

Una grandezza fisica è qualcosa che si può misurare. le principali grandezze fisiche sono:

Grandezza	Unità di misura (S.I.)	Simbolo
Lunghezza	metro	m
Tempo	secondo	s
Massa	kilogrammo	kg
Temperatura	kelvin	K
Intensità di corrente	ampere	A
Intensità luminosa	candela	cd
Quantità di sostanza	mole	mol

Per identificarne i multipli e sottomultipli si può ricorrere alle seguenti notazioni (oltre alla n. scientifica)

Prefisso	Simbolo	Potenza di 10
tera-	T	10^{12}
giga-	G	10^9
mega-	M	10^6
kilo-	k	10^3
etto-	h	10^2
deca-	da	10

Prefisso	simbolo	Potenza di 10
deci	d	10^{-1}
centi	c	10^{-2}
milli	m	10^{-3}
micro	μ	10^{-6}
nano	n	10^{-9}
pico	p	10^{-12}
femto	f	10^{-15}
atto	a	10^{-18}

Le grandezze fisiche si dividono in scalari e (in cui è necessario solo conoscere la misura) e vettoriali (che si identificano definendo modulo, direzione e verso).

Una grandezza fisica ha un significato pratico in relazione al concetto di misura. In ogni misura, nel mondo reale, si è soggetti a, un certo errore, che può essere casuale (imprevedibile e dovuto alle singole circostanze del momento, varia) o sistematico (si ripete sempre allo stesso modo, sempre per eccesso o sempre per difetto).

Cinematica

La cinematica si occupa del moto dei corpi (non le cause del moto, ma il moto in sé). Sarà dunque necessario definire i concetti di traiettoria e legge oraria.

Traiettoria: insieme dei punti che l'oggetto preso in esame occupa nell'intervallo di tempo considerato. Costituisce la successione dei punti (di date coordinate) associati ai vari istanti.

Legge oraria del moto: Descrive come varia la posizione dell'oggetto al variare del tempo; associa ad ogni istante t il corrispondente spazio percorso s .

Introduciamo ora il concetto di **velocità**, distinta in velocità media ed istantanea.

La **velocità media** \bar{v} di un corpo è definita come il rapporto tra spazio percorso e tempo impiegato per percorrerlo. logicamente, essa fornisce un'analisi puramente orientativa del moto, in quanto moti diversi possono possedere la medesima velocità media. Nel grafico spazio-tempo, la velocità media identifica il coefficiente angolare della retta passante per i punti A(x_0, t_0) e B(x_f, t_f).

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} \quad \left[\frac{m}{s} \right]$$

La **velocità istantanea** v identifica la velocità del punto materiale in un preciso istante; è definita come limite per t tendente a 0 del rapporto incrementale dx/dt , esprime dunque la derivata ~~prima~~ temporale dell'equazione oraria del moto. Nel grafico spazio-tempo, essa identifica il coefficiente angolare della retta tangente alla traiettoria nel punto occupato dal punto materiale nell'istante preso in esame.

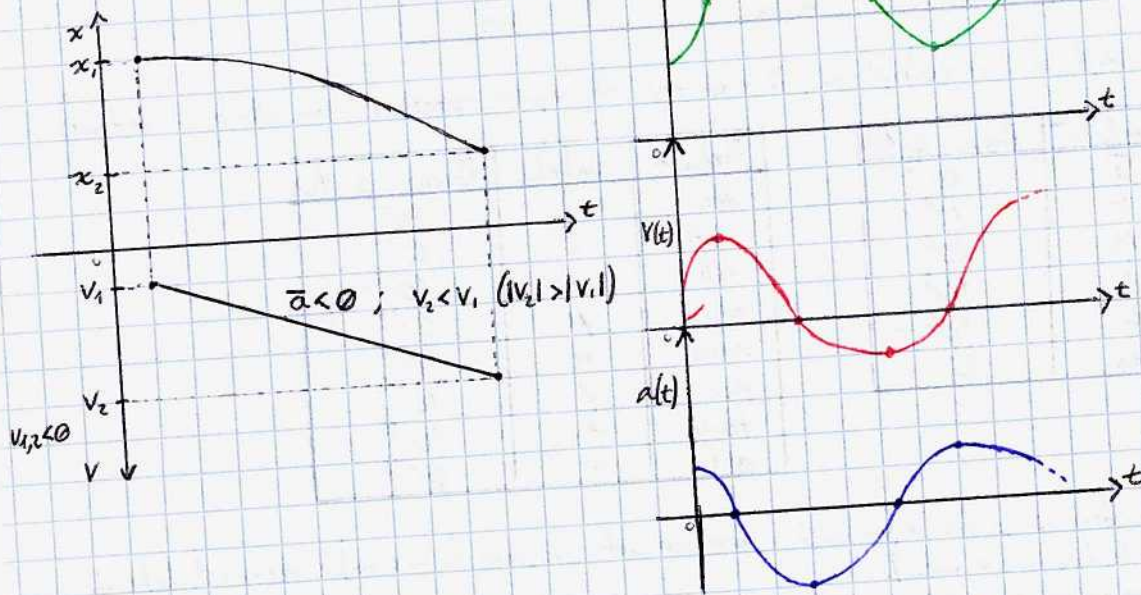
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

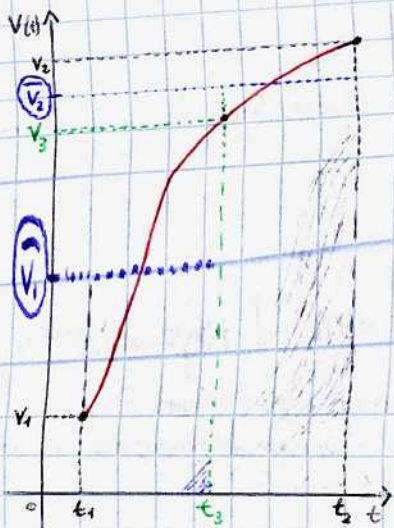
Se ne deduce logicamente che $a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$

Osservando il grafico di $x(t)$ sarà possibile dunque ricavare i grafici di $v(t)$ e $a(t)$ o i valori della velocità/accelerazione media:



Analogamente, è possibile risalire da $a(t)$ a $v(t)$ e da $v(t)$ a $x(t)$. Per spiegare questo concetto, consideriamo un generico grafico $v(t)$.

Dividendo il moto in due intervalli di tempo uguali, si osserva che:



$$\Delta x_{1,2} = \bar{v}_1 \Delta t_1 \quad \Delta x_{2,2} = \bar{v}_2 \Delta t_2$$

Da queste due equazioni si deduce che Δx_1 e Δx_2 corrispondono geometricamente alle aree dei rettangoli di base Δt_1 [Δt_2] e altezza \bar{v}_1 [\bar{v}_2]. Dividendo il moto in sempre più intervalli di tempo uguali fra loro, la somma complessiva di tali aree sarà via via più prossima all'area sottesa dalla curva. Per un numero infinito di intervalli, le due aree coincidono. Di conseguenza:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \bar{v}_i \Delta t_i = \sum_{i=1}^{\infty} \Delta x_i \Rightarrow \Delta x = \lim_{\Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \Delta t_i = \int_{t_1}^{t_2} v dt$$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$$

Assumiamo $x_1 = x(t=0) \Rightarrow t_1 = 0$ e $x_2 = x(t)$:

$$x(t) - x_0 = \int_0^t v(t) dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v(t) dt$$

Analogamente, $v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt$

Moto rettilineo uniforme

Nel moto rettilineo uniforme, il punto materiale segue una traiettoria rettilinea a velocità costante (scalarmente). Vale dunque la relazione $v = \bar{v}$.

Equazioni del moto	
Velocità	$v = \bar{v}$
Spostamento	$\Delta x = v \Delta t \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$
Accelerazione	$a = 0$

$$\Delta x = \bar{v} \Delta t = v \Delta t \Rightarrow x(t) - x_0 = v(t - t_0) \Rightarrow x(t) = x_0 + vt$$

Eseguito tale dimostrazione con gli integrali:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \underbrace{v(t)}_{\text{costante}} dt \Rightarrow x(t) = x_0 + v \int_0^t v dt = x_0 + vt$$

Considerando due diversi punti materiali che si muovono di moto rettilineo uniforme a diverse velocità e con diverse posizioni iniziali, ragionando graficamente si osserverà che per trovare il punto d'incontro tra tali punti sarà sufficiente intersecare le rette delle velocità:

	1	2
x_0	x_{01}	x_{02}
v_0	v_1^0	v_2^0

$$t_{\text{incontro}} = \begin{cases} x_1^0 + v_1 t \\ x_2^0 + v_2 t \end{cases} = \frac{x_2^0 - x_1^0}{v_1 - v_2}$$

Di conseguenza, $x_{\text{incontro}} = x_1^0 + v_1 t_{\text{incontro}}$ (o "viceversa")

⚠: La velocità media **NON** è la media delle velocità! $\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Esempio

	v	Δx
1	30	$\Delta x/2$
2	50	$\Delta x/2$

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{\Delta x}{\frac{\Delta x}{2v_1} + \frac{\Delta x}{2v_2}} = \frac{1}{\frac{v_2 + v_1}{2v_1 v_2}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}$$

Moto rettilineo uniformemente accelerato

In questo caso, l'accelerazione esiste ed è costante.

Equazioni del moto	
Velocità	$v(t) = v_0 + at$
Posizione	$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$
Accelerazione	$a = \bar{a}$

Oltre alle equazioni qui riportate, esiste una particolare formula che lega direttamente velocità e tempo: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$

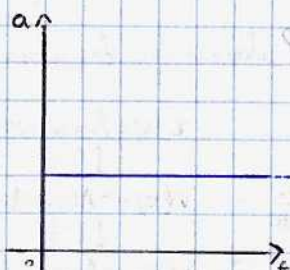
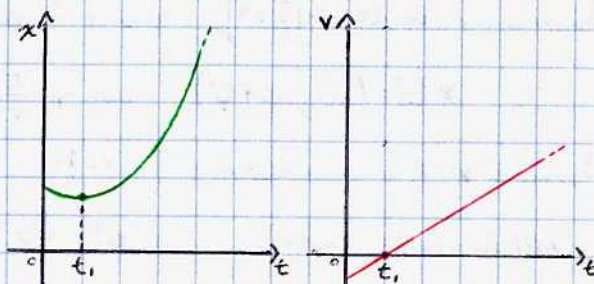
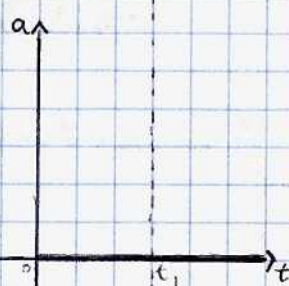
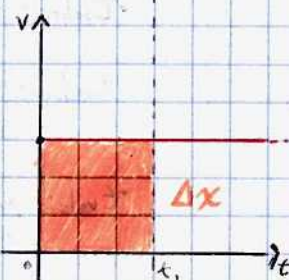
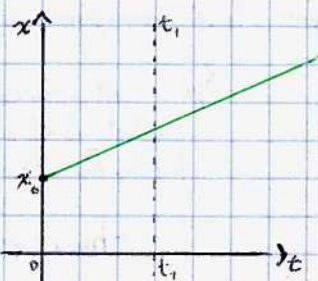
$$\Delta v = v(t) - v_0 = a \Delta t \Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

Ragionando con gli integrali:

$$a = \frac{dv}{dt}; dv = a dt; \int_{v_0}^{v(t)} dv = \int_{v_0}^t a dt \Rightarrow v(t) - v_0 = a \int_0^t dt \Rightarrow v(t) = v_0 + at$$

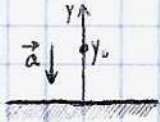
$$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = v dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x(t)} dx = \int_0^t v dt \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_0^t (v_0 + at) dt \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + a \cdot \frac{t^2}{2} \Rightarrow x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

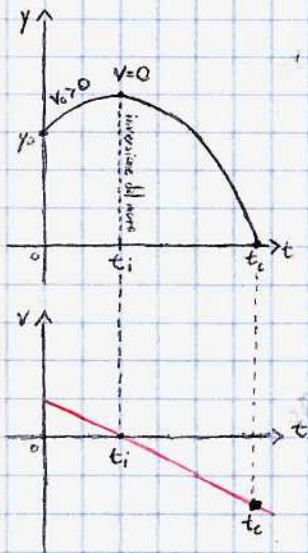


Logicamente, il moto uniformemente accelerato evolve secondo le medesime equazioni anche se l'accelerazione è negativa; in tal caso, il moto si dice uniformemente decelerato. Logicamente, la positività/negatività del vettore accelerazione dipende dal suo orientamento rispetto al sistema di riferimento scelto.

Riporteremo di seguito alcuni accorgimenti rispetto al moto di caduta di un grave (evolve su una traiettoria verticale).



Spesso nella risoluzione di esercizi sul moto di caduta di un grave risulta necessario effettuare il calcolo di altezza massima, tempo di salita (se presente), tempo di caduta e tempo complessivo di volo. Per effettuare tali calcoli si ricorre ad alcune deduzioni logiche:



- h_{max} : punto in cui avviene l'inversione del moto. Se $v_0 < 0$, $h_{max} = y_0$.

$$t_{max} = -\frac{v_0}{a}; \quad h_{max} = y_0 + v_0 t_{max} - \frac{1}{2} a t_{max}^2$$

- t_{salita} : tempo compreso tra t_0 e t_{max} , durante il quale il punto materiale sale.

- t_{caduta} : si considera $v_0 = 0$ e $y_0 = h_{max}$ nel caso in cui vi sia un'inversione di moto, altrimenti basta calcolare il tempo in cui il moto evolve regolarmente

- t_{volo} : può essere considerato come somma di t_{salita} e t_{caduta} . Se $y_0 = 0$, $t_{salita} = t_{caduta} \Rightarrow t_{volo} = 2t_{salita}$

- v_{finale} : $v_0 - g t_{volo}$. A seconda dei casi può evolvere diversamente o richiedere dati diversi.

In ogni caso, è di vitale importanza considerare quali grandezze fisiche sono positive, quali sono negative e quali cambiano segno.

Moto Armonico Semplice

Il moto armonico è un particolare moto periodico; è quindi un particolare tipo di moto che si ripete dopo un intervallo di tempo regolare detto periodo.

Un moto armonico risponde ad un'equazione del tipo:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

\downarrow Ampiezza
 \downarrow Pulsazione (o frequenza angolare)
 fase iniziale \Rightarrow "sfasamento"

$$T = \frac{1}{\nu}$$

\downarrow Periodo [s]
 \downarrow Frequenza (lettera "nu" greca) [s⁻¹ = Hz]

Sapendo che $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} + \alpha)$, l'equazione di $x(t)$ può anche essere scritta come:

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi'), \quad \text{con } \varphi' = \frac{\pi}{2} + \varphi$$

Supponendo $\varphi = 0$, si osserva che; per $t=T$ e $A=1$:

$$x(t) = A \cos(\omega t) \Rightarrow x(t+T) = A \cos(\omega(t+T)) \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \nu$$

equazioni sempre valide

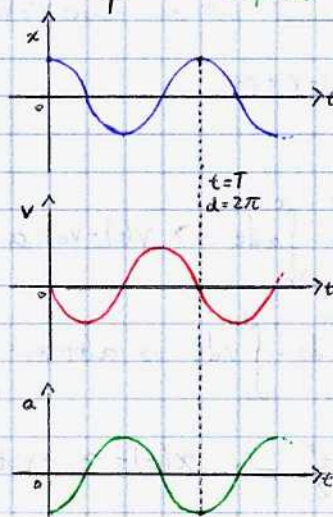
φ identifica uno sfasamento temporale dell'equazione. Con $\varphi = 0$:

$$x(t) = A \cos(\omega t)$$

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = -A\omega \sin(\omega t)$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = a(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

$\downarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$
 $\downarrow \varphi = \frac{3\pi}{2}$

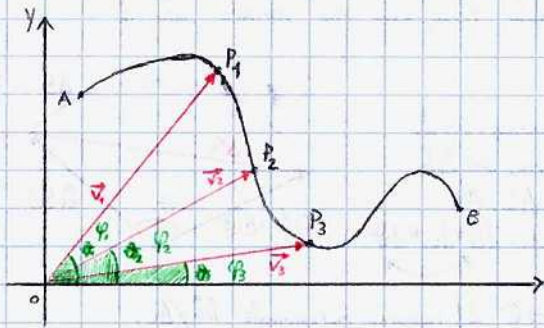


Lo sfasamento temporale dato da φ è pari a:

$$t = -\frac{\varphi}{\omega}$$

Dunque, se $\varphi \neq 0$ ci sarà un ritardo di fase e viceversa.

Moti nel piano (o nello spazio)



\vec{r} è definito raggio vettore, è composto da 2 (3 nel caso di moti spaziali) componenti (x, y, z) con relativi moduli, direzioni e versi.

Repaso sui vettori

\vec{v} vettore
 $|\vec{v}|, \hat{u}$
 ↳ direzione e verso

$|\vec{v}| \equiv v$ modulo del vettore
 ↳ tale notazione viene solitamente impiegata per le grandezze scalari; è formalmente scorretta ma accettata come schematizzazione in questo corso.

Un vettore viene solitamente rappresentato come una freccia di una certa lunghezza (modulo), su una certa retta (direzioni) e con un determinato verso.

Due vettori equipollenti hanno come unica possibile differenza il punto di applicazione, momentaneamente irrilevante poiché schematizziamo i corpi come parti materiali.

Alcune delle operazioni con i vettori

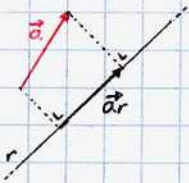
Somma di vettori: si ricorre alla regola del parallelogramma o al metodo punta-coda. Per approfondire, si consiglia di consultare gli appunti di geometria.

Per effettuare una differenza tra vettori bisogna definire il vettore opposto:

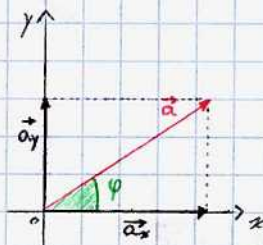
$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} + k\vec{b} \text{ con } k = -1 \text{ (scalare)}$$

Osservando questo prodotto di uno scalare per un vettore, si nota che $(-\vec{b})$ ha verso opposto a \vec{b} . Nella differenza tra vettori, il vettore differenza si rappresenta attraverso la seconda diagonale del metodo del parallelogramma.

Proiezione di un vettore su una retta



Su un sistema di assi cartesiani:



Noti \vec{a}_x, \vec{a}_y , è possibile identificare \vec{a} :

$$\frac{a_y}{a_x} = \tan \varphi \text{ (direzioni e verso)}$$

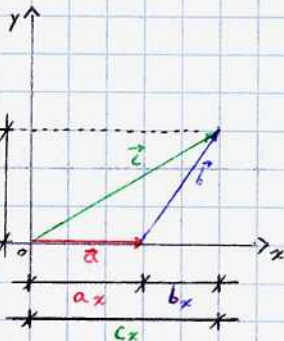
$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \text{ (modulo)}$$

Per scomporre un vettore nelle sue componenti si ricorre al concetto di versore (vettore di modulo unitario che definisce direzione e verso)

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} (+ a_z \hat{k})$$

A seconda del sistema di riferimento il numero di componenti può variare

Ne segue logicamente che il vettore somma [differenza] ha per componenti la somma [differenza] delle componenti.



Valgono le seguenti relazioni:

$$\vec{d} = k\vec{b} = k(b_x \hat{i} + b_y \hat{j}) = kb_x \hat{i} + kb_y \hat{j} \Rightarrow d_x = kb_x; d_y = kb_y$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = c_x \hat{i} + c_y \hat{j}; \quad c_x = a_x + b_x$$

$$c_y = a_y + b_y$$

Oltre alla definizione per componenti, ovvero mediante le coordinate cartesiane vettoriali che, a differenza di quelle scalari, cambiano a seconda del sistema di riferimento considerato, un vettore può anche essere identificato mediante le sue coordinate polari. In particolare, nel piano cartesiano:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \equiv |\vec{a}|, \varphi$$

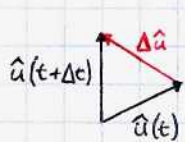
↳ coordinate polari

Per le coordinate polari sferiche (ovvero in 3 dimensioni) saranno necessari due diversi angoli su due piani diversi.

D'ora in poi schematizzeremo i moti in due dimensioni; per considerarli spazialmente sarà necessario aggiungere una terza componente.

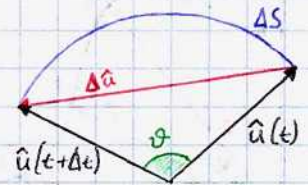
Derivata di un versore

Si consideri un generico versore \hat{u} che varia nel tempo, essendo di modulo fisso, esso può variare solo in direzione e/o verso.



$$\Delta \hat{u} = \hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)$$

Si osserva nel grafico, essendo \hat{u} di modulo unitario, che ΔS è circa uguale a $\Delta \hat{u}$. Ne segue logicamente che $dS = du = d\vartheta$



Per calcolare la derivata del versore bisognerà operare il limite per $\Delta t \rightarrow 0$ del rapporto incrementale $\Delta \hat{u} / \Delta t$.

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\hat{u}(t + \Delta t) - \hat{u}(t)}{\Delta t} = \frac{d\hat{u}}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt}$$

(in modulo)

La derivata di un versore è un vettore che risulterà essere perpendicolare a \hat{u} e pari (in modulo) a $d\vartheta/dt$ (dimostrazione grafica in alto a destra)

Derivata di un vettore

La derivata di un vettore consta di 2 componenti: una parallela al vettore ed una perpendicolare ad esso.

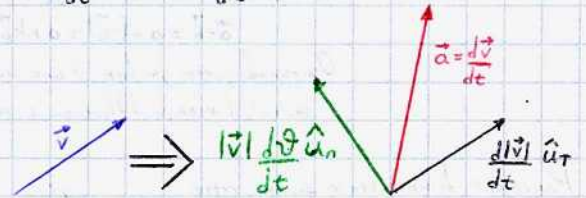
$$\vec{v} = |\vec{v}| \hat{u}_T \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \hat{u}_T) = \underbrace{\frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{u}_T}_{\parallel \vec{v}} + |\vec{v}| \underbrace{\frac{d\hat{u}_T}{dt}}_{\perp \vec{v}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} \hat{u}_T + |\vec{v}| \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_n$$

\hat{u}_n normale

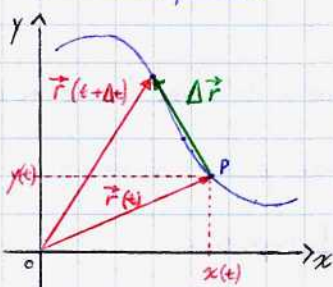
Definiamo tale vettore con \vec{a} . Per il teorema di Pitagora,

$$|\vec{a}| = \left| \frac{d\vec{v}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{d|\vec{v}|}{dt} \right)^2 + \left(|\vec{v}| \frac{d\vartheta}{dt} \right)^2}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n = \left| \frac{d|\vec{v}|}{dt} \right| \hat{u}_T + |\vec{v}| \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_n$$



Moti nel piano



\vec{r} : vettore posizione = \vec{OP}

Per identificare la legge oraria del moto e identificare $\vec{r}(t)$ si può ricorrere a 3 diversi metodi, di cui esploreremo uno qui di seguito.

Logicamente, noto il vettore posizione in due punti, è possibile calcolare il vettore spostamento $\Delta \vec{r}$:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$

Identificazione della legge oraria come composizione di leggi orarie

Per il principio d'indipendenza dei moti simultanei, la legge $\vec{r}(t)$ è anche considerabile come la composizione di due leggi orarie appartenenti agli assi cartesiani x e y :

$$\vec{r}(t) = x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}$$

Nota la legge che governa il vettore posizione, e di conseguenza il vettore spostamento, è possibile calcolare i vettori velocità e accelerazione media e istantanea:

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{[x(t + \Delta t) - x(t)] \hat{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)] \hat{j}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \hat{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \hat{j} \quad \text{dunque, } \vec{v} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j} = \vec{v}_x \hat{i} + \vec{v}_y \hat{j}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} \hat{i} + \frac{dy}{dt} \hat{j}$$

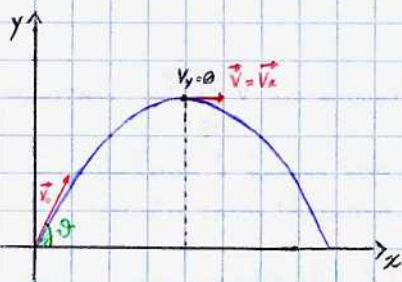
Analogamente per l'accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$; $\vec{a} = \frac{d\vec{v}_x}{dt} + \frac{d\vec{v}_y}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2} \hat{i} + \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \hat{j}$

Allo stesso modo, nota l'accelerazione, è possibile risalire alle altre due grandezze:

$$\begin{cases} \text{velocità} \\ \left\{ \begin{aligned} v_x(t) - v_x(t_0) &= \int_0^t a_x(t) dt \\ v_y(t) - v_y(t_0) &= \int_0^t a_y(t) dt \end{aligned} \right. \end{cases} \quad \begin{cases} \text{spostamento} \\ \left\{ \begin{aligned} x(t) - x_0 &= \int_0^t v_x(t) dt \\ y(t) - y_0 &= \int_0^t v_y(t) dt \end{aligned} \right. \end{cases}$$

Moto del proiettile

Come detto in precedenza, i moti nel piano ~~sono considerati~~ possono essere considerati come la composizione di due moti simultanei lungo gli assi cartesiani. In particolare, il moto di un proiettile può essere considerato la composizione di un moto rettilineo uniforme (asse x) e un moto uniformemente decelerato (asse y).



	Asse x	Asse y
acceleraz.	0	-g
velocità	costante	$v_{oy} - gt$
spostamento	$x_0 + v_x(t)$	$y_0 + v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2$

Osservando il grafico, se ne deduce che:

$$v_{ox} = v_0 \cos \vartheta \quad v_{oy} = v_0 \sin \vartheta$$

Consideriamo un moto con $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$:

Ricavando il tempo da $x(t)$ e sostituendolo a $y(t)$, otteniamo l'equazione $y(x)$, detta equazione della traiettoria, che identifica la traiettoria parabolica del punto materiale.

$$x(t) = v_0 \cos \vartheta t \Rightarrow t = \frac{x}{v_0 \cos \vartheta} = \frac{x}{v_{ox}}$$

$$y(x) = \frac{v_0 \sin \vartheta}{v_0 \cos \vartheta} x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \vartheta} = x \cdot \tan \vartheta - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_{ox}^2}$$

Calcolando certi particolari valori per le grandezze che incidono sul moto, è possibile fare interessanti osservazioni sul moto stesso:

$$\text{Tempo di volo } t_f \mid y(t) = 0 \Rightarrow v_{oy}t - \frac{1}{2}gt^2 = 0 \Rightarrow t \left(v_{oy} - \frac{1}{2}gt \right) = 0 \begin{cases} t = 0 \text{ inizio del moto} \\ t_f = \frac{2v_0 \sin \vartheta}{g} = \frac{2v_{oy}}{g} \end{cases}$$

Altezza massima h | $v_y = 0$ molti modi, preferibile l'inverso di $v^2 = v_0^2 - 2g\Delta h$

$$\text{Tempo di salita } t_s \mid v_y = 0 \Rightarrow v_{oy} - g(t) = 0 \Rightarrow t_s = \frac{v_0 \sin \vartheta}{g} \quad \text{per le condizioni iniziali, } t_s = \frac{1}{2} t_f$$

$$\text{Gittata: } x(t_f) = v_0 \cos \vartheta t_f = \frac{v_0 \cos \vartheta \cdot 2v_0 \sin \vartheta}{g} = \frac{v_0^2 (2 \sin \vartheta \cos \vartheta)}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\vartheta}{g}$$

Si osserva che, avendo imposto $y_0 = 0$ e $x_0 = 0$, si ha la gittata massima per $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ ($\sin 2\vartheta = 1 \Rightarrow 2\vartheta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{4}$)

⚠: se $y_0 \neq 0$, cambia la formula di $y(t)$ e si modificano tutte le equazioni specificate. In particolare, cambiando la formula della gittata, cambia l'angolo di gittata massima.

Nel caso pratico, è sempre possibile traslare il sistema di riferimento tale che $x_0 = 0$. Ciò non vale logicamente per y_0 , poiché influisce sullo spostamento e sulla simmetria grafica della parabola.

Le varie leggi fisiche che descrivono un moto possono essere esplicitate, oltre che per componenti cartesiane, anche per coordinate polari $(|\vec{r}|, \vartheta)$, sapendo che:

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{tg} \vartheta = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Un altro modo per esplicitare le equazioni di un moto è attraverso il concetto di ascissa curvilinea, pari all'arco di curva compreso tra due punti su una traiettoria; si pone un'origine e un verso sulla traiettoria stessa, riconducendo il moto ad un'unica dimensione, ridefinendo le varie equazioni:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ assume la direzione del vettore $d\vec{r}$ (non \vec{r} !); ne segue che la velocità risulta sempre essere tangente alla traiettoria. ~~Intanti;~~
Parlando di variazioni infinitesime di spazio, si può confondere la corda $d\vec{r}$ con ds ; dunque:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt} \hat{u}_T \Rightarrow |\vec{v}| = \frac{ds}{dt}$$

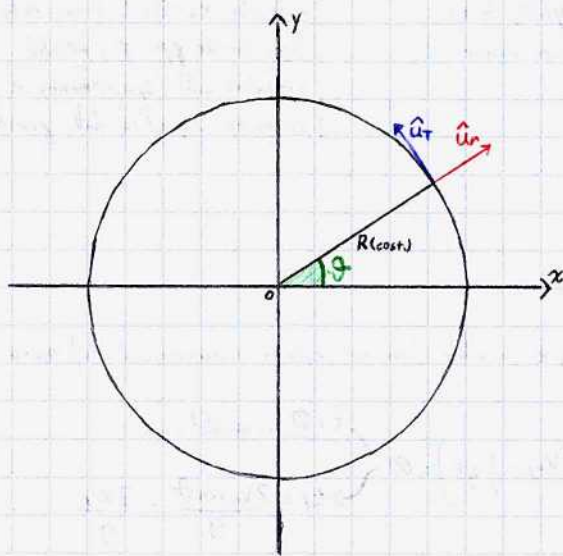
Ne segue logicamente che, per l'accelerazione:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| \hat{u}_T) = \frac{d}{dt} (v(t) \hat{u}_T(t)) = \underbrace{\frac{dv}{dt} \hat{u}_T}_{a_T} + v \frac{d\hat{u}_T}{dt}$$

coincide con $v \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_n$, rappresenta l'accelerazione normale; è perpendicolare alla direzione del vettore velocità.

derivata del modulo della velocità, resta tangente alla traiettoria \Rightarrow accelerazione tangenziale

Moto Circolare Uniforme



È un particolare moto curvilineo: essendo circolare, il vettore posizione non varia in modulo ma solo in direzione. La velocità, tangente alla circonferenza, cambia anch'essa unicamente in direzione (il termine "uniforme" indica che v è costante in modulo). Questa modifica della direzione è dovuta a un'accelerazione normale, che dimostreremo essere centripeta.

