delta$

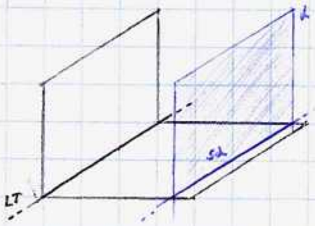
- Piano Orizzontale: Prima traccia impropria, seconda propria




⚠ Occorre specificare l'aggetto di un punto appartenente ad esso

- Piano Verticale: Prima traccia propria, seconda impropria

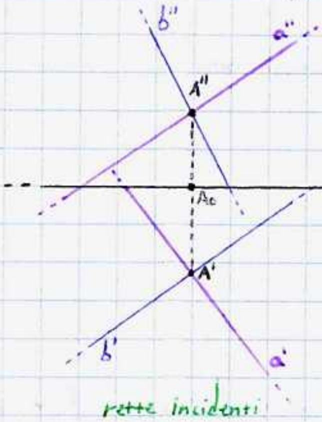




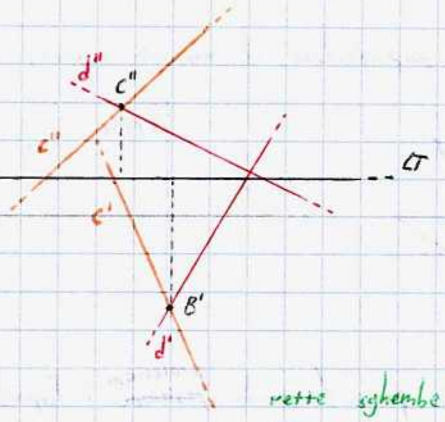
⚠ Occorre specificare la quota di un punto appartenente ad esso

## Intersezioni tra enti geometrici nel metodo di Monge

- Rette incidenti o sghembe: Solo se A' e A'' sono allineati sulla retta di richiamo le rette si intersecano, altrimenti si dicono sghembe.



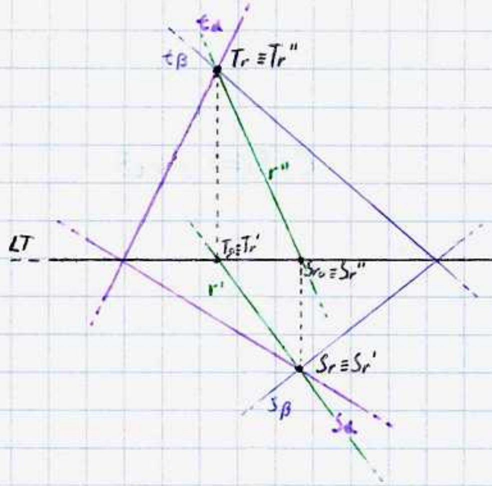

rette incidenti

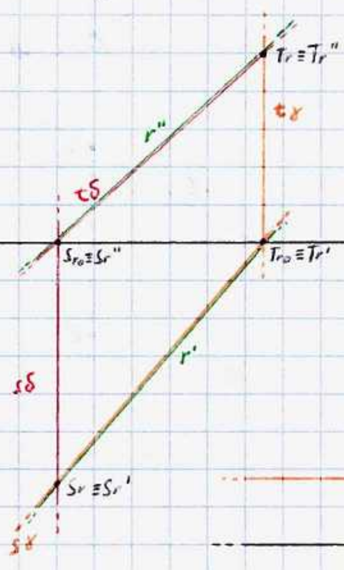


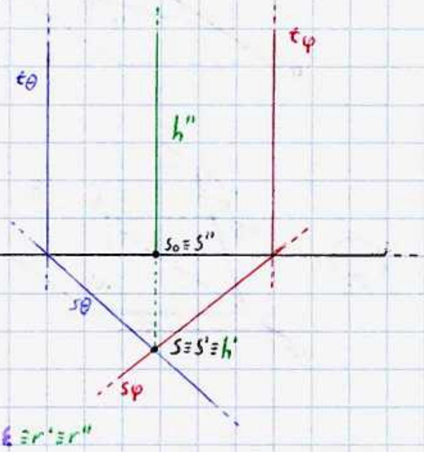

rette sghembe (nessun punto in comune)

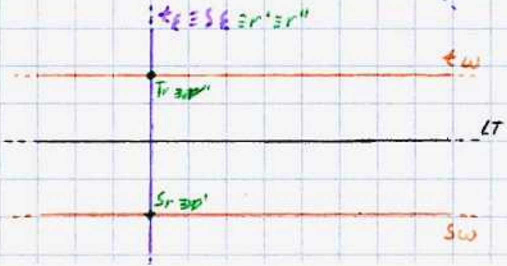
- Intersezione tra piani: è sempre possibile, determina una retta (propria o impropria).

Per dimostrare che una retta appartiene a un piano, è sufficiente dimostrare che le tracce della retta appartengono alle tracce del piano.

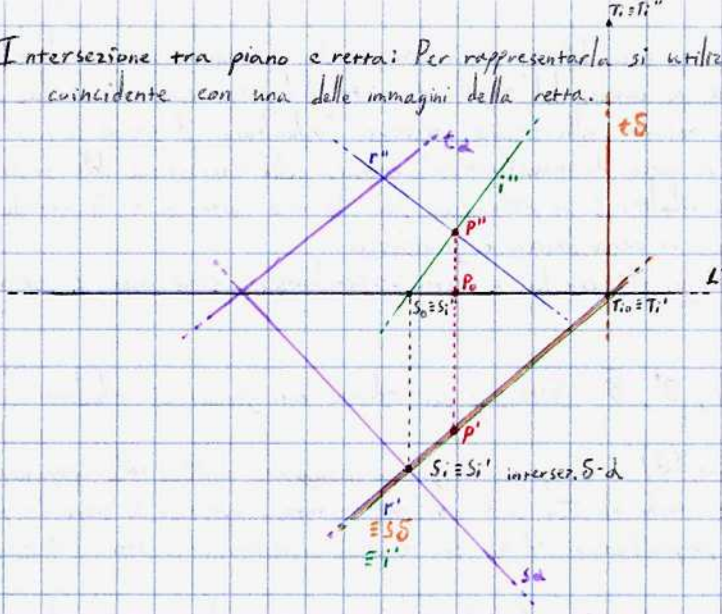


• Intersezione tra piano e retta: Per rappresentarla si utilizza un piano proiettante che ha una sua traccia coincidente con una delle immagini della retta.



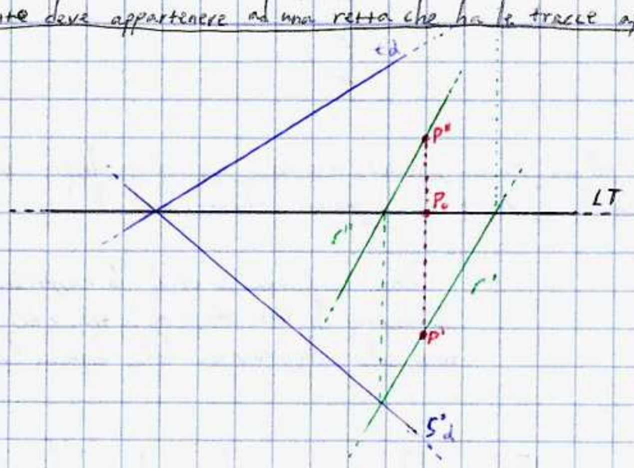

$P(P',P'') = \alpha(s_\alpha, t_\alpha) \cap r(r',r'')$

$i \in \delta \Rightarrow i' \parallel s\delta$
$i \in \alpha \Rightarrow i'' \parallel t\alpha$

$i = \delta \cap \alpha$

• Appartenenza di un punto a un piano: $P \in r,\ r \in \pi \Rightarrow P \in \pi$

Il punto deve appartenere ad una retta che ha le tracce appartenenti alle tracce del piano.




$P \in r \in \alpha$

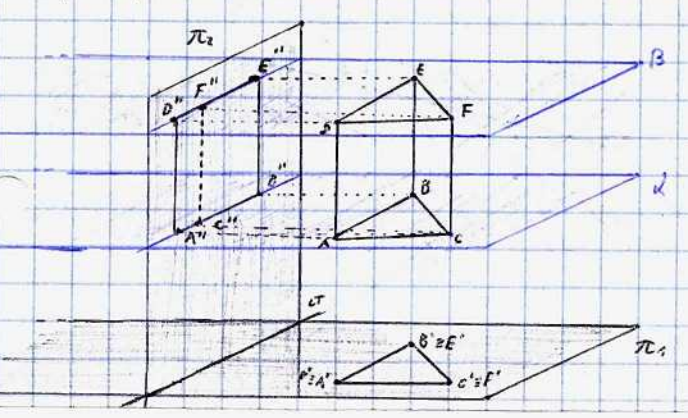
Per le condizioni di parallelismo o perpendicolarità tra enti geometrici, si invita al ragionamento, partendo dalle condizioni di parallelismo:

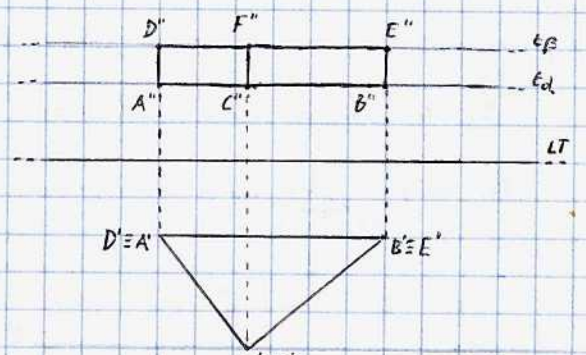
· Parallelismo tra rette: hanno le corrispettive immagini parallele

· Parallelismo tra piani: hanno le tracce corrispondenti parallele

· Parallelismo tra retta e piano: la retta risulta parallela ad una retta del piano

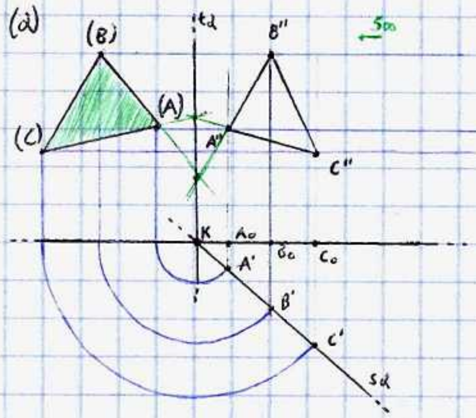
Supponendo ora di voler proiettare da un piano orizzontale $\alpha$ una figura, si osserva che essa risulterà proiettata in vera forma e grandezza su $\pi_1$ (detta pianta), mentre in seconda proiezione risulterà schiacciata; operando lo stesso procedimento per una stessa figura appartenente ad un diverso piano orizzontale, si otterrà un'unica pianta ~~con~~ e due figure "schiacciate" in seconda proiezione; unendo i punti omologhi di tali figure si ottiene un prisma retto, la cui seconda proiezione è detta prospetto (se taglia, si dice sezione). Un ragionamento analogo vale per i piani verticali.



Se la figura appartiene a un piano proiettante, una delle sue proiezioni sarà contenuta in una delle tracce del piano; l'altra non è in vera forma e grandezza a causa dell'angolo formato dal piano con uno dei due piani del sistema proiettivo; per ottenere le informazioni relative alla figura occorre "ribaltare" il piano su uno dei piani del sistema proiettivo. Ciò si opera costruendo un arco di circonferenza centrato nell'intersezione delle tracce, di raggio pari alla distanza con la proiezione da ribaltare; si prolungano poi le rette ottenute e le seconde proiezioni perpendicolarmente, ottenendo una figura in vera forma e grandezza.

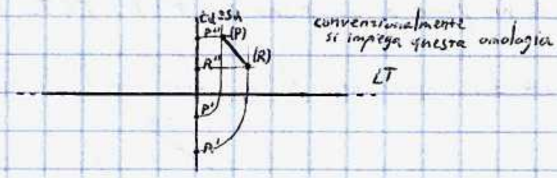
Sintetizzando, si opera un'omologia affine ortogonale con la traccia perpendicolare come asse e centro improprio ad essa ortogonale (per definizione).



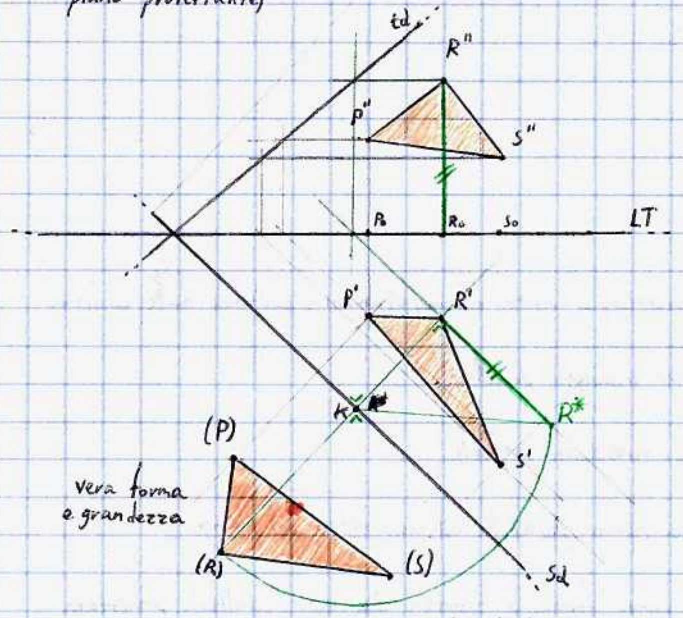

$(B)$, $B^*$, $\overline{B}$: Notazione per indicare enti geometrici ribaltati

Logicamente, $(\alpha)$ è un piano omografico sovrapposto a $\pi_2$; tale operazione è inoltre eseguibile anche su $\pi_1$ (nel caso rappresentato, si riportano le quote dei punti staccando segmenti perpendicolari ad $S\alpha$ con le prime proiezioni come estremi destri)

Se il piano è di profilo, le ~~due~~ figure piane hanno entrambe le proiezioni schiacciate, le due omologie sono simmetriche e operabili indifferentemente.



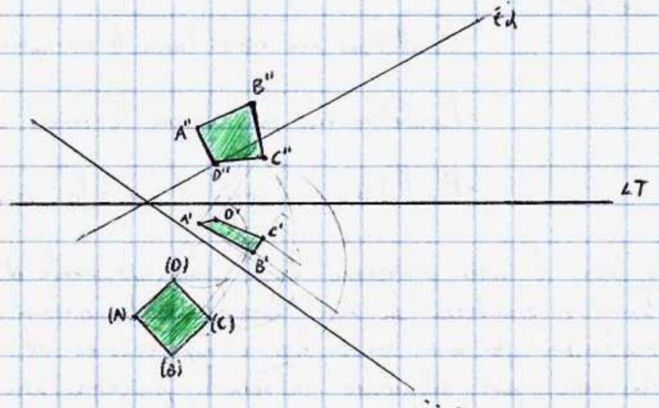

Nel caso in cui la figura appartenga ad un piano generico, occorrerà operare un "doppio ribaltamento"; nella costruzione sfrutteremo la condizione di appartenenza di un punto ad un piano mediante rette di fronte o orizzontali (si sfrutta un piano proiettante)




operabile anche omologia di ribaltamento

Viene esplicitata in verde la rappresentazione del punto (R).
Si osserva inoltre che, note le tracce del piano, è sufficiente avere una sola delle proiezioni della figura: l'altra si può ricavare.