$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_r \quad \vec{v} = |\vec{v}| \hat{u}_T$$

$\left. \begin{array}{l} \text{costante} \\ \vec{a}_T = 0 \\ \vec{a}_N = v \frac{d\vartheta}{dt} \end{array} \right\} \vec{a} = |\vec{a}_N| \hat{u}_n$

Essendo un moto a velocità costante, esso risulta essere periodico:

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|}$$

Descriviamo ora il moto fissando un'ascissa curvilinea, con un'origine del riferimento in $O(R, 0)$ e verso positivo in senso antiorario (come per la circonferenza goniometrica); il moto diventa simile al moto rettilineo uniforme:

$$S(t) = S_0 + vt \quad \text{Ponendo } S_0 = 0, \text{ sapendo che } v = \frac{ds}{dt} = \frac{d[R\vartheta(t)]}{dt} = R \frac{d\vartheta}{dt} = R\omega \quad \text{velocità angolare, [rad/s]}$$

$$\vec{v} = R\omega \hat{u}_T \Rightarrow \vartheta(t) = \vartheta_0 + \omega t \quad \text{equazione del moto in variabili angolari}$$

Inoltre, sapendo che $|\vec{a}_N| = v \frac{d\vartheta}{dt}$, si osserva che $|\vec{a}_N| = v\omega = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R$.

La velocità angolare ω è un vettore, di verso ^[negativo] per rotazioni antiorarie, ^[positivo] direzione perpendicolare al piano di rotazione e modulo pari a $\frac{d\vartheta}{dt}$. Inoltre, sapendo che $T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|}$ si ricavi che $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Anche se numericamente e dimensionalmente

equivalente, la velocità angolare è solitamente distinta dalla pulsazione del moto armonico.

Analizzando il moto circolare uniforme per componenti cartesiane, si osserva che esso può essere considerato come la composizione di due moti armonici perpendicolari tra loro, che s'intersecano nel loro punto medio e che risultano sfasati di $\frac{\pi}{2}$ radianti. Infatti:

$$x(t) = R \cos \vartheta(t) = R \cos(\omega t + \vartheta_0) \quad \text{consideriamo } \vartheta_0 = 0$$

$$y(t) = R \sin \vartheta(t) = R \sin(\omega t + \vartheta_0)$$

Ricaviamo ora le altre equazioni del moto:

$$v_x(t) = -R\omega \sin(\omega t)$$

$$v_y(t) = R\omega \cos(\omega t)$$

$$a_x = -R\omega^2 \cos(\omega t) = -\omega^2 x(t)$$

$$a_y = -R\omega^2 \sin(\omega t) = -\omega^2 y(t)$$

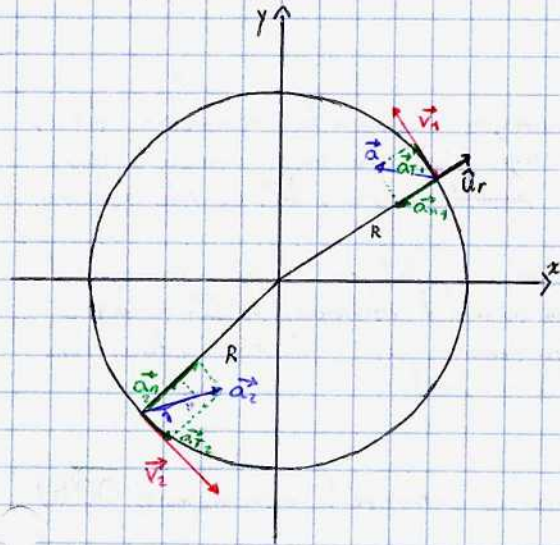
Questo è l'unico caso in cui pulsazione e velocità angolare coincidono.

Sapendo che $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$:

$$\vec{a} = -\omega^2 x(t) \hat{i} - \omega^2 y(t) \hat{j} = -\omega^2 (x(t) \hat{i} + y(t) \hat{j}) = -\omega^2 \vec{r}(t) \Rightarrow \vec{a} = -\omega^2 r \hat{u}_r \rightarrow \text{verso opposto a } \vec{r} \Rightarrow \text{acc. centripeta} \quad (|\vec{a}_T| = 0)$$

Moto Circolare Uniformemente Accelerato

In questo moto circolare, l'accelerazione risulta essere diversa da 0 e costante.



$$\vec{r}(t) = R \hat{u}_r ; \quad \vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_n$$

$$\vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \hat{u}_T ; \quad \vec{a}_n = v \frac{d\vartheta}{dt} \hat{u}_n$$

Considerando il moto in *ascissa curvilinea*:

$$① s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2$$

$$② v(t) = v_0 + a_T t$$

$$③ a_T = \text{cost.}$$

Procedendo per integrali si può ricavare le formule andando a ritroso ($\int a_T dt = \int dv$)

Considerando invece il moto in *variabili angolari*, risulterà opportuno introdurre una nuova grandezza fisica: l'accelerazione angolare α :

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\vartheta}{dt^2} = \frac{1}{dt} \left(\frac{v}{R} \right) = \frac{1}{R} \frac{dv}{dt} = \frac{a_T}{R}$$

Dunque, $a_T = \alpha R$ sempre vero, anche se a_T non è costante.

Le equazioni del moto, ora definitibili, sono:

$$① R\vartheta = R\vartheta_0 + R\omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha R t^2 \Rightarrow \vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

$$② R\omega(t) = R\omega_0(t) + R\alpha t \Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

Si osserva che l'accelerazione normale, evolvendo secondo le formule descritte per il moto circolare uniforme, varia anche in modulo:

$$|\vec{a}_n| = \frac{|\vec{v}|^2}{R} \rightarrow \text{varia}$$

varia

Moto Curvilineo (traiettoria qualsiasi)

In qualunque punto della traiettoria è definita la retta tangente t e la retta normale n . Come è noto, la velocità è sempre tangente alla traiettoria, mentre l'accelerazione ha componenti sia tangenziale che normale (il versore varia nel tempo)

$$\vec{r}(t) = r(t) \hat{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r(t) \hat{u}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt} \hat{u}_r}_{\text{componente radiale}} + r \underbrace{\frac{d\hat{u}_r}{dt}}_{\text{componente normale alla radiale}} = |\vec{v}| \hat{u}_t \quad \text{sempre tangente alla traiettoria.}$$

"In molte applicazioni risulta utile esprimere le componenti tangenziale e normale dell'accelerazione in funzione di parametri locali della traiettoria invece che, ad esempio, in funzione delle componenti cartesiane dell'accelerazione.

A tale scopo consideriamo, in un generico punto P della traiettoria, l'insieme delle circonferenze che sono tangenti alla retta tangente t alla traiettoria. Si tratta di infinite circonferenze di raggi variabili da 0 ad ∞ . Tra queste circonferenze ne esiste una che meglio "combacia" con la traiettoria data: questo cerchio si chiama **cerchio osculatore** alla traiettoria nel punto considerato; si tratta di un cerchio che ha un punto di contatto triplo con la traiettoria; è dunque possibile ottenerne il raggio.

Nel tratto infinitesimo di traiettoria intorno al punto P è come se il punto mobile si muovesse su un pezzo di cerchio osculatore con la velocità tangenziale \vec{v} in P . In questo caso il moto coincide con un moto circolare su una circonferenza di raggio R pari al raggio del cerchio osculatore, detto **raggio di curvatura** della traiettoria in quel punto, con velocità angolare istantanea $\omega = v/R$."

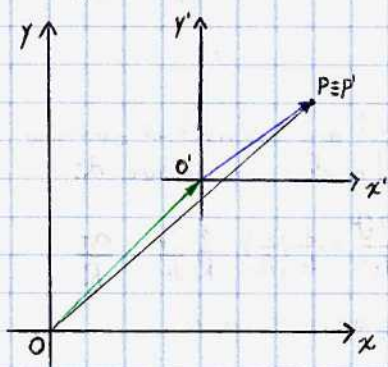
(Meruccini-Silvestrini, Fisica Meccanica, Liguori ed., 1986)

Moti Relativi (bidimensionali, di traslazione)

"Se due sistemi di riferimento si muovono in modo che gli assi coordinati mantengano costante il loro orientamento relativo, si dice che si muovono di moto traslatorio uno rispetto all'altro; ne segue che in un certo intervallo di tempo in un generico punto P appartenente al sistema in moto subisce un certo ~~partito~~ spostamento $\Delta\vec{r}$, ciò vale anche per tutti gli altri punti solidali col sistema.

Un tipico esempio di moti relativi è un generico moto (es. il lancio di una palla) che avviene in un vagone di un treno che si muove di moto rettilineo uniforme osservato in un sistema di riferimento solidale al vagone e un altro sistema solidale alle rotaie: essi sono sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro."

(Meruccini-Silvestrini, cit.)



$\vec{OP}(t) \neq \vec{O'P}(t)$ poiché esiste uno spostamento (e dunque un moto) $\vec{OO'}(t)$ tra i due riferimenti.

Seguendo le trasformazioni galileiane, si osserva che:

$$\vec{OP}(t) = \vec{O'P}(t) + \vec{OO'}(t)$$

$$\frac{d}{dt} \vec{OP}(t) = \frac{d}{dt} \vec{O'P}(t) + \frac{d}{dt} \vec{OO'}(t) \equiv \vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{O'}$$

$$\frac{d}{dt} \vec{v}_P = \frac{d}{dt} \vec{v}_{P'} + \frac{d}{dt} \vec{v}_{O'} \equiv \vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}_{O'}$$

In dinamica, tale termine "corregge" la legge del moto per renderla valida in un sistema non inerziale; essa determina le cosiddette forze apparenti (o fittizie).

Dinamica

La dinamica è la branca della fisica che si occupa delle cause del moto, studiando le relazioni tra movimento e forze.

Sarà dunque necessario fornire la definizione operativa di forza. Come si può immaginare, se si esercita una forza su un oggetto libero di muoversi (inizialmente fermo) esso si mette in movimento; se l'oggetto non è libero di muoversi esso stesso (oppure il vincolo che gli impedisce il libero movimento) si deforma.

La definizione operativa di forza potrebbe dunque basarsi sia sulla misura del movimento che essa produce (definizione dinamica) che delle deformazioni (definizione statica). Poiché gli effetti delle forze in termini di movimento verranno studiati più avanti mediante leggi di cui forniamo ora le premesse, cominceremo con una definizione statica basata sul cosiddetto dinamometro a deformazione, assimilabile ad una "molla tarata" secondo una forza campione unitaria.

Essendo le forze grandezze vettoriali, vale il principio di sovrapposizione (o principio 0 della dinamica):

La risultante delle forze applicate ad un punto materiale è pari alla forza ottenuta dalla somma vettoriale di dette forze.



Fissato un sistema di riferimento inerziale, nel quale un punto materiale libero (non soggetto a forze) se posto inizialmente in quiete permane in quiete, ogni altro sistema di riferimento che si muove di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto ad esso è a sua volta un sistema di riferimento inerziale.

Ricordando moti relativi:

$$\vec{a}_p = \vec{a}'_p + \vec{a}_0$$

(lineari.) $\Rightarrow \vec{a}'_p = -\vec{a}_0$

Se $\vec{a}_0 \neq 0$, il punto materiale in questo riferimento risulta essere soggetto ad un'accelerazione; altrimenti il soggetto punto permane in quiete.

Principio di inerzia: In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale libero che abbia a un certo istante una velocità \vec{v} , mantiene indefinidamente (fino a che resta libero) il suo stato di moto rettilineo uniforme; analogamente qualora esso si trovi in quiete.

Secondo principio della dinamica: In un sistema inerziale, il prodotto tra l'accelerazione subita da un corpo puntiforme e la massa gravitazionale di quel corpo è proporzionale alla risultante delle forze agenti sul corpo. In particolare, scelte unità di misura opportune (N, m/s², kg), tali grandezze risulteranno congruenti:

$$\sum_{i=1}^n \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

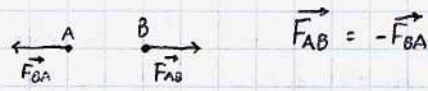
Sapendo che la forza-peso è per definizione proporzionale alla massa gravitazionale di un corpo rispetto ad un vettore \vec{g} detto accelerazione di gravità. Partendo dal famoso esperimento di Galileo che lo portò a concludere che ogniquale sia trascurabile la resistenza dell'aria tutti gli oggetti cadono soggetti ad una stessa accelerazione se soggetti solo alla forza-peso. Di conseguenza,

$$m\vec{g} = m_i \vec{a} \implies \vec{a} = \left(\frac{m}{m_i}\right) \vec{g}$$

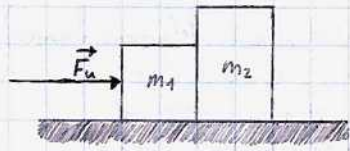
Affinché \vec{a} sia indipendente dall'oggetto, il rapporto tra le masse deve risultare in una costante universale, uguale per tutti i corpi. Ne segue che

massa gravitazionale e massa inerziale sono tra loro proporzionali; ad esse possono essere assegnate, in particolare, le stesse dimensioni fisiche: \vec{g} ha le stesse dimensioni di \vec{a} ; è giustificato il nome di accelerazione di gravità con cui viene designato.

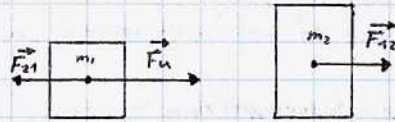
Principio di azione e reazione: Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria
(III princ. dinamica)



Le due forze, applicate su corpi diversi, hanno stessa direzione, stesso modulo, verso opposto; il terzo principio della dinamica vale solo se le due forze si trovano sulla stessa congiungente (braccio non nullo)



I due corpi si muovono con una stessa accelerazione; esistono due forze uguali e contrarie che mantengono il sistema in condizione "solidale":



$$\begin{aligned} \therefore F_{12} &= m_2 \vec{a}_2 \\ + \\ F_u + F_{21} &= m_1 \vec{a}_1 \\ \Downarrow \end{aligned}$$

$$F_u - F_{21} + F_{12} = m_1 a_1 + m_2 a_2$$

Essendo il sistema solidale, $\vec{F}_u = (m_1 + m_2) \vec{a}$

Interazioni Fondamentali in Natura

Le forze fondamentali che governano i fenomeni naturali possono essere ricondotte a 4 tipi di interazioni:

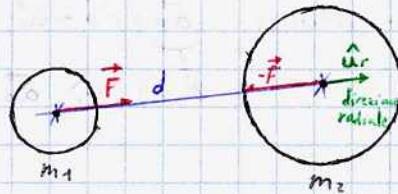
Elettromagnetica: relativa alle cariche elettriche, può essere attrattiva o repulsiva

Forte / Debole: nucleare

Gravitazionale: relativa alle masse, è una forza sempre attrattiva, con direzione radiale.

$$\vec{F}_G = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \hat{u}_r$$

↳ costante di gravitazione universale



In relazione alla Terra,

$$F_G = \frac{G M_T}{r^2} \cdot m \Rightarrow \vec{P} = m \vec{g}$$

↳ pressoché costante;
 $|\vec{g}| = 9,8 \text{ m/s}^2$

Valendo il principio di azione e reazione,

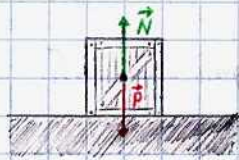
$$F_{TP} = m_p a_p ; F_{TP} = -F_{PT} ; F_{PT} = M_T a_T$$

$$a_T = -\frac{m_p}{M_T} a_p \approx 0$$

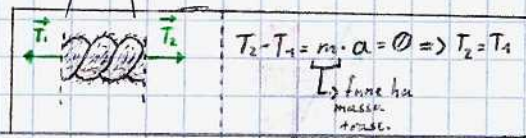
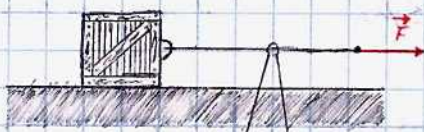
↳ prossima allo 0

Reazioni Vincolari

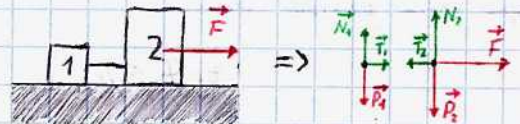
Quando un punto materiale risulta essere limitato nel movimento lungo una particolare direzione, esso risulta essere vincolato. Se sul punto materiale si applica una forza nel verso non consentito dal vincolo, il vincolo eserciterà su detto corpo una forza uguale e contraria. Alle volte, la reazione vincolare risulta di facile individuazione: nel caso in cui vi sia un punto materiale su un piano, la reazione vincolare è determinata da una forza, detta forza normale (è perpendicolare al piano), che in modulo risulta essere pari alla forza premente (non sempre è pari alla forza-peso), con verso opposto ad essa. In altri casi, come quello in cui un'asta sia appesa a un chiodo (da non confondere con un pendolo: la reazione vincolare è determinata dalla tensione), determinare come agisce il vincolo non è così semplice.



Circa le funi: le si considera inestensibili e di massa ~~non~~ trascurabile.



Per questo motivo, due masse collegate da un filo inestensibile teso risultano comportare un sistema solido. Se la fune ha massa, si può considerare una terza massa fra le altre due masse.



In un sistema di masse a contatto:



$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$F_1 + F_{21} = m_1 a_1 = m_1 a$$

$$F_{12} - F_{32} = m_2 a_2 = m_2 a$$

$$F_{23} = m_3 a$$

Si ricordi che $\Sigma F = m \cdot a$

$$\textcircled{1} \begin{cases} \text{Lungo } x: |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = m_1 a_1 \\ \text{Lungo } y: N_1 - m_1 g = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} \text{Lungo } x: F - T_2 = m_2 a_2 \\ \text{Lungo } y: N_2 - m_2 g = 0 \end{cases}$$

Piano Inclinato

Si scompongono le forze agenti sulla massa nel sistema di riferimento, convenzionalmente fissato con l'asse x parallelo al piano inclinato e l'asse y (perpendicolare a x) verso l'alto. L'asse x è solitamente diretto verso il basso, direzione del moto spontaneo.

L'unica forza che muove la massa è \vec{P}_x . Attraverso elementari deduzioni di geometria euclidea e trigonometria, si osserva che:

$$P_x = mg \sin \vartheta = m \cdot a_x$$

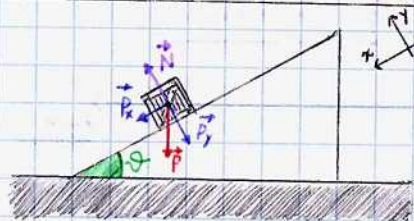
$$a_x \leq g : \quad a_x = g \Leftrightarrow \vartheta = 90^\circ$$

$$a_x = 0 \Leftrightarrow \vartheta = 0^\circ$$

$$P_y = N = mg \cos \vartheta$$

Essendo la corda inestensibile, $a_1 = a_2 = a$. Ne segue che

$$F - T_2 + T_2 = (m_1 + m_2) a \Rightarrow F = (m_1 + m_2) a$$



Osservazione: In assenza di attriti, la velocità finale di una massa soggetta alla forza-peso su un piano inclinato è pari alla velocità finale della caduta libera in assenza di attriti di un punto materiale dalla stessa altezza:

$$v_f = \sqrt{2gh \left(\frac{\sin \vartheta - \mu \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \right)}$$

$$\text{attrito} = 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

Ciò perché la forza-peso è conservativa

Forza di attrito radente

I vincoli esercitano anche una reazione tangenziale f_t , legata alla componente normale N della reazione vincolare. La fenomenologia delle forze di attrito risulta diversa a seconda che il punto materiale considerato, che si trova a contatto col vincolo, sia fermo rispetto al vincolo o in moto relativamente ad esso. Nel primo caso si parla di attrito statico; nel secondo di attrito dinamico.

Entrambi non dipendono dalla superficie a contatto, ma dalla loro natura.

La forza di attrito statico è una forza che si oppone ad una forza attiva applicata su un corpo in quiete. Essa equilibra la forza attiva fino al raggiungimento di un valore limite $f_{s, \max}$, raggiunto il quale la massa inizia a muoversi.

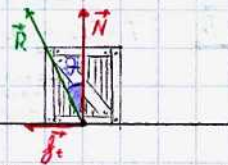
$$f_{s, \max} = f_{s, \lim} = \mu_s N \quad f_{s, \max} \text{ viene spesso indicata con } F_s$$

Il coefficiente μ_s è detto coefficiente di attrito statico. Si osserva che:

$$\vec{f}_t = -\vec{f}_s \quad \text{finché } f_t \leq \mu_s N, \text{ ovvero finché } \frac{f_t}{N} \leq \mu_s \quad \text{il corpo resta fermo}$$

Essendo f_t ed N le componenti tangenziale e normale della reazione vincolare totale \vec{R} , f_t/N rappresenta la tangente dell'angolo ϑ formato dalla reazione \vec{R} con la normale al piano di contatto. L'equazione esplicitata è dunque anche scrivibile come:

$$\operatorname{tg} \vartheta \leq \mu_s$$



Definito dunque l'angolo limite ϑ_a tale che $\operatorname{tg} \vartheta_a = \mu_s$, la precedente relazione è ulteriormente semplificabile: $\vartheta \leq \vartheta_a$

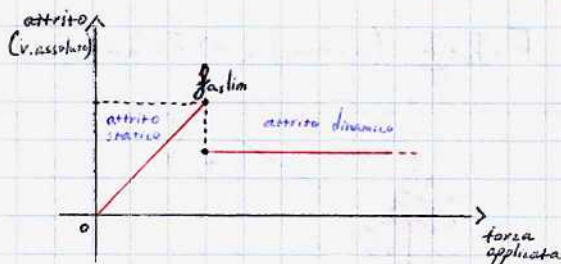
Quando l'oggetto si muove strisciando contro il vincolo, sul moto agisce una forza tangenziale opposta al moto e proporzionale alla componente normale della reazione vincolare; tale forza ha un'intensità costante, pari a:

$$\vec{f}_d = -\mu_d N \hat{v} \quad \begin{matrix} \text{verso della} \\ \text{velocità dell'oggetto} \\ \text{relativamente al vincolo} \end{matrix}$$

infatti, $-f_d = m \cdot a$; $\Rightarrow -\mu_d N = m \cdot a$; $-\mu_d \cdot \mu \cdot g = \mu \cdot a$; $a = -\mu_d \cdot g$

Se $|\vec{v}|$ è costante, $F = -f_d$

$$\mu_d < \mu_s$$



Ricordando che, per un corpo inizialmente fermo, $\operatorname{tg} \vartheta \leq \mu_s$, attraverso un procedimento matematico osserviamo che per una qualsiasi inclinazione del piano d'appoggio, se la massa è in equilibrio tale relazione risulta sempre valida:

$$F_s = m \cdot a; \quad m \cdot g \operatorname{sen} \vartheta = F_s \leq \mu_s \cdot \overbrace{m \cdot g \cos \vartheta}^N \Rightarrow \operatorname{sen} \vartheta \leq \mu_s \cos \vartheta \Rightarrow \operatorname{tg} \vartheta \leq \mu_s$$

Dopo l'angolo "critico" ϑ_a , la massa si muove, soggetta ad un attrito dinamico. Attraverso simili calcoli, si nota che l'accelerazione del sistema dipende anch'essa dall'angolo:

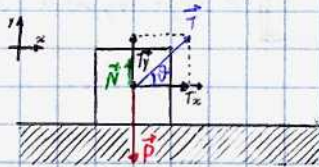
$$m \cdot g \operatorname{sen} \vartheta - \mu_d N = m \cdot a; \quad \mu \cdot g \operatorname{sen} \vartheta - \mu_d \operatorname{tg} \vartheta \cos \vartheta = \mu \cdot a \Rightarrow a = g (\operatorname{sen} \vartheta - \mu_d \cos \vartheta) = g (\operatorname{tg} \vartheta - \mu_d)$$

Se il corpo è in movimento ma $\operatorname{tg} \vartheta < \mu_d$, il corpo tornerà alle condizioni statiche; negli altri casi si muoverà con $a \neq 0$

Poiché $f_d = \mu_d \cdot m \cdot g \cos \vartheta$, essa aumenta al diminuire dell'angolo, esiste un secondo angolo critico (minore del precedente in quanto $\mu_d < \mu_s$) per il quale si torna alla condizione statica.

Esercizio numerico esemplificativo sugli attriti

$m = 50 \text{ kg}$
 $\vartheta = 40^\circ$
 $\mu_s = 0,2$
 $\mu_d = 0,15$
 $T = 100 \text{ N}$



Scomponiamo la situazione dinamica sugli assi:

① $N + T_y - mg = 0 \Rightarrow N = mg - T_y = mg - T \sin 40^\circ = 426 \text{ N}$

② Verifichiamo se il corpo non si muove: $T_x - F_s = 0 \Rightarrow T_x = F_s \leq \mu_s N$; $T \cos 40^\circ \leq \mu_s N$; $76,6 \text{ N} < 85,2 \text{ N}$ ^{non si muove}

Supponendo ora $\vartheta = -40^\circ$, $T = 140 \text{ N}$

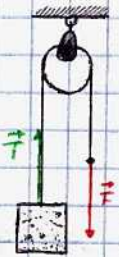
$\Sigma F = 0$
① $N = mg + T_y = 490 \text{ N}$

② $T_x = F_s \leq 107 \text{ N}$, $F_{s \text{ lim}} = 116 \text{ N}$ non si muove

Se $\vartheta = -40^\circ$, $T = 140 \text{ N}$, $T_x = 140 \text{ N}$ ^{si muove}
 $F_{s \text{ lim}} = 80 \text{ N}$
 $T_x - F_d = m \cdot a$, $a = \frac{T_x - F_d}{m} = 1,72 \text{ m/s}^2$
 Conviene tirare piú che spingere!

Argani / Carrucole

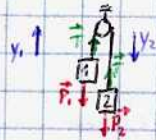
Supponendoli ideali, possono essere considerati come dischi senza massa e che non determinano attriti cui si legano funi ideali; tali dispositivi permettono di variare la direzionalità della forza.



$|\vec{F}| = |\vec{T}|$

Nel caso in cui F sia determinata dalla forza-peso di un'altra massa (macchina di Atwood), per enunciare i principi della dinamica e applicarli è possibile applicare un sistema di riferimento diverso per ogni massa, fissato convenzionalmente nella direzione del moto; altrimenti si considera un unico sistema di riferimento.

Risulterà necessario considerare tali sistemi per determinare il segno delle forze nelle varie equazioni:



Considerando solo il riferimento y_1 :

① $T - m_2 g = m_2 a$

② $T - m_1 g = m_1 a$

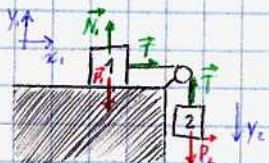
Considerando entrambi:

① $m_2 g - T = m_2 a$

② $T - m_1 g = m_1 a \Rightarrow T = m_1(a + g)$

Sommando a membro a membro le equazioni di m_1 ed m_2 si può ricavare l'accelerazione del sistema (si elide T)

Particolari sistemi di masse e carrucole (bisogna sempre ragionare)



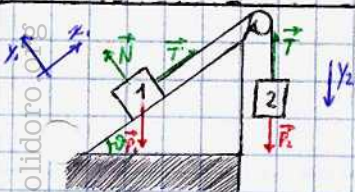
① $N - m_1 g = 0$
 $T = m_1 a$

② $m_2 g - T = m_2 a$

$T + m_1 g - T = (m_1 + m_2) a$
 $a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g$

Se il blocco 1 è soggetto a attrito,

① $T - \mu_d N = m_1 a \Rightarrow a = \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2}$



① $N - m_1 g \cos \vartheta = 0$
 $T - m_1 g \sin \vartheta = m_1 a$

② $m_2 g - T = m_2 a$

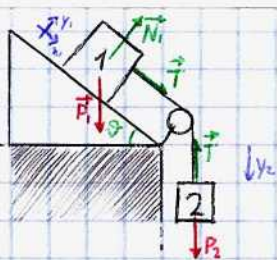
$T - m_1 g \sin \vartheta + m_2 g - T = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{m_2 - m_1 \sin \vartheta}{m_1 + m_2} g$

Se il blocco 1 è soggetto ad attrito, sarà necessario effettuare un confronto tra le forze tiranti per verificare in che verso si muove il sistema:

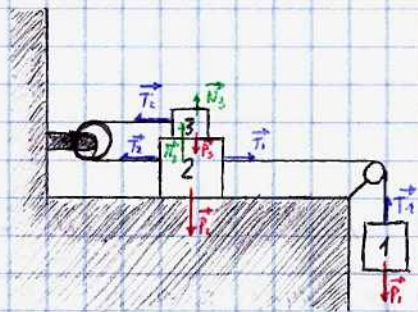
se ↗, $T - m_1 g \sin \vartheta - \mu_d m_1 g \cos \vartheta = m_1 a$;

se ↘, $m_1 g \sin \vartheta - T - \mu_d m_1 g \cos \vartheta = m_1 a$

(cambio di riferimento, diretto verso il moto)

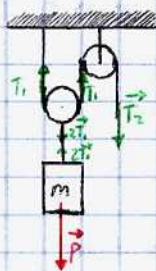


$$\begin{cases} \textcircled{1} T + m_1 g \sin \vartheta = m_1 a \\ \textcircled{2} m_2 g - T = m_2 a \end{cases} \Rightarrow m_2 g + m_1 g \sin \vartheta = (m_1 + m_2) a \Rightarrow a = \frac{(m_1 + m_2 \sin \vartheta) g}{m_1 + m_2}$$



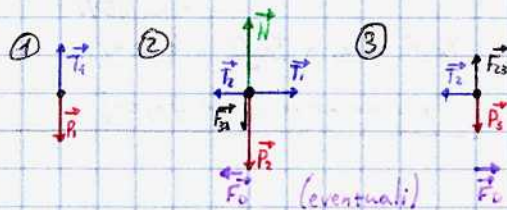
Logicamente, è possibile costruire infiniti sistemi di masse collegate da carrucole, è necessario saper ragionare e rappresentare sempre il diagramma di corpo libero, ricordando che $\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

Un ultimo, particolare esempio è il seguente:

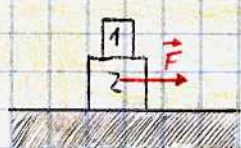


$$\begin{cases} 2T_1 - mg = m \cdot a \\ T_1 = T_2 \end{cases} \rightarrow 2T_2 - mg = m \cdot a$$

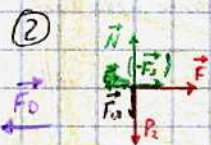
Si osserva che la forza applicata risulta "raddoppiata"; lo spostamento viene però dimezzato.