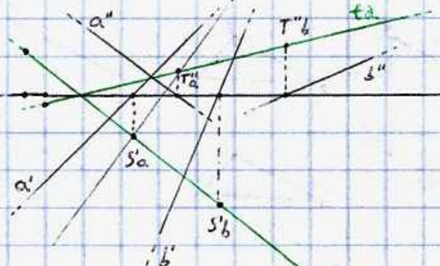
Ovviamente, mediante il procedimento inverso, è possibile ~~piane~~ ricavare le proiezioni di una figura piana in vera forma e grandezza su un piano generico:

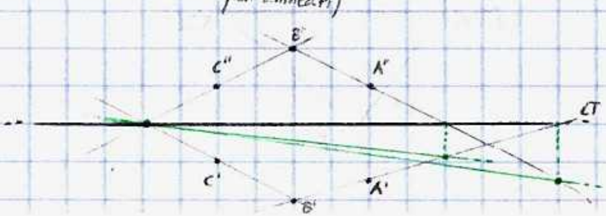



Risulta pressoché elementare che le regole di geometria elementare si possano tradurre nel metodo di Monge:

- Per due punti passa una e una sola retta

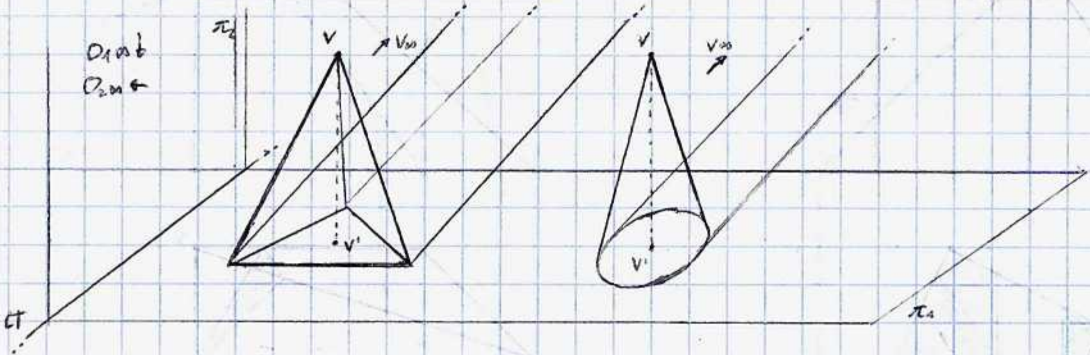
- Per tre punti passa uno e un solo piano (non allineati)



Immaginando che una determinata figura piana si ottenga tramite una proiezione da un punto esterno al piano, è possibile costruire figure solide particolari:

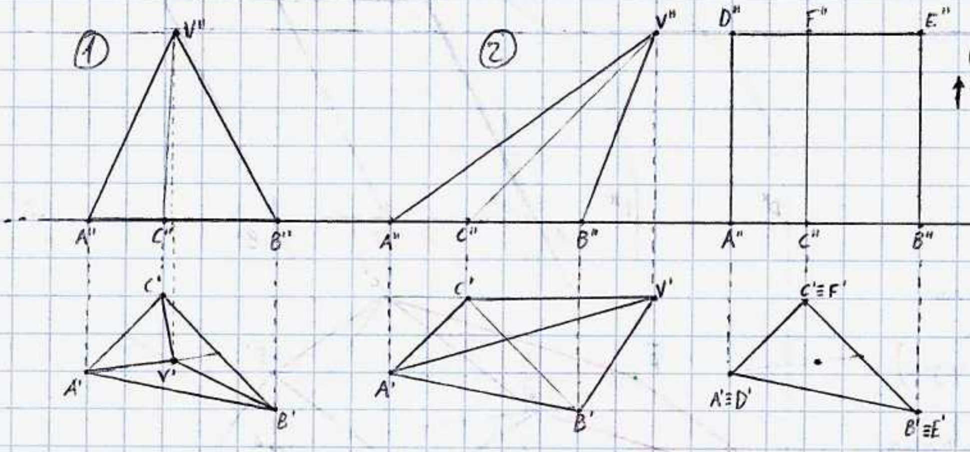
| Poliedri (base numero finito di lati) | | | | Superfici Rigate (la base è una curva piana finita) | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Prismi ($V_\infty$) | | Piramidi ($V$) | | Cilindri ($V_\infty$) | | Coni ($V$ proprio) | |
| Retti | Obliqui | Rette | Oblique | Retti | Obliqui | Retti | Obliqui |

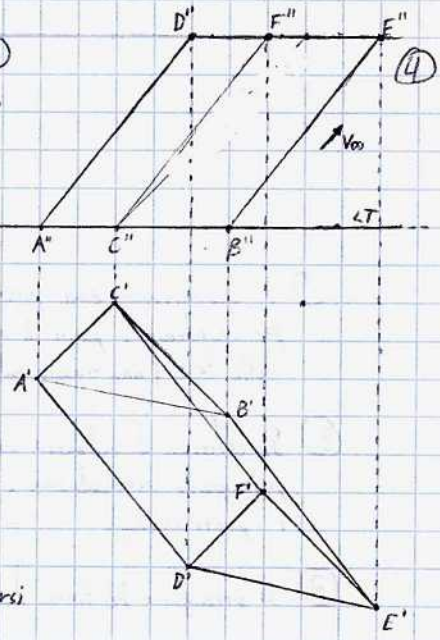



Nel caso in cui $V$ sia proprio, se $V'$ coincide col baricentro della figura di base il solido si dice retto, altrimenti è obliquo.
Nel caso in cui $V$ è improprio, se la sua direzione è perpendicolare al piano che contiene la base, il solido è retto, altrimenti è obliquo.

Logicamente, per ottenere prismi e cilindri definiti (con dimensioni calcolabili) sarà necessario sezionare i prismi/cilindri con un piano parallelo al piano che contiene la base.

Prima di esplicitare le proiezioni in monge di prismi e piramidi (analogo per coni e cilindri), si specifica che in tale metodo si raffigurano gli oggetti come se fossero visti dai centri di proiezione; gli spigoli nascosti vanno dunque rappresentati con uno spessore di linea minore.

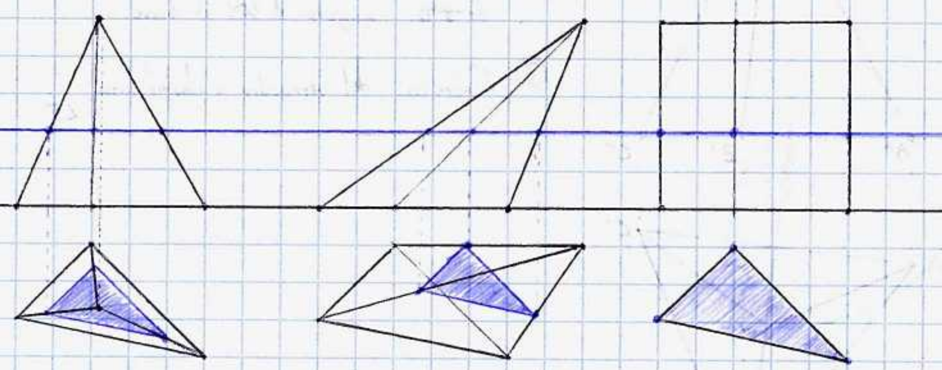


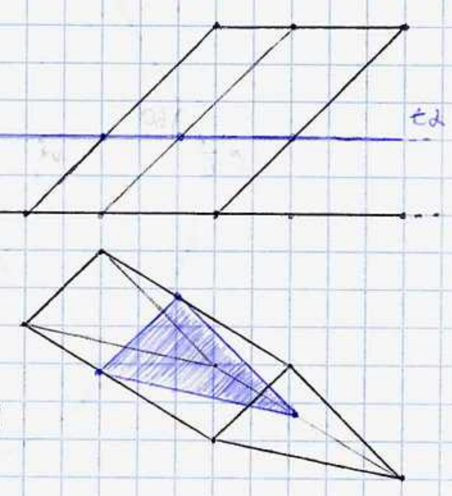




Sezionando tali figure con piani orizzontali,

①,②: Si ottengono figure piane simili alla base, che si rimpiccioliscono all'avvicinarsi del piano al vertice.

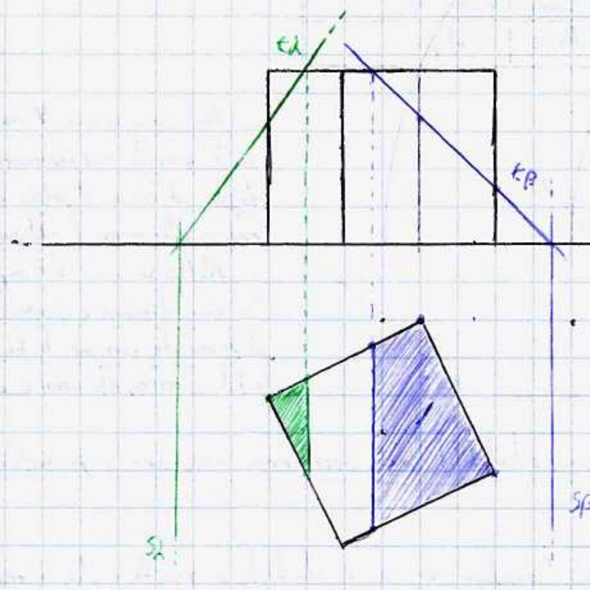
③,④: Si ottengono figure piane congruenti alla base, traslate lungo la direzione di $V_\infty$.

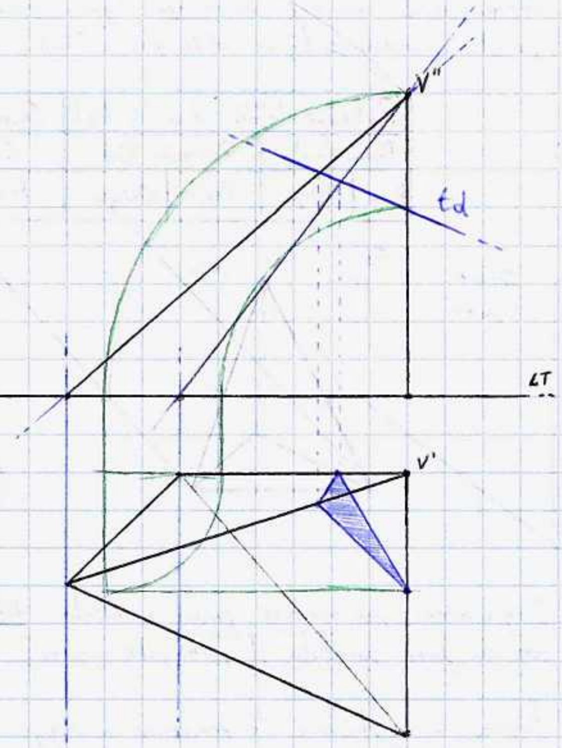


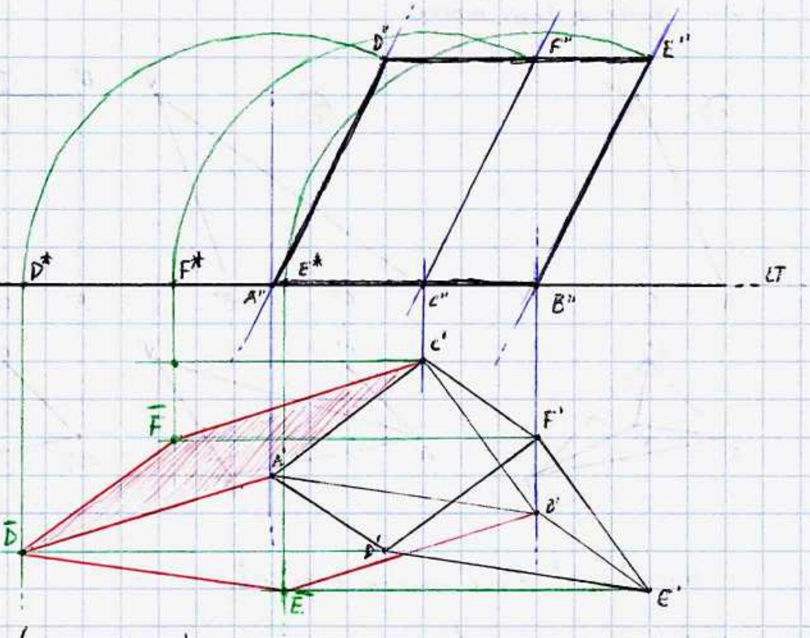



(I punti non sono stati esplicitati per garantire facilità di lettura grafica)

Esercizi di Ribaltamento di facce di poliedri e proiezioni/sezioni



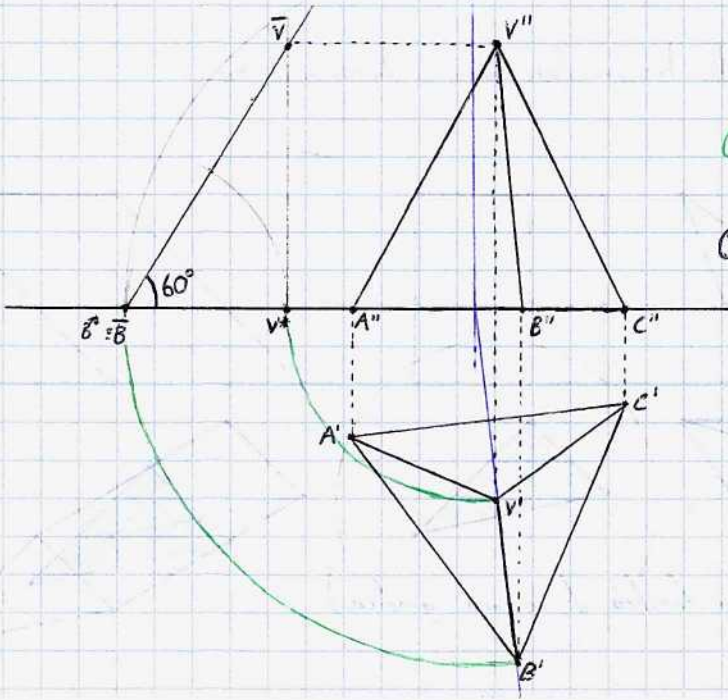




① Si costruiscono piani proiettanti per ribaltare i punti di una delle basi (una traccia sullo spigolo)

② Si effettua il suddetto ribaltamento, prolungando verticalmente e orizzontalmente i punti omologhi

③ Si ottengono le facce del prisma in vera forma e grandezza




① Si costruisce un piano proiettante per ribaltare il lato obliquo

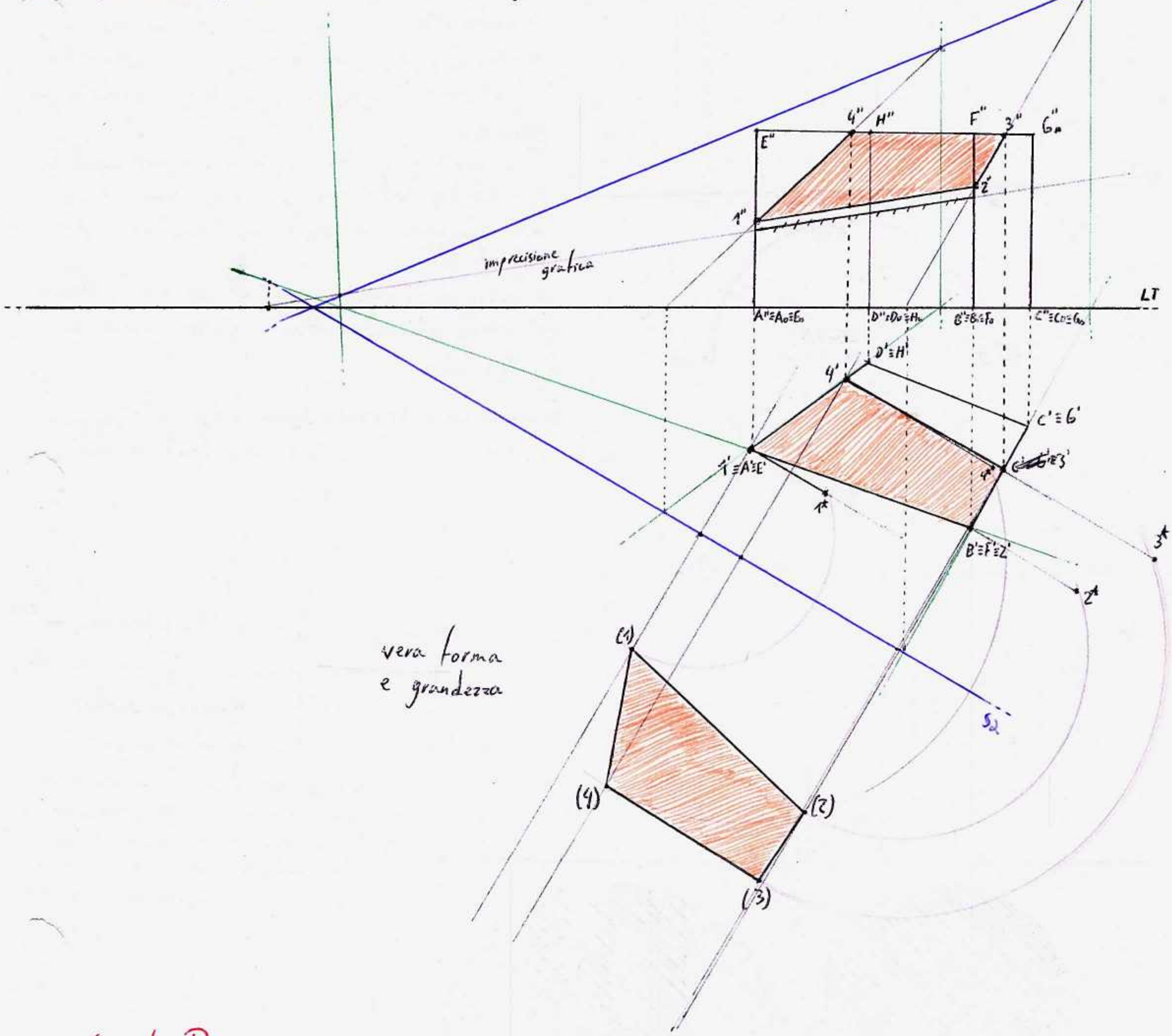
② Si procede nel ribaltamento, sfruttando ~~la lunghezza di V'B'~~ l'angolo di 60° di base

③ L'altezza del tetraedro è identificata

LT

# Esercitazione di riepilogo: intersezione tra una figura solida e un piano generico

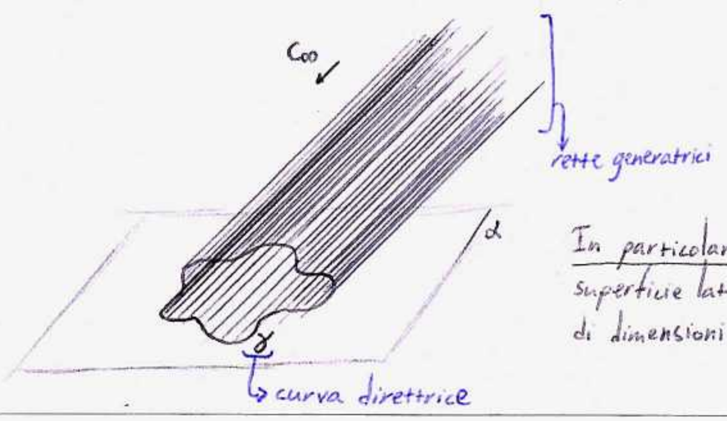
Operabile come intersezione tra piani (semplice) o tra rette di spigolo verticale e piano. Le prime immagini (le seconde lo sono ugualmente) NON SONO in vera forma e grandezza, occorre ribaltarle.




## Superfici Rigate

Disegnando una curva su un piano ed eseguendo lo stesso procedimento operato sui poligoni (proiezioni da un punto, proprio o improprio che sia) si ottengono coni e cilindri.

Le curve impiegate come "base" di tali figure possono essere:
- Regolari (Circonferenza, ellisse, iperbole, parabola...)
- Irregolari (infinite)
- Aperte (es. parabola)
- Chiuse (es. ovale)

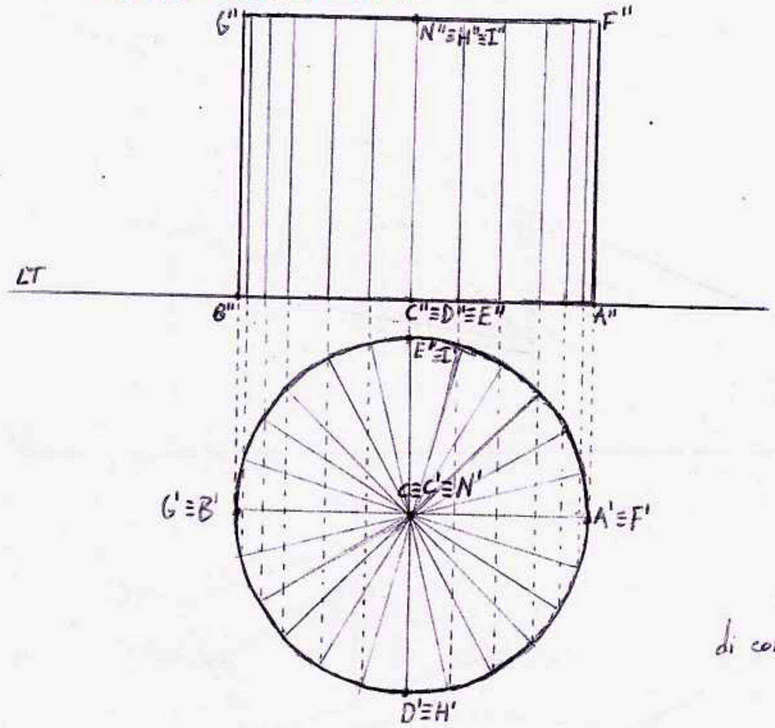



La curva direttrice determina se la figura è circolare, ellittica, iperbolica... (es. cilindro circolare)

<u>In particolare, il cilindro è una figura rigata sviluppabile:</u> la sua superficie laterale è sviluppabile su un piano come un rettangolo di dimensioni $2\pi r$, $h$.

# Rappresentazione di figure rigate nel Metodo di Monge

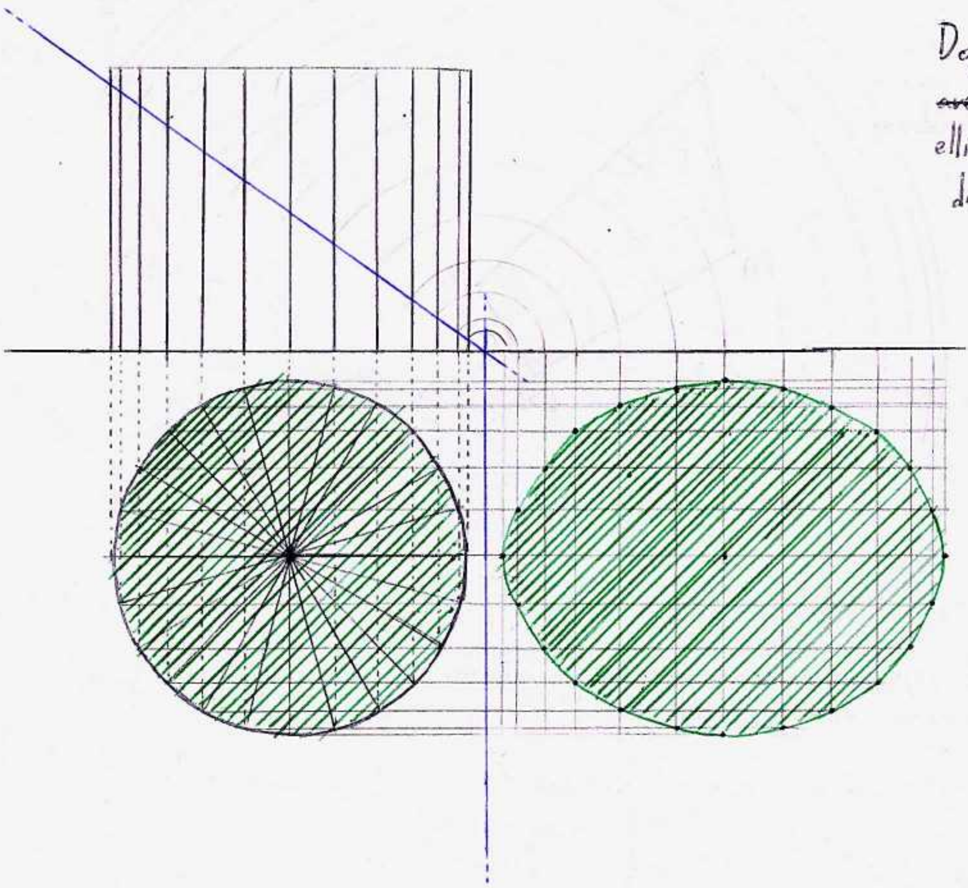
- Cilindro Circolare retto:




Per quanto sarebbe sufficiente la figura marcata in nero per identificare efficacemente il cilindro, per completare l'operazione si rappresentano più generatrici, rendendo la rappresentazione grafica più allusiva.
Tale operazione si effettua dividendo in parti uguali la circonferenza (fascio proprio di rette con centro nel centro della circonferenza con inclinazione relativa fissa - in questo caso di 15°)
Si osserva che le seconde immagini delle generatrici "si affollano" agli estremi, garantendo l'efficacia dell'effetto allusivo che si vuole veicolare.

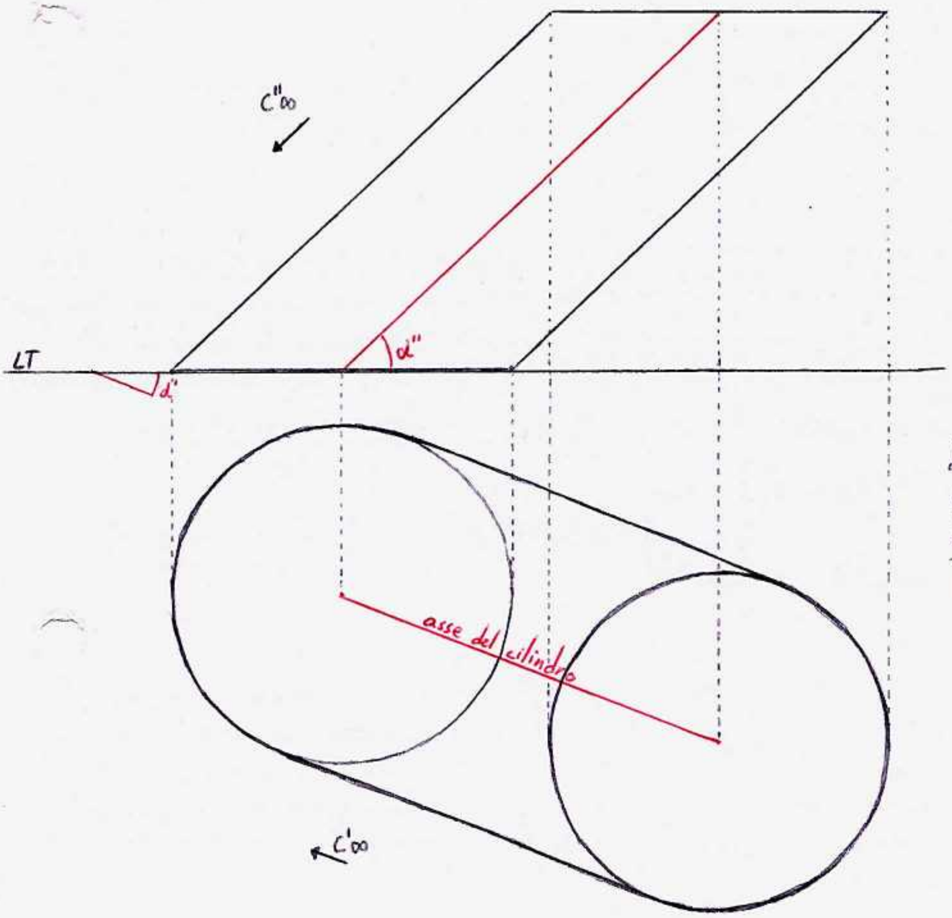
Eccetto in rari casi (in cui si degenera in figure rette), la sezione di coni e cilindri determina una curva piana (es: le coniche)

## Sezione di un cilindro circolare retto: l'ellisse



Dopo aver effettuato il ribaltamento, ~~ed~~ per trovare ~~aver identificato~~ diversi punti appartenenti allo ellisse, si applica il **metodo di Serlio**: si disegnano due circonferenze che hanno per diametro gli assi e le si dividono in parti uguali, costruendo punti dati ~~tra~~ dalle intersezioni tra le parallele/perpendicolari agli assi condotte per i punti d'intersezione tra le singole circonferenze e le rette che le dividono in parti uguali

## - Cilindro circolare obliquo



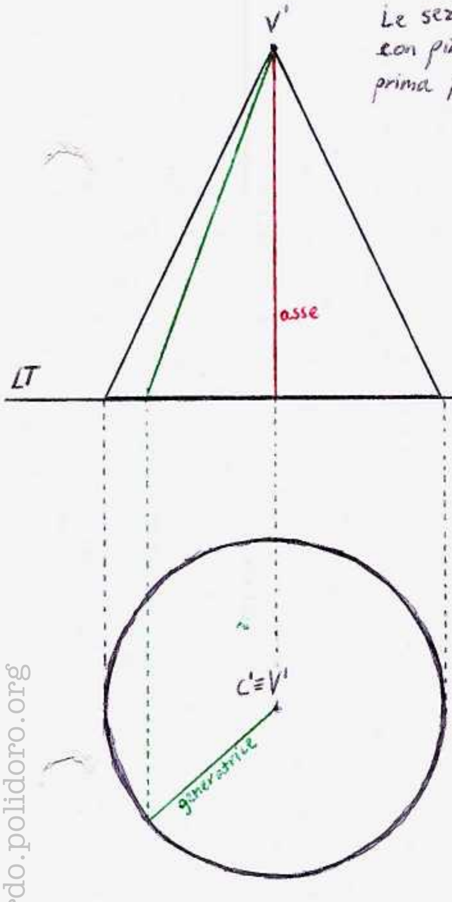

Per semplicità, sono state omesse le varie generatrici esplicitate nei disegni precedenti.