Esercizio tipico da Esame negli atterizi



Esiste μ_s e μ_d tra 1 e 2. Caso 1: 1 e 2 si muovono insieme



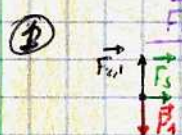
$$\begin{cases} \textcircled{1} \begin{cases} y \ F_{z1} - m_1 g = 0 \\ x \ F_s = m_1 a \end{cases} \\ \textcircled{2} \begin{cases} x \ F - F_s = m_2 a_2 = m_2 a \\ y \ N - m_2 g - F_{z2} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow F = (m_1 + m_2) a$$

1, 2 si muovono insieme

$$\Downarrow a_1 = a_2 = a$$

$$\Downarrow m_1 a = F_s \leq \mu_s F_{z2} = \mu_s m_2 g$$

$$\Downarrow a \leq \mu_s g$$



Caso 2: $a > \mu_s g$, i corpi sono in moto relativo

$$a_1 \neq a_2$$

$$\textcircled{1} \begin{cases} y \ F_{z1} - m_1 g = 0 \\ x \ F_s = m_1 a_1 = \mu_d m_1 g \Rightarrow a_1 = \mu_s \cdot g \end{cases}$$

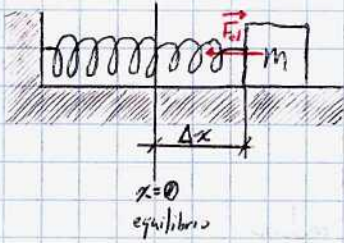
$$\textcircled{2} \begin{cases} x \ F - F_s = m_2 a_2 \Rightarrow F - \mu_d m_1 g = m_2 a_2 \Rightarrow a_2 = \frac{2F - \mu_d m_1 g}{m_2} \\ y \ N - m_2 g - F_{z2} = 0 \end{cases}$$

Caso 3: Attrito anche col "pavimento" (suolo)

$$F_{D2} = \mu_{D2} N; N = m_2 g + m_1 g = (m_1 + m_2) g$$

Forza Elastica

È una forza proporzionale alla deformazione ed opposta ad essa; forze di questo tipo si dicono "di richiamo".



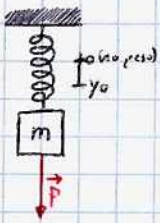
$$\vec{F}_{el.} = -k(x-x_0) \hat{u}_x$$

fissando $x_0=0$,

$$-kx = m \cdot a = m \frac{d^2x}{dt^2}; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0; \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad \omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Se è in verticale, si osserva che la forza-peso modifica solo la posizione di equilibrio, non l'oscillazione



$$\text{Posizione di equilibrio: } ky_0 = mg \Rightarrow y_0 = \frac{mg}{k}$$

$$mg - ky = m \frac{d^2y}{dt^2}; \quad \text{cambio di variabile: } y' = (y - y_0) \Rightarrow y = y' + y_0$$

$$mg - k(y' + y_0) = m \frac{d^2(y' + y_0)}{dt^2}$$

$$mg - ky' - ky_0 = m \frac{d^2y'}{dt^2}; \quad \left(\frac{dy_0}{dt} = 0 \text{ perché } y_0 \text{ è un valore fissato} \right)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} + \frac{k}{m}y' = 0$$

Non cambia la legge oraria

Attrito Viscoso

Dipende dalla velocità del corpo, dal fluido e da alcune caratteristiche del corpo. Inoltre, se la velocità iniziale del corpo è maggiore di un valore limite, si considererà non l'attrito viscoso ma un'altra forza resistiva.

$$\vec{F}_v = -b\vec{v}$$

(forza resistiva: $F = -cV^2$)

in caduta libera, $mg - b \frac{dy}{dt} = ma = m \frac{d^2y}{dt^2}$ si traduce in un'equazione del tipo:

$$y(t) = \underbrace{-\gamma A e^{-\gamma t}}_{\substack{\text{sol. esponenziale,} \\ \text{tende a } 0}} + \overbrace{\frac{mg}{b}}^{\text{valore limite}}$$

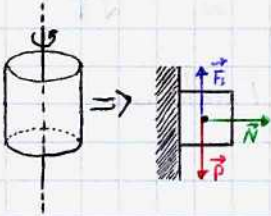
Forze Centripete (sono forze vincolari, si esprimono come \vec{T} o \vec{N})

Ne esistono varie e di natura diversa (sia a distanza che di contatto); si considera un sistema di riferimento diretto verso il centro di rotazione.

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}_c \quad ; \quad \Sigma F = m a_c = m \frac{v^2}{R}$$

Elenciamo ora alcuni casi particolarmente frequenti:

① Rotore (o dispositivi simili): "cilindro" rotante, con corpi liberi all'interno che non cadono

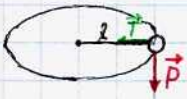


$$\textcircled{1} P \leq F_{s \text{ lim}} \Rightarrow mg \leq \mu_s N$$

$$\textcircled{2} N = m \cdot a_c = m \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow mg \leq \mu_s m \frac{v^2}{R} \Rightarrow v^2 \geq \frac{Rg}{\mu_s} \quad ; \quad |v| \geq \sqrt{\frac{Rg}{\mu_s}}$$

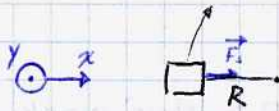
② Punto materiale connesso ad una fune



$$T = m \frac{v^2}{R}$$

se $\exists \vartheta$, scomponi T su un opportuno sistema di riferimento

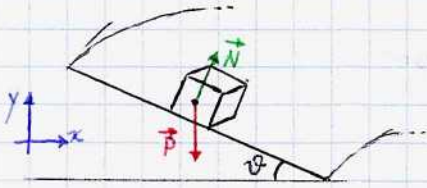
③ Veicoli in curva



$$\textcircled{y} : N - mg = 0$$

$$\textcircled{x} : F_s = m \frac{v^2}{R} \leq \mu_s N; \quad \mu \frac{v^2}{R} \leq \mu_s mg \Rightarrow v^2 \leq \mu_s g R; \quad |v| \leq \sqrt{\mu_s g R} \quad \text{velocità limite}$$

Se la curva è inclinata (come una parabola), la v. limite aumenta: supponiamo nel prossimo esempio che non vi sia attrito



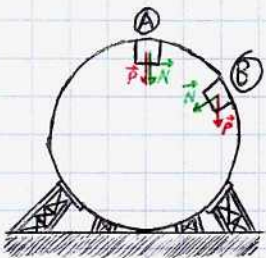
$$\textcircled{x} : N_x = N \sin \vartheta = m \frac{v^2}{R}$$

$$\textcircled{y} : N \cos \vartheta - mg = 0 \Rightarrow N \cos \vartheta = mg$$

$$\Rightarrow \tan \vartheta = \frac{v^2}{Rg}$$

Angolo di inclinazione che permette il movimento senza slittamento sebbene in assenza di attrito

④ "Giro della morte" e simili

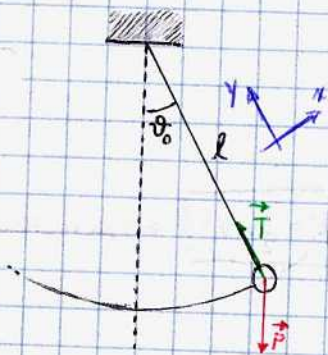


$$\textcircled{A} : N + mg = m \cdot a_c = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m v^2}{R} - mg > 0 \quad \text{in modo da esprimere il vincolo (dunque il corpo non cade)}$$

② Si sceglie un riferimento opportuno tale che \vec{N} sia parallela all'asse y

$$N + mg \cos \vartheta = m \frac{v^2}{R}; \quad N = \frac{m v^2}{R} - mg \cos \vartheta > 0 \Rightarrow v^2 = Rg \cos \vartheta$$

⑤ Pendolo Semplice (moto circolare) (non conico)



Si scompone P in P_x e P_y

$$\textcircled{x} \quad -P_x = m \cdot a_t \Rightarrow -mg \sin \vartheta = m \ddot{\alpha} l \Rightarrow -mg \sin \vartheta = m l \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}; \quad \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

$$\textcircled{y} \quad T - P_y = m \frac{v^2}{R} \Rightarrow T = mg \cos \vartheta + m \frac{v^2}{l}$$

L'ultima equazione ottenuta su \textcircled{x} è quella di un oscillatore armonico ($\sin \vartheta$ invece che su x). Di conseguenza,

$$\omega^2 = \frac{g}{l}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Si ricorda: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

ϑ_0

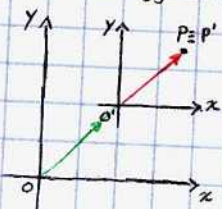
$$\vartheta(t) = \vartheta_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega \vartheta = -\omega \vartheta_0 \cdot \omega \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow v(t) = l \cdot \omega \vartheta = -l \omega \vartheta_0 \omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$\omega \vartheta \equiv \dot{\vartheta}$ velocità angolare; ω pulsazione

Forze Apparenti

Avv. Si osservano in sistemi di riferimento non inerziali, sono dei "correttivi" da applicare per far valere la seconda legge della dinamica.



$$\vec{r} = \vec{O'P} + \vec{OO'}$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_{P'} + \vec{v}_{O'}$$

$$\vec{a}_P = \vec{a}_{P'} + \vec{a}'$$

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}_P = m(\vec{a}' + \vec{a}') = m \vec{a}' + m \vec{a}';$$

$$\sum \vec{F} - m \vec{a}' = m \vec{a}'$$

\vec{F}_{app} , si sottraggono delle forze apparenti dovute al sistema di riferimento che non è inerziale.

Esempio: Ascensore accelerato:



Peso misurato da una bilancia: $m(g+a) \Rightarrow P_{app} = m(\vec{g} + \vec{a})$

Se scendo si considera un riferimento verso il basso.

$$\vec{a} \uparrow \quad N - P = ma; \quad N = P + ma$$

$$\vec{a} \downarrow \quad P - N = ma; \quad N = P - ma$$

Leggi di Conservazione dell'ENERGIA: dedotte dai tre principi della dinamica, valgono nell'ambito delle scienze in generale, oltre che in meccanica quantistica e relativistica. Occorre definire una nuova grandezza fisica, il **lavoro**, grandezza scalare misurato in joule ("J")

$$W = F_t \cdot \Delta S$$

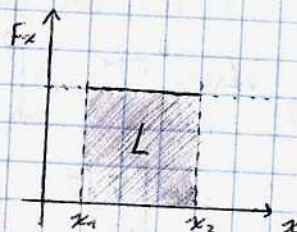
$$F_t = m \cdot a_t \quad (\text{accl. tangenziale})$$

$L > 0 \Rightarrow$ lavoro motore
 $L = 0 \Rightarrow$ lavoro nullo $\Rightarrow F \perp v \Rightarrow a = 0$
 $L < 0 \Rightarrow$ lavoro resistivo

Nel moto unidimensionale a forza costante:



$$W = F_x \Delta x = F \cos \vartheta \Delta x$$



$$[J] = [F] \cdot [l] \Rightarrow 1J = \frac{1N \cdot m}{1m}$$

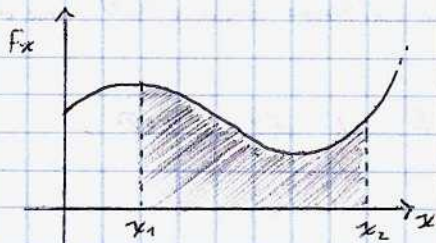
Teorema delle forze vive: il lavoro delle forze applicate a un corpo è pari alla variazione dell'energia cinetica posseduta dal corpo stesso (vale per tutte le forze). In particolare, un lavoro positivo determina un aumento di velocità ed energia cinetica e viceversa.

Dim: $F_x = m \cdot a_x \quad a_x = \text{cost.}$

$$v^2 = v_0^2 + 2a_x \Delta x \Rightarrow a_x \Delta x = \frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2$$

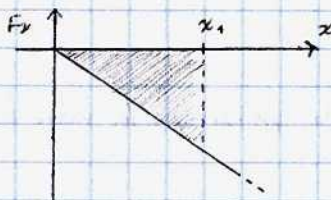
$$W = F_x \Delta x = m \cdot a_x \Delta x = m \left(\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 \right) = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = K_f - K_0 ; \quad \boxed{K = \frac{1}{2} m v^2} \text{ energia cinetica}$$

Se la forza è variabile nel tempo nel moto unidimensionale:



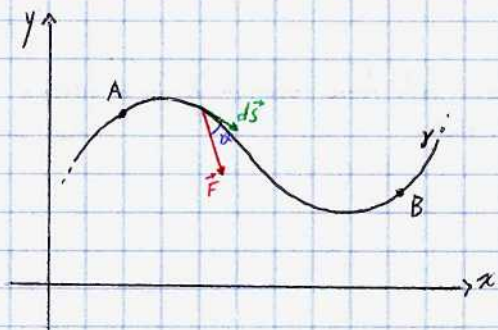
$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n F_i \Delta x_i = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} F_{xi} \Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx \quad \text{integrale di linea}$$

Nel caso della forza elastica: $F = -kx$



$$W = \int_0^{x_1} -kx dx = -k \int_0^{x_1} x dx = -k \left[\frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_0^2 \right] = -\frac{1}{2} k x_1^2 + \frac{1}{2} k x_0^2$$

Se la forza è variabile in 2 dimensioni:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F ds \cos \vartheta = F_x dx + F_y dy \quad \text{prodotto scalare di vettori}$$

$$W = \int_{A \gamma}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B F \cos \vartheta ds$$

forza tangenziale
integrale di linea, varia in base al percorso AB

$$W = \int_{A \gamma}^B (F_x dx + F_y dy) = \int_{A \gamma}^B F_x dx + \int_{A \gamma}^B F_y dy$$

Prodotto scalare:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} \stackrel{\text{def}}{=} C = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos \vartheta$$

"Ascoltare B"

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$$

$$\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}|$$

*Proprietà:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$$

$$(\vec{A} + \vec{B}) \cdot \vec{C} = \vec{A} \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot \vec{C}$$

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} \quad \hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \quad \hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{i} = 0$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \hat{i} + A_y \hat{j}) \cdot (B_x \hat{i} + B_y \hat{j})$$

Proprietà degli integrali di linea

$$\textcircled{1} \int_A^B (\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F}_1 \cdot d\vec{s} + \int_A^B \vec{F}_2 \cdot d\vec{s}$$

$$\textcircled{2} \int_A^C \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^C \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$\textcircled{3} \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

T. forze vive generalizzato:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \vec{a} \cdot d\vec{s} = m \int_A^B \vec{a} \cdot \vec{v} dt = m \int_A^B \vec{a} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} dt = m \int_{v_0}^{v_f} \vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \square$$

ds
90°
dv

Potenza: $P = \frac{dL}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ si misura in Watt; $1W = \frac{1J}{s}$

Lavoro delle principali forze studiate finora

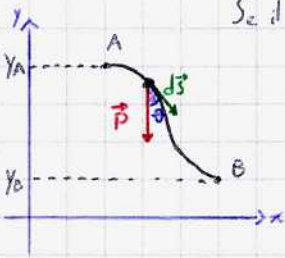
Forza-peso



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = m\vec{g} \cdot d\vec{s} \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_A^B -mg(y) \cdot dy(-\hat{j}) = \int_{y_A}^{y_B} mg dy = mg \int_{y_A}^{y_B} dy =$$

$$= m \cdot g (y_B - y_A) = mg \Delta y$$

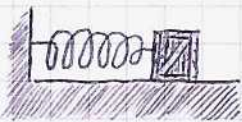
Se il cammino AB non è verticale:



$$W_{AB} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_A^B m\vec{g} \cdot d\vec{s} \cos \vartheta = \int_{y_A}^{y_B} mg dy = mg \Delta y$$

il lavoro non dipende dalla traiettoria, solo dalla posizione

Forza elastica



$$W_{AB} = \int_A^B -kx \hat{i} \cdot d\vec{s} = - \int_{x_A}^{x_B} kx dx = -k \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x_A}^{x_B} = -\frac{1}{2} k \Delta x^2$$

Forze centrali (ovvero forze che dipendono dalla distanza in maniera quadratica, come la gravitazione)

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{A}{r^2} \hat{u}_r$$

$$dW = \frac{A}{r^2} \hat{u}_r \cdot d\vec{s} = \frac{A}{r^2} ds \cos \vartheta = \frac{A}{r^2} dr \Rightarrow W_{AB} = A \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = -A \left[\frac{1}{r} \right]_{r_A}^{r_B} = -A \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

non dipende dalla traiettoria

Forze vincolari / tensioni: $W = 0$, perché la forza è sempre normale allo spostamento (reazione vincolare \Rightarrow no spost.)

Forza costante nel tempo:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{F} \cdot \int_A^B d\vec{s} = \vec{F} \cdot \Delta \vec{s}$$

non dipende dalla traiettoria

Forza di Attrito

Tale forza dipende in direzione dalla direzione della velocità; il suo lavoro è sempre resistivo



$$F_D = \mu_0 N$$

$$W_{AB} = \int_A^B F_D \cdot d\vec{s} = \int_A^B \mu_0 N ds \cos 180^\circ = -\mu_0 N \int_A^B ds$$

angolo tra v ed F_D = 180°

integrale di linea = $-\mu_0 N L_{AB}$
dipende dalla traiettoria

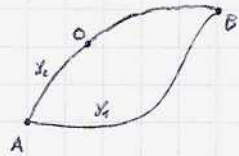
Forza Conservativa: È un particolare tipo di forza il cui lavoro non dipende dalla traiettoria e al quale è possibile associare un'energia potenziale (rinviate in precedenza) secondo la legge:

$$W_{AB} = -(U(B) - U(A)) = -\Delta U$$

Una "dimostrazione" di ciò verrà data alla pagina successiva.

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{\gamma_1}^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_A^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_0^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \int_0^A \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_0^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = U(A) - U(B) = -\Delta U$$

-U per def.



Energia Potenziale su due punti

$$U(P) \stackrel{\text{def}}{=} - \int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$U'(P) = - \int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{s} = - \left(\int_0^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_0^P \vec{F} \cdot d\vec{s} \right) = - \int_0^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} + U(P)$$

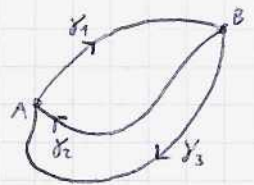
Le due grandezze sono definite a meno di una costante, che si considera spesso = 0 ("livello zero" del sistema fisico)

Se il lavoro è motore (> 0), l'energia potenziale aumenta.

Teorema: Una forza è conservativa $\Leftrightarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$ lavoro su un cammino chiuso $\left(\int_A^B + \int_B^A \right)$

Dimostrazione

$$\Rightarrow W_{AB \gamma_1} = \int_A^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} = W_{AB \gamma_2} = - \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow \int_A^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$



$$\Leftarrow \oint \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow \int_A^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow$$

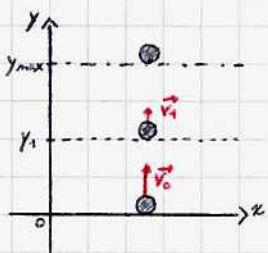
$$\Rightarrow \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} + \int_B^A \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Nelle tre dimensioni, $dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$; $F_x dx = -dU \Rightarrow F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$ derivata parziale, se fosse unidimensionale $F = F_x = -\frac{dU}{dx}$

Principio di conservazione dell'energia meccanica totale

Se un corpo è soggetto unicamente a forze conservative, l'energia meccanica totale ($E = U + K$) del sistema non varia.

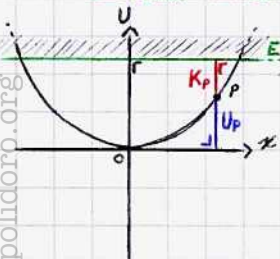
Sistema massa-Terra



$$y_0 = 0 \Rightarrow U(0) = 0 \quad K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2$$

\vec{P} si oppone allo spostamento
 $W < 0$ salita
 legata al moto
 legata alla configurazione del sistema
 $K_0 + U_0 = K_1 + U_1 \Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_1^2 + m g y_1 = m g y_2$
 $W > 0$ discesa
 U si trasforma in lavoro motore (K)

Sistema massa-molla



$$K_{\text{estremo}} = 0, U_{\text{est.}} = \frac{1}{2} k x_{\text{max/min}}$$

$$K_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad U_0 = 0$$

0 = pos. equilibrio

Dimostrazione $E = \text{cost}$: Noti: $x(t) = A \cos \omega t$, $v(t) = -A \omega \sin \omega t$, $\omega^2 = k/m$, $\frac{1}{2} k x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$

$$E = \frac{1}{2} k (A^2 \cos^2(\omega t)) + \frac{1}{2} m (A^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)) = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2(\omega t) + \frac{1}{2} m A^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega t) =$$

$$= \frac{1}{2} k A^2 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) = \frac{1}{2} k A^2 \text{ cost.}$$

$$K = E - U \geq 0 \Rightarrow E \geq U \quad (\text{in grafico})$$

Pendolo



$$-mg \sin \vartheta = m a_t \Rightarrow -mg \sin \vartheta = m \frac{dv}{dt} \Rightarrow -g \sin \vartheta = \frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{l}{l} \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0 \quad \text{se } \sin \vartheta \approx 0$$

approssimazione tale che $\sin \vartheta \approx \vartheta$, se no non risolvibile

Col principio di conservazione dell'energia,

$$\frac{K_A + U_A}{0} = \frac{K_B + U_B}{0} \Rightarrow$$

Consideriamo il livello 0 dell'energia potenziale nella posizione più bassa del pendolo ("costa" ΔU , non U stesso)

$$\Rightarrow mgh_A = \frac{1}{2} m v_B^2; \quad \text{sapendo che } h_A = l - l \cos \vartheta,$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mg l (1 - \cos \vartheta); \quad v_B^2 = 2gl(1 - \cos \vartheta) \Rightarrow T = mg + \frac{m}{l} \cdot 2gl(1 - \cos \vartheta) = 3mg - 2mg \cos \vartheta \quad \text{sempre preciso}$$

Teorema dell'energia cinetica generalizzato

Siano F_1, F_2 due forze conservative e F_{nc} una forza non conservativa. Il lavoro delle forze non conservative è pari alla differenza di energia meccanica del sistema.

$$W_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} K_B - K_A = \int_A^B F_{nc} \cdot d\vec{s} + \int_A^B F_1 \cdot d\vec{s} + \int_A^B F_2 \cdot d\vec{s} = K_B - K_A \Rightarrow \int_A^B F_{nc} \cdot d\vec{s} = \frac{U_1(B) + U_2(B) + K(B) - U_1(A) - U_2(A) - K(A)}{E_B - E_A}$$

Sistemi di Punti Materiali

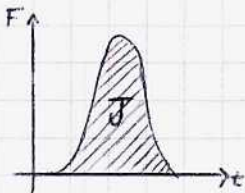
Richiami ad un punto materiale: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$; $\vec{p} = m \cdot \vec{v} \Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$ la risultante delle forze è pari alla variazione della quantità di moto.

quantità di moto [N·s]

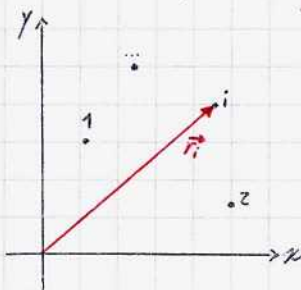
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \Rightarrow \vec{F} dt = d\vec{p} \Rightarrow \int_0^t \vec{F} dt = \int_{\vec{p}_0}^{\vec{p}^t} d\vec{p} \Rightarrow \vec{p} - \vec{p}_0 = \vec{J} = \Delta \vec{p}$$

impulso della forza

Teorema dell'impulso ($\vec{J} = \Delta \vec{p}$)



Sistema discreto di punti materiali (costituito da n punti materiali)



1 p. matr.

$$\vec{r}_i$$

$$m_i$$

$$\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$$

$$\vec{F}_i = m_i \vec{a}_i$$

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

$$\vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}} = m_i \vec{a}_i$$

$\vec{F}_i^{\text{int}} = \vec{F}_{i1} + \vec{F}_{i2} + \dots$
Forze INTERNE

Le forze esterne sono sempre note, le forze interne QUASI MAI: possono essere interazioni microscopiche

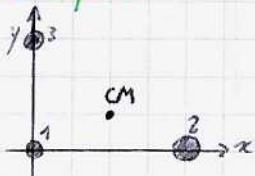
Per avviare a tale problematica si introduce un concetto fittizio, detto centro di massa (può anche non appartenere al sistema).

$$\vec{r}_{cm} = x_{cm} \hat{i} + y_{cm} \hat{j} + z_{cm} \hat{k} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \dots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + \dots + m_n y_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

Esempio:



$m_1 = 2 \text{ kg } (0,0)$
 $m_2 = 6 \text{ kg } (4,0)$
 $m_3 = 4 \text{ kg } (0,3)$
CM?

$$x_{cm} = \frac{m_2 x_2}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{24}{12} = 2$$

$$y_{cm} = \frac{m_3 y_3}{\sum m_i} = \frac{12}{12} = 1$$

$\Rightarrow \text{CM} = (2,1)$

Nel sistema di n punti:

$$\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \underbrace{M}_{\sum m_i} \vec{r}_{cm}$$

derivando, $M \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$

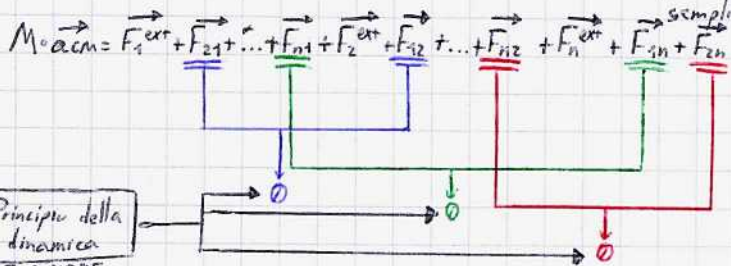
$$M \vec{v}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i \Rightarrow \vec{P} = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$$

Ne segue che $\vec{P} = M \vec{v}_{cm}$

Derivando ulteriormente, $M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \Rightarrow M \cdot \vec{a}_{cm} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{a}_i \Rightarrow$

$$\Rightarrow M \cdot \vec{a}_{cm} = m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 + \dots + m_n \vec{a}_n$$

per definizione, $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{int} + \vec{F}_i^{ext}$. Riducendo il caso a tre masse per semplicità di calcolo e dimostrazione:



Dunque, $M \vec{a}_{cm} = \sum \vec{F}_{ext}$ **Teorema del centro di massa.**

Strutturando ciò, si osserva inoltre che:

$$\sum \vec{F}_{ext} = M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \frac{d(M\vec{v}_{cm})}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \boxed{\sum \vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}}$$

Prima equazione cardinale della Meccanica

Se $\sum \vec{F}_{ext} = 0$, $\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{P}$ costante **Legge di conservazione della quantità di moto totale del sistema.**

Essendo una grandezza vettoriale, essa è scomponibile su x, y, z. Ne segue che $P = \text{cost.} \neq E_{\text{tot}} = \text{cost.}$

Esercizi

$m_1 = 0,2 \text{ kg}$ $v_1 = 3 \text{ m/s}$ $Vel = ?$
 $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ $v_2 = ?$
 molla fissata a m_1 , poggiata a m_2
 filo maniglia teso, poi spezzato

Per risolvere questo esercizio è sufficiente considerare la forza elastica come forza interna al sistema di masse $\Rightarrow \sum \vec{F}_i^{ext} = 0 \Rightarrow$ la quantità di moto del sistema si conserva.

Strutturando la I eq. cardinale della meccanica,

$$\textcircled{2} P_0 = P^f \Rightarrow m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0; v_2 = -\frac{m_1 v_1}{m_2}; Vel = \Delta K = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \quad \boxed{\text{Si conserva E}}$$

Razzo di massa M esplosa

$$\vec{v} = v_0 \hat{k}$$

$$v_0 = 400 \text{ m/s}$$

esplosa in $m_1 = m_2 = m_3 = \frac{M}{3}$

$$\vec{v}_1 = 300 \hat{i}$$

$$\vec{v}_2 = 450 \hat{j}$$

$$\vec{v}_3 = ?$$

Le esplosioni determinano forze molto maggiori di attriti e simili; rendono le forze esterne trascurabili; la quantità di moto si può dunque considerare costante. Nel caso in cui sia richiesta il tempo di caduta, considerando il centro di massa il problema si riduce ad un semplice calcolo del moto parabolico.