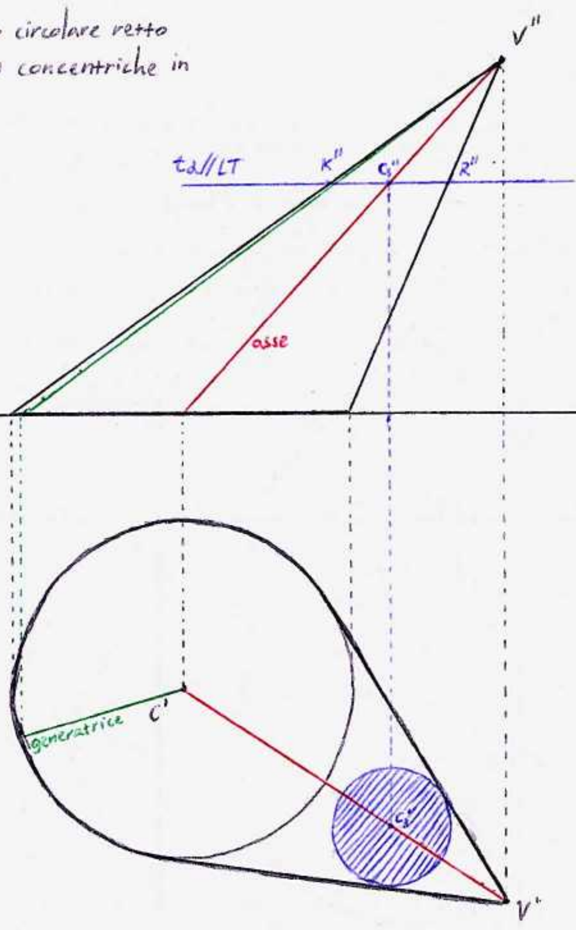
Le prime proiezioni delle generatrici utili a definire il **contorno apparente** sono costruite come rette tangenti a entrambe le circonferenze, parallele alla prima proiezione dell'asse del cilindro (congiungente dei centri delle circonferenze)

Le due "**proiezioni**" del cilindro sono delimitate dal loro **contorno apparente**: per intenderci, il secondo contorno apparente di un cilindro circolare obliquo è un parallelogramma (secondo c. app. => II proiezione)

## - Cono retto/obliquo (generatrici omesse per semplicità)

Le sezioni del cono circolare retto con piani // LT sono concentriche in prima proiezione.




→ Per il cono obliquo, l'operazione grafica della sezione in prima proiezione si effettua con un complesso calcolo dell' "inclinazione" del raggio rispetto al diametro perpendicolare all'asse.

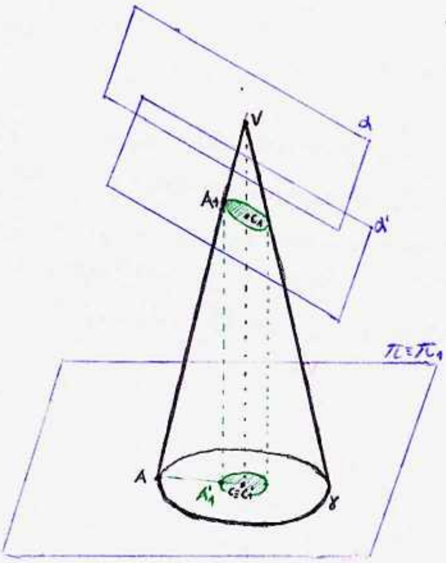
→ Sezionando con più piani a distanza costante in altezza, si ottengono "curve di livello" topografiche (o isoipse)

Coni e cilindri circolari retti possono essere considerati come superfici di rotazione.

# Le superfici coniche: Sezioni di Coni

Come abbiamo visto in precedenza, sezionando un cilindro con un piano è possibile ottenere circonferenza, ellisse o porzioni di ellisse. Per poter ricavare le altre curve "coniche" bisognerà dunque sezionare un cono.

Si ricorda che il cono ha due falde ($\bowtie$); come è stato già osservato la sezione di un cono con un piano orizzontale determina una circonferenza (piano orizzontale in Monge, se la direttrice poggia su $\pi_1$)




Per ottenere un'ellisse, consideriamo un piano $\alpha$ non parallelo a $\pi$ che sia tangente al cono unicamente nel suo vertice. Un qualsiasi piano ad esso parallelo determinerà una curva chiusa (di punti propri) detta ellisse; si osserva la costruzione di una corrispondenza tra punti appartenenti ad una stessa generatrice rispetto al vertice; di conseguenza l'ellisse è una trasformata omologica della circonferenza:

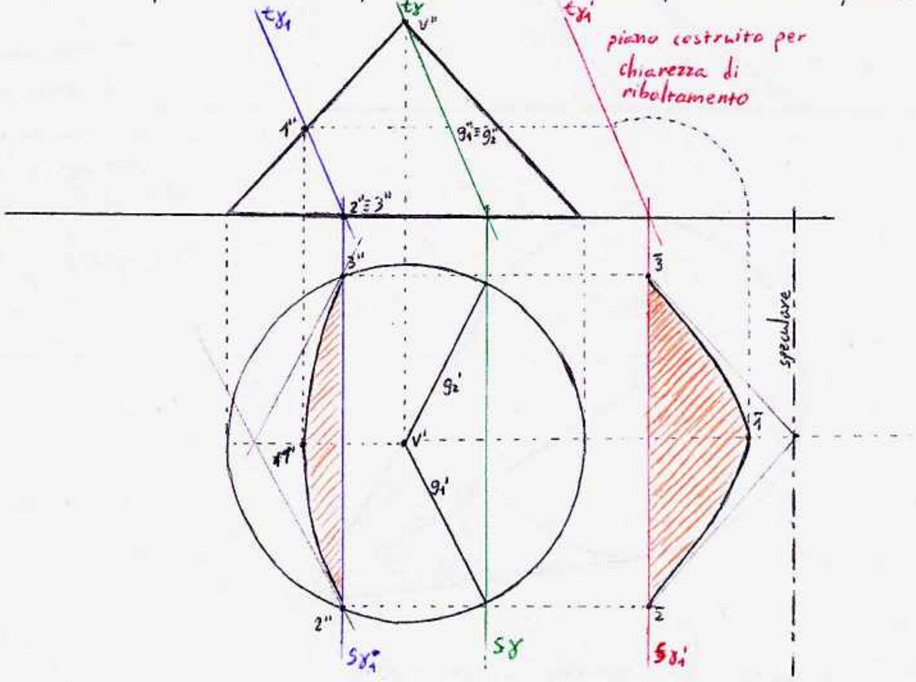
$$\left.\begin{array}{l} ①\ P(V \to \overset{\alpha',\pi}{A_1, A}) \\ ②\ P(O_{1\infty} \to \overset{\alpha',\pi_1}{A_1, A_1'}) \end{array}\right] \Rightarrow \omega(V'; \gamma) \qquad \pi, \pi_1 \text{ piani omografici sovrapposti}$$

Analogamente, considerando un piano $\beta$ tangente al cono in una generatrice, un qualsiasi piano ad esso parallelo determinerà una parabola avente come retta direttrice una retta parallela alla generatrice ottenuta dall'intersezione tra $\beta$ e il cono. Allo stesso modo di quanto fatto per l'ellisse, si osserva che anche la parabola è una trasformata omologica della circonferenza (essa è una curva con tutti punti propri eccetto uno improprio)

Allo stesso modo, considerando un piano $\gamma$ che contiene unicamente il vertice e due generatrici, un qualsiasi piano ad esso parallelo determinerà un'iperbole, costituita da tutti punti propri eccetto due impropri; si ricorda che, essendo il cono ~~costituito da due~~ falde, l'iperbole è costituita da due rami (simmetrici)

Le intersezioni tra $\alpha, \beta, \gamma$ e il cono sono tipicamente dette coniche degeneri.

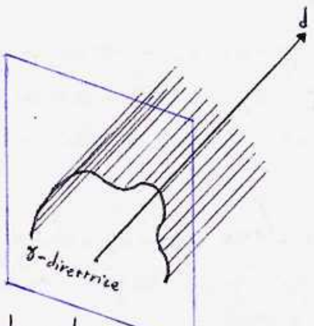
Per rappresentare le sezioni dei coni nel metodo di Monge, si consiglia di impiegare piani proiettanti in seconda; si ricorda che 6 punti non allineati rendono possibile la determinazione di una conica; si ricorda inoltre che, se la conica è simmetrica rispetto ad uno o più assi, è sufficiente per risolvere il problema operare su parte della curva.



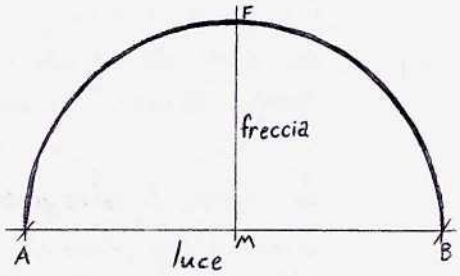
# Archi e Volte

Supponendo di avere una superficie rigata cava e posta "in orizzontale", essa viene comunemente detta **arco**, di cui si specifica direttrice e direzione; se l'"arco" è caratterizzato da un forte spessore, ad esempio nel caso in cui si debba coprire un intero ambiente (dunque non una semplice apertura in un muro), si parlerà di volta. In particolare, una volta/arco a direzione orizzontale viene tipicamente impiegata nella copertura di ambienti.

## Nomenclatura base:




volta a botte
a direttrice irregolare



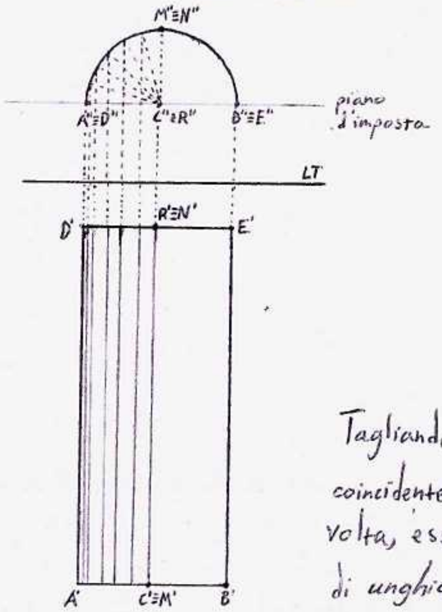

Gli archi si classificano in:

Arco a tutto sesto: freccia $= \frac{1}{2}$ luce

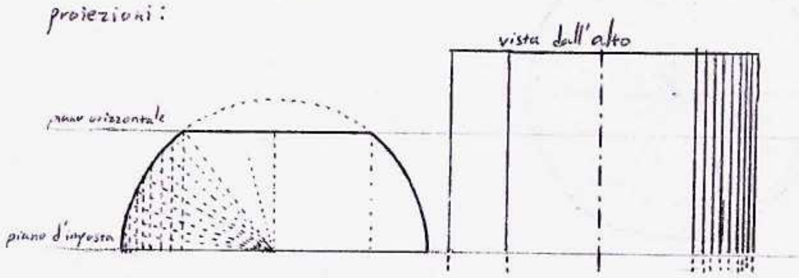
Arco (a sesto) ribassato: freccia $< \frac{1}{2}$ luce

Arco (a sesto) rialzato: freccia $> \frac{1}{2}$ luce

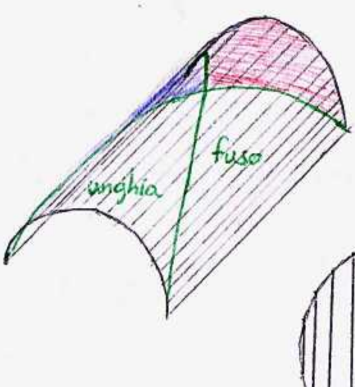
**Volta a Botte:** Poggia su muri o piedritti; può essere bucata o sezionata dall'intersezione con altri elementi.



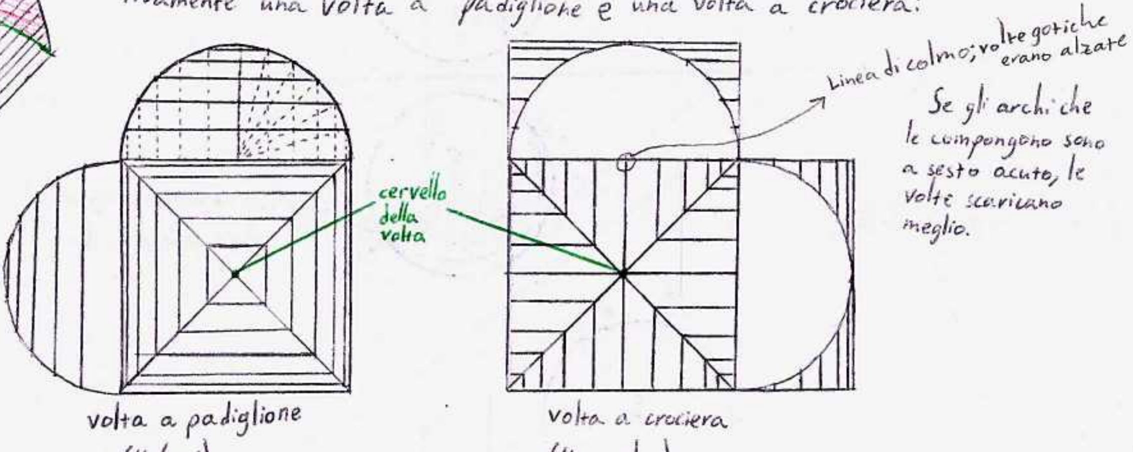

Sezionando la volta con un piano orizzontale, si ottiene una volta a schifo (il termine deriva dal latino scafo, barca. è evidente l'allusione); ha le seguenti proiezioni:




Tagliando una volta a botte con due piani verticali aventi la prima traccia coincidente con ~~fo~~ una diagonale del rettangolo coincidente con la prima proiezione della volta, essa viene divisa in quattro parti a due a due uguali; esse prendono il nome di unghia o fuso:




L'unghia è aperta, contiene l'apertura dell'arco, si regge sulla base. Il fuso, essendo chiuso, non si regge. Unendo 4 fusi o 4 unghie si ottengono rispettivamente una volta a padiglione e una volta a crociera:




Se gli archi che le compongono sono a sesto acuto, le volte scaricano meglio.

volta a padiglione
(4 fusi)
volta chiusa, scarica su mura importanti

volta a crociera
(4 unghie)
volta aperta, può scaricare anche solo su 4 pilastri

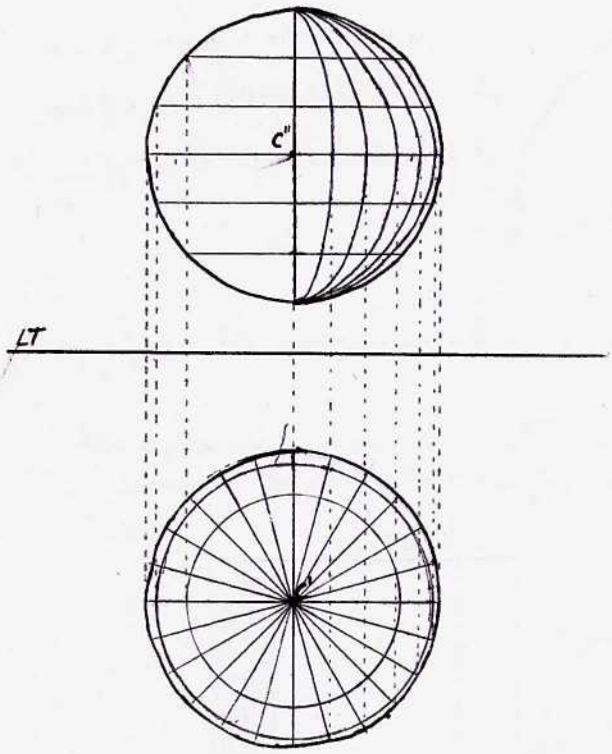
## Sfera

Nel metodo di Monge, entrambe le sue proiezioni coincidono con le circonferenze di raggio massimo, visibili solo da un'osservatore posto all'infinito (più ci si avvicina, minore è la porzione di sfera visibile). Qualsiasi piano sezioni la sfera, detta sezione è sempre una circonferenza.

In particolare, ~~i pi~~ i piani orizzontali (posti a distanza congrua) che sezionano la sfera la dividono mediante i **paralleli**, di cui il maggiore (circonferenza massima orizzontale) è detto **equatore**

I piani verticali (proiettanti in prima) passanti per il centro della sfera invece la dividono attraverso i **meridiani**

Si noti che tale nomenclatura coincide con quella impiegata per la rappresentazione cartografica della Terra.