Strutturando la I eq. cardinale della meccanica,

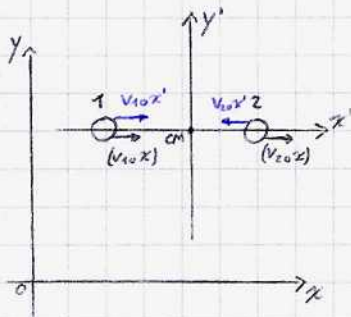
$$P_x^0 = P_x^f \Rightarrow 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_3 \vec{v}_{3x} \Rightarrow \vec{v}_{3x} = -\frac{m_1 \vec{v}_1}{\frac{2M}{3}} \quad (\vec{v}_{2x} = 0)$$

$$P_y^0 = P_y^f \Rightarrow 0 = m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_{3y} \Rightarrow \vec{v}_{3y} = -\frac{m_2 \vec{v}_2}{\frac{2M}{3}}$$

$$P_z^0 = P_z^f \Rightarrow M v_0 = m_3 \vec{v}_{3z} \Rightarrow \vec{v}_{3z} = \frac{M v_0}{\frac{M}{3}} = 3 v_0$$

Sistema di riferimento con origine nel centro di massa

Utile per gli urti



$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{M} \rightarrow \vec{r}'_{cm} = \vec{0} \rightarrow \vec{P} = M \vec{v}_{cm} = \vec{0} \quad P_{totale} = \vec{0} \Leftrightarrow q. \text{ moto costante}$$

Esempio:

$$P_1 = m_1 v_{10}$$

$$P_2 = m_2 v_{20}$$

$$v_{10} > v_{20}$$

Nel nuovo riferimento considerato,

$$\vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} = \vec{0} = \vec{P}_{1f} + \vec{P}_{2f}$$

prima dell'urto dopo l'urto

Secondo teorema di Koning

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i);$$

Si ricorda che, nel sistema di riferimento con origine nel centro di massa:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}) \cdot (\vec{v}_i' + \vec{v}_{cm});$$

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{cm} + \vec{r}_i'$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_i'$$

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i'^2 + \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{cm} \cdot \vec{v}_i' + \vec{v}_{cm}^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2}_{K'} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i' \cdot \vec{v}_{cm}}_{0} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{2} m_i \vec{v}_{cm}^2}_M \Rightarrow K = K' + \frac{1}{2} M \vec{v}_{cm}^2$$

energia cinetica del riferimento

Teorema di conservazione dell'energia meccanica totale in un sistema di punti materiali.

Consideriamo il punto i-esimo:

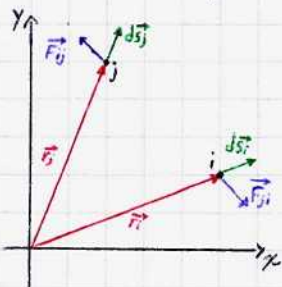
$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{s}_i = (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) \cdot d\vec{s}_i = \vec{F}_i^{ext} \cdot d\vec{s}_i + \vec{F}_i^{int} \cdot d\vec{s}_i = dW_i^{ext} + dW_i^{int}$$

Per il teorema delle forze vive, $\int (dW_i^{ext} + dW_i^{int}) = \int dK_i \Rightarrow W_i = \Delta K_i$

$$W = \sum_{i=1}^n W_i = \Delta K = \sum_{i=1}^n (K_i^f - K_i^0) \Rightarrow W^{ext} + W^{int} = K^f - K^0$$

se dovuto a forze conservative, $W^{ext} = -\Delta U^{ext} \Rightarrow W^{int} = \Delta K + \Delta U^{ext} = \Delta E$
 se (raro) conservativo, l'energia meccanica totale si conserva

Poiché nei corpi estesi rigidi la distanza tra due punti non varia,



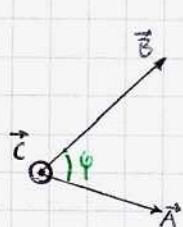
$$W^{int} = \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{s}_i + \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{s}_j; \quad \text{sapendo che } \vec{F}_{ji} = -\vec{F}_{ij},$$

$$W^{int} = \vec{F}_{ji} \cdot (d\vec{s}_i - d\vec{s}_j)$$

Nella traslazione, poiché la distanza tra i e j resta costante, $d\vec{s}_i = d\vec{s}_j$; il lavoro delle forze interne del corpo rigido è dunque pari a 0 nella traslazione. Analogamente, nella rotazione possiamo considerare uno dei punti fermo e l'altro in rotazione attorno ad esso $\Rightarrow d\vec{s}_i \perp d\vec{s}_j$, dunque $W^{int} = 0$

Al fine di descrivere efficacemente le rotazioni di sistemi di punti materiali, introduciamo delle nuove quantità fisiche: i momenti.

Premessa: Prodotto vettoriale di due vettori

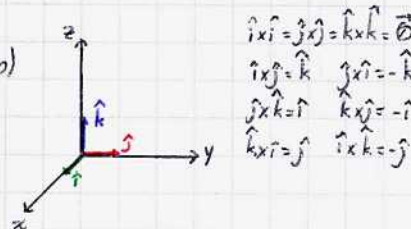


$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad |\vec{C}| = AB \sin \varphi$$

il vettore \vec{C} ha direzione perpendicolare al piano individuato da A e B e verso diretto dalla regola della mano destra (ruota da A verso B , il pollice determina il verso)

Valgono le seguenti proprietà:

- $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$ perché $\sin \varphi = \sin(2\pi - \varphi)$
- $\vec{A} \parallel \vec{B} \Rightarrow \vec{A} \times \vec{B} = \vec{0}$ in particolare, $\vec{A} \times \vec{A} = \vec{0}$
- $(\vec{A} + \vec{B}) \times \vec{C} = \vec{A} \times \vec{C} + \vec{B} \times \vec{C}$
- $\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$



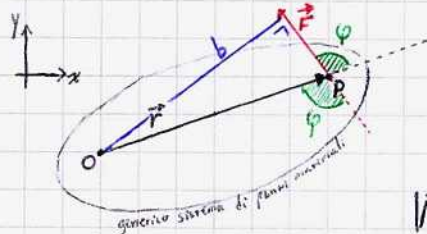
$$\begin{aligned} i \times i = j \times j = k \times k &= \vec{0} \\ i \times j = \hat{k} & \quad j \times i = -\hat{k} \\ j \times k = \hat{i} & \quad k \times j = -\hat{i} \\ k \times i = \hat{j} & \quad i \times k = -\hat{j} \end{aligned}$$

Per componenti: $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$
 $\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix} = (A_y B_z - A_z B_y) \hat{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \hat{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{k}$$

Momento di una forza

Considerando due forze applicate a un disco, il punto di applicazione è fondamentale: non succede nulla ruota



Il punto O , considerato come "punto fisso" nella rotazione, si dice polo.

$$\vec{OP} = \vec{r} \quad \varphi \text{ angolo tra la direzione di } \vec{r} \text{ e quella di } \vec{F}$$

$$|\vec{M}_O| \equiv |\vec{C}_O| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \varphi = F \cdot b$$

b , detto braccio della forza, è pari alla distanza di O dalla retta di forza $\Rightarrow b = r \sin \varphi$

Scomponendo la forza nelle sue componenti radiale e tangenziale alla rotazione:



$$F \cos \varphi = F_r \quad F \sin \varphi = F_t$$

Essendo radiale, \vec{F}_r ha momento nullo (non concorre alla rotazione)

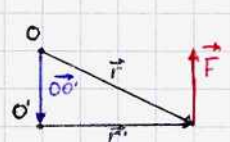


Dunque, alternativamente al braccio, $M_O = r \cdot F_t$

Il momento, in quanto grandezza vettoriale, è sempre normale al piano individuato da \vec{r} e \vec{F} (o, indifferentemente, da \vec{F} e \vec{r}). Dunque:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{OP} \times \vec{F} \quad \text{Se più forze in uno stesso punto, } \vec{M}_O = \vec{r} \times \sum \vec{F}$$

Come è possibile dedurre dalla definizione vettoriale, il momento di una forza dipende dal polo considerato. Infatti:



$$\vec{M}_{O'} = \vec{r}' \times \vec{F} = (\vec{OO}' + \vec{r}) \times \vec{F};$$

$$\vec{M}_{O'} = \vec{OO}' \times \vec{F} + \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \vec{M}_{O'} = \vec{M}_O + \vec{OO}' \times \vec{F}$$

Considerando più forze applicate in più punti:



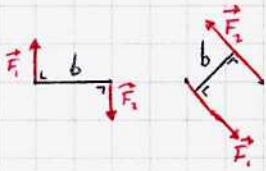
$$M_O = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{F}_3$$

$$M_{O1}, M_{O3} < 0 \\ M_{O2} > 0$$

r_1 e r_2 coincidono coi bracci, r_3 no

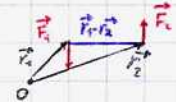
Coppia di Forze

È una coppia di forze uguali e contrarie a braccio non nullo applicate ad uno stesso corpo. Si ricorda che per braccio s'intende la distanza tra le linee di forza, e NON la distanza tra i punti di applicazione!



Proprietà: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$; $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \mathbf{0}$

$$M_0 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 = b \times \vec{F}_1$$



Momento della quantità di moto

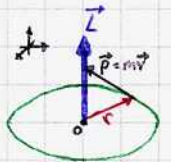
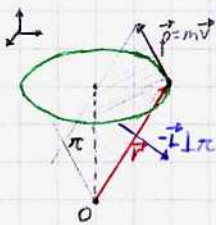
$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{F}$$

$\vec{L}_0 = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$ momento angolare o momento della quantità di moto di un punto materiale di massa m e velocità \vec{v} rispetto al polo O

In modulo,

$$L_0 = r \cdot mv \cdot \sin\varphi \quad \text{essendo } v \text{ tangenziale, } L_0 = r \cdot mv = r m (\omega r) = \omega r^2 m$$

Anch'essa dipende da O ed è ortogonale al piano formato da \vec{r} e \vec{p}



Teorema del Momento Angolare

Sapendo che $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v})$;

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

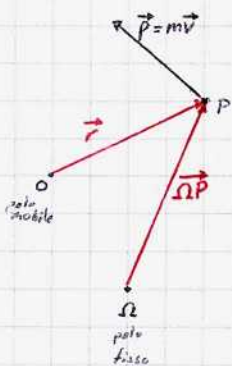
Sapendo che, per un punto materiale,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{M}_0$$

Supponendo che il polo O non sia fisso, ma che ruoti a sua volta intorno al polo Ω , per gli studi sui moti relativi tale equazione diventa:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = (\vec{v}_{P\Omega} - \vec{v}_O) \times m\vec{v}_{P\Omega} + \vec{M}_0 \implies \frac{d\vec{L}_0}{dt} = -\vec{v}_O \times m\vec{v}_{P\Omega} + \vec{M}_0 \quad \left[\text{se il polo } O \text{ è fisso, } \frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 \right]$$



$$\vec{\Omega P} = \vec{\Omega O} + \vec{r} \quad ; \quad \vec{v}_{P\Omega} = \vec{v} + \vec{v}_O \implies \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}_{P\Omega} - \vec{v}_O$$

$\frac{d\vec{r}}{dt}$ rispetto a O
 \vec{v}_O o $\vec{v}_{\Omega O}$

Applichiamo ora il Teorema del momento angolare ad un sistema di n punti materiali:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{O_i} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i;$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n \underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times m_i \vec{v}_i}_{*} + \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{r}_i \times \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt}}_{*}$$

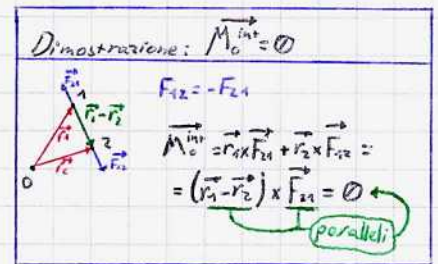
Per chiarezza, la massa totale verrà indicata col simbolo m (M = momento della quantità di moto)

$$* = \sum_{i=1}^n (\vec{v}_i - \vec{v}_O) \times m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\vec{v}_i \times m_i \vec{v}_i}_{\vec{0}} - \vec{v}_O \times \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{cm}$$

$$* = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int})$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times (\vec{F}_i^{ext} + \vec{F}_i^{int}) = -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{cm} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int};$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{cm} + \vec{M}_O^{ext} + \vec{M}_O^{int}$$



Da ciò segue la Seconda equazione cardinale della meccanica:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times m \vec{v}_{cm} + \vec{M}_O^{ext}$$

Osservazioni sulla Seconda equazione cardinale della meccanica:

Se il primo termine è uguale a $\vec{0}$, l'equazione diventa particolarmente semplice. In particolare, attraverso questa equazione vettoriale e quella della quantità di moto, si ottengono tre equazioni per descrivere le traslazioni e tre equazioni per descrivere le rotazioni.

Per ottenere tale termine $= \vec{0}$, deve essere verificata una delle seguenti condizioni:

- ① il polo O è fisso $\Rightarrow \vec{v}_O = \vec{0}$
- ② il polo O coincide col centro di massa $\Rightarrow \vec{v}_O \equiv \vec{v}_{cm}; \vec{v}_{cm} \times \vec{v}_{cm} = \vec{0}$
- ③ $\vec{v}_O \parallel \vec{v}_{cm} \Rightarrow \vec{v}_O \times \vec{v}_{cm} = \vec{0}$

Infatti:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{ext} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \text{Traslazioni}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \quad \text{Rotazioni}$$

In particolare, si ricorda che se $\vec{p} = \text{cost.} \Rightarrow \vec{F}^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{M}_O^{ext} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \text{cost.}$
 Non vale il viceversa.

Si osserva inoltre che:

Se $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{ext}$ e $\vec{M}_O^{ext} = \vec{0}$, segue che $\vec{L}_O = \text{cost.}$ **Principio di conservazione del Momento Angolare**

Esercizio:

Un punto materiale si muove su un piano orizzontale scabro ($\mu_0 = 0,4$) dopo esser partito con una velocità iniziale di 3 m/s . Supponendo che la traiettoria del punto sia circolare, calcolare il tempo di arresto.

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} m \vec{v})}{dt} = \vec{r} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu_0 m g \vec{r} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mu_0 g$$

$d\vec{v} = 90^\circ$ ruotato sull'asse z

Si osserva che le forze lungo z (\vec{P}, \vec{N}) danno contributo nullo: sono parallele a L_O

Corpi Estesi Rigidi

Un qualunque corpo esteso può essere considerato come una somma di infiniti contributi infinitesimi (sebbene ancora costituiti da più particelle; se ciò non fosse, la meccanica classica non sarebbe sufficiente per spiegare le interazioni); di conseguenza, si sta effettuando un passaggio da sistema discreto di punti (n punti materiali) ad un sistema continuo.



$$dm = \rho dV \implies m = \int_V dm = \int_V \rho dV$$

ρ \leftarrow densità volumetrica $[\text{kg}/\text{m}^3]$
 dV \leftarrow volume
 dm \leftarrow massa

Essendo la massa totale una somma infinita di infinitesimi, occorre operare mediante l'integrale.

Nel caso di un elemento in cui la terza dimensione è trascurabile:

$$dm = \sigma dS$$

σ \leftarrow densità superficiale $[\text{kg}/\text{m}^2]$

Nel caso in cui anche la seconda dimensione sia trascurabile:

$$dm = \lambda dl$$

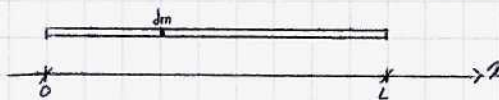
λ \leftarrow densità lineare $[\text{kg}/\text{m}]$

Un corpo esteso si dice rigido se la distanza fra due qualunque suoi punti resta costante. Ne segue che il lavoro compiuto dalle forze interne è sempre uguale a 0.

Si nota una certa similitudine tra le leggi che governano i sistemi discreti di punti materiali ed i sistemi continui; per tale motivo alle volte è possibile applicare un'opportuna approssimazione delle situazioni fisiche in esame.

n punti materiali	sistema continuo
$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{m}$	$\vec{r}_{cm} = \frac{1}{m} \int_V dm \vec{r} = \frac{1}{m} \int_V \rho \vec{r} dV$
$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$	$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{ext}$
$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times m\vec{v}_{cm} + \vec{M}_O^{ext}$	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = -\vec{v}_O \times m\vec{v}_{cm} + \vec{M}_O^{ext}$

Esempio: centro di massa di un'asta omogenea di massa m



$$dm = \lambda dx \quad (\lambda = \text{cost.}) \implies$$

$$\implies m = \lambda L$$

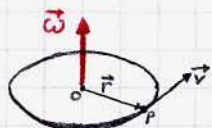
$$x = \frac{1}{m} \int_0^L x \lambda dx = \frac{1}{2m} \lambda L^2 = \frac{1}{2} L$$

Come si è osservato in precedenza, il moto di un qualunque corpo è considerabile come una composizione di moto di traslazione del centro di massa e moto di rotazione attorno al centro di massa.



Rotazioni di corpi rigidi attorno ad assi fissi

Premesse: $\vec{\omega}$: $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$ direzione perpendicolare al piano di rotazione; essendo la rotazione attorno ad un asse fisso LA DIREZIONE NON VARIA. Il verso è regolato dalla regola della mano destra.

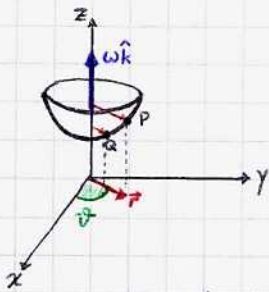


Di conseguenza, $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$; $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}$

$\vec{\alpha}$ \leftarrow Accelerazione
 $\vec{\omega} \times \vec{v}$ \leftarrow Accelerazione centripeta

Essendo la rotazione attorno ad un asse fisso, $\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ ha sempre la stessa direzione di $\vec{\omega}$.

• Calotta in rotazione intorno all'asse z:



$$\Delta t \Rightarrow \Delta \vartheta; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \omega$$

ω è la stessa per ogni punto della calotta, i quali descrivono angoli uguali in tempi uguali (appartengono a circonferenze concentriche, essendo il corpo rigido)

$$v_p = R_p \cdot \omega \quad v_q = R_q \cdot \omega$$

Sapendo che $dm = \rho dV$; $K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2$,

$$K = \sum_i K_i = \sum_i \frac{1}{2} m_i \omega^2 R_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_i m_i R_i^2 \right) \Rightarrow K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (\text{energia cinetica rotazionale})$$

$\hookrightarrow I_z$ (momento d'inerzia rispetto all'asse z)

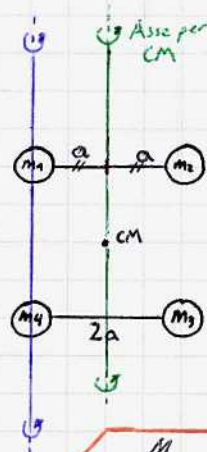
Momento d'Inerzia rispetto ad un asse fisso

Caso discreto: ($I = \sum m_i R_i^2$)

II Supponiamo di avere 4 punti materiali di massa uguale, disposti secondo una geometria quadrata. Calcoliamo il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa e ad un asse parallelo al primo passante per due masse:

$$\bullet I = m a^2 + m a^2 + m a^2 + m a^2 = 4 m a^2$$

$$\bullet I' = m (2a)^2 + m (2a)^2 = 8 m a^2 \quad (\text{le masse 1 e 4 non concorrono, la distanza è maggiore})$$

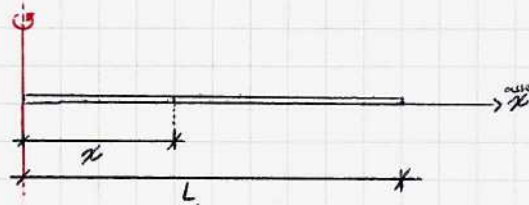


Maggiore è il momento d'inerzia, maggiore è l'inerzia opposta alla rotazione.

Caso Continuo: $I = \int_V dm r^2$

① Asta Omogenea (distribuzione lineare)

Essendo una distribuzione lineare, $dm = \lambda dx \Rightarrow \lambda L = m$



$$I = \int_0^L x^2 \lambda dx = \lambda \int_0^L x^2 dx = \frac{1}{3} \lambda L^3 = \frac{1}{3} \frac{m}{L} L^3 = \frac{1}{3} m L^2$$

② Anello con asse di rotazione passante per il centro di massa

Essendo un anello di spessore infinitesimo, ed essendo il raggio costante,

$$I = \int dm R^2 = R^2 \int dm = m R^2$$



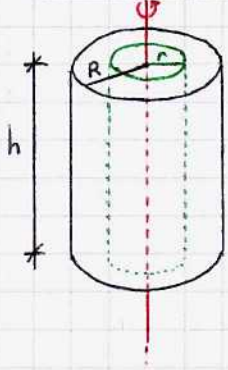
③ Disco rigido con asse di rotazione passante per il centro di massa

In questo caso, il corpo ha una superficie \Rightarrow il raggio varia. Consideriamo dunque un anello di spessore infinitesimo che racchiude una superficie $dS = 2\pi r dr$.

Sapendo che $dm = \sigma dS$ e, con $\sigma = \text{cost.}$, $m = \sigma \pi R^2 = \sigma 2\pi r dr$:

$$I = \int \sigma 2\pi r dr \cdot r^2 = 2\pi \sigma \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi \sigma}{4} R^4 = \frac{\pi}{2} \frac{m}{\pi R^2} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

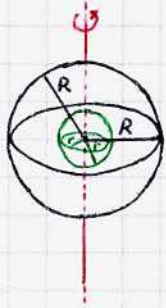
④ Cilindro con asse di rotazione passante per il centro di massa



$$dm = \rho dV; dV = 2\pi r dr \cdot h; m = \rho \pi R^2 h \Rightarrow \rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$I = \int_V dm r^2 = \int_V \rho r^2 dV = \int_0^R \rho r^2 \cdot 2\pi r dr \cdot h = 2\pi \rho h \int_0^R r^3 dr = \frac{2\pi \rho h}{4} R^4 = \frac{\pi}{4} \frac{m}{\pi R^2 h} R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$

⑤ Sfera con asse di rotazione passante per il centro di massa

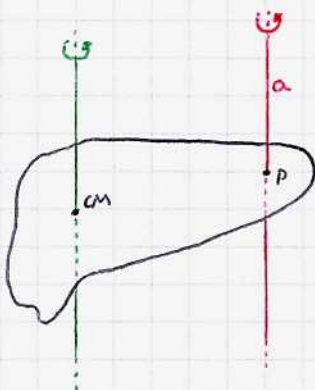


$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

(Non dimostrato)

Teorema di Huygens-Steiner (o teorema degli assi paralleli)

Permette di calcolare il momento d'inerzia di un corpo rispetto ad un asse parallelo a quello passante per il centro di massa, evitando in molti casi il laborioso calcolo diretto.



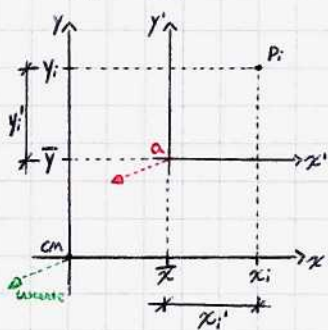
$$I_a = I_{cm} + m_{tot} d^2$$

Dal grafico sottostante (vista dall'alto con due riferimenti) si osserva che:

$$a \equiv O' \equiv (\bar{x}, \bar{y}, 0) \quad d^2 = (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$$

$$P_i \equiv (x_i, y_i, z_i) \equiv (\underbrace{x_i', y_i', z_i}_{\text{stabilizzati solo su } xy}) \quad \begin{cases} x_i' = x_i - \bar{x} \\ y_i' = y_i - \bar{y} \\ z_i' = z_i \end{cases}$$

Guardando dall'alto:



$$I_{cm} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$I_{O'} = \sum m_i (x_i'^2 + y_i'^2) = \sum m_i r_i'^2;$$

$$I_{O'} = \sum m_i [(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2] = \sum m_i [x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \bar{x} + y_i^2 + \bar{y}^2 - 2y_i \bar{y}];$$

$$I_{O'} = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2) + \sum m_i (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) - 2\bar{x} \sum m_i x_i - 2\bar{y} \sum m_i y_i;$$

$$I_{O'} = I_{cm} + m d^2 \quad \square$$

= 0 perché coordinate del CM nel riferimento del CM

Analoga dimostrazione: considerando il II teorema di König:

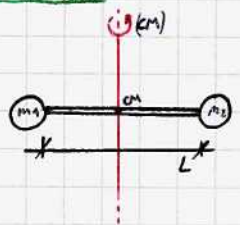
$$K = K_{cm} + \frac{1}{2} m v_{cm}^2; \quad \frac{1}{2} I_{O'} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 \xrightarrow{v_{cm} = \omega d} \frac{1}{2} I_{O'} \omega^2 = \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 + \frac{1}{2} m d^2 \omega^2 \Rightarrow I_{O'} = I_{cm} + m d^2$$

⚠: Il momento d'inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa è sempre minore di un qualsiasi altro momento d'inerzia passante per un asse ad esso parallelo. Ad esempio, il momento d'inerzia rispetto all'asse passante per il CM di un'asta omogenea (a) è pari a $\frac{1}{12} m l^2$

$0 \quad cm \quad \rightarrow x$ $I_0 = \frac{1}{3} m L^2$

$I_0 = I_{cm} + \frac{mL^2}{4} \Rightarrow I_{cm} = \frac{1}{3} mL^2 - \frac{mL^2}{4} = \frac{1}{12} mL^2$ QED

Esercizio



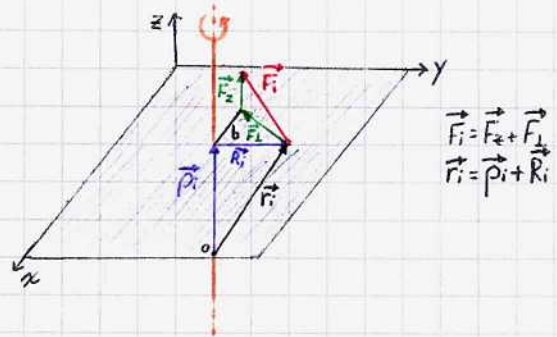
- Se l'asta è trascurabile e vi sono due punti materiali: $(e_{m1}=m2)$ Simile al caso discreto: $I = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} mL^2$
- Se l'asta non è trascurabile e vi sono due punti materiali: $I = \frac{1}{12} m_A L^2 + m_1 \frac{L^2}{4} + m_2 \frac{L^2}{4} = \frac{1}{12} m_A L^2 + \frac{1}{2} m_S L^2$
- Se l'asta non è trascurabile e le due masse sono sfere di raggio R , si applica Huygens-Steiner a ogni sferetta:

$I_0 = I_{cm} + md^2 \Rightarrow I_{cm} = I_0 - md^2 = \left(\frac{2}{5} m_1 R^2 - m_1 R^2\right)$ una sferetta, asta trasc.; aggiungi I_{asta} e $I_{sferetta}$

$I = \frac{1}{12} m_A L^2 + 2\left(\frac{2}{5} m_S R^2 - m_S R^2\right) = \frac{1}{12} m_A L^2 - \frac{6}{5} m_S R^2$

Osservazione: Analizziamo la relazione esistente tra il momento di inerzia e i momenti studiati finora. Al fine di evitare confusione con le masse, d'ora in poi si denoterà con τ il momento di una forza.

Ricapitolando, $\vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ $\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
I eq. card. meccanica II eq. card. meccanica



$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i (\vec{p}_i + \vec{R}_i) \times m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i + \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i$
Non influisce sull'asse di rotazione (Lz) poiché non ha componenti su z.

$\vec{L}_z = \sum_i \vec{R}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i R_i v_i = \sum_i m_i R_i R_i \omega = \sum_i m_i R_i^2 \omega \Rightarrow L_z = I_z \omega$ dipende dall'asse, non dal polo.
 $(\vec{L} = \sum_i \vec{p}_i \times m_i \vec{v}_i)$

$\vec{\tau}^{ext} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{\tau} = \sum_i \vec{\tau}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{p}_i + \vec{R}_i) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{p}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i$
 $\vec{\tau}_L = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{\tau}_z$

$\vec{\tau}_z = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_i \Rightarrow \vec{\tau}_{iz} = \vec{R}_i \times \vec{F}_i = \vec{R}_i \times \vec{F}_{iz} + \vec{R}_i \times \vec{F}_{i\perp} \Rightarrow \vec{\tau}_{iz} = \vec{R}_i \times \vec{F}_{i\perp}$
contributo nullo su z $\vec{F}_{i\perp} = \vec{F}_{ir} + \vec{F}_{it}$ radiale tangenziale

$\vec{\tau}_z = \sum_i \vec{R}_i \times (\vec{F}_{ir} + \vec{F}_{it}) = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{ir} + \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{it} \Rightarrow \vec{\tau}_z = \sum_i \vec{R}_i \times \vec{F}_{it} \stackrel{\vartheta=90^\circ}{=} \sum_i R_i F_{it} = \frac{dL_z}{dt}$
 $\omega: R_i // F_{ir}$

$\vec{\tau}_z = \sum_i R_i F_{it} = \frac{dL_z}{dt} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} I_z \omega = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \alpha \Rightarrow \vec{\tau}_z = I_z \vec{\alpha}$

In sintesi, se l'asse di rotazione è un asse di simmetria, il momento angolare non ha componenti sul piano xy. Altrimenti, la componente \perp è non nulla; \vec{L} compie un moto di precessione.

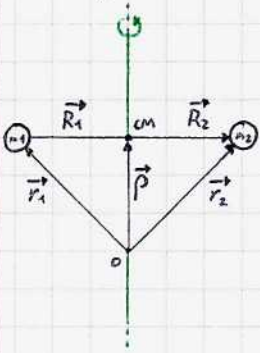
In sintesi: Se $\vec{L}_\perp = 0 \Rightarrow \vec{L} = L_z \hat{k} = I_z \vec{\omega}$; $\tau_z = R \cdot F_t = I_z \frac{d\omega}{dt}$

Se ω è costante in modulo $\Rightarrow d=0 \Rightarrow \tau_z=0 \Rightarrow \vartheta(t) = \omega \cdot t$ $(\vec{\tau}(t) \Rightarrow \vec{\alpha}(t))$

Se τ_z è costante $\Rightarrow \alpha$ è costante $\Rightarrow \omega(t) = \omega_0 + \alpha t$; $\vartheta = \vartheta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$ (logicamente, $\alpha = \frac{\tau_z}{I_z}$)

Esercizi

① Due palline, stessa massa e velocità



Hyp
 $R_2 = -R_1$
 $\vec{p}_1 = \vec{p}_2 = \vec{p}$
 $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$
 $m_1 = m_2$

Si noti che l'asse di rotazione, oltre a passare per il centro di massa, è un asse di simmetria.

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2; \quad (\vec{r} = \vec{p} + \vec{R})$$

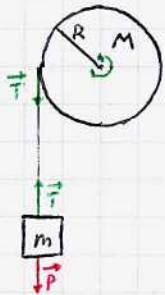
$$\vec{L} = (\underbrace{\vec{p}_1 \times m_1 \vec{v}_1}_{L \perp \omega}) + (\underbrace{R_1 \times m_1 \vec{v}_1}_{L \perp \omega}) + (\underbrace{\vec{p}_2 \times m_2 \vec{v}_2}_{L \perp \omega}) + (\underbrace{R_2 \times m_2 \vec{v}_2}_{L \perp \omega});$$

$$\vec{L} = (R_1 \times m_1 \vec{v}_1) + (R_2 \times m_2 \vec{v}_2) = (R_1 \times m_1 \vec{v}_1) + [-R_2 \times (-m_2 \vec{v}_1)] = 2(R_1 \times m_1 \vec{v}_1)$$

Dunque, $|\vec{L}| = |\vec{L}_z| = 2R_1 m_1 v_1 = \frac{2m_1 R_1^2}{I_z} \omega$ utile per sfere, disco, ecc.

② Carrucola di massa M e raggio R, che ruota su un asse uscente dal foglio grazie alla forza peso di un punto materiale di massa m.

Si richiede l'accelerazione di m e l'accelerazione angolare.



Si noti che, anche in questo caso, l'asse di rotazione è un asse di simmetria. Questo problema è risolvibile in due modi distinti:

Metodo 1: Consideriamo le forze agenti sul sistema, ricordando la I_{eq} cardinale della meccanica:

① $N - Mg = 0$ (la carrucola non trasla lungo y)

② $mg - T = ma$

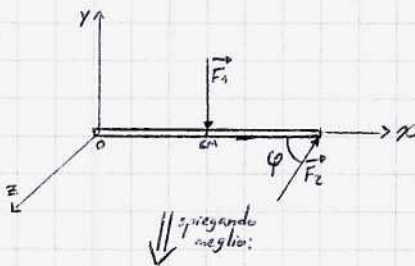
③ $\tau_z = TR = \frac{1}{2} MR^2 a$] sapendo che $a = dR$, il problema è risolto

Metodo 2: Consideriamo la situazione come un sistema massa-carrucola; ne segue che la tensione è interna, mentre la forza-peso è esterna.

$\tau_z^{ext} = \frac{dL_z}{dt}; \quad I_z = \frac{1}{2} MR^2 + mR^2$ (Huygens-Steiner)

$mgR = \frac{d}{dt}(I_z \omega) \Rightarrow mgR = I_z a \Rightarrow mgR = \left(\frac{1}{2} MR^2 + mR^2\right) d$ sapendo che $a = dR$, il problema è risolto.

③ Asta omogenea cui sono applicate più forze, ruota intorno ad un suo estremo con ω_0



- Hp
 $m = 38 \text{ kg}$
 $L = 1 \text{ m}$
 $F_1 = 2 \text{ N}$
 $F_2 = 15 \text{ N}$
 $\varphi = 60^\circ$
 $\omega_0 = 4,5 \cdot 10^4 \text{ rad/s}$

- Th
 $\omega(L=2s)?$
 $n^\circ \text{ di giri?}$

Strutturiamo l'equazione $\tau_z = I \cdot d$

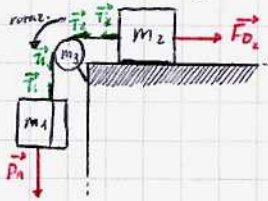
$$-F_1 \cdot \frac{L}{2} + F_2 L \sin \varphi = I \cdot d = \frac{1}{3} m L^2 d \Rightarrow d = \frac{3}{mL} \left(-\frac{F_1}{2} + F_2 \sin \varphi\right) \text{ (cost.)}$$

$\tau < 0$ poiché F_2 fa ruotare il corpo in senso orario

Essendo $d = \text{costante}$, $\omega = \omega_0 + dt$
 calcolando ϑ a $t=2s$, $n^\circ \text{ giri} = \frac{\vartheta}{2\pi}$

Esercizi

④ 2 masse legate a una carrucola di massa non trascurabile. Il piano orizzontale è scabro.



Analizziamo le forze agenti sui tre corpi:

$$m_1: m_1g - T_1 = m_1a_1 = m_1dR \Rightarrow T_1 = m_1g - m_1dR$$

$$m_2: T_2 - \mu_0 m_2g = m_2a_2 = m_2dR \Rightarrow T_2 = \mu_0 m_2g + m_2dR \quad (\text{su } y \text{ c'è l'equilibrio})$$

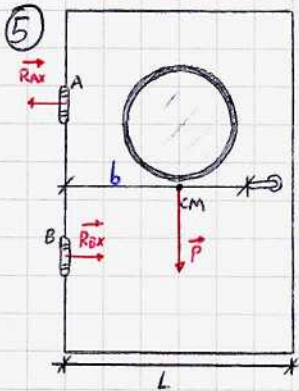
$$m_3: \text{consideriamo un asse di rotazione } \tau_z = I \cdot d = \frac{1}{2} m_3 R^2 d$$

$$\tau_z = T_1 R - T_2 R = \frac{1}{2} m_3 R^2 d$$

$$\text{Dunque, } T_1 R - T_2 R - \mu_0 m_2 g R - m_2 d R^2 = \frac{1}{2} m_3 R^2 d$$

$$m_1 g R - \mu_0 m_2 g R = \left(\frac{1}{2} m_3 R^2 + m_1 R^2 + m_2 R^2 \right) d$$

$\tau_{tot} = I_{z_{tot}} \cdot d$ → momenti d'inerzia delle tre masse rispetto all'asse di rotazione (il filo è ideale)



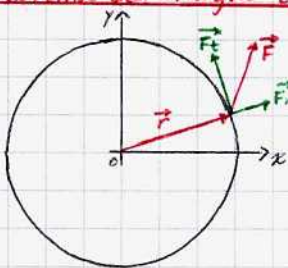
H_f
 $F = 25 \text{ N}$
 $b = 0,7 \text{ m}$
 $L = 0,8 \text{ m}$
 $m = 15 \text{ kg}$
 $I = \frac{1}{3} m L^2$ (considerata asta omogenea)
 $R_{ax} + R_{bx} = 0$ (reazioni con momento nullo)

Viene applicata una forza entrante ad foglio in corrispondenza della maniglia. Si richiede l'accelerazione angolare del sistema.

Essendo la forza peso parallela all'asse di rotazione, essa ha momento nullo.

$$\text{Dunque, } \tau = F \cdot b = I \cdot d \Rightarrow d = \frac{F \cdot b}{I}$$

Teorema dell'energia cinetica rotazionale.



Supponiamo di avere un corpo rigido in rotazione attorno ad un asse fisso (Z , in questo caso) ortogonale al piano su cui giace il corpo.

$$\vec{r} = R \hat{u}_r$$

$$\tau_z = F_t \cdot R \Rightarrow F_t = \frac{\tau_z}{R}$$

si ricordi che: $\tau_z = I \cdot d$
 $d = \frac{d\omega}{dt}$ $\omega = \frac{d\theta}{dt}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s} = F_t \cdot ds = \frac{\tau_z}{R} ds = \frac{\tau_z R d\theta}{R} \Rightarrow \int dW = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_z d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} I_z d\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} I_z \frac{d\omega}{dt} \omega dt = \int_{\omega_0}^{\omega_1} I_z \omega d\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_0^2) = K_1 - K_0 = \Delta K$$

Ricapitolazione

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$$

$I_{eq. card.}$

(in un corpo rigido)
 $W_{int} = 0$

(Se l'asse di rotazione è fisso)

$$W = \int \tau_z d\theta = \frac{1}{2} I \omega^2 - \frac{1}{2} I \omega_0^2 ; W^{ext} + W^{int} = K_f - K_0 \quad (K = \frac{1}{2} I \omega^2)$$

Se $W^{int} = 0$ e F^{ext} sono conservative $\Rightarrow \Delta E_m = 0$ conservaz. energia meccanica totale

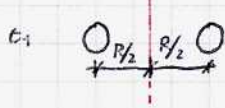
Se $\tau_z = 0$, $I \omega$ è costante conservazione del momento angolare lungo Z

Esercizi sulla Conservazione del Momento Angolare

- ① Sferette in rotazione attorno ad un asse fisso verticale. La distanza tra loro diminuisce nel tempo (si dimezza)



$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z = 0 \Rightarrow L_z = I_z \omega = \text{costante}$$



$$I_z^o \cdot \omega_o = I_z^f \omega_f$$

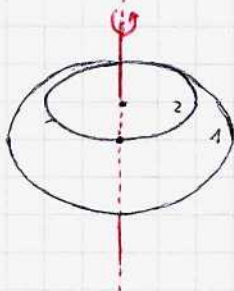
$$I_z^o = 2mR^2$$

$$I_z^f = 2m\left(\frac{R}{2}\right)^2 = 2m\frac{R^2}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

$$\text{Dunque, } \omega_f = \frac{4mR^2}{mR^2} \omega_o$$

si noti che più le masse sono vicine all'asse di rotazione più è intensa la velocità angolare.

- ② Disco in rotazione rispetto ad un asse verticale, successivamente si aggiunge un altro disco al sistema.

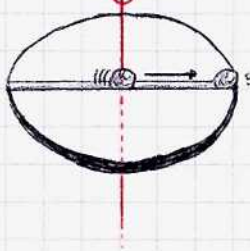


$$\frac{H_z}{I_1, \omega_o}$$

$$I_1 \cdot \omega_o = (I_1 + I_2) \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{I_1 \cdot \omega_o}{I_1 + I_2}$$

- ③ Disco di raggio R ruota con ω_o intorno ad un asse verticale passante per il centro; c'è una scanalatura in corrispondenza di un diametro nella quale scorre una pallina, inizialmente al centro del disco.

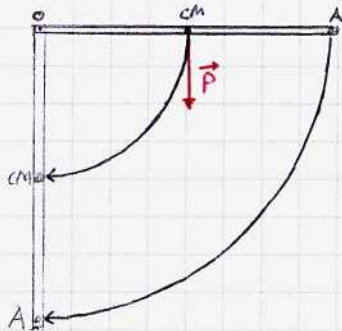
Si richiede la velocità angolare finale.



$$\frac{1}{2} MR^2 \omega_o = \left[\left(\frac{1}{2} MR^2 \right) + \underbrace{mR^2}_{\substack{\text{pallina} \\ \text{(inizialmente ha momento nullo)}}} \right] \omega_f \Rightarrow \omega_f = \frac{M \omega_o}{2 \left(\frac{M}{2} + m \right)}$$

Esercizi sulla Conservazione dell'Energia meccanica totale

- ① Asta ferma in orizzontale, può oscillare rispetto ad un suo estremo, viene lasciata libera di muoversi. Si chiede la velocità angolare, la velocità del centro di massa e la velocità dell'estremo A libero di muoversi nell'istante in cui l'asta è in posizione verticale.



$$\frac{H_z}{m, L, \omega_o}$$

L'unica forza che compie lavoro è la forza-peso, che essendo conservativa permette di applicare il principio di conservazione dell'energia meccanica totale.

$$\underbrace{K_o}_0 + U_o = K_f + U_f; \quad K_f = \frac{1}{2} I_o \omega^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} mL^2 \right) \omega^2 = \underbrace{U_o - U_f}_{\substack{\text{essendo l'asta omogenea, basta calcolare l'energia del centro di massa} \\ (U_{cm} = mg \frac{L}{2})}}$$

$$\text{Segue che } \frac{1}{3} L \omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}, \text{ dunque } v_{cm} = \omega \frac{L}{2}$$

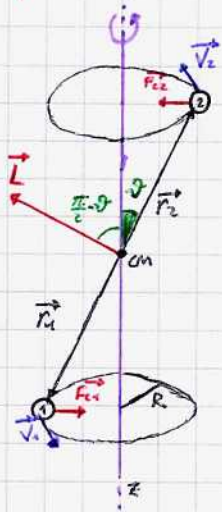
$$v_A = \omega L$$

⚠: ω varia nel tempo; utilizzare il momento della forza-peso risulta sconveniente.

Moto di Puro Rotolamento

Unica rototraslazione, negli esercizi si trova spesso la dicitura "rotola senza strisciare"

Manubrio



asta con sfere di stessa massa, ruota per un asse NON perpendicolare ad essa ma passante per il suo centro di massa.

$$\begin{aligned} r_2 &= -r_1 \\ v_2 &= -v_1 \\ m_1 &= m_2 \end{aligned}$$

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times m \vec{v}_1 + \vec{r}_2 \times m \vec{v}_2 = \vec{r}_1 \times m \vec{v}_1 + (-\vec{r}_1) \times m (-\vec{v}_1);$$

$$\vec{L} = 2(\vec{r}_1 \times m \vec{v}_1) \Rightarrow |\vec{L}| = 2r_1 m v_1 = 2r_1 m \omega R \quad (\vec{r}_1 \perp \vec{v}_1)$$

$$|\vec{L}| = \frac{2R}{\sin \vartheta} m \omega R = \frac{2m R^2 \omega}{\sin \vartheta}$$

$$(R = r \sin \vartheta)$$

$$L_z = I_z \omega = 2m R^2 \omega \Rightarrow L_z = L \sin \vartheta \quad (L_z = L \cos \vartheta)$$

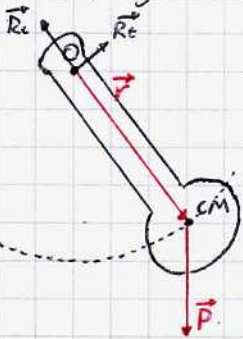
I momenti delle due forze centripete implicano $\frac{d\vec{L}}{dt}$ in direzione

$$\tau_L = 2F_c \cdot R r = 2m a_c r = 2m \omega^2 R r$$

$\vec{\tau}_L = \frac{d\vec{L}}{dt} \neq 0$, \vec{L} compie un moto di precessione intorno all'asse z

Pendolo fisico (o Pendolo Composito)

Coincide con un corpo esteso che oscilla intorno ad un polo O fisso, non coincidente col centro di massa per un asse di rotazione ortogonale alla superficie



$$\tau_c = -r mg \sin \vartheta = I_z \alpha = I_z \frac{d^2 \vartheta}{dt^2}$$

giro in senso orario

$$\vartheta \rightarrow 0, \sin \vartheta \approx \vartheta \Rightarrow -r mg \vartheta = I_z \frac{d^2 \vartheta}{dt^2};$$

$$\frac{d^2 \vartheta}{dt^2} + \frac{r mg}{I_z} \vartheta = 0 \Rightarrow \omega^2 = \frac{r mg}{I_z}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{I_z}{r mg}}$$

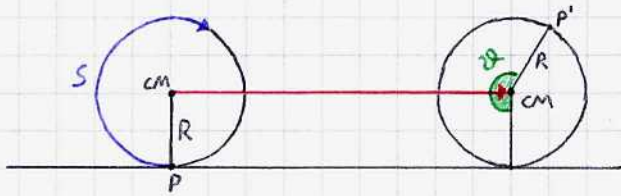
\vec{R} : vincolo, reazione nel polo O

$$R_t - mg \sin \vartheta = m a_t$$

$$R_c - mg \cos \vartheta = m a_c$$

Moto di Puro Rotolamento

Unica rototraslazione, negli esercizi si trova spesso la dicitura "rotola senza strisciare" (se strisciasse, ci sarebbe una forza di attrito dinamico)

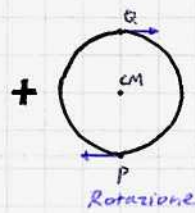
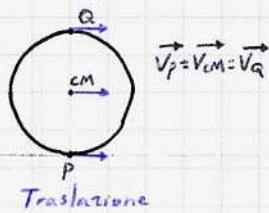


$$S = R\theta = \widehat{PP'}$$

$$\frac{dS}{dt} = R \frac{d\theta}{dt}$$

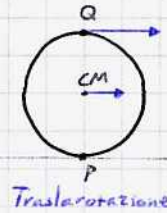
⚠ Moto di puro rotolamento $\Leftrightarrow v_{cm} = R\omega \Leftrightarrow a_{cm} = R\alpha$ ⚠

Il moto può essere considerato come moto di traslazione e pura rotazione attorno ad un asse passante per il centro di massa o come un moto di rotazione con asse mobile nel punto di contatto.



$$v_{cm} = 0$$

$$v_P = -v_Q = -R\omega$$



$$v_Q = 2R\omega$$

$$v_{cm} = R\omega$$

$$v_P = 0$$

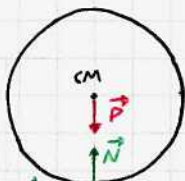
V_i è un asse di rotazione passante per il punto di contatto, cambia nel tempo

Per il teorema di Huygens-Steiner:

$$\frac{1}{2} m v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = \frac{1}{2} (mR^2 + I_{cm}) \omega^2 = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

\hookrightarrow asse variabile nel tempo

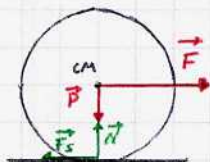
Studio Dinamico del Moto



F_s (statico perché il punto di contatto ha $v=0$)

Si nota che l'unica forza a compiere lavoro è la forza-peso (F_s compie lavoro nullo per definizione: $\Delta S=0$, $\vec{N} \perp \Delta S$ e nel polo di rotazione)

Esercizi



Massima forza applicabile tale che il corpo non strisci

Scegliamo come polo il centro di massa, consideriamo un asse di rotazione ortogonale al disco.

Si osserva che τ_P e $\tau_F = 0$, anche τ_N è nullo (P, F applicate al polo, $N \parallel$ braccio)

Dunque, sapendo che sull'asse y non c'è moto ($N - mg = 0$), analizziamo la situazione su z e x

②: $\tau_z = F_s R = I_{cm} \alpha \Rightarrow F_s = I_{cm} \alpha / R$

③: $F - F_s = m a_{cm} \Rightarrow F - \frac{I_{cm} \alpha}{R} = m a_{cm} \Rightarrow F - \frac{I_{cm}}{R^2} a_{cm} = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{F}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m}$

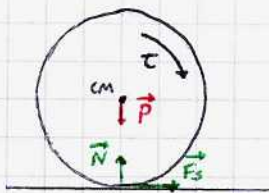
$$\alpha = \frac{F}{R \left(\frac{I_{cm}}{R^2} + m \right)} = \frac{FR}{I_{cm} + mR^2}$$

$\left(F_s = \frac{I_{cm}}{R} \cdot \frac{FR}{I_{cm} + mR^2} \leq \mu_s \cdot mg \Rightarrow \right)$

$$\Rightarrow F \leq \frac{\mu_s mg (I_{cm} + mR^2)}{I_{cm}}$$

Esercizi

Applicare τ tale che il corpo non scivola (striscia):



(1) $N - mg = 0$

(2) $F_s = m a_{cm}$

I eq. card. mecc., altrimenti non andrebbe avanti

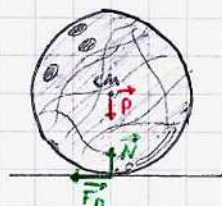
(3) $\tau - F_s R = I_{cm} \alpha$

II eq. card. mecc.

$\Delta: a_{cm} = \alpha R$ (puro rotol.)

$\tau - m a_{cm} R = I_{cm} \frac{a_{cm}}{R}$;

$\tau = \left(\frac{I_{cm}}{R} + m R \right) a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{\tau R}{I_{cm} + m R^2}$; $F_s = \frac{m R \tau}{I_{cm} + m R^2} \leq \mu_s m g \Rightarrow \tau \leq \frac{\mu_s g (I_{cm} + m R^2)}{R}$



Bowling: palla di massa m , raggio R e v_0 , vi è μ_0 col pavimento (striscia), calcolare il tempo per il quale il moto diventa di puro rotolamento

(1) $N - mg = 0$

(2) $-\mu_0 m g = m a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = -\mu_0 g$

$v(t) = v_0 - \mu_0 g t$ (velocità di traslazione)

Fissiamo come polo il centro di massa:

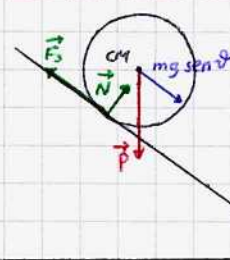
II eq. card. mecc.: $\mu_0 m g R = I_{cm} \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{\mu_0 m g R}{I_{cm}}$

$\omega(t) = \omega_0 + \frac{\mu_0 m g R}{I_{cm}} t$

Imponendo $v_{cm}(t^*) = \omega(t^*) R$, il problema è risolto:

$v_{cm}(t^*) = \omega(t^*) R \Rightarrow v_0 - \mu_0 g t^* = \frac{R^2 \mu_0 m g t^*}{I_{cm}} \Rightarrow v_0 = \mu_0 g t^* + \frac{R^2 \mu_0 m g t^*}{I_{cm}} = \mu_0 g t^* + \frac{5}{2} \mu_0 g t^* = \frac{7}{2} \mu_0 g t^*$
 $\frac{2}{5} \times R^2$
 \hookrightarrow Bowling \Rightarrow sfera

Dunque, $t^* = \frac{2v_0}{7\mu_0 g}$



Puro Rotolamento su un piano inclinato: accelerazioni

(1) $N - mg \cos \vartheta = 0$

Punto materiale: $a = g \sin \vartheta$

(2) $mg \sin \vartheta - F_s = m a_{cm}$

Consideriamo come polo il centro di massa: $F_s R = I_{cm} \alpha \Rightarrow F_s = \frac{I_{cm} \alpha}{R}$; $\alpha = \frac{a_{cm}}{R}$

Segue che $mg \sin \vartheta - \frac{I_{cm} \alpha}{R} = m a_{cm} \Rightarrow mg \sin \vartheta - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} = m a_{cm}$;

$\left(m + \frac{I_{cm}}{R^2} \right) a_{cm} = mg \sin \vartheta \Rightarrow a_{cm} = \frac{mg \sin \vartheta}{m + \frac{I_{cm}}{R^2}}$

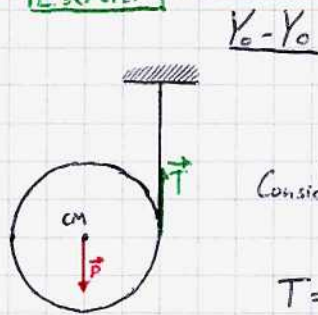
Cilindro/Disco: $a_{cm} = \frac{mg \sin \vartheta R^2}{m R^2 + \frac{1}{2} m R^2} = \frac{2}{3} g \sin \vartheta$

Sfera: $a_{cm} = \frac{5}{7} g \sin \vartheta$

Anello: $a_{cm} = \frac{1}{2} g \sin \vartheta$

Effettuando considerazioni energetiche, considerando $R \ll h$ e analizzando il lavoro della forza-peso si osserva che esiste K_{trasl} e $K_{rotazione}$, necessaria per il rotolamento attorno all'asse passante per il CM (v. anche applichi T. Huy-St.)
 $v_0 = K v_f$; $\frac{1}{2} I_p \omega^2 = m g h$; $\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} I_{cm} \omega^2 = m g h$

Esercizi



I eq. card. mecc: $mg - T = m \cdot a_{cm}$

Consideriamo come polo il centro di massa, $T \cdot R = I_{cm} \alpha$; $a_{cm} = \alpha R$

$$T = \frac{I_{cm}}{R} \alpha = \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} \Rightarrow mg - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2} = m a_{cm}; a_{cm} = \frac{mg}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m}$$

Se fissassimo il polo P:

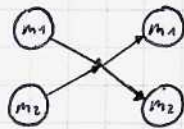
$$mgR = I_P \cdot \alpha; mg - T = m a_{cm} \Rightarrow \left(T = \frac{I_P a_{cm}}{R} \right) \Rightarrow a_{cm} = \frac{mgR^2}{I_P} = \frac{mgR^2}{I_{cm} + mR^2} = \frac{mg}{\frac{I_{cm}}{R^2} + m}$$

Dunque, $a_{cm} = \frac{mg}{\left(\frac{I_{cm}}{R^2}\right) + m}$

Hygens steiner

Urta

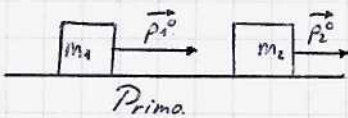
Supponiamo di avere 2 masse che interagiscono tra loro, urtandosi. Possono seguire all'interazione sia le stesse masse che masse diverse (reazioni chimiche). In ogni caso, ^{reale} varia la quantità di moto totale del sistema.



$$\vec{J} = \Delta \vec{p} = \int \vec{F} dt$$

Se le forze esterne sono trascurabili rispetto a quelle interne, $0 = \vec{F}^{ext} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \vec{P} \text{ cost} \Rightarrow$ la q. di moto si conserva.

Studieremo gli urti in una dimensione:



$p_1^0 > p_2^0$, supponiamo F^{ext} trascurabili:

$$p_1^0 + p_2^0 = p_1^f + p_2^f \Leftrightarrow m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0 = m_1 v_1^f + m_2 v_2^f \Leftrightarrow m_2 (v_2^f - v_2^0) = -m_1 (v_1^f - v_1^0)$$



Gli urti si distinguono in due principali "categorie":

① Urta perfettamente elastici: L'energia cinetica del sistema si conserva: $K^0 = K^f$. Dunque:

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^0{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^0{}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^f{}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^f{}^2 \Rightarrow m_2 (v_2^f{}^2 - v_2^0{}^2) = -m_1 (v_1^f{}^2 - v_1^0{}^2) \Rightarrow$$

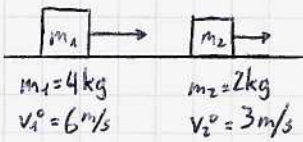
$$\Rightarrow m_2 (v_2^f - v_2^0)(v_2^f + v_2^0) = -m_1 (v_1^f - v_1^0)(v_1^f + v_1^0); v_2^f + v_2^0 = v_1^f + v_1^0 \Rightarrow v_2^f - v_1^f = -(v_2^0 - v_1^0) \text{ velocità di allontanamento}$$

② Urta perfettamente anelastici: Dopo l'urto entrambi i corpi si muovono con $v = v_{cm}$. Un celebre esempio è quello di proiettili che si conficcano in masse non vincolate; logicamente l'energia cinetica non si conserva.

Si avvisa che, in presenza di forze vincolari, la quantità di moto non si conserva. Si conserva però il momento angolare (per le rotazioni). Logicamente ciò vale unicamente per le forze vincolari impulsive, le quali lo diventano unicamente per mantenere valido il vincolo (esempi: forze vincolari sviluppate in un perno che fissa un asse di rotazione, reazioni normali di alcune superfici, attriti radenti).

Urto Elastico - Esercizi

Supponendo che l'urto sia elastico, sfruttando i dati forniti, calcolare le velocità finali dei due blocchi.



$$F^{ext} = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} (4-6) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} + (3-2) \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \text{ kg} \cdot v_1^t + 2 \text{ kg} \cdot v_2^t \\ v_2^t = v_1^t + 3 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} 30 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} = 4 \text{ kg} \cdot v_1^t + 2(v_1^t + 3) \\ v_2^t = v_1^t + 3 \end{array} \right. ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1^t = \frac{30-6}{6} = 4 \text{ m/s} \\ v_2^t = 7 \text{ m/s} \end{array} \right.$$

Risolviamo lo stesso problema nel riferimento del centro di massa; segue che $p_1 = -p_2 \Rightarrow m_1 v_1^0 = -m_2 v_2^0$

$$K = \frac{1}{2} m u^2 = \frac{p^2}{2m}$$

velocità
nel riferimento
del centro di massa

$$K^0 = \frac{p_1^{02}}{2m_1} + \frac{p_2^{02}}{2m_2} = \frac{p_1^{02}}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

$$\text{Analogamente, } K^t = \frac{p_1^{t2}}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)$$

Essendo l'urto elastico, $K^0 = K^t \Rightarrow \frac{p_1^{02}}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = \frac{p_1^{t2}}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \Rightarrow p_1^{02} = p_1^{t2}$; $p_1^0 = -p_1^t$ per riferimento

$$\text{Analogamente, } p_2^0 = -p_2^t$$

Segue che:

$$u_1^t = -u_1^0, \quad u_2^t = -u_2^0$$

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0}{m_1 + m_2} = \frac{30}{6} = 5 \text{ m/s}$$

e Perché:

$$v_1^0 = u_1^0 + v_{cm} \Rightarrow u_1^0 = v_1^0 - v_{cm} = 1 \text{ m/s} \Rightarrow u_1^t = -u_1^0 = -1 \text{ m/s} \Rightarrow v_1^t = u_1^t + v_{cm} = 5 - 1 = 4 \text{ m/s}$$

$$v_2^0 = u_2^0 + v_{cm} \Rightarrow u_2^0 = v_2^0 - v_{cm} = -2 \text{ m/s} \Rightarrow u_2^t = -u_2^0 = 2 \text{ m/s} \Rightarrow v_2^t = u_2^t + v_{cm} = 5 + 2 = 7 \text{ m/s}$$

Modello delle "palline di Newton": urti elastici



Consideriamo il riferimento del centro di massa:

$$v_{cm} = \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2}$$

$$u_1^0 = v_1^0 - v_{cm} = v_1^0 - \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_1^0 = \frac{m_2 v_1^0}{m_1 + m_2}$$

$$u_1^t = -\frac{m_2 v_1^0}{m_1 + m_2}; \quad v_1^t = \frac{-m_2 v_1^0}{m_1 + m_2} + \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - m_2) v_1^0}{m_1 + m_2}$$

Effettuiamo un analogo ragionamento su m_2 :

$$u_2^0 = -v_{cm} = -\frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2} \Rightarrow u_2^t = \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2}; \quad v_2^t = u_2^t + v_{cm} = 2 \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2}$$

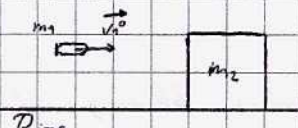
Dunque, $v_1^t = \frac{(m_1 - m_2) v_1^0}{m_1 + m_2}$
 $v_2^t = 2 \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2}$

Se $m_1 = m_2$, $v_1^t = 0$ e $v_2^t = v_1^0$ (palline di Newton)

Se $m_1 \gg m_2$, $v_1^t \sim v_1^0$ e $v_2^t \sim 2v_1^0$

Se $m_1 \ll m_2$, $v_1^t \sim -v_1^0$ e $v_2^t \sim 0$ (palla-muro)

Esercizi sugli urti perfettamente anelastici



Proiettile colpisce massa e si coagula, dopo l'urto i corpi procedono con $v = v_{cm}$

Prima

$$m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0 = (m_1 + m_2) v^f \implies v^f = \frac{m_1 v_1^0 + m_2 v_2^0}{m_1 + m_2}; \quad v^f = \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2}$$



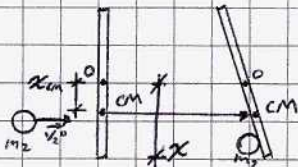
Valutiamo l'energia cinetica nel riferimento del centro di massa:

Dopo

$$K_0 = \frac{1}{2} m_1 v_1^0{}^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^f{}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1^2 v_1^0{}^2}{(m_1 + m_2)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^0{}^2}{m_1 + m_2} \quad \text{Energia non si conserva}$$

Asta poggiata su un piano orizzontale liscia, colpita da una massa (considerabile come punto materiale); l'urto è anelastico.