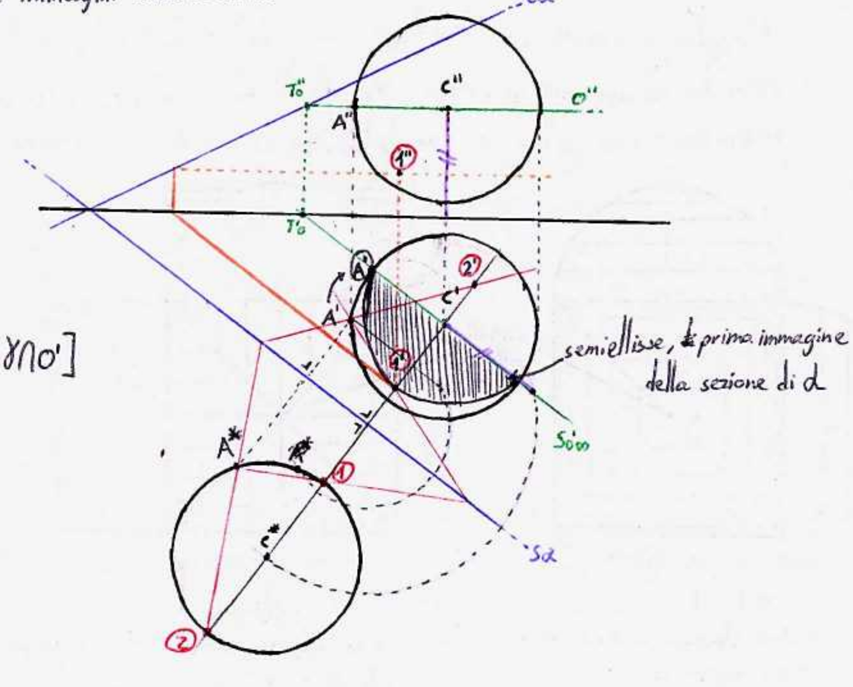

Logicamente, la seconda immagine di un meridiano è un'ellisse, di cui un asse è pari all'asse della sfera (diametro massimo) e l'altro coincide col diametro "scorciato". In particolare, il piano di profilo degenera in una retta.

In edilizia, le **volte generate da una sfera** coprono ambienti molto elevati ed ampi, sfruttando staticamente gli "spicchi" determinati dalla suddivisione geometrica in meridiani e paralleli

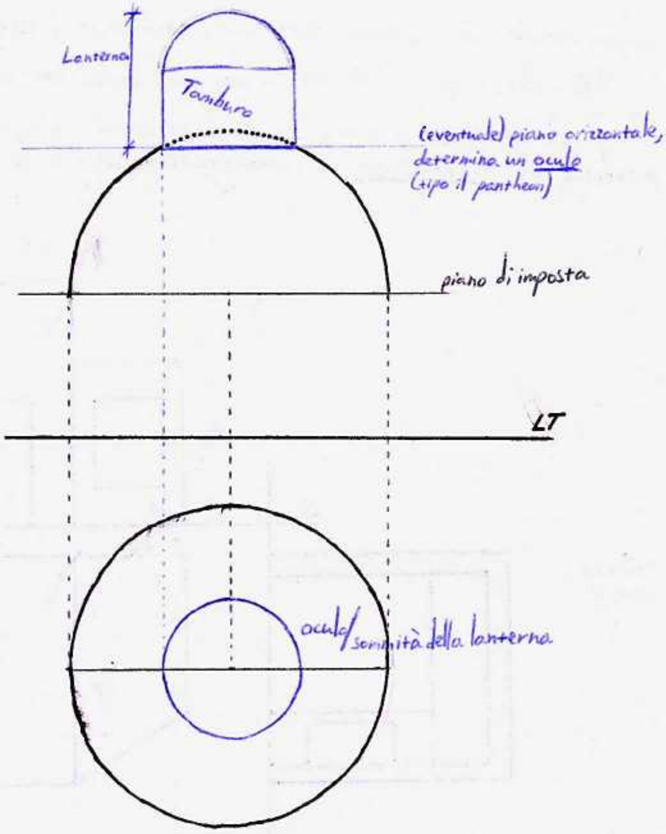
## Determinazione di un piano generico passante per il Centro di una sfera

Coincide con il tipico esercizio di appartenenza di un punto ad un piano generico: sfruttando una retta passante per il centro e imponendola appartenente al piano generico, il piano viene identificato. Sapendo inoltre che una qualsiasi sezione di una sfera determina una circonferenza, ribaltando il centro e tracciando la circonferenza in vera forma e grandezza (coincide con la circonferenza di raggio massimo), operando un doppio ribaltamento e sfruttando piani ausiliari è possibile tracciare le due immagini della sezione.

[Errore di disegno: A'∈ γ∩O']



# Volte generate da porzioni di Sfera:



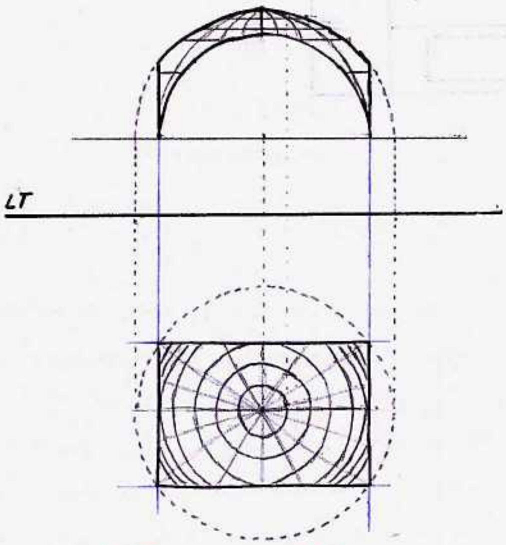

## ·Cupola

Copre una pianta quadrata/circolare

Nell'intradosso garantisce un'alta penetrazione luminosa, nel paesaggio meridionale gli estradossi sono tradizionalmente rivestiti in embrici maiolicati.

## ·Volta a Vela

Determinata dalla sezione di una semisfera con piani verticali. (anche con sezioni non simmetriche e figure irregolari in pianta, basta trovare il baricentro del poligono e costruire il cervello della volta)
Tipica di Brunelleschi, scarica su 4 punti.




# Studi Preliminari delle proiezioni ortogonali di un oggetto architettonico

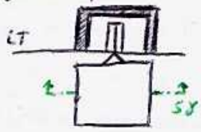
Per evitare di rendere di difficile interpretazione alcuni elaborati grafici di particolare complessità, è possibile non esplicitare i vari punti e le relative proiezioni (essendo nota ed intuibile la regola associativa); allo stesso modo vedremo che i piani di sezione di oggetti architettonici saranno individuati mediante una simbologia più sintetica.

Alle volte, occorre disegnare più di un prospetto per veicolare un sufficiente numero di informazioni circa le caratteristiche dell'oggetto: è questo il caso degli oggetti architettonici. L'operazione si effettua mediante un piano di profilo o, in alternativa, sfruttando un nuovo riferimento e, di conseguenza, una nuova linea di terra. Attraverso un congruo numero di prospetti e la "pianta delle coperture" (ovvero la prima proiezione) l'involucro dell'oggetto è scomponibile e ricomponibile, evidenziandone la tridimensionalità.

Un oggetto architettonico però non è limitato al suo esterno; è necessario effettuare delle **sezioni** per identificare gli spazi interni

Sezioni →
- **Orizzontali ("Piante")**: Sono da effettuare a congrua altezza (~1,30m) per veicolare il maggior numero di informazioni (finestre). Vanno impaginare allineate (verticalmente) e in ordine rispetto ai piani
- **Verticali** →
  - **longitudinali** (giacitura // lunghezza)
  - **trasversali** (// larghezza)

Per i piani verticali, le tracce in prima proiezione sono spesso individuate da linee tratto-punto, limitate da frecce che indicano la direzione verso cui si guarda; può anche essere tagliata per non interferire col disegno:

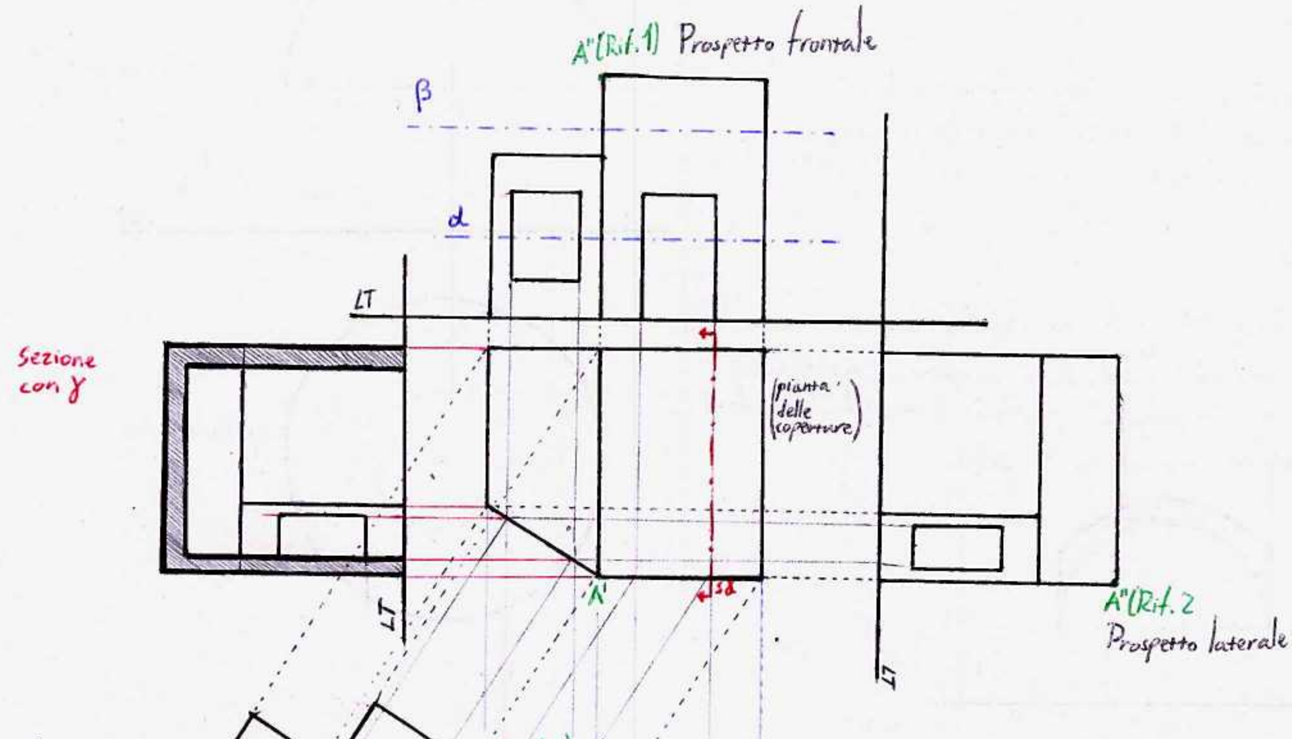


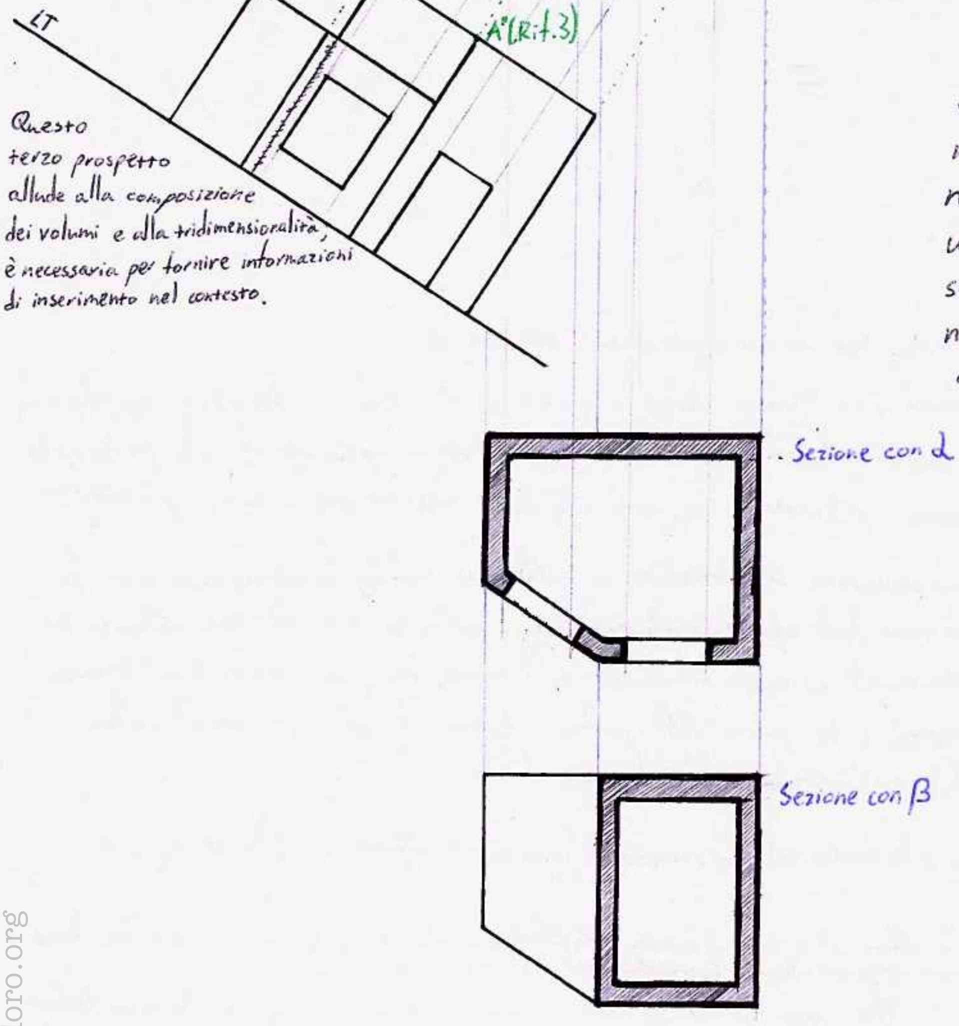

Intersezioni notevoli:
Scale, aperture, blocchi significativi

Logicamente, una sezione verticale evidenzia l'attraversabilità di un oggetto architettonico.

Alle volte, le quote delle sezioni non sono esplicitate; tipicamente si effettuano a 1,20-1,50 metri dal "pavimento" (calpestio)

In una rappresentazione grafica, è di cardinale importanza **garantire la completezza dell'oggetto in poche rappresentazioni grafiche, che enfatizzano le caratteristiche topiche dell'oggetto.**




Come è possibile notare, la sezione viene evidenziata da uno spessore di linea maggiore e una campitura. Le parti retrostanti (γ) visibili sono delineate da una linea sottile; forniscono più informazioni sul disegno (se γ aveva le frecce verso destra, non avrebbe fornito lo stesso quantitativo di informazioni)

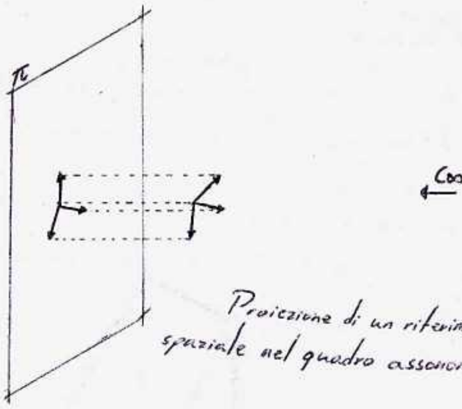
⚠ Scale: 1:n (abbreviaz. $l:L=1:n$)

L'unità è sempre in cm (il foglio è in cm ⇒ lavoriamo in cm)

# Assonometria

Metodo codificato nell' '800 (dopo Monge)

| | Monge | Assonometria |
|---|---|---|
| Quadro | $\pi_1, \pi_2$ sovrapposti | Piano unico |
| Centri di Proiez. | $O_1, O_2$ impropri | Unico centro improprio |




Proiezione di un riferimento cartesiano spaziale nel quadro assonometrico

A seconda dell'orientazione del centro di proiezione rispetto al piano, l'assonometria si distingue in **ortogonale** e **obliqua**.