Fissato O centro di massa dell'asta e CM centro di massa del sistema, non essendo l'asta vincolata si osserva che essa trasla e ruota.

Noti m_1, m_2, v_1^0, l , si richiede il calcolo di v_{cm} e ω (velocità di traslazione e velocità di rotazione)

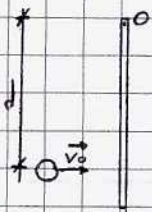
Poiché \nexists vincoli, $L = \text{cost.}$; $\vec{P} = \text{cost.}$ (negli urti, $F^{\text{ext}} = 0$)

$$m_2 v_2^0 = (m_1 + m_2) v_{cm} \implies v_{cm} = \frac{m_1 v_1^0}{m_1 + m_2} \quad \text{velocità di traslazione}$$

$$L = \text{cost.}, \text{ consideriamo come polo il CM} \implies L_z^0 = m_2 v_1^0 (x - x_{cm}) = I \omega = L_z^f$$

$$I = m_2 (x - x_{cm})^2 + \frac{1}{12} m_1 l^2 + \frac{m_1 x_{cm}^2}{\text{r. Huygens-Steiner}}; \quad x_{cm} = \frac{m_1 x}{m_1 + m_2}; \quad \omega = \frac{m_2 v_1^0 (x - x_{cm})}{I}$$

Asta vincolata a un suo estremo (massa m, lunghezza l) subisce un urto perfettamente anelastico. Essendovi un vincolo (e dunque delle forze interne), la quantità di moto non è costante.



$$P \neq \text{cost.} \implies J = P_f - P_0$$

$$\left. \begin{aligned} P_0 &= m v_0 \\ P_f &= m \omega d \end{aligned} \right\} \implies J = m \omega d - m v_0$$

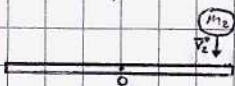
impulso della pallina sulla massa

$$\text{Segue che } J = \frac{m l v_0 \left(\frac{d}{2} - \frac{l}{3} \right)}{\frac{l^2}{3} + d^2}$$

si osserva che se $d = \frac{2}{3} l$ la quantità di moto si conserva.

$$L_z = \text{cost.} \implies m v_0 d = I \omega = \left(\frac{1}{3} m l^2 + m d^2 \right) \omega \implies \omega = \frac{m v_0 d}{\left(\frac{1}{3} m l^2 + m d^2 \right)} = \frac{3}{l^2 + d^2} v_0 d$$

Asta vincolata nel centro e poggiata su un piano orizzontale (massa m1, lunghezza l) viene urtata perpendicolarmente da una pallina; si suppone che l'urto sia perfettamente anelastico.



$$P \neq \text{cost.}, \quad L_z = \text{cost.}$$

non vi è relazione tra v dopo l'urto e ω , poiché l'urto è perfettamente anelastico

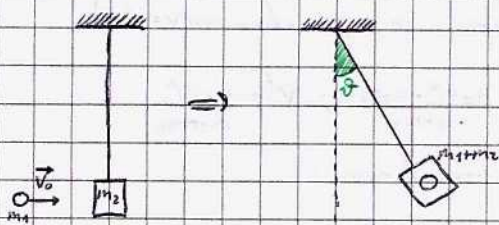
$$m_2 v_2^0 \frac{l}{2} = m_2 v_2^f \frac{l}{2} + \frac{1}{12} m_1 l^2 \omega$$

$$\frac{1}{2} m_2 v_2^0{}^2 = \frac{1}{2} m_2 v_2^f{}^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{12} m_1 l^2 \right) \omega^2$$

Si dimostra che $\omega = \frac{12 m_2}{m_1 + 3 m_2} \cdot \frac{v_2^0}{l}; \quad v_2^f = \frac{m_1 - 3 m_2}{m_1 + 3 m_2} v_2^0$

Se $m_1 > 3 m_2$, la pallina prosegue; se $m_1 = 3 m_2$ si ferma. Altrimenti, torna indietro ($m_1 < 3 m_2$)

Pendolo Balistico



$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v_f \implies v_f = \frac{m_1 v_0}{m_1 + m_2}$$

In seguito all'urto, è possibile applicare la conservazione dell'energia al pendolo:

$$K_A + U_A = K_B + U_B;$$

$$\frac{1}{2} (m_1 + m_2) \frac{m_1 v_0^2}{(m_1 + m_2)^2} = (m_1 + m_2) g h = (m_1 + m_2) g \cdot l (1 - \cos \theta)$$

Studiamo l'impulso: $\vec{J} = \int \vec{F} dt = \Delta \vec{P}$

$$\int \vec{\tau} dt = \int (\vec{r} \times \vec{F}) dt = \vec{r} \times \int \vec{F} dt = \vec{r} \times \vec{J} = \vec{I} \quad \text{momento dell'impulso}; \quad \vec{r} \times \Delta \vec{P} = \Delta \vec{L}$$

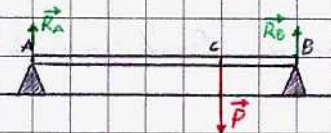
Statica

Un punto materiale si dice in equilibrio statico se $\Sigma \vec{F} = 0$. Per quanto riguarda un corpo esteso, devono essere verificate le seguenti condizioni:

- $\Sigma \vec{F} = 0 \implies a_{cm} = 0$
- $\Sigma \vec{\tau} = 0$

Esempi

Trave sottoposta ad un carico; si richiede il modulo delle reazioni \vec{R}_A ed \vec{R}_B .



$AB = 3m$
 $CB = 2m$
 $P = 60N$

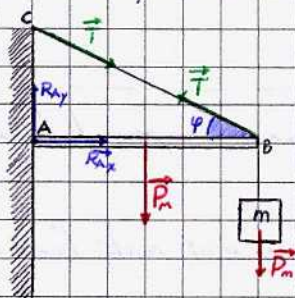
Stuttiamo le due condizioni: $\{ R_A + R_B - P = 0$

Polo A: $\{ -P \cdot AC + R_B \cdot AB = 0$

Dall'equazione dei momenti si osserva che $R_B = \frac{P \cdot AC}{L} = \frac{60 \cdot 2}{3} = 40N$

Stuttando la prima equazione: $R_A = P - R_B = 20N$

Asta con pesetta sorretta da una fune, si chiede la tensione della fune ed R_A .



Sono noti:
 $L = BC$ } φ noto
 AC
 M, m

$\textcircled{A} \{ R_{Ax} - T_x = 0$
 $\textcircled{B} \{ -Mg - mg + T_y + R_{Ay} = 0$
 $\textcircled{C} \{ T_y \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} - Mg \cdot \frac{L}{2} = 0 \quad (\text{Polo A})$

Conviene sempre scegliere il polo col maggior numero di incognite

$\begin{cases} R_{Ax} = T_x \\ R_{Ay} = Mg + mg + T_y \\ T_y - mg - Mg/2 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} R_{Ax} = T_x \\ R_{Ay} = Mg + mg - T_y \\ T_y = mg + \frac{Mg}{2} \end{cases}$

Nota

Nota T_y , calcoliamo T_x : $T_x = \frac{T_y}{\tan \varphi} \implies T = \sqrt{T_x^2 + T_y^2}$

Scala (asta) di data lunghezza e peso poggia su un piano orizzontale scabro. Calcolare μ_s tale che resti in piedi.



$\textcircled{A} \{ F_s - R_B = 0$
 $\textcircled{B} \{ R_{Ay} - P = 0$

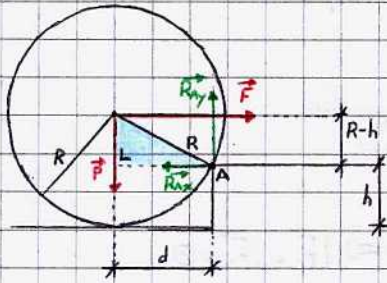
$\text{polo A} \{ -P \frac{L}{2} \cos \varphi + R_B L \sin \varphi = 0$

$\begin{cases} R_B = F_s \leq \mu_s R_{Ay} \\ R_{Ay} = P \\ R_B = P \end{cases}$

$\implies \frac{P}{2 \tan \varphi} \leq \mu_s R_{Ay} \implies \mu_s \geq \frac{1}{2 \tan \varphi}$

Esercizi di Statica

Ruota da sollevare su un gradino mediante una forza orizzontale. Si chiede il valore minimo della forza.



Logicamente, $h < R$.

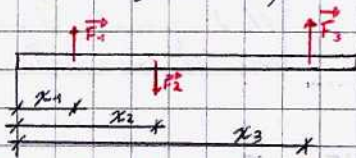
$$\begin{cases} \textcircled{2} F - R_{Ax} = 0 \\ \textcircled{1} R_{Ay} - P = 0 \\ \textcircled{3} F(R-h) - Pd = 0 \end{cases}$$

Considerando il triangolo rettangolo evidenziato in figura, si osserva che d è ricavabile in funzione di R ed h .

$$F_{\min} = \frac{mgh(2R-h)}{R-h}$$

$$\begin{aligned} h=0 &\Rightarrow F=0 \\ h=R &\Rightarrow F=\infty \end{aligned}$$

Asta omogenea con più forze applicate



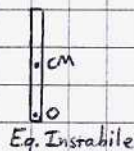
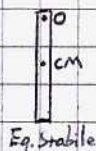
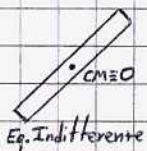
$$\vec{F}_{\text{ris}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \Rightarrow +F_1 + F_2 + F_3 = 0$$

$$\text{Imponiamo } \vec{\tau}_{\text{ris}} = 0 \Rightarrow x_1 F_1 = x_2 F_2 + x_3 F_3$$

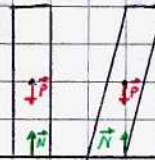
Se agisce solo la forza peso, dividendo l'asta in varie masse contigue:

$$\sum_{i=1}^n P_i x_i = P_{\text{ris}} x_{\text{ris}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i g x_i = m_{\text{ris}} g x_{\text{ris}} \Rightarrow \sum_{i=1}^n m_i x_i = M x_{\text{ris}} \rightarrow \text{Come } x_{\text{cm}}, \text{ detto BARICENTRO}$$

Aste ed Equilibri



Se poggiate:



Cade (coppia a braccio non nullo $\Rightarrow \tau$)

Meccanica dei Fluidi

In un fluido non ha più senso parlare di masse ma di proprietà puntuali; dunque:

$$dm = \rho dV$$

In situazioni statiche, le forze sono solo normali (non vi sono sforzi di taglio, presenti unicamente in situazioni dinamiche). Per misurare una forza, si utilizza come grandezza la pressione, grandezza scalare e anch'essa una proprietà puntuale:

$$P = \frac{dF_N}{dS} \quad \left[\frac{N}{m^2} \right] = [Pa] \quad \text{con } F_N = \text{forza normale}$$

non può essere considerato concentrato nel centro di massa

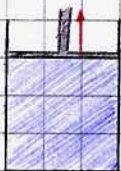
Le forze si dividono in forze di superficie (pressione) e forze di volume (forza-peso):

$$dF_N = P dS$$

$$dF_V = dm \cdot g = \rho g dV$$

Lavoro

Consideriamo un recipiente con un pistone mobile:



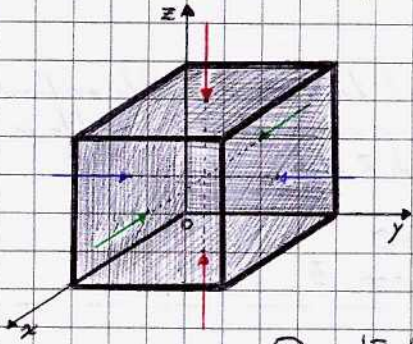
$$dW = dF dy = P dS dy \Rightarrow dW = P dV$$

Poiché i fluidi possono essere trattati come sistemi di punti materiali, valgono tutti i teoremi relativi alle grandezze conservate (energia, quantità di moto, momento angolare) e le equazioni cardinali; ciò però non è più sufficiente a descrivere completamente il moto: le forze interne diventano fondamentali per determinarlo.

Dette forze interne tra piccoli dV sono forze di contatto normali alla superficie di contatto tra essi. Dette forze dF sono dette forze di pressione

Legge di Stevino

Consideriamo un fluido in un recipiente sottoposto a pressioni esterne lungo i tre assi x, y, z .



Supponiamo: $dm = \rho dV$
 $dF_s = P dS$
 $dF_v = \rho g dV$

forze di superficie
 forze di volume

Essendo una situazione statica, $dF = 0 \Rightarrow dF_s + dF_v = 0$

(1) $-dF_s(y+dy) + dF_s(y) = 0 \Rightarrow -P(y+dy) + P_y = 0 \Rightarrow P_y = P(y+dy)$

(2) $-dF_s(x+dx) + dF_s(x) = 0 \Rightarrow P(x) = P(x+dx)$

Si osserva che la pressione del fluido non cambia, cioè il fluido resta allo stesso livello.

(3) $-dF_s(z+dz) + dF_s(z) - \rho g dV = 0;$

$-P(z+dz)dS + P(z)dS - \rho g dV = 0;$

$-dS(P(z+dz) - P(z)) - \rho g dV = 0;$

$-dS \left[\underbrace{P(z) + \frac{dP}{dz} dz}_{\text{Sviluppo in serie}} - P(z) \right] - \rho g dV = 0 \Rightarrow -\frac{dP}{dz} dV - \rho g dV = 0 \Rightarrow dP = -\rho g dz$

Si osserva dunque che $\frac{dF}{dV} = -\nabla p$

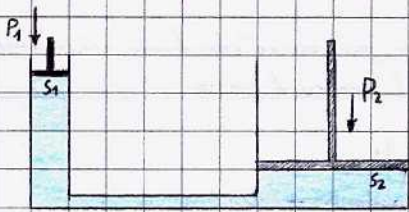
∇p = gradiente di pressione; esempio $dF_x = -\frac{\partial p}{\partial x} dV$
 i gradienti di pressione creano forze interne che, se non bilanciate, muovono il fluido.

Segue che $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} = 0; \frac{dP}{dz} = -\rho g$

Analizziamo ulteriormente z : $\int_{P_1(z)}^{P_2(z)} dP = \int_0^z -\rho g dz \Rightarrow P_2 - P_1 = -\rho g dz \Rightarrow \underline{P_1 = P_2 + \rho g dz}$ **legge di Stevino**

In parole povere, la legge di Stevino afferma che la pressione in un fluido aumenta all'aumentare della profondità (e, logicamente, che a stesse quote corrispondono stesse pressioni); su questa legge si basa il principio dei vasi comunicanti.

Macchinetta idraulica



$F_1 = P_1 S_1$
 $F_2 = P_2 S_2$

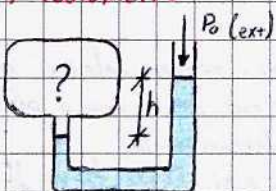
Se in equilibrio e a pressione atmosferica, $P_1 = P_2$. Dunque:

$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow F_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2}$

Calcoliamo il lavoro: $F_1 h_1 = F_2 \frac{S_1}{S_2} h_1$; $S_1 h_1 = S_2 h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{S_1}{S_2} h_1$

Si osserva che lavoro e pressioni sono uguali, ma non le forze: è possibile compiere uno stesso lavoro applicando una forza minore.

Manometro



Strumento di misura della pressione, sfrutta la legge di Stevino (se "?" è vuoto, lo strumento misura la pressione atmosferica):

$P_1 = P_0 + \rho g h$

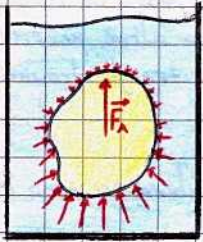
Statica dei Fluidi

Parlando di statica, necessariamente bisogna imporre $\Sigma F = 0$. Nel nostro caso, ciò implica che:

$$-\nabla p + \rho g = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \end{array} \right. \quad \text{nei liquidi incompressibili} \Rightarrow p = p_0 + \rho g z \quad \text{Stevino}$$

Dalla legge di Stevino segue che la superficie superiore di un liquido (fluido incompressibile) è sempre orizzontale

Forza di Archimede



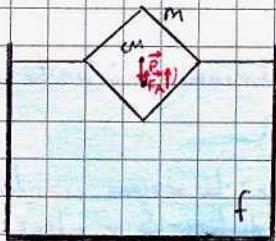
Un corpo immerso in un fluido in equilibrio risente delle forze di pressione agenti su tutti i punti della sua superficie. La forza totale agente sul corpo immerso dovuta al fluido è data da un'espressione integrale, che in seguito all'applicazione di alcune relazioni fisiche e teoremi matematici può essere riformulata in una forma molto semplice, scoperta per la prima volta dallo scienziato greco Archimede (che lo enunciò come principio, anche se oggi non è più tale, dato che viene derivato da altre leggi più fondamentali):

$$F_A = -\rho \cdot V \cdot g = -m_{\text{fluido spostato}} \cdot g$$

m_{fs} coincide con la massa di fluido spostato dal corpo immerso, ovvero la massa che avrebbe una quantità di fluido con lo stesso volume del corpo immerso (o della sua parte immersa)

Galleggiamento

Dipende dalla prevalenza o meno della forza di Archimede rispetto alla forza peso:



$$P = \rho_m \cdot V_m \cdot g = m \cdot g$$
$$F_A = \rho_f \cdot V' \cdot g = m_{fs} \cdot g$$

galleggiamento $\Leftrightarrow m < m_{fs} \Leftrightarrow \rho_m < \rho_f$

volume del fluido spostato

Si ha invece un equilibrio statico quando $P = F_A \Leftrightarrow \frac{\rho_m}{\rho_f} = \frac{V'}{V_{tot}}$

Se un corpo galleggia in un liquido ed è in equilibrio, solo parte del corpo si trova sotto il livello della superficie del liquido. Infatti, l'equilibrio si ha solo quando la forza di Archimede, relativa al solo volume immerso, equilibra la forza peso. Perciò, il volume immerso sarà dato da:

$$V_{imm} = \frac{m}{\rho_f} = \left(\frac{\rho_m}{\rho_f} \right) V'$$

Equilibrio rotazionale di galleggianti

Il momento della forza peso è sempre calcolabile come se la forza peso fosse concentrata nel baricentro del corpo; quello della forza di Archimede può essere invece calcolato come se tutta la forza fosse concentrata nel baricentro del fluido spostato. Quando l'oggetto ruota, il volume immerso cambia, per cui il tutto dipende dalla forma:

Un oggetto largo (zattera) è stabile poiché quando ruota il baricentro della F_A si sposta leggermente, generando un momento meccanico totale che inverte la rotazione.

Per altri oggetti, la stabilità è garantita se il baricentro del corpo si trova più in basso di quello del liquido spostato: in questo modo, il momento della F_A tenderà sempre a raddrizzare l'oggetto.

Dinamica dei Fluidi

Esistono due possibili modi per analizzare il moto di un fluido:

Punto di vista Lagrangiano: si "segue" ciascun elemento di volume identificato dalla posizione iniziale \vec{r}_0 , specificandone posizione e velocità acquisite successivamente in funzione del tempo.

Tipicamente tale approccio non è impiegato poiché le funzioni $r(t)$ e $v(t)$ diventano estremamente complesse a causa dei moti vorticosi del fluido.

Punto di vista Euleriano: Si mantengono gli elementi di volume dV fissi nello spazio, analizzando le variazioni delle proprietà del fluido contenuto nel volume dV (la materia nel volume logicamente non resta la stessa): le posizioni \vec{r} che identificano gli elementi di volume sono costanti.

Le variabili "cinematiche" associate a ciascun elemento di volume sono la densità di massa $\rho(\vec{r}, t)$ e la velocità $\vec{v}(\vec{r}, t)$ del fluido che passa al tempo t nell'elemento di volume di posizione \vec{r} . A queste si aggiungono altre proprietà "dinamiche" che permettono di determinare le forze scambiate tra gli elementi di volume, tra cui la pressione.

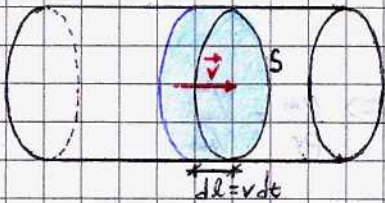
Il moto di un fluido è detto stazionario se le variabili che descrivono il moto in senso euleriano sono indipendenti dal tempo. $\Rightarrow v(t) = v(t + dt)$; $dl = v dt$

Flusso del fluido e Portata

Il flusso descrive la quantità di fluido che attraversa una sezione (di tubo) nell'unità di tempo. Per essere quantificato il fluido, si parla di flusso massico o di flusso di volume. Il secondo, più utilizzato nell'ambito dei liquidi, viene detto portata:

$$Q = \frac{dV}{dt} \left[\frac{m^3}{s} \right] \quad \text{Portata: Volume che attraversa una data sezione di tubo nell'unità di tempo.}$$

Se nel tubo il fluido viaggia con velocità \vec{v} uniforme parallela all'asse del tubo, la portata può anche essere calcolata col seguente ragionamento:



Nel tempo infinitesimo dt , il fluido che attraverserà la sezione considerata di tubo, di area S , è quello che occupa un cilindro di base S e altezza $v dt$ (vedi figure), di volume dunque $dV = S \cdot v dt$. Dunque,

$$Q = v \cdot S$$

In questa relazione, la velocità è trattata in senso euleriano: è la velocità del fluido adiacente alla superficie, anche se questo viene continuamente sostituito da altro fluido.

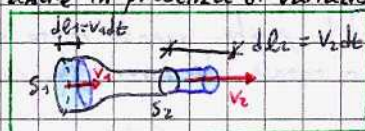
Logicamente, se \vec{v} è inclinata di un angolo ϑ rispetto alla normale alla superficie, bisognerà includere un fattore $\cos \vartheta$.

Se la velocità non è uniforme, la formula di sopra per la portata può essere applicata a una piccola porzione della superficie. Essendo la portata additiva, si ottiene la seguente equazione integrale per la portata totale:

$$Q = \int_S \vec{v} \cos \vartheta dS = \int_S v \cdot \hat{n} dS = \vec{v}_n \cdot dS \quad \text{con } \vec{v}_n = \frac{1}{S} \int_S v \cos \vartheta dS \quad \text{velocità media ortogonale}$$

versore ortogonale a S

La portata Q è costante lungo il tubo, anche in presenza di variazioni della sezione del tubo stesso, dunque:



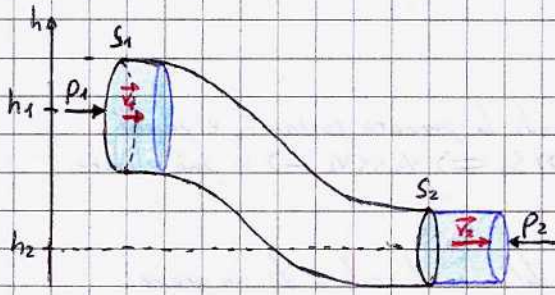
Eq. di continuità: $Q = v_1 S_1 = v_2 S_2 = \text{cost.}$

Con ragionamento analogo, se vi è una bitorcazione, la portata del tubo "intero" è pari alla somma delle portate dei tubi ottenuti dalla bitorcazione.

Legge di Bernoulli

Consideriamo un fluido incomprimibile in moto stazionario in un tubo. Supponiamo che in esso agiscano solo le forze di pressione interne e la forza peso, e che siano dunque trascurabili gli attriti interni al fluido, ovvero la viscosità.

Consideriamo lo spostamento in un tempo infinitesimo dt di una porzione di fluido inizialmente compresa tra due sezioni qualsiasi S_1 e S_2 , che si trovano ad un'altezza h_1 ed h_2 come in figura.



Il volume di fluido che passa attraverso le due sezioni è uguale e pari a $dV = Q dt$.

Il lavoro compiuto dalla forza di pressione (avuta al fluido esterno) è:

$$dW_1 = p_1 dV = p_1 Q dt \quad \text{positivo per il verso della forza}$$

$$dW_2 = -p_2 dV = -p_2 Q dt \quad \text{negativo (resistente)}$$

L'energia potenziale della forza peso associata alla porzione considerata di fluido subisce una variazione dovuta al fatto che una massa $dm = \rho dV$ di fluido viene rimossa dall'altezza h_1 e una egual massa dm di fluido viene aggiunta ad h_2 , mentre il tratto di tubo intermedio resta pieno e non varia la sua energia potenziale:

$$dU = dm \cdot g (h_2 - h_1) = \rho \cdot g (h_2 - h_1) Q dt \quad (\text{lavoro della forza-peso: } m \cdot g \cdot dy = \rho V \cdot g \cdot dy)$$

Infine, l'energia cinetica complessiva della porzione considerata di fluido subisce una variazione:

$$dK = \frac{1}{2} dm v_2^2 - \frac{1}{2} dm v_1^2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2) Q dt$$

Dal teorema sulla variazione di energia cinetica e il lavoro si ottiene:

$$dK = -dU + dW_1 + dW_2 \implies p_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2$$

Abbiamo dunque dimostrato la **Legge di Bernoulli**:

$$p + \rho g h + \frac{1}{2} \rho v^2 = H \quad \text{con } H = \text{cost. detta carico idrodinamico}$$

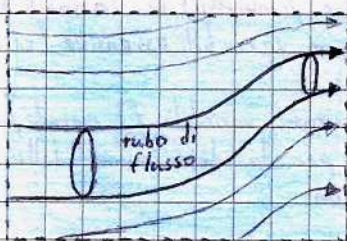
È una sorta di conservazione dell'Energia Meccanica totale.

Moto Laminare

Si definisce linea di corrente di un fluido una linea tangente alla velocità del fluido in ogni suo punto. Considerando l'insieme delle linee di corrente di un fluido (non necessariamente confinato in un recipiente), se esse si mantengono ben definite e distinte tra loro si ha un moto laminare (distinto dal ben più complesso moto turbolento, in cui le linee di corrente si intrecciano tra loro, descrivono eliche, spirali e simili strutture). Più le linee di flusso sono dense, più il fluido si muove rapidamente.

Se il moto di un fluido, oltre ad essere laminare, è anche stazionario, è possibile considerare un "tubo ideale", detto tubo di flusso, definito da una superficie di fluido laterale di fluido (composta da linee di corrente) che "racchiude" una porzione di fluido in movimento senza venirci attraversata.

Nel considerare il tubo di flusso, è possibile applicare le leggi descritte in precedenza anche nel caso di un generico fluido in movimento.

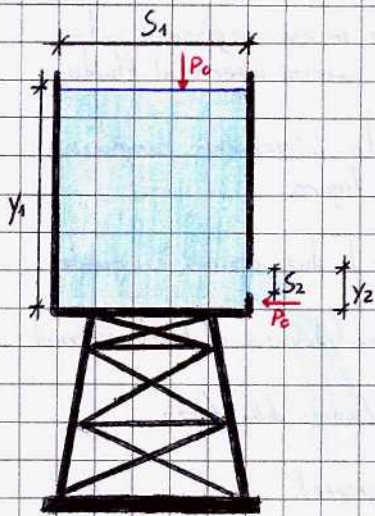


Effetto Venturi

È un'interessante conseguenza della legge di Bernoulli: la pressione di un fluido si riduce nelle zone in cui il fluido scorre più velocemente.

Tale effetto è anche alla base della portanza delle ali dei velivoli: creando una differenza di pressione tra la parte inferiore e quella superiore dell'ala si genera una forza totale orientata verso l'alto, che "regge" l'aereo nel volo.