Vincolo nella rappresentazione è il riferimento $x, y, z$, poiché **z è orientato convenzionalmente in verticale** (per chiarezza del progetto edile); nello spazio il riferimento è però orientabile a piacere.

## Teorema di Pohlke

Anche detto <u>teorema fondamentale dell'assonometria</u>, ha il seguente enunciato:

> Presi su un piano tre segmenti aventi un punto in comune sui quali sono staccate delle unità di misura a piacere, essi risultano essere una proiezione di una terna cartesiana da un centro improprio.

L'assonometria si classifica ulteriormente in monometrica, dimetrica, trimetrica a seconda delle unità di misura

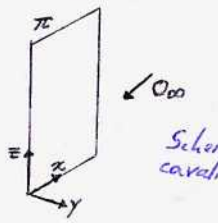
## Assonometria Cavaliera

Se il riferimento <u>ha un asse (diverso da z) perpendicolare al foglio</u>, l'assonometria è <u>necessariamente obliqua</u> (se no coinciderebbe con la seconda immagine mongiana). Detta assonometria è <u>generalmente dimetrica</u>, ma per il teorema di Pohlke esiste un centro di proiezione tale che l'assonometria sia monometrica.

Per motivi percettivi, si utilizza un **accorciamento** dell'asse $y$ compreso tra 0,7 e 0,8 (Nota: usa 0,8)

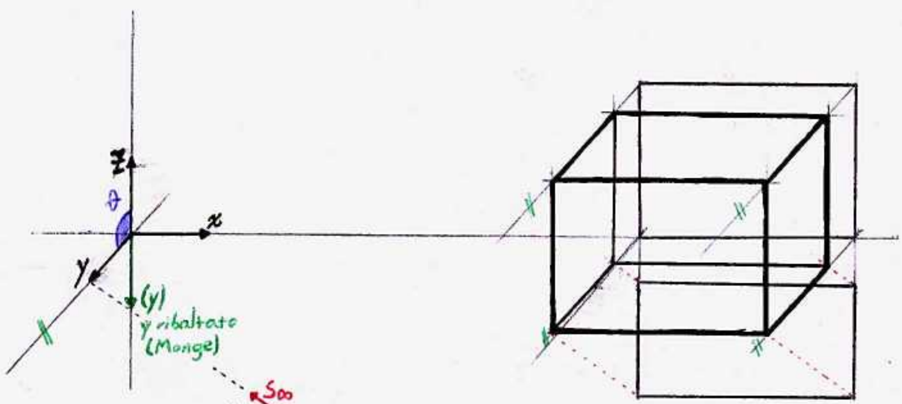
Per lo stesso motivo, l'angolo $\vartheta$ tra $y$ e $z$ deve essere compreso tra 120° e 150° (altrimenti vi sono delle distorsioni)

Il nome "cavaliera" deriva dal fatto che il punto di vista risulta leggermente rialzato, oppure perché fu codificata da un certo Cavaliere.




Schema spaziale dell'assonometria cavaliera

<u>Proiezione assonometrica ricavata da Proiezioni Ortogonali:</u>

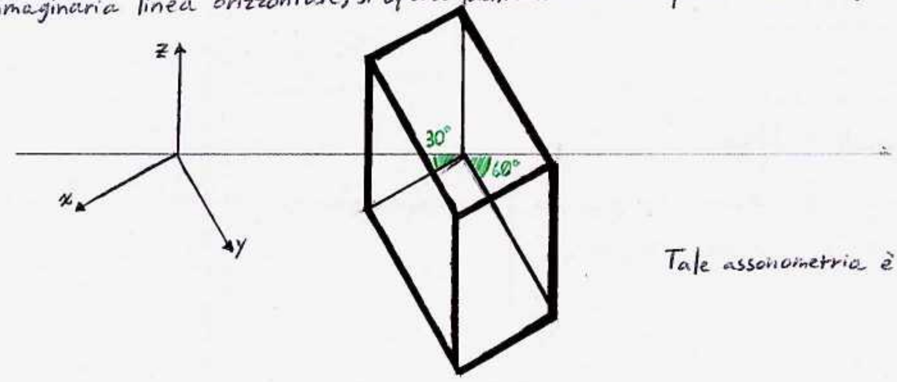



direzione ottenuta congiungendo (y) con y assonometrico, la si utilizza per proiettare la prima immagine mongiana; tutte le rette corrispondenti si incontrano sull'asse dell'omologia.

<u>Si osserva che uno dei prospetti risulta inalterato; tale assonometria è dunque utile per edifici con fronti particolarmente complessi (potrebbe essere necessario ribaltare quelli scorciati)</u>

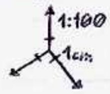
## Assonometria Militare

Anche nota come Assonometria dell'Ingegnere, non modifica le piante (lavorando direttamente sulla pianta, era utile per scopi militari). A differenza dell'Assonometria Cavaliera, l'Assonometria Militare può essere monometrica senza determinare aberrazioni. È anch'essa un'assonometria obliqua.
Una tipica assonometria militare è l'assonometria 30-60, operata staccando angoli di 30° e 60° rispetto ad un'immaginaria linea orizzontale, si opera facilmente con le squadrette, si sceglie opportunamente il fronte da privilegiare.



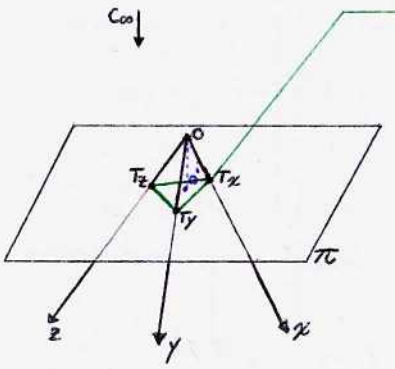


Nella specifica della scala:




Tale assonometria è anche (erroneamente) detta cavaliera isometrica.

## Assonometria Ortogonale

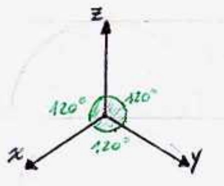



Triangolo delle Tracce: il suo ~~baricentro~~ ortocentro è la proiezione di O sul quadro; i suoi lati sono le tracce dei piani coordinati.

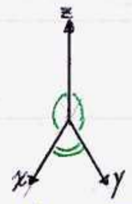
Unendo O' con $T_x, T_y, T_z$, si ottengono le proiezioni degli assi sul quadro
Si ricorda che dalla terna spaziale alla sua proiezione vi è sempre un raccorciamento.

| Triangolo delle Tracce | Assonometria Ortogonale |
|---|---|
| Equilatero | Monometrica |
| Isoscele | Dimetrica |
| Scaleno | Trimetrica |

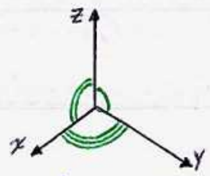
Per ottenere le unità di misura, si ribalta uno dei piani coordinati con asse la sua traccia; applicando l'omologia di ribaltamento si staccano sulle immagini assonometriche degli assi le unità di misura scorciate.




Assonometria Ortogonale Monometrica




Assonometria Ortogonale Dimetrica




Assonometria Ortogonale Trimetrica

Il raccorciamento oggettivo è lo stesso per ogni asse ed è pari a 0,8 (rispetto al 3D)

È l'unica assonometria svolta automaticamente dal CAD (rappresentazione 3D)

Le immagini in assonometria stabiliscono una immagine allusiva delle tre dimensioni dell'oggetto rappresentato.

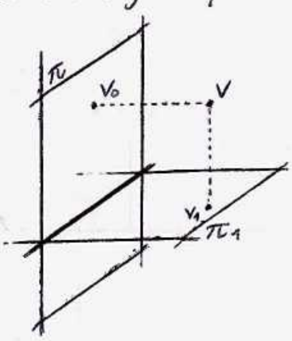
Spesso occorre scegliere quali sono le rappresentazioni più utili per dare un'idea di ciò che si sta progettando.

# Prospettiva

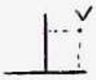
"Nasce" nel Rinascimento, e come il Rinascimento è *tipicamente italiana*; il primo ad applicarla (intuitivamente) fu Giotto. Questo metodo è il più efficace per restituire una rappresentazione realistica dello spazio, in quanto è molto vicino alla rappresentazione di un oggetto secondo le dinamiche della vista (che, come ricordiamo, è stereoscopica).
Nel disegno a mano libera non è materialmente possibile disegnare secondo la prospettiva: più degli altri metodi essa necessita di precise regole matematiche, coincidenti con le leggi dell'ottica (all'epoca si erano da poco riscoperti gli Elementi e l'Ottica di Euclide; attraverso il loro studio vengono fatte delle formulazioni precise, affinate (e "semplificate") nei calcoli nel corso degli anni; già formulate da Leonardo e Piero della Francesca, verranno poi migliorate da Alberti).

Per quanto riguarda il metodo (per passare dal riferimento spaziale al disegno vero e proprio), definiamo innanzitutto il riferimento:

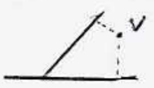
A differenza degli altri due metodi, nella prospettiva si impiega **un quadro e un centro proprio**, rigorosamente esterno al quadro (altrimenti non c'è proiezione), che viene successivamente proiettato sul quadro.
Si immagina poi un piano orizzontale, detto **piano geometrale**, coincidente col "livello Ø" ("su cui poggiamo i piedi"), il quale può essere considerato come $\pi_1$ (il quadro, per sua natura, NON PUÒ coincidere con $\pi_2$)



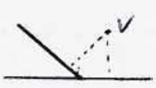

A differenza del geometrale (sempre orizz.), il quadro prospettico può essere orientato in diverse posizioni:



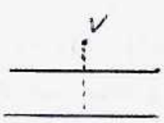

Prospettiva a quadro Verticale ($\pi \perp \pi_1$)




Prospettiva dal basso (quadro inclinato verso l'osservatore)




Prospettiva inclinata verso l'oggetto (quadro inclinato verso l'oggetto) Prosp. a volo d'uccello o Prosp. dall'alto




Prospettiva Zenitale (quadro parallelo o coincidente con il geometrale)

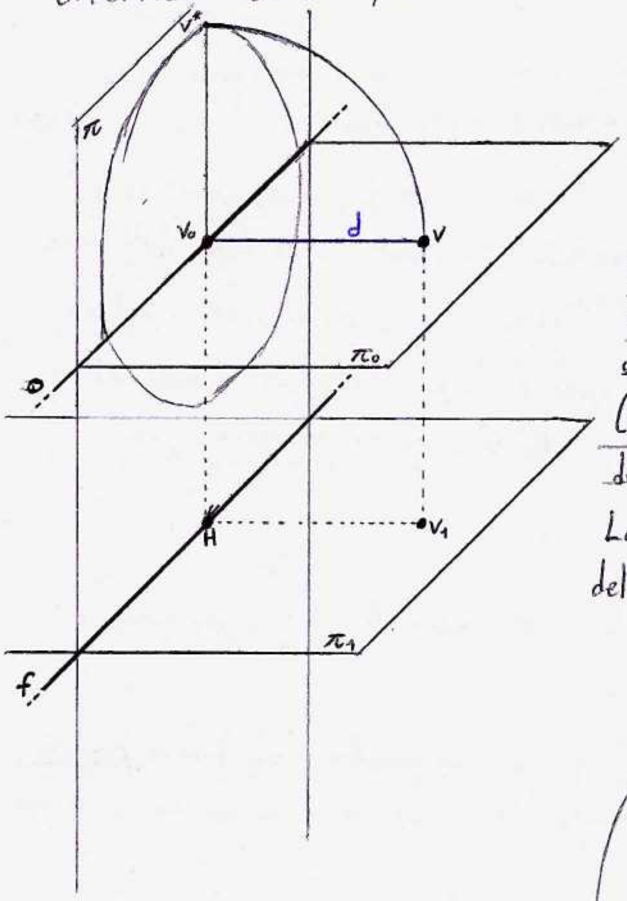
La proiezione ortogonale del centro di vista V sul quadro è detto **punto principale** ($V_0$)

La distanza di V dal piano geometrale è detta **altezza dell'osservatore**

Il segmento della distanza $V$-$V_0$ è sempre perpendicolare al quadro, essa viene detta distanza principale.

# Prospettiva a Quadro Verticale

Per passare dal sistema spaziale a quello planare utilizzato per la rappresentazione bisogna effettuare diverse operazioni di ribaltamento:



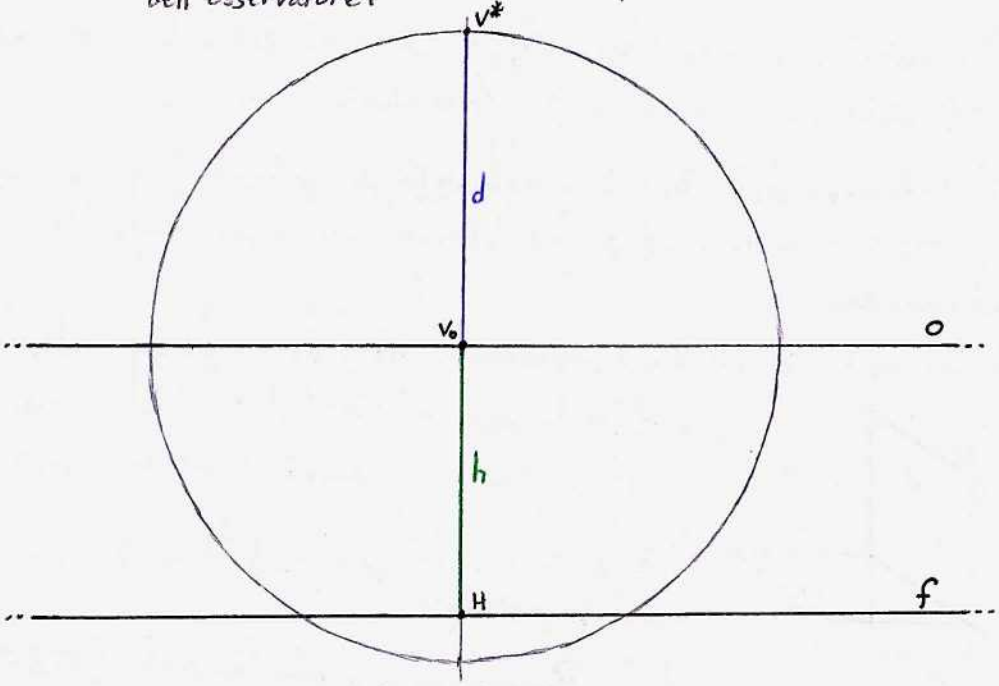

① Si ribalta la distanza V-V₀

② Si costruisce il cerchio di distanza, con centro nel punto principale (V₀) e con raggio pari alla distanza d

Completa il riferimento sul piano la rappresentazione del piano geometrale determinata, secondo il metodo delle proiezioni centrali, da una coppia di rette parallele: la retta fondamentale f (intersezione del geometrale con il quadro) e la retta di orizzonte o (immagine della retta all'infinito (retta impropria) del geometrale e ~~di tutti i piani orizzontali~~)

La distanza tra f ed o viene generalmente assimilata all'altezza dell'osservatore.

orizz e f sono rapp. geometrale: traccia e fuga determinano univocamente il piano



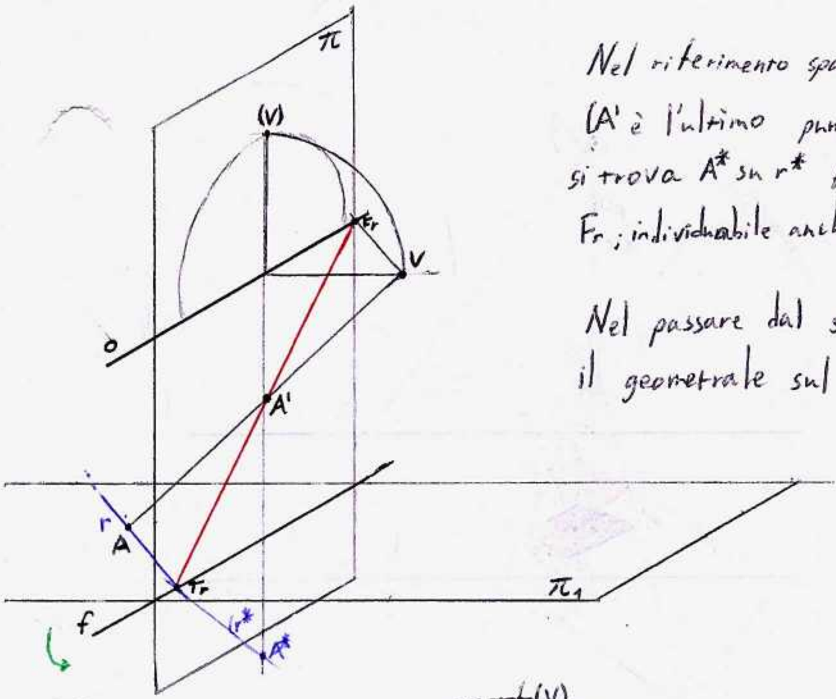

## Esempio di prospettiva: la retta

Consideriamo una retta appartenente al geometrale e su di essa il punto A, dei quali rappresentiamo l'immagine prospettica.

La retta r (appartenente al geometrale) ha il punto di traccia T sulla fondamentale e punto di fuga F' sull'orizzonte: prolungando la retta fino al quadro individuiamo il punto di traccia T, mentre conducendo da V la parallela alla retta r otteniamo sull'orizzonte il punto di fuga F'r, immagine del punto improprio di r.

Ciò si può operare anche ribaltando il geometrale sul quadro (↳) nella stessa direzione del ribaltamento della distanza principale, ottenendo il segmento V*A'A*, ribaltato di VA'A; la retta T-A' è la corrispondente di T-A*, e coincide con la prospettiva della retta: essa identifica il punto di fuga F'r.

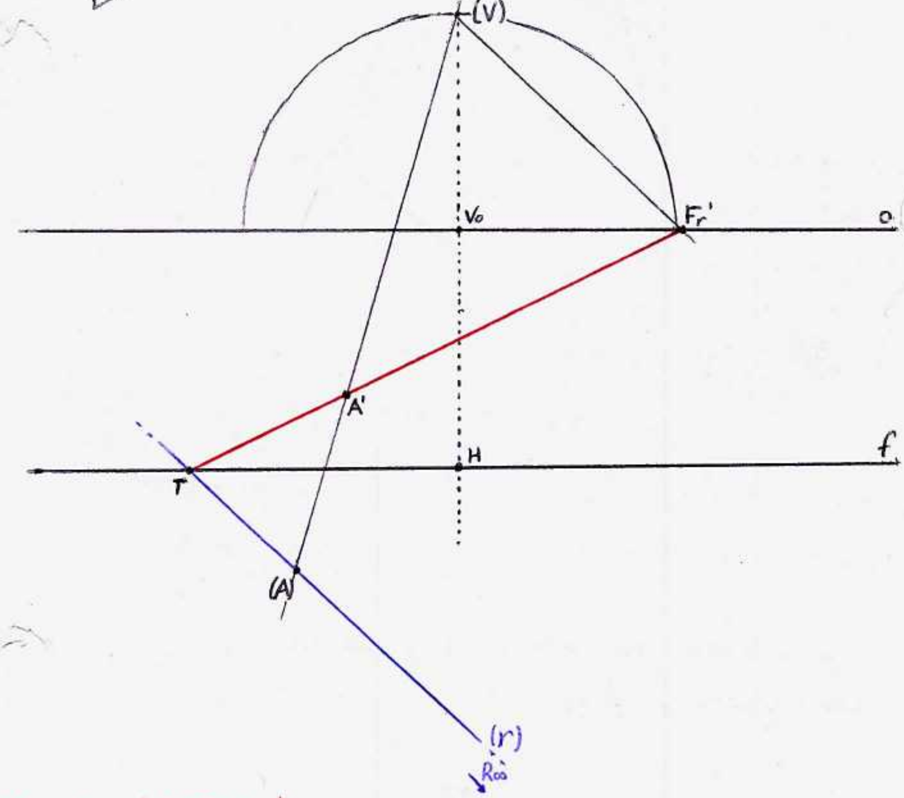
Unendo F'r con T e ottenendo l'immagine prospettica della retta, ottenendo A' (proiettando A dal centro V) si può individuare una prospettività di centro V tra i piani π₁ (geometrale) e π (quadro) con punti corrispondenti A e A'.




Nel riferimento spaziale, ecco la costruzione della prospettività (A' è l'ultimo punto disegnato, in questo caso; nell'altro procedimento si trova A* su r* per poi congiungerlo con (V), individuando A' e dunque Fr; individuabile anche tracciando da (V) la parallela a r*).

Nel passare dal sistema spaziale a quello planare ribaltiamo il geometrale sul quadro (come il "secondo procedimento"), ottenendo il seguente risultato:

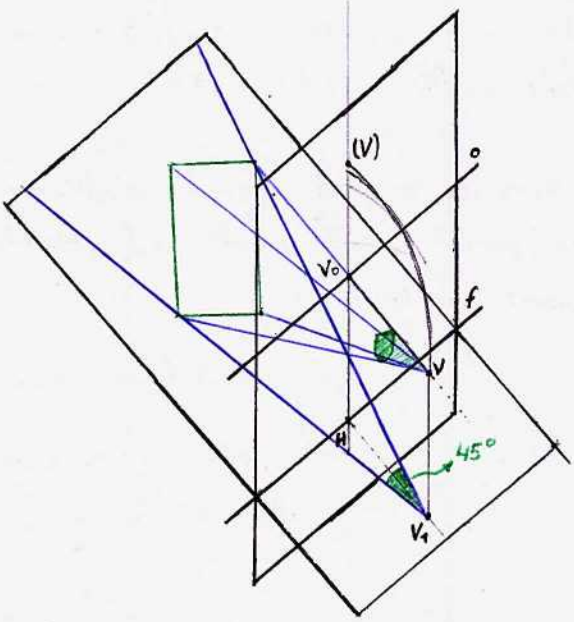
rette ∈ geometrale (o paralleli) hanno fuga su o
rette ∡ 45° con π hanno fuga su cerchio dist.
rette ⊥ π fuga in punto principale
rette // π fuga P∞



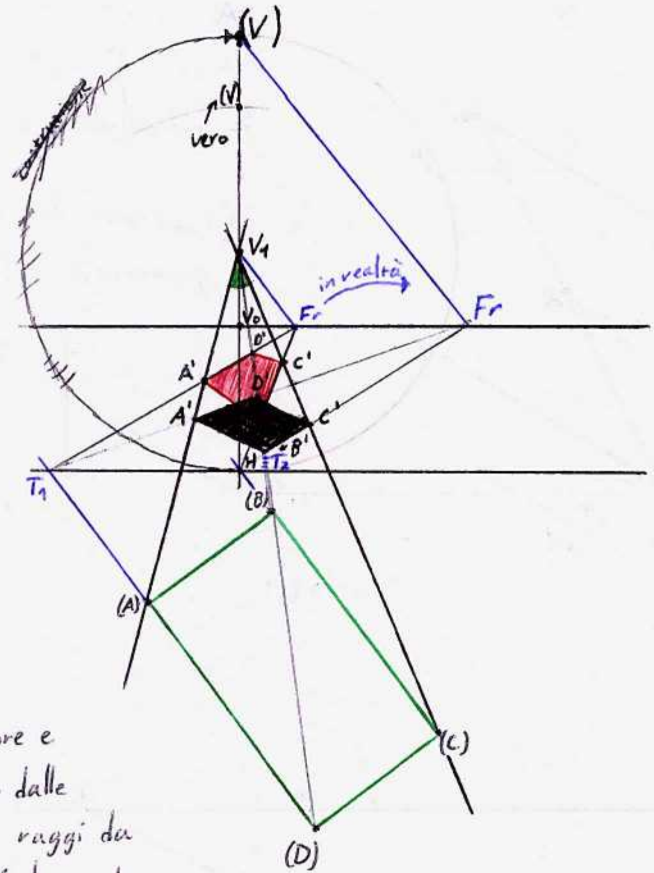

## Metodo del Ribaltamento

Consideriamo ora un rettangolo appartenente al piano geometrale. Nel passaggio dallo spazio al piano vanno considerati due fattori importanti che consentono di assimilare le immagini prospettiche degli oggetti alle immagini visive: l'altezza $V_0H$ deve corrispondere ad un'altezza reale di massimo 2 metri e bisogna considerare l'angolo fisiologico della visione, la cui proiezione si considera di $\boxed{\text{MAX}}$ 45° (massimo 50) in modo da evitare aberrazioni prospettiche. Per questo motivo è possibile "allontanare" o "avvicinare" V per rendere l'angolo dell'ampiezza specificata.

Nel riferimento spaziale:




Sul piano:



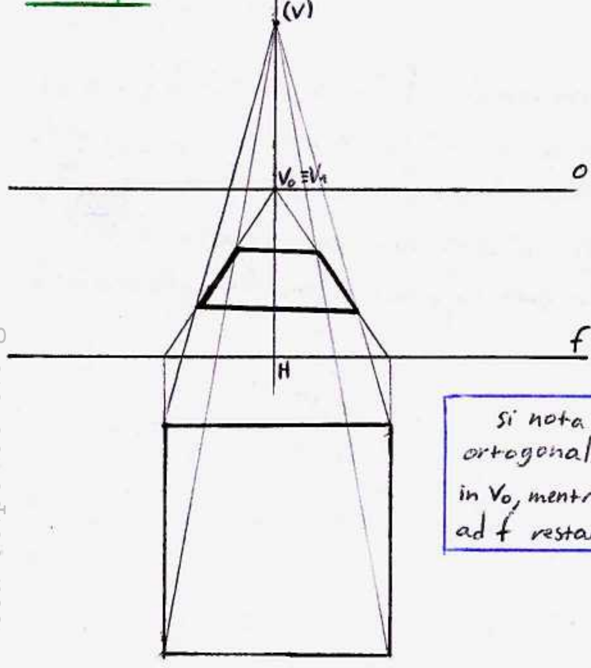

Nel piano, dopo aver posto $V_0$ ad altezza osservatore e aver trovato $V_1$ tale che $\vartheta \leq 45°$ (angolo formato dalle congiungenti con gli "estremi" del disegno) conduciamo raggi da $V_1$ che contengono la figura, posta sotto la retta fondamentale.

Si riporta poi il punto (V) in modo tale che $(V)V_0 = V_1H$

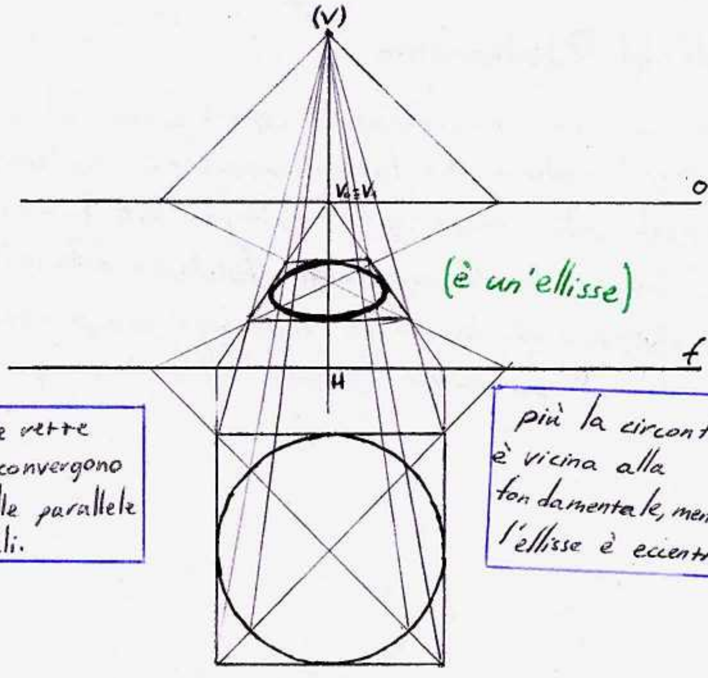
Costruiamo poi l'omologia, con $V_0 \equiv S$ (centro dell'omologia) e $f \equiv s$ (asse dell'omologia); prolunghiamo due segmenti, ne troviamo le tracce e, trovata la fuga conducendo la parallela ai segmenti passante per (V) otteniamo i due punti e, per appartenenza, tutti i punti della figura.

Si nota dunque che la condizione di parallelismo tra rette in prospettiva si ha solo se le rette convergono ad uno stesso punto di fuga

Esempi




si nota che le rette ortogonali a f convergono in $V_0$, mentre quelle parallele ad f restano tali.