Teorema di Torricelli



Supponiamo $y_2 \sim 0$. Consideriamo la Legge di Bernoulli:

$$P_0 + \rho g y_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_0 + \rho g y_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2;$$

$$g y_1 + \frac{1}{2} v_1^2 = g y_2 + \frac{1}{2} v_2^2;$$

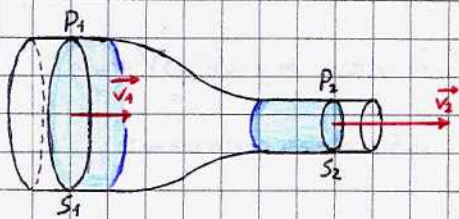
$$v_2^2 = v_1^2 + 2g(y_1 - y_2);$$

$$v_2^2 = 2g y_1 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2g y_1}$$

Essendo la portata costante, e poiché $S_1 \gg S_2 \Rightarrow v_1 \ll v_2 \Rightarrow$ si può elidere v_1 .

Si nota che il fluido in uscita segue le leggi del moto di caduta di un grave.

Tubo di Venturi



Segue dalla dimensionalità a bianco:

$$S_1 > S_2$$

$$v_1 < v_2$$

$$P_1 > P_2$$

È un tubo orizzontale (stessa quota) con una variazione della sezione.

Essendo la portata costante, e valendo l'equazione di continuità (anche nota come legge di Leonardo), sapendo inoltre che $S_1 > S_2$; Applichiamo la Legge di Bernoulli:

$$P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2;$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v_1^2);$$

Applicando l'equazione di continuità, $v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2} \rho v_1^2 \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) \Rightarrow P_1 - P_2 > 0$$

> 0 poiché $S_1 > S_2$

ermodinamica

Prima parte: la Terminologia

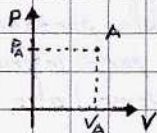
In ambito termodinamico, cambia nettamente il linguaggio e la descrizione del sistema fisico: ora si considera una parte di materia che interagisce con l'ambiente esterno. Si distinguono tre possibili sistemi:

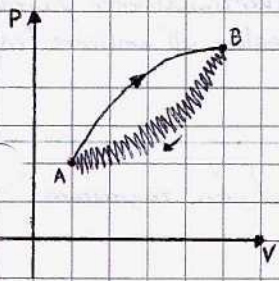
- Sistema Aperto: scambia calore e materia con l'esterno (esempio: pentola con acqua su un fornello)
- Sistema Chiuso: scambia calore, ma non materia, con l'esterno (esempio: pentola con coperchio)
- Sistema Isolato: non scambia né materia né calore con l'esterno (il recipiente ha pareti adiabatiche)

Rispetto ai fenomeni termodinamici si possono inoltre applicare due diversi approcci: uno microscopico, che descrive ciò che accade molecola per molecola sfruttando la meccanica statistica (difficile), ed uno macroscopico, che analizza il fenomeno sulla totalità del volume.

Oltre a cambiare il linguaggio, cambiano anche le grandezze fisiche da considerare principali: le variabili termodinamiche sono pressione, volume, densità, massa, temperatura. Esse si distinguono in variabili estensive (si sommano, un esempio è il volume) e intensive (variano di punto in punto).

Per descrivere un fenomeno termodinamico, è sufficiente considerare due delle sovraccitate variabili. Il metodo più semplice e, dunque, largamente accettato, è quello riferito a pressione e volume; per la descrizione dello stato termodinamico del sistema si usa dunque di sovente il Piano di Clapeyron:





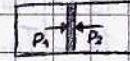
Un passaggio tra due stati di equilibrio avviene mediante trasformazioni termodinamiche; se in ogni istante lo stato termodinamico del sistema è ben definito, tale trasformazione è graficamente rappresentata da una linea continua; altrimenti si impegna una linea zigzagata.

Una trasformazione si dice reversibile se passa per stati di equilibrio e non ha fenomeni dissipativi, altrimenti è irreversibile.

Equilibrio Termodinamico: Si basa su 3 equilibri:

Una trasformazione si dice ciclica se ritorna allo stadio iniziale.

• Equilibrio Meccanico: $\sum \vec{F} = 0, \sum \vec{\tau} = 0$

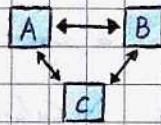


• Equilibrio Chimico (non trattato): non ci sono reazioni chimiche

• Equilibrio Termico



Principio 0 della Termodinamica: Se due corpi sono in equilibrio con un terzo corpo, essi sono in equilibrio tra loro.



$$\begin{matrix} T_A = T_C \\ T_B = T_C \end{matrix} \Rightarrow T_A = T_B$$

La temperatura si misura col termometro, che si basa sulla variazione di una grandezza fisica:

Termometro a pressione costante: modello del termometro "classico", viene graduato con tacche a 0°C (pansa termica acqua-ghiaccio) e a 100°C (acqua-vapore); successivamente il segmento viene diviso per 100. Essendo il termometro a pressione costante, il liquido varia in volume: $T = \alpha V + \beta$ (con α, β costanti)

Termometro "da forno": sfrutta la variazione di resistenza: a seconda del materiale, con la variazione della resistenza è possibile valutare la temperatura.

Termometro a Volume costante: sfrutta la legge di Stevino: $P = P_0 + \rho gh$



$$T = c \cdot P = \frac{T_3 P}{P_3}$$

c è una costante, determinata al "punto triplo" (in cui fase solida, liquida e aeriforme sono in equilibrio); $c = \frac{T_3}{P_3}$
Nell'acqua, $T_{\text{H}_2\text{O}} = 273,16 \text{ K}$

Si ricorda (dal liceo) che $\Delta T^\circ\text{C} = \Delta T_{\text{K}}$; per curiosità si riporta anche la legge di conversione da gradi Celsius a gradi Fahrenheit: $T_{\text{C}} = \frac{5}{9} (T_{\text{F}} - 32)$

Calore

$$Q = c \cdot \Delta T$$

c è detta capacità termica; $c = C_s \cdot m$

se è un gas, si considera il numero di moli (n).

calore specifico, in un gas si distingue tra C_v e C_p (calore specifico a pressione/volume costante)

Questa legge vale sempre tranne nelle transizioni di fase (che avvengono sempre a temperature costanti), in cui vale la seguente relazione:

$$Q = m \lambda$$

calore latente; $\lambda_{\text{vapor}}^{\text{H}_2\text{O}} = 539 \text{ cal/g}$; $\lambda_{\text{fusione}}^{\text{H}_2\text{O}} = 79 \text{ cal/g}$

Essendo $C_{\text{H}_2\text{O}} \approx 1 \frac{\text{cal}}{\text{g}^\circ\text{K}}$ e la massa del mare molto elevata, il mare ha un'elevata capacità termica; per questo motivo, vicino al mare, anche se si registra un elevato ΔQ , la ΔT che ne deriva è molto bassa.

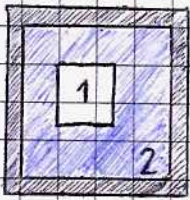
Si ricorda che la caloria è la quantità di calore necessaria per variare la temperatura di un grammo di H_2O di un grado.



Il calore, che può trasferirsi per conduzione, convezione o irraggiamento, è definito convenzionalmente positivo se il sistema assorbe calore dall'ambiente, mentre è minore di 0 se il sistema cede calore all'ambiente (rispettivamente, se $T_a > T_s$ o se $T_a < T_s$).

Esercizi

Massa di un certo materiale X a una certa temperatura è immersa in massa di H_2O ad altra temperatura. Calcolare T_{eq} .



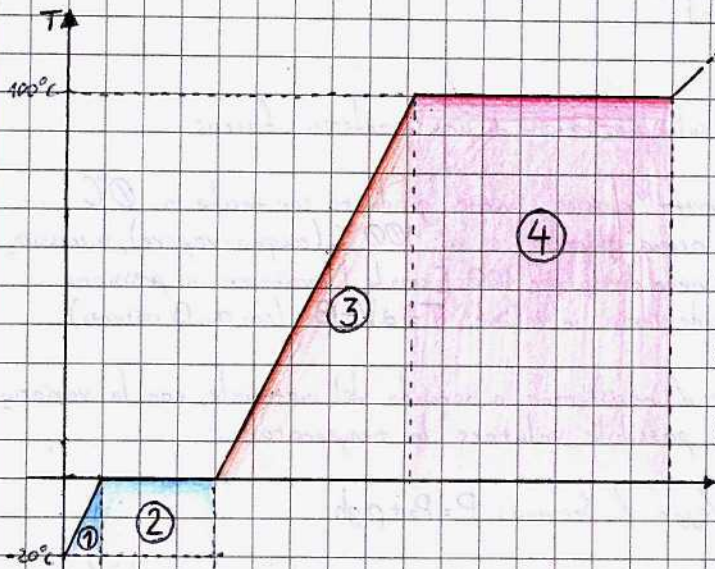
①: $m_X = 10 \text{ gr}$ | $m_{H_2O} = 1 \text{ kg}$
 $T_X = 10^\circ\text{C}$ | $T_{H_2O} = 30^\circ\text{C}$
 $C_X = \text{noto}$ | $C_{H_2O} = \text{noto}$

$T_{eq}?$

$$m_X C_X (T_{eq} - T_X) + m_{H_2O} C_{H_2O} (T_{eq} - T_{H_2O}) = 0 \quad (\text{calore assorbito da 1} = \text{calore ceduto da 2})$$

Logicamente, $10^\circ\text{C} < T_{eq} < 30^\circ\text{C}$

Calcolare il calore necessario a vaporizzare una massa di ghiaccio a pressione atmosferica.



$m = 1 \text{ kg}$ Calori specifici/latenti noti

Il problema si scompone in più fasi:

- ① $-20^\circ\text{C} \rightarrow 0^\circ\text{C}$ $Q = m C_{gl} (T_f - T_0) = m \cdot C_{gl} (20 \text{ K}) = 41 \text{ kJ}$
- ② fusione $Q = m \lambda_f = 334 \text{ kJ}$
- ③ $0^\circ\text{C} \rightarrow 100^\circ\text{C}$ $Q = m C_{H_2O} (T_f - T_0) = m \cdot C_{H_2O} (100 \text{ K}) = 418 \text{ kJ}$
- ④ vaporizzazione $Q = m \lambda_v = 2,26 \text{ MJ}$

$$Q_{tot} = ① + ② + ③ + ④ = 2,352 \text{ MJ}$$

Si noti che il calore necessario aumenta di volta in volta; ciò avviene a causa della necessità di aumentare la distanza tra le molecole in un passaggio di stato (il solido è più ordinato del liquido, che è più ordinato dell'aeriforme).

Lavoro del Calore

$$dW = P dV \Rightarrow W = \int_{V_A}^{V_B} P dV$$

In un'espansione, $W = \int_{V_0}^{V_f} P dV = P \int_{V_0}^{V_f} dV = P (V_f - V_0) > 0$ (lavoro fatto dal gas)

In una compressione, $W < 0$: si dice che il lavoro è fatto sul gas

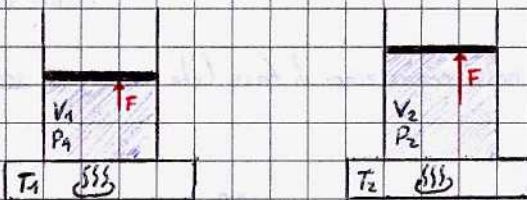
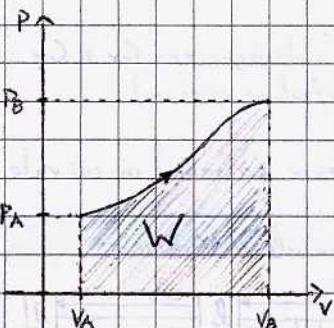
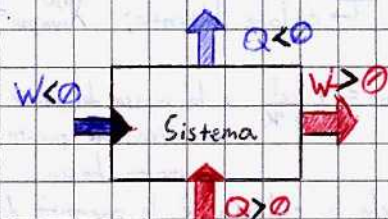
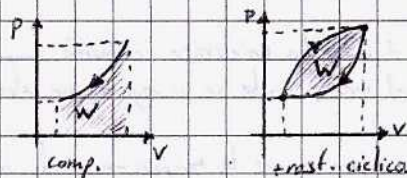
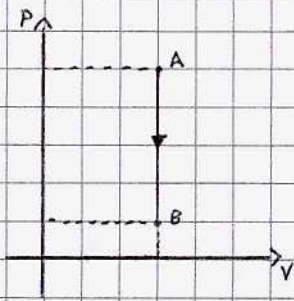


Grafico di un'espansione



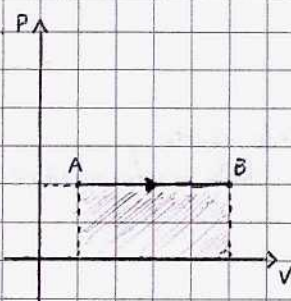
Alcune trasformazioni Particolari



Isocora

$$\Delta V = 0$$

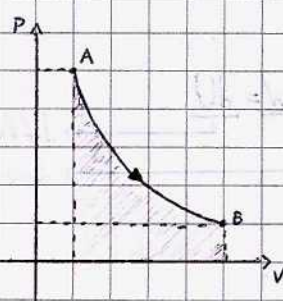
$$W = 0$$



Isobara

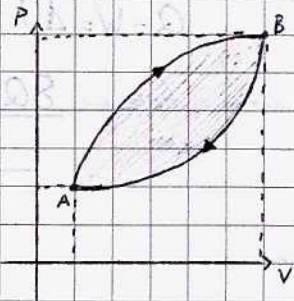
$$\Delta P = 0$$

$$W = P(V_B - V_A)$$



Isoterma

$$\Delta T = 0$$

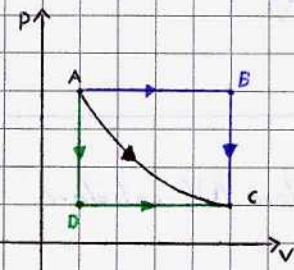


Ciclica

$$A \rightarrow B \quad W_{AB} > 0; \quad B \rightarrow A \quad W_{BA} < 0$$

$$W = W_{AB} - |W_{BA}|$$

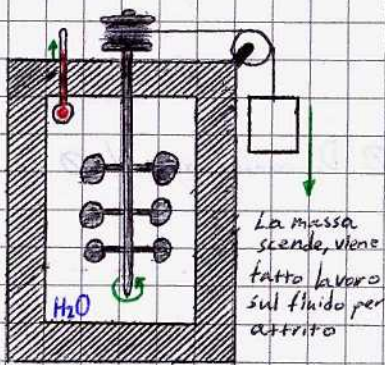
Osservazione



$$W_{AC} \leq W_{AB} + W_{BC} = P_A(V_B - V_A) \quad P_A > P_D$$

$$W_{AC} \geq W_{AD} + W_{DC} = P_D(V_C - V_D) = P_D(V_C - V_A)$$

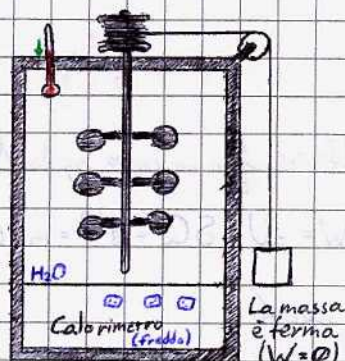
I principio della Termodinamica



(recipiente a pareti adiabatiche)

$$W < 0, Q = 0$$

A → B



$$W = 0, Q < 0$$

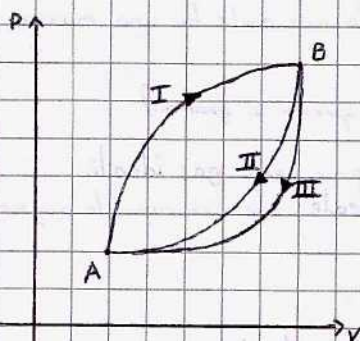
B → A

Attraverso questo esperimento, Joule dimostrò che il calore è una forma di energia; trovò inoltre il fattore di conversione tra Joule e calorie:

$$\frac{1 \text{ cal}}{1 \text{ J}} = 4,186$$

Inoltre, "imponendo" una trasformazione ciclica, riuscì a formulare il primo principio della termodinamica. Riportiamo di seguito la dimostrazione:

Essendo la trasformazione ciclica (ed essendo il calore una forma di energia), segue necessariamente la seguente relazione: $Q - W = 0$. Dunque, analizzando il grafico a lato:



$$(Q - W)_I + (Q - W)_{II} = 0$$

$$(Q - W)_I + (Q - W)_{III} = 0$$

$$(Q - W)_{II} = (Q - W)_{III}$$

Dunque, $Q - W$ non dipende dalla trasformazione; dipende unicamente dagli stati termodinamici iniziali e finali del sistema.

(Un analogo ragionamento è stato applicato per ciò che concerne le forze conservative, al lavoro delle quali era possibile associare un'energia potenziale)

calore $\xrightarrow{\quad}$ $Q - W = \Delta U$, con U energia interna del sistema
 lavoro meccanico $\xleftarrow{\quad}$

I I Principio della Termodinamica dunque afferma che:

$$Q - W = \Delta U$$

In quantità infinitesime, $\delta Q - \delta W = dU$

→ differenziale esatto

→ dipendono dalla trasformazione

Dunque:

$$\text{Se } Q > W, \Delta U > 0 \Rightarrow U(B) > U(A)$$

$$Q < W, \Delta U < 0 \Rightarrow U(B) < U(A)$$

In una trasformazione ciclica, $Q - W = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow U(B) = U(A)$

$$\text{adiabatica, } -W = \Delta U \implies \begin{cases} W > 0 \Rightarrow U(B) < U(A) \\ W < 0 \Rightarrow U(B) > U(A) \end{cases}$$

$$\text{isocora, } \Delta V = 0 \Rightarrow W = 0 \Rightarrow Q = \Delta U \implies \begin{cases} Q > 0 \Rightarrow U(B) > U(A) \\ Q < 0 \Rightarrow U(B) < U(A) \end{cases}$$

Esercizio

Massa d'acqua si vaporizza a temperatura e pressione costante (100°C , 1atm). Nota ΔV , calcolare il lavoro meccanico, il calore e ΔU .

$$m = 1\text{ kg}$$

$$V_0 = 10^{-3}\text{ m}^3$$

$$V_f = 1,67 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3$$

$$W = \int_{V_0}^{V_f} P dV = P \int_{V_0}^{V_f} dV = P(V_f - V_0)$$

$$\Delta U = Q - W$$

$$Q = m \lambda_v$$

Applichiamo il primo principio ai corpi rigidi: per definizione, in un corpo rigido $\Delta V \sim 0$. Di conseguenza, $W = 0$

$$\text{I Principio: } Q = \Delta U \Rightarrow \delta Q - \delta W = dU; \delta Q = dU = m \cdot C \cdot dT$$

$$\text{Dunque, } C = \frac{1}{m} \frac{\delta Q}{dT} = \frac{1}{m} \frac{dU}{dT} \quad \text{calore specifico.}$$

Nei corpi rigidi, il calore specifico a pressione costante e quello a volume costante sono circa uguali

Gas Ideali o Perfetti

Per quantificare la quantità di sostanza dei gas si utilizza spesso il numero di moli, ovvero una quantità di materiale contenente un numero di molecole pari a $N_A = 6,022 \cdot 10^{23}$. In questo modo una mole ha una massa espressa in grammi circa pari al peso molecolare.

Il numero di moli è dunque pari a $n_{\text{mol}} = \frac{m}{m_{\text{mol}}}$ → massa totale / → massa molare (peso molecolare espresso in grammi)

Portati ad alte temperature e a bassa pressione, quasi tutti i gas si comportano come gas ideali.

Un gas perfetto è un modello teorico di gas reale: è un sistema termodinamico ideale, che presenta le seguenti caratteristiche:

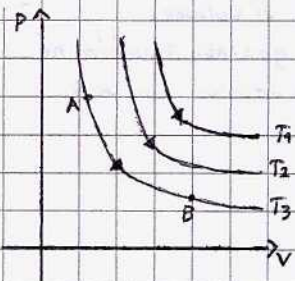
- Volume proprio pressoché nullo
- Non vi è interazione tra le molecole del gas, ma solo tra molecola e parete.

Sono caratterizzati da una serie di leggi empiriche sulla proporzionalità diretta o inversa di pressione, volume, temperatura e numero di moli.

Trasformazione Isoterma - Legge di Boyle

Una trasformazione si dice *Isoterma* quando avviene a temperatura costante. Nei gas perfetti, la legge che regola queste trasformazioni è la *Legge di Boyle*:

$$T = \text{cost.}; \quad P \cdot V = \text{costante}$$



$$(T_1 > T_2 > T_3)$$

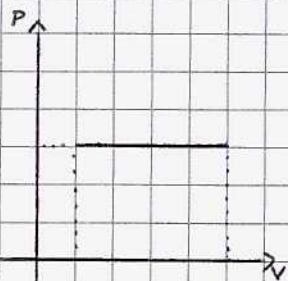
Il lavoro in una trasformazione isoterma si calcola sfruttando l'equazione di stato dei gas perfetti:

$$\delta W = P dV \Rightarrow W = \int_A^B P dV = \int_A^B nRT \frac{dV}{V} \Rightarrow W = nRT \int_A^B \frac{dV}{V} = nRT \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right)$$

Trasformazione Isobara - Prima Legge di Gay-Lussac

Una trasformazione si dice *Isobara* quando avviene a pressione costante. Detta trasformazione è regolata dalla prima legge di Gay-Lussac, che afferma che, a pressione costante, la variazione di volume risulta direttamente proporzionale al volume iniziale, alla variazione di temperatura, con una costante di proporzionalità uguale per tutti i gas.

$$P = \text{cost.}$$

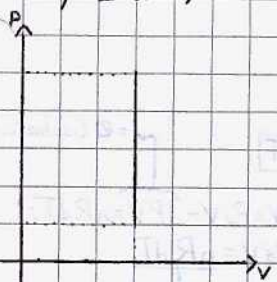


$$V = V_0(1 + \alpha T_c) = V_0 \alpha \left(\frac{1}{\alpha} + T_c\right) = V_0 \alpha T_c K \quad \text{poiché la costante } \frac{1}{\alpha} = 273,16^\circ\text{C}$$

$$\delta W = P dV \Rightarrow W = \int_A^B P dV = P \int_A^B dV \Rightarrow W = P(V_B - V_A)$$

Trasformazione Isocora - Seconda Legge di Gay-Lussac

Una trasformazione si dice *Isocora* quando a volume costante. Essa è regolata dalla seconda legge di Gay-Lussac, che afferma che a volume costante la variazione di pressione risulta direttamente proporzionale alla pressione iniziale, alla variazione di temperatura e con costante di proporzionalità uguale per tutti i gas.



$$V = \text{cost.}$$

$$P = P_0(1 + \beta T_c) = P_0 \left(\frac{1}{\beta} + T_c\right) = P_0 \alpha T_c K \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\beta}$$

$$W = 0$$

Equazione di Stato dei Gas Perfetti

Le leggi appena enunciate possono essere sintetizzate in una legge che considera anche il numero di moli del gas:

$$PV = nRT$$

$$\frac{PV}{nT} = \text{cost.}; \quad n = \frac{m}{M} \Rightarrow \frac{PV}{nT} = R$$

$$\text{con } R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} = 0,08206 \frac{\text{L} \cdot \text{atm}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$$

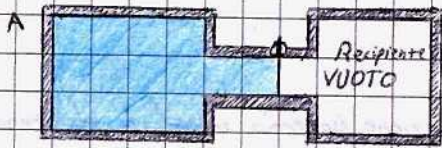
costante dei gas

$$PV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$$

con N numero di molecole
e $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$ costante di Boltzmann

Un'altra importante proprietà empirica dei gas perfetti è che la loro energia interna dipende solo dalla temperatura, e non da altre coordinate termodinamiche, come verificato dall'esperienza sull'espansione libera di Joule:

Espansione libera di Joule



Consideriamo come sistema l'intero recipiente: estraendo la paratia il gas passa dallo stato A allo stato B, aumentando di volume. Poiché le pareti del recipiente sono adiabatiche, il gas non scambia né lavoro né calore con l'esterno, per cui la sua energia interna non può variare.

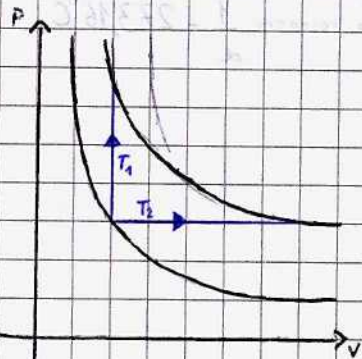
$$\begin{matrix} \delta Q - \delta W = dU \\ 0 \quad 0 \end{matrix} \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow U(B) = U(A)$$

Mentre volume e pressione variano, si osserva sperimentalmente che la temperatura resta costante; dunque l'energia interna di un gas perfetto dipende unicamente dalla temperatura.

Calore Specifico dei Gas

Cerchiamo ora di individuare la relazione esistente tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante di un gas.

Consideriamo delle trasformazioni tra due isoterme:



(T₁): Trasformazione isocora $\Rightarrow \Delta V = 0, W = 0$

$$Q - \underset{0}{W} = \Delta U \Rightarrow \Delta U = Q = n C_v \Delta T$$

(T₂): Trasformazione isobara $\Rightarrow \Delta P = 0$

$$Q - W = \Delta U = n C_p \Delta T - W$$

Supponendo $\Delta U_1 = \Delta U_2$ (imponendo T₁ e T₂ in modo tale da far valere tale condizione):

$$n C_v \Delta T = n C_p \Delta T - W \Rightarrow n C_p \Delta T = n C_v \Delta T + W \Rightarrow C_p \neq C_v; C_p > C_v$$

Relazione di Mayer

$$\boxed{C_p - C_v = R}$$

dimostriamo la seguente relazione:

$$\begin{aligned} \bullet C_p &= \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} \Rightarrow W + dU = n C_p dT \stackrel{\text{isobara}}{=} P dV + dU \Rightarrow n C_p dT = P dV + n C_v dT; & \text{sapendo } PV = nRT & \quad \uparrow = 0 \text{ (isobara)} \\ \bullet C_v &= \frac{1}{n} \frac{\delta Q}{dT} \stackrel{\text{isocora}}{=} \frac{dU}{dT} \Rightarrow dU = n C_v dT & \quad PV = P dV + dPV = n R dT; & \\ & & \quad PdV = n R dT & \\ & & \quad n C_p dT = n R dT + n C_v dT; & \\ & & \quad C_p = R + C_v \Rightarrow C_p - C_v = R & \quad \boxed{QED} \end{aligned}$$

Si noti che, salvo per le trasformazioni isobare (in cui si preferisce

Si noti che la relazione

$$dU_{int} = n C_v dT \Rightarrow \Delta U = n C_v \Delta T$$

è sempre verificata.

Modello Statistico dei Gas Perfetti

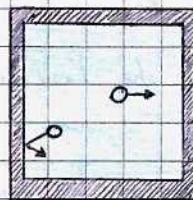
È interessante fare una trattazione statistica elementare dei gas perfetti, anche nota come teoria cinetica dei gas. Il gas viene trattato come un insieme di N particelle puntiformi di massa m non interagenti tra loro, che si muovono liberamente all'interno di un recipiente di volume V . Una particella che urta una parete rimbalza elasticamente, invertendo la componente di velocità perpendicolare alla parete.

Valutiamo ora l'energia interna del sistema:

$$U_{\text{interna}} = K + U_{\text{potenziale}} \rightarrow \text{gas inerte} \Rightarrow \text{molecole interagiscono solo con le pareti}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle \rightarrow \text{velocità media}$$



Dato che le diverse particelle possono avere velocità diverse, si impiega la velocità media; per simmetria, la velocità quadratica media del gas deve essere uguale in tutte le direzioni, dunque si ha che:

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle \Rightarrow \langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \rangle = 3 \langle v_x^2 \rangle$$

Per valutare meglio l'energia di un gas, introduciamo il concetto di grado di libertà: mentre in termodinamica esso indica il numero di variabili che si possono modificare senza che venga alterato lo stato di equilibrio del sistema, ciò che si preme sapere è il suo significato chimico: esso descrive in modo completo il movimento di ogni singola atoma di una molecola rispetto alla terna di assi cartesiani (1 grado di libertà per asse) e comprende tutti i possibili movimenti della molecola (traslazioni, rotazioni, oscillazioni). Riportiamo di seguito i gradi di libertà per alcune molecole:

Molecola	Esempio	Gradi di Libertà			Calori specifici molari previsti	
		Traslazionali	Rotazionali	Totali	C_v	$C_p = C_v + R$
Monatomica	He	3	0	3	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$
Biatomica	O ₂	3	2	5	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$
Poliatomica	CH ₄	3	3	6	$3R$	$4R$

(Non studiamo)

Ad ogni grado di libertà si associa inoltre un'energia pari a $\frac{1}{2} k_B T$

Principio di Equipartizione dell'energia

Esempio

Molecola monoatomica \Rightarrow 3 gradi trasl. libertà $\Rightarrow U_{\text{int}} = K \Rightarrow U_{\text{int}} = N \cdot \frac{3}{2} k_B T$

\rightarrow Numero di molecole nel gas

Verifichiamo C_v :

$$C_v = \frac{1}{n} \frac{dU}{dT} = \frac{N}{n} \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} k_B T \right) = \frac{N}{n} \cdot \frac{3}{2} k_B = \frac{N}{n} \cdot \frac{3}{2} \frac{R}{M_n} = \frac{3R}{2} \cdot \frac{N}{n} \cdot \frac{n}{N_A} = \frac{3R}{2} \cdot \frac{N}{n} \cdot n = \frac{3R}{2} \quad \square$$

(non semplice)

Dopo queste interessanti valutazioni, supponiamo che il recipiente sia un cubo di lato l . Considerando la quantità di moto scambiata dalla particella con la parete nell'urto (supponiamo $v_x \perp$ parete) e il tempo necessario a urtare la stessa parete (è periodico), ovvero quello necessario ad attraversare la scatola due volte in direzione x , ricaviamo la forza media scambiata per unità di tempo da una singola particella con la parete:

$$\Delta p_x = 2m v_x$$

$$\Delta t = \frac{2l}{|v_x|}$$

teorema dell'impulso $\Rightarrow \langle F \rangle_{\text{particella}} = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{m v_x^2}{l}$ (in modulo)

Di conseguenza, $\langle F_{tot} \rangle = N \cdot \langle F \rangle_{part.} = N \cdot \frac{m \langle v_x^2 \rangle}{L}$

Dividendo questa forza totale media per l'area della parete (L^2) otteniamo la pressione agente sulla parete:

$$P = \frac{N m \langle v_x^2 \rangle}{L^3} = \frac{N m \langle v_x^2 \rangle}{V}$$

Sappiamo inoltre che l'energia cinetica media delle particelle è $\langle E_k \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle$

Mettendo insieme tutte le equazioni otteniamo la seguente legge statistica dei gas perfetti:

$$PV = \frac{2}{3} N \langle E_k \rangle = n \frac{2}{3} N_A \langle E_k \rangle$$

Confrontando questo risultato con l'equazione di stato dei gas perfetti e adottando la definizione empirica di temperatura assoluta T basata sulla pressione del gas (usata come termometro di sé stesso), otteniamo:

$$T = \frac{2 \langle E_k \rangle}{3 k_B}$$

Con questo abbiamo dimostrato statisticamente la validità dell'equazione di stato dei gas perfetti e dedotto da questa una relazione tra la temperatura assoluta e l'energia cinetica media delle particelle.