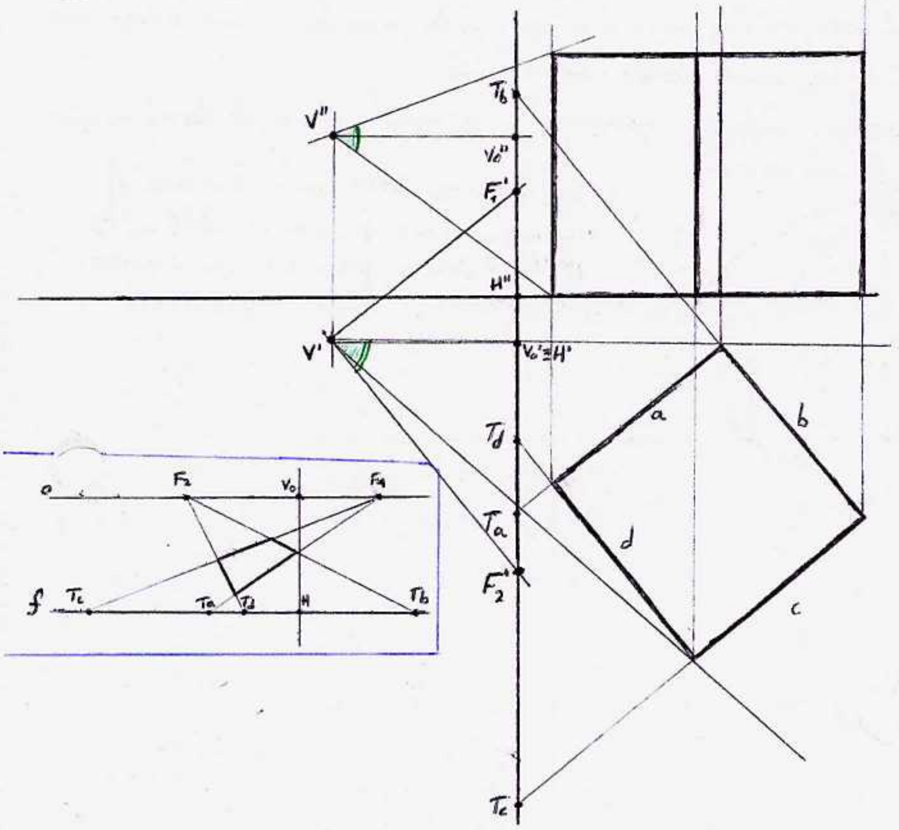



(è un'ellisse)

più la circonferenza è vicina alla fondamentale, meno l'ellisse è eccentrico

# Metodo dei Punti di Fuga

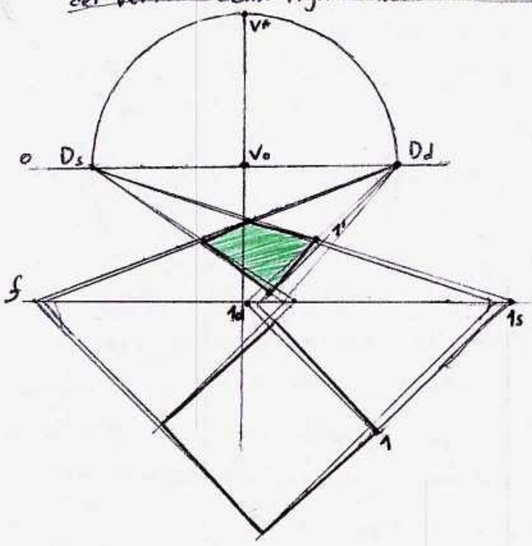
Si utilizza uno schema preparatorio con due proiezioni mongiane di un oggetto, tracciando e definendo un piano che coincide con il quadro della prospettiva.
Si considerano poi le proiezioni del centro di vista V in modo tale che si abbia un angolo di ~45° sia in prima che in seconda proiezione che contenga l'immagine in vista.
Individuiamo dunque i punti di traccia e i punti di fuga delle rette che definiscono i lati della base.




Definito questo schema, riportiamo sulla fondamentale i punti di traccia, leggendone le distanze rispetto ad H; operando ~~allo stesso~~ modo per i punti di fuga (sull'orizzonte) basterà unire le tracce con le rispettive fughe per individuare l'immagine prospettica della base della figura.
Occorrerà dunque definire le altezze prospettiche; tale determinazione, essendo ~~un~~ comune a tutti i metodi, sarà definita alla fine.
Questo metodo risulta efficace nel disegno di oggetti tridimensionali: nota un'altezza prospettica è infatti facile determinare l'intero solido.

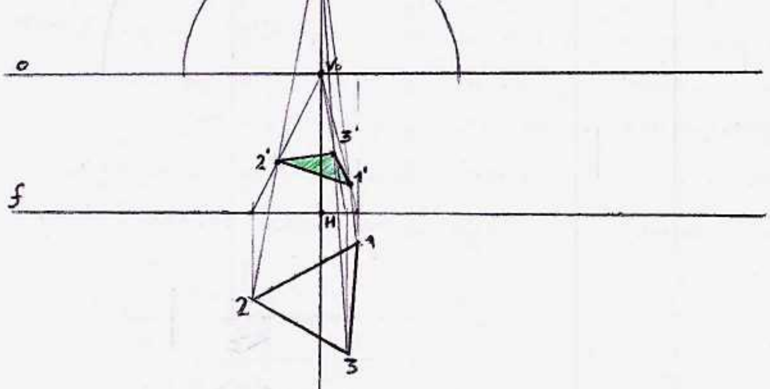
# Metodo delle rette a 45°

È una geniale intuizione albertiana: Poiché i punti di intersezione del cerchio di distanza con la retta di orizzonte costituiscono i punti di fuga di tutte le rette inclinate di 45° rispetto al quadro, è possibile ricavare l'immagine prospettica di una figura appartenente al geometrale conducendo per ciascuno dei vertici della figura delle rette che formano 45° con la fondamentale.




# Metodo dei Raggi Visuali

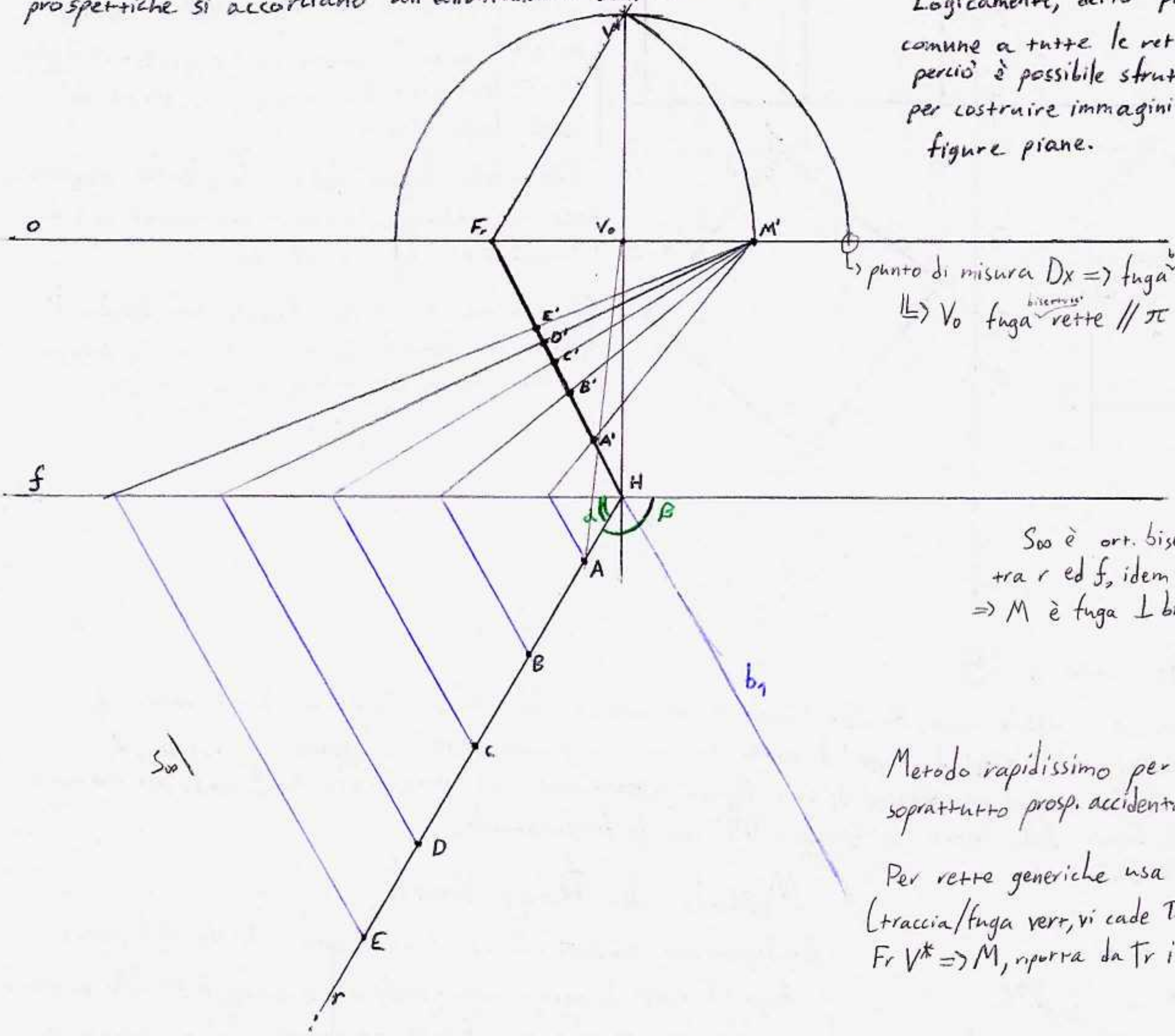
Analogamente, considerando che il punto principale $V_0$ è il punto di fuga di tutte le rette ortogonali al quadro, è possibile ricavare l'immagine prospettica di una figura appartenente al geometrale, conducendo per ciascun vertice rette ortogonali alla fondamentale.



## Metodo dei Punti di Misura

Utilizzato per rette su cui sono delimitate varie scansioni, come una scala.
Supponiamo che i segmenti staccati sulla retta r siano uguali. Considerando gli angoli supplementari $\alpha$ e $\beta$ che la retta forma con la fondamentale, ne individuiamo le rispettive bisettrici. Conducendo dai punti staccati sulla rettra le parallele alla bisettrice di $\beta$, individuiamo dei punti sulla retta f.
Trovata l'immagine prospettica della retta (individuandone il punto di fuga) è possibile determinare il cosiddetto **punto di misura M'** della retta: costruendo un arco di circonferenza con centro nel punto di fuga e apertura fuga-$V^*$, individuiamo sull'orizzonte il punto di misura. Congiungendolo con i punti precedentemente trovati sulla fondamentale, individuiamo le immagini prospettiche dei punti definiti inizialmente.
Si osserva la legge dell'accelerazione prospettica: sebbene i segmenti sono di ugual misura, le loro immagini prospettiche si accorciano all'allontanarsi dall'osservatore.

Logicamente, detto punto di misura è comune a tutte le rette parallele ad r; perciò è possibile sfruttare questo metodo per costruire immagini prospettiche di figure piane.




↳ punto di misura Dx ⇒ fuga (bisettrici) rette ⊥ π
↳ $V_0$ fuga (bisettrici) rette // π

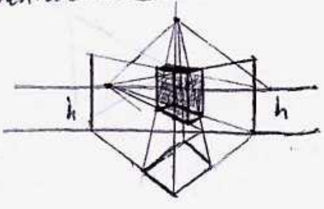
$S_\infty$ è ort. bisett. α, c'è prospettività tra r ed f, idem tra f e $F_rV^*$ ⇒
⇒ M è fuga ⊥ bisett. α

Metodo rapidissimo per appli professionali, soprattutto prosp. accidentale (non // fondamentale)

Per rette generiche usa piano vert (traccia/fuga vert, vi cade Tr, Fr) e ribaltaci Fr $V^*$ ⇒ M, riporta da Tr i segmenti

## Determinazione delle Altezze Prospettiche

Mentre nel riferimento spaziale l'immagine prospettica dell'altezza CH è l'intersezione del quadro con i raggi proiettanti condotti da V per gli estremi C ed H, ~~ne è~~ individuata costruendo una generica retta del geometrale passante per il punto dell'altezza appartenente al geometrale stesso ed individuandone l'immagine prospettica (traccia e fuga) per poi operare con una retta ad essa parallela passante per H, nel ~~riferimento planare, dopo aver individuato traccia e fuga della retta, è possibile riportare l'altezza in vera dimensione partendo dalla fondamentale:~~ essa confluirà nello stesso punto di fuga.

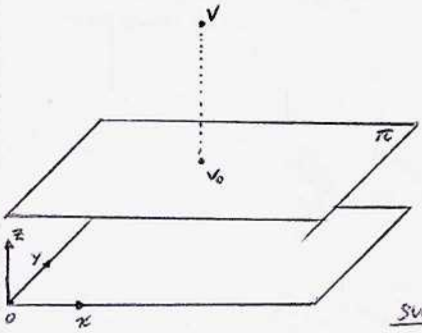



se retta nel ribalti su Orizz $V_0V^*$ da Fr, poi tracci retta incl di α inclinaz e trovi su vert. vero Fr

# Prospettiva Zenitale

Molto pratica per ambienti arch (unica fuga vert)

Consente di costruire viste zenitali degli oggetti in quanto considera il quadro prospettico parallelo o coincidente con il piano $xy$



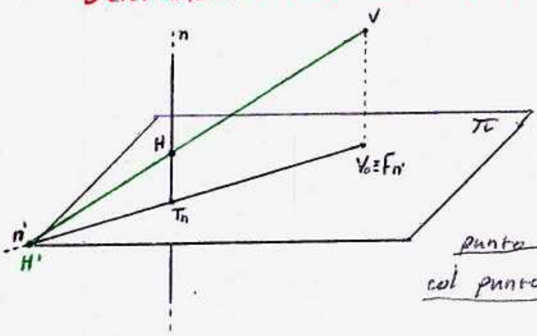

Come è possibile vedere dal riferimento spaziale, il centro di vista $V$ trova la sua proiezione sul quadro nel punto principale $V_0$.

Sul quadro è necessario costruire il cerchio delle distanze, con centro in $V_0$ e raggio pari alla distanza principale $(V_0 - V)$.

Si osserva che in questo caso la retta fondamentale e la retta d'orizzonte (immagine della fondamentale) sono improprie: per il riferimento planare è dunque sufficiente il cerchio delle distanze.

Si osserva che, data una figura piana appartenente al piano $xy$, se il piano coincide col quadro prospettico l'immagine prospettica conserva vera forma e grandezza; altrimenti l'immagine prospettica della figura data risulta omotetica (simile) a quella reale.

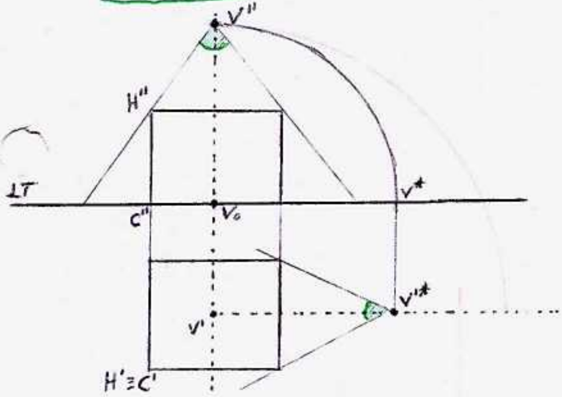
## Determinazione delle altezze prospettiche

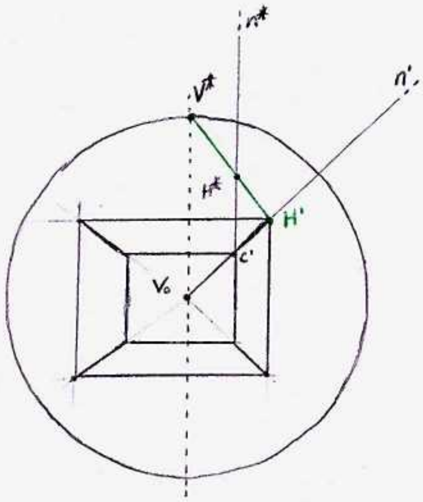



Data una retta $n$ ortogonale al quadro $\pi$, essa lo interseca nel punto di traccia $T_n$.

Rappresentando l'immagine prospettica della retta $n$, si osserva che essa ha fuga in $V_0$; immaginando di individuare sulla retta un segmento $\overline{T_n H}$, la sua immagine prospettica è determinata una volta trovato il punto $H'$; ciò si opera prolungando la retta $VH$: la sua intersezione con $n'$ coincide col punto cercato.

## Esempio




Come si vede, è sempre necessario effettuare un controllo visivo e, di conseguenza, una determinazione della distanza principale. Dopodiché si costruisce il solido ribaltandone l'altezza $(C'H^*)$ e determinando l'altezza prospettica, costruendo il solido.

Spesso, questo metodo viene impiegato per le sezioni prospettiche, non solo dall'alto ma anche "frontali": facendo coincidere il piano di sezione col quadro, scelta un'altezza che ponga $V_0$ in un punto più o meno centrale (anche se l'altezza dell'osservatore è innaturale) e si costruisce la prospettiva.

Fine Disegno & Geometria delle Forme + Laboratorio
24.03.2020
proff. Maria Ines Pascariello - Paolo Cerotto

30.06.2020 - 30 L + S. Interno