Calcoliamo ora anche l'energia interna U del gas, che deve corrispondere all'energia meccanica microscopica del sistema. Avendo imposto che nel sistema le particelle non interagiscono tra loro (energia potenziale nulla), l'energia interna sarà data dalla sola energia cinetica ($U_{int} = N \cdot \langle E_k \rangle$); combinando questa relazione con il risultato ottenuto per la temperatura, si ottiene:

$$U = \frac{3}{2} N k_B T = \frac{3}{2} n R T$$

Questo risultato coincide con la legge $U(T) \sim n C_V T + \text{costante}$, posta poiché il calore specifico di un gas può essere considerato costante con ottima approssimazione per un ampio intervallo di temperature; considerando $C_V = \frac{3}{2} R$ e la costante additiva nulla si ottiene la suddetta relazione.

Questo è proprio il comportamento noto dei gas monoatomici, che sono quelli effettivamente assimilabili a particelle puntiformi.

Esercizi

① Un disco di ferro ruota fino a raggiungere $\omega = 6 \cdot 10^3$ g/min. Se il calore dissipato è trascurabile, ΔT ?



m, R noti

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\omega = 6 \cdot 10^3 \cdot \frac{2\pi}{60} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 6,28 \cdot 10^2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$Q = W = \Delta U, \text{ MA } Q = 0 \text{ per } H_p \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = -\Delta U; \quad \frac{1}{2} I \omega^2 = m C_s \Delta T \Rightarrow \Delta T = \frac{I \omega^2}{2 m C_s}$$

[I princ. termodinamica applicato al corpo rigido]

② m_1, T_1, C_{s1}
 m_2, T_2, C_{s2}

Sistema isolato, contatto termico, T_{eq} ?

$$Q = 0, W = 0 \Rightarrow \Delta U_1 + \Delta U_2 = 0 \Rightarrow m_1 C_{s1} (T_{eq} - T_1) + m_2 C_{s2} (T_{eq} - T_2) = 0$$

Esercizio

Gas monoatomico, $n = 0,32 \text{ mol}$

	A	B	C
V	2,2L	4,4L	4,4L
P	2,4atm	2,4atm	1,2atm
T			

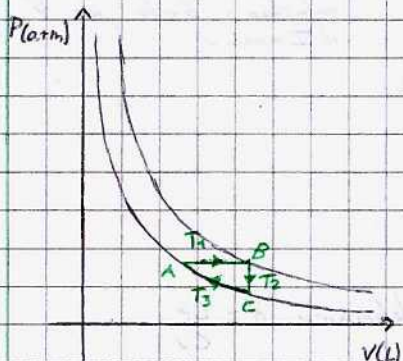
$$T_B > T_A$$

$$T_C = T_A$$

T? Q? W? ΔU?

↳ sia 3 + trasf. che intero ciclo

⇒ isoterma fino ad A



Studiamo le tre trasformazioni:

① A → B isobara

② B → C isocora

③ C → A isoterma

Dopo questa valutazione preliminare, per poter discutere analiticamente delle trasformazioni e dell'intero ciclo, occorre prima ricavare tutti i dati utili dai tre stati di equilibrio dati:

Valutiamo gli stati di equilibrio A, B, C

① $P_A V_A = n R T_A \Rightarrow T_A = \frac{P_A V_A}{n R}$

② $V_B = 2V_A, P_B = P_A \Rightarrow P_B \cdot 2V_A = 2n R T_B \Rightarrow T_B = \frac{2P_A V_A}{n R} = 2T_A$

③ $V_B = V_C, T_C = T_A, P_C = \frac{P_A}{2}$

Essendo tutti i dati noti, è possibile fornire uno studio delle trasformazioni:

① $Q_1 = n C_P (T_B - T_A) > 0$

$$W_1 = P_A (V_B - V_A) = P_A (2V_A - V_A) = P_A V_A$$

$$\Delta U = n C_V (T_B - T_A) = Q_1 - W_1$$

② $W_2 = 0 \Rightarrow Q_2 = \Delta U_2 = n C_V (T_C - T_B) = n C_V (T_A - T_B) = -n C_V T_A$

③ $Q_3 = W_3 = n R T_A \ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = n R T_A \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Delta U_3 = n C_V (T_A - T_C) = 0$$

Nell'intero ciclo:

$$Q_{\text{tot}} = Q_1 + Q_2 + Q_3$$

$$\Delta U_{\text{tot}} = 0 \quad (\text{è un ciclo})$$

$$W_{\text{tot}} = W_1 + W_3 \quad (W_2 = 0)$$

Trasformazioni adiabatiche quasi statiche di un gas perfetto

Essendo trasformazioni quasi statiche, passano per infiniti stati di equilibrio. Tali trasformazioni sono anche dette reversibili.

Una trasformazione adiabatica non scambia calore con l'esterno (in natura: vi è sempre un minimo scambio di calore).

$$\delta Q = 0 \Rightarrow \underbrace{\delta Q}_{0} - \delta W = dU \Rightarrow -P dV = n C_V dT;$$

$$n C_V dT + P dV = 0 \Rightarrow$$

moltiplico e divido per V
il II membro

$$\Rightarrow n C_V dT + n R T \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \text{moltiplico e divido per } \frac{1}{T} \text{ ambo i membri}$$

$$\Rightarrow C_V \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{R}{C_V} \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{C_V} \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + \left(\frac{C_P}{C_V} - 1 \right) \frac{dV}{V} = 0 \Rightarrow \text{definiamo } \gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

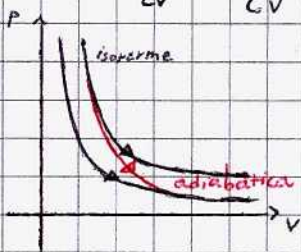
$$\Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} + \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow (\gamma - 1) \int \frac{dV}{V} + \int \frac{dT}{T} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\gamma - 1) \ln V + \ln T = \text{cost.} \Leftrightarrow \ln V^{(\gamma-1)} + \ln T = \text{cost.} \Leftrightarrow \ln (T \cdot V^{(\gamma-1)}) = \text{cost.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T \cdot V^{\gamma-1} = \text{cost.} \quad \text{o, equivalentemente, } PV^\gamma = \text{cost.} \quad \left(T = \frac{PV}{nR} \right)$$

Valutiamo γ

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + R}{C_V} > 1$$



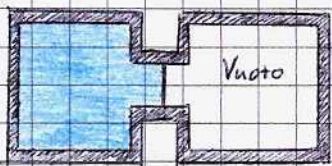
Per questo motivo, la pendenza di una trasformazione adiabatica reversibile è maggiore di quella di una trasformazione isoterma (in cui " $\gamma = 1$ "). Questo è dovuto al fatto che l'espansione adiabatica corrisponde anche ad una diminuzione dell'energia interna e, dunque, di temperatura.

Trasformazioni Adiabatiche Irreversibili

Bisogna far notare che alcune trasformazioni adiabatiche, non essendo quasi statiche, non sono reversibili; in questi casi, le leggi elencate non sono più valide. Essendo la trasformazione irreversibile, inoltre, essa non passa per infiniti stati di equilibrio: di fatti, sono definiti solo lo stato iniziale e finale.

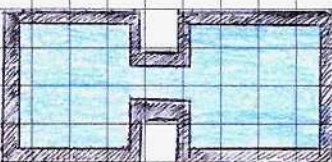
Faremo ora due esempi di trasformazioni adiabatiche quasi statiche:

①: Espansione libera di un gas



La già studiata espansione libera di Joule è un valido esempio di trasformazione adiabatica irreversibile:

$$\text{Considerando l'intero sistema di camere, } W = 0; Q = 0 \Rightarrow \Delta U = 0 \Rightarrow \Delta T = 0$$



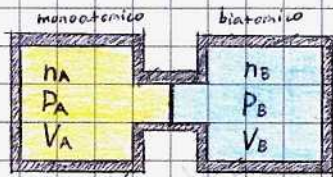
La trasformazione è dunque adiabatica-isoterma; possiamo scrivere:

$$P_A V_A = P_B V_B$$

Non possiamo dire nulla su altri stati di equilibrio.

② Mescolamento di 2 Gas

Il sistema è simile al precedente; invece del vuoto nella seconda camera vi è un altro gas



Considerando l'intero sistema:

$$Q - W = \Delta U, \quad Q = 0; \quad W = 0 \quad (\Delta V = 0)$$

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = 0;$$

$$n_A C_{VA} (T_{eq} - T_A) + n_B C_{VB} (T_{eq} - T_B) = 0$$

da cui:
$$T_{eq} = \frac{n_A C_{VA} T_A + n_B C_{VB} T_B}{n_A C_{VA} + n_B C_{VB}}$$

se $n_A = n_B$ e $C_{VA} = C_{VB}$, $T_{eq} = \frac{T_A + T_B}{2}$

$$E: \quad P_{fA} = \frac{n_A R T_{eq}}{V_A + V_B}$$

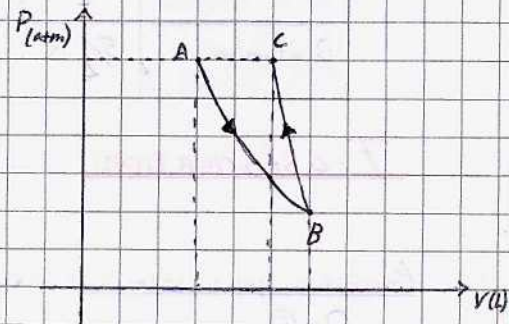
$$P_{fB} = \frac{n_B R T_{eq}}{V_A + V_B}$$

Se i gas sono inerti (non interagiscono tra loro), vale la legge di Dalton: $P_f = P_{fA} + P_{fB}$

Esercizi

- ① Gas monoatomico, 1 mole, Passa per 3 stati di equilibrio mediante una t. isoterma e una adiabatica quasi statica. Si richiede un grafico, un calcolo dello stato termodinamico finale e Q, W nelle trasformazioni

	A	B	C	
P	P_A	P_B	P_A	$P_C = P_A$
V	1L	2L		
T	27°C	27°C		



Iniziamo calcolando gli stati di equilibrio:

② $V_B = 2V_A, T_A = T_B \Rightarrow P_A V_A = P_B V_B \Rightarrow P_A V_A = P_B 2V_A \Rightarrow P_B = \frac{P_A}{2}$

③ $P_C = P_A \Rightarrow P_B V_B^\gamma = P_C V_C^\gamma \Rightarrow \frac{P_A}{2} (2V_A)^\gamma = P_A V_C^\gamma \Rightarrow T_C = \frac{P_C V_C}{nR}$

① $Q_1 = W_1 = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = nR \ln 2$

② $Q_2 = 0, W_2 = -\Delta U_2 = -n C_V (T_C - T_A)$

- ② Gas biatomico, 1 mole, si richiede W e stato finale se a) la trasf. è isoterma; b) la trasf. è adiabatica quasi statica.

	V	T
A	12L	310K
B	19L	?

a) $W = nRT_A \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right), T_B = T_A$

b) $W = -\Delta U = -n C_V (T_B - T_A); T_A V_A^{\gamma-1} = T_B V_B^{\gamma-1}$

Un esempio di trasformazione adiabatica quasi statica può essere un recipiente a pareti ~~di~~ adiabatiche con stantuffo, sul quale è applicato un carico lentamente crescente.

Riepilogo

I legge Termodinamica: $Q - W = \Delta U_{int}$

Casi particolari:

Trasformazione	Vincolo	Conseguenza
Isoterma	$\Delta U_{int} = 0$	$Q = W = nRT \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$
Adiabatica	$Q = 0$	$\Delta U_{int} = -W$
Isocora	$W = 0$	$\Delta U_{int} = Q$
Ciclo chiuso	$\Delta U_{int} = 0$	$Q = W$
Espansione Libera	$Q = W = 0$	$\Delta U_{int} = 0$

$$PV = nRT$$

$$C_p - C_v = R$$

Calori specifici di Gas Perfetti

	C_v	C_p	γ
Monatomico	$\frac{3}{2} R$	$\frac{5}{2} R$	1,67
Biatomico	$\frac{5}{2} R$	$\frac{7}{2} R$	1,40

Trasformazioni

Adiabatica quasi-statica:

$$Q = 0$$

$$W = -\Delta U = -n C_v (T_B - T_A)$$

$$PV^\gamma = \text{cost.}$$

• compressione:
 $\Delta V < 0$

$$W < 0 \quad (\Delta U > 0)$$

$$\Delta U > 0 \Rightarrow U(B) > U(A)$$

$$V_B < V_A$$

$$T_B > T_A$$

$$P_B > P_A$$



compressione

• espansione:
 $\Delta V > 0$

$$W > 0 \quad (\Delta U < 0)$$

$$\Delta U < 0 \Rightarrow U(B) < U(A)$$

$$V_B > V_A$$

$$T_B < T_A$$

$$P_B < P_A$$



espansione

Isoterma

$$T_B = T_A$$

$$PV = \text{cost}$$

• compressione

$$W < 0, \Delta V < 0 \Rightarrow V_B < V_A; P_B > P_A$$

$$Q < 0$$

$$\Delta U = 0 \quad (T_B = T_A)$$



riscaldamento

• espansione:

$$W > 0, \Delta V > 0 \Rightarrow V_B > V_A; P_B < P_A$$

$$Q > 0$$

$$\Delta U = 0 \quad (T_B = T_A)$$



raffreddamento

Isocora

$$V_B = V_A$$

$$W = 0$$

$$Q = \Delta U$$

$$Q = n C_v (T_B - T_A)$$

$$\frac{P}{T} = \text{cost.}$$

• riscaldamento: $Q > 0, V_B > V_A, T_B > T_A$

• raffreddamento: $Q < 0, V_B < V_A, T_B < T_A$

Isobara

espansione: $Q > 0$ $V_B > V_A$
 $W > 0$

$$Q = n C_p (T_B - T_A)$$

$$W = P(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A)$$

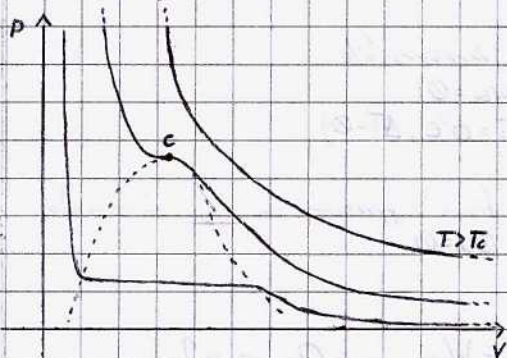
$$\Delta U = n C_v (T_B - T_A)$$

compressione: $Q < 0$ $V_B < V_A$
 $W < 0$

Nel caso di altre trasformazioni, è sempre possibile sfruttare il I Principio della Termodinamica e l'equazione di stato dei gas perfetti.

Gas Reali

Non rispettano la legge $PV = nRT$, a meno che non siano a temperature elevate e pressioni ridotte rispetto ai relativi valori nel punto critico C, nel quale è possibile osservare una coesistenza dei tre stati di aggregazione.



Empiricamente, si riuscì ad inserire dei termini correttivi nell'equazione di stato dei gas perfetti che garantissero un'efficace approssimazione del fenomeno; tale legge prende il nome di **Relazione di Van der Waals**:

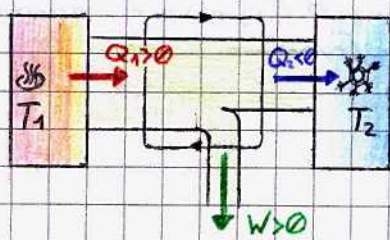
$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right) (V - nb) = nRT$$

\leftarrow interazioni tra molecole
 \leftarrow sottrae V_{van} a $V_{molecole}$

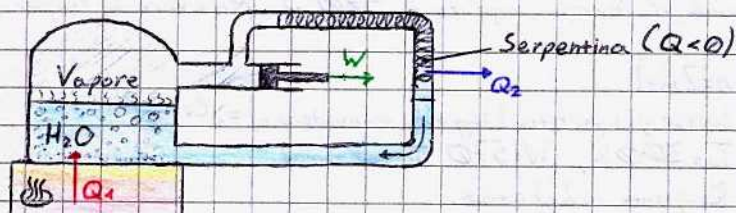
Tale approssimazione però non è efficace nel tratto soggetto alla curva "a campana", in quanto restituisce un tratto con un massimo e un minimo relativo, mentre nel caso reale il tratto è rettilineo orizzontale.

Macchine Termiche

Una macchina termica è ciclica, ovvero lavora in un ciclo (se il gas è ideale, $\Delta U = 0$)



Un esempio di macchina termica è la macchina a vapore:



Applicando il primo principio della termodinamica, $Q - W = \Delta U = 0$ (gas perfetto) $\Rightarrow Q = W \Rightarrow Q_1 - |Q_2| = W$

Definiamo ora il concetto di rendimento di una macchina termica:

"eta" rendimento $\rightarrow \eta = \frac{W}{Q_{assorbito}}$

è un numero puro, viene spesso indicato in %

Perché $W = Q_{ass} - |Q_{ced}|$,

$$\eta = \frac{Q_{ass} - |Q_{ced}|}{Q_{ass}} \Leftrightarrow \eta = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}}$$

$$0 < \eta < 1 \text{ SEMPRE}$$

Supponiamo per assurdo $Q_{cedato} = 0 \Rightarrow Q_1$ si trasforma completamente in lavoro (impossibile nella nostra realtà fisica)

5) Un recipiente cilindrico con pistone mobile contiene 2 moli di gas perfetto ed è a contatto termico con una miscela di acqua e ghiaccio ($T = 0^\circ\text{C}$). Il recipiente esterno è termicamente isolato. Il volume iniziale del gas è $V_A = 1\text{L}$. A partire da questa situazione di equilibrio, il pistone viene bruscamente abbassato finché il volume si riduce a $V_B = 0,7\text{L}$. A questo punto il pistone viene mantenuto fisso a una posizione B fino a che il gas non raggiunge $T = 0^\circ\text{C}$, quindi il pistone viene ripartato nella posizione A. Nel ciclo si scioglie una massa $m = 50\text{g}$ di ghiaccio. Ricavare il lavoro nella compressione da A a B.

Dati: $n = 2\text{mol}$

$V_A = 1\text{L} \rightarrow V_B = 0,7\text{L}$

$C_{Lg} \equiv \lambda_{gh} = 79,7\text{ cal/g}$

$m_g = 50\text{g}$

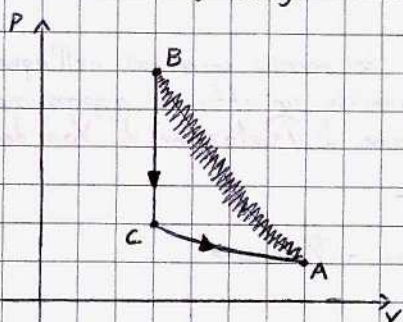
Δ : Disegna SEMPRE il grafico nel piano di Clapeyron!
(Considerato ERRORE)

Dal grafico, è facile intuire che:

AB: trasformazione adiabatica irreversibile

BC: trasformazione isocora ($W_{BC} = 0$)

CA: trasformazione isoterma ($T = 0^\circ\text{C}$, $\Delta T = 0$)



Si osserva inoltre che la situazione fisica rappresenta un ciclo, ed essendo il gas ideale per ipotesi si ha che $\Delta U = 0$

Applicando il primo principio della termodinamica, $Q_{tot} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CA}$, con $Q_{tot} = m \lambda_g$

Dunque, $W_{AB} = Q_{tot} - W_{CA} = m \lambda_g - nRT_0 \ln\left(\frac{V_A}{V_B}\right)$

Mio errore: Non ho fatto il grafico, ho supposto C-A adiabatica, Q.S. e considerato ΔU .

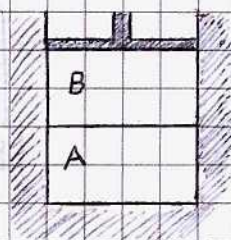
6) Un recipiente cilindrico a pareti isolanti è munito di un pistone mobile anch'esso isolante che può scorrere verticalmente senza attrito. Il cilindro è diviso in due parti da un setto rigido permeabile al calore. Ciascuna delle due parti contiene $n = 2$ moli di un gas perfetto. A partire dalla condizione di equilibrio con $T = 300\text{K}$, il pistone viene sollevato lasciando espandere il gas contenuto in B. L'espansione si arresta quando il lavoro compiuto è 570J . Ricavare la temperatura finale dopo l'espansione.

$n = 2\text{mol}$

Stesso gas perfetto (supposto monatomico) $\Rightarrow C_v = \frac{3}{2}R$

$T_0 = 300\text{K}$, $W = 570\text{J}$ espansione

Recipiente adiabatico.



Osserviamo che: la trasformazione in A è Isocora \Rightarrow A+B è adiabatica quasi statica.
in B è un'Espansione

Dunque, $Q_A + Q_B = 0$. Applicando il I principio della termodinamica, $Q_{tot} - W_{tot} = \Delta U_{tot} \Rightarrow$

$\Rightarrow -W_B = \Delta U_{tot} \Rightarrow W_B = nC_v(T_f - T_0) + nC_v(T_f - T_0) \Rightarrow -W_B = 2nC_v T_f - 2nC_v T_0 \Rightarrow T_f = T_0 - \frac{W_B}{2nC_v}$

Mio procedimento alternativo:

Ho considerato l'intero sistema; sapendo che il calore non si dissipa ho considerato solo B per l'espansione, calcolandone la temperatura finale sfruttando il I principio della termodinamica. Ho poi riconsiderato l'intero sistema applicando l'equilibrio termico (invece che progressivamente, ho considerato lo scambio di calore solo alla fine; ciò è lecito poiché il recipiente è adiabatico).

II Principio della Termodinamica

È legato all'irreversibilità delle trasformazioni termodinamiche e, più in generale, di molti fenomeni fisici macroscopici: è possibile trasformare l'energia meccanica macroscopica (utilizzabile) in energia microscopica (energia interna, non utilizzabile), mentre il viceversa avviene solo in parte: per questo motivo, siamo portati a dire che l'energia si consuma nel tempo, anche se in realtà essa si conserva.

Esistono due enunciati del II principio, sono dovuti a Kelvin-Planck e a Clausius e sono equivalenti tra loro: entrambi trattano dell'impossibilità di alcune trasformazioni termodinamiche:

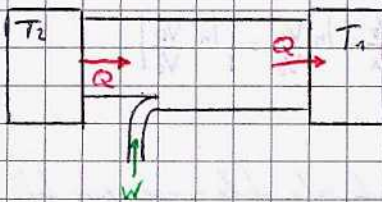
Enunciato di Kelvin-Planck: È impossibile effettuare una trasformazione ^{ciclica} il cui unico esito sia il passaggio della trasformazione in lavoro di tutto il calore assorbito da una singola sorgente termica omogenea.

Enunciato di Clausius: È impossibile effettuare una trasformazione il cui unico esito sia il passaggio di calore da un corpo più freddo a uno più caldo.

Per sorgente termica si intende un qualsiasi sistema in grado di scambiare calore. Per semplicità, consideriamo solo sorgenti ideali: pur scambiando calore, esse mantengono una temperatura costante (hanno cioè una capacità termica infinita).

Si osserva che entrambi gli enunciati riguardano l'impossibilità di una trasformazione, ma non della sua inversa: infatti, esse sono possibili (è anche possibile effettuare una trasformazione ciclica che produce lavoro, purché coinvolga almeno due diverse sorgenti termiche e vi sia un passaggio netto di calore dalla sorgente calda a quella fredda).

Macchina Frigorifera

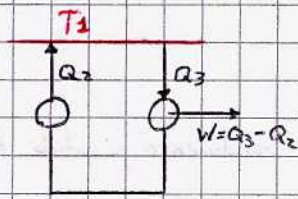
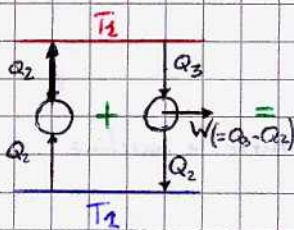


Tale passaggio è possibile solo a spese di un lavoro esterno: tendenzialmente, il calore viene ceduto da un corpo più caldo ad uno più freddo.

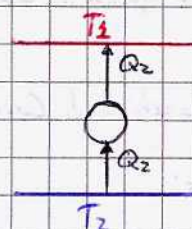
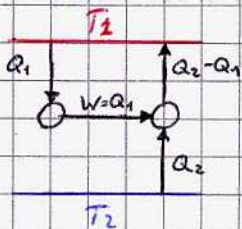
Invece del rendimento, si considera il coefficiente di performance:

$$E = \frac{Q_{ceduto}}{W}$$

Equivalenza dei due enunciati



Supponiamo per assurdo la non validità dello enunciato di Clausius (macchina all'estrema sinistra), e consideriamo un sistema tra la macchina "Clausius" ed una che rispetta l'enunciato di Kelvin-Planck. La macchina termica equivalente (somma delle due macchine) nega l'enunciato di Kelvin-Planck \Rightarrow ASSURDO



Procediamo analogamente negando l'enunciato di Kelvin-Planck: la macchina equivalente è un frigorifero perfetto, che non rispetta l'enunciato di Clausius (supposto valido) \Rightarrow ASSURDO

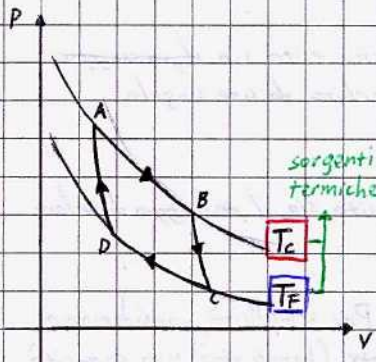
Perciò, se non vale un enunciato non vale neanche l'altro \Rightarrow sono equivalenti $(\neg A \Rightarrow \neg B; \neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A \Leftrightarrow B$

Macchina di Carnot

Rispetta il ciclo di Carnot: è un ciclo reversibile composto da due trasformazioni isoterme e due adiabatiche.

Essendo costituito da trasformazioni reversibili, la macchina di Carnot può sia produrre lavoro assorbendo calore (ciclo di Carnot) che comportarsi come una macchina frigorifera (ciclo di Carnot inverso)

Ciclo di Carnot



• AB: espansione isoterma $\Delta U_{AB} = 0$ $Q_{AB} = W_{AB} = nRT_c \ln(V_B/V_A)$ ($Q > 0$)

• BC: espansione adiabatica $Q_{BC} = 0$ $W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_V(T_f - T_c)$

• CD: compressione isoterma $\Delta U_{CD} = 0$ $Q_{CD} = W_{CD} = nRT_f \ln(V_D/V_C)$ ($Q < 0$)

• DA: compressione adiabatica $Q_{DA} = 0$ $W_{DA} = -nC_V(T_c - T_f)$

Calcoliamo il rendimento del ciclo:

$$\eta = \frac{W}{Q_{ass}} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = 1 - \frac{nRT_f |\ln(V_D/V_C)|}{nRT_c \ln(V_B/V_A)}$$

Valutiamo il rapporto tra i due logaritmi per semplificare ulteriormente la relazione. Per fare ciò, consideriamo le due trasformazioni

adiabatiche, BC e DA:

BC $T_c V_B^{\gamma-1} = T_f V_C^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_c}{T_f} = \left(\frac{V_C}{V_B}\right)^{\gamma-1}$

DA $T_c V_A^{\gamma-1} = T_f V_D^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{T_c}{T_f} = \left(\frac{V_D}{V_A}\right)^{\gamma-1}$

$$\Rightarrow \frac{V_C}{V_B} = \frac{V_D}{V_A} \Rightarrow \frac{V_B}{V_A} = \frac{V_C}{V_D} \Rightarrow \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \frac{V_C}{V_D} = \left| \ln \frac{V_D}{V_C} \right|$$

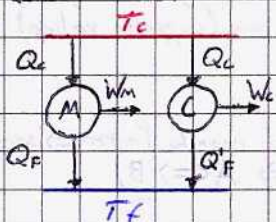
Perciò, in una macchina di Carnot, $\eta = 1 - \frac{T_f}{T_c} \Rightarrow$ il rendimento dipende solo dalle temperature delle due sorgenti, non dipende dal fluido

Teorema di Carnot

Ha 2 enunciati:

- La macchina di Carnot è la macchina col più alto rendimento possibile fra tutte le macchine che usano (due) sorgenti alle stesse temperature.
- Tutte le macchine reversibili hanno lo stesso rendimento di quella di Carnot (a stesse temperature)

Dimostrazione



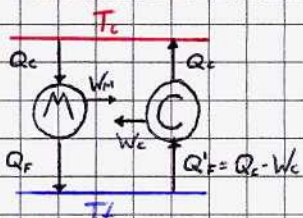
(M): macchina generica

(C): macchina di Carnot

$$Q_f = W_m - Q_c \quad W_m = Q_c - Q_f$$

$$Q_f = W_c - Q_c \quad W_c = Q_c - Q_f$$

Invertiamo la Macchina di Carnot



$W_m - W_c$ è necessariamente ≤ 0 (altrimenti si nega Kelvin-Planck), dunque necessariamente $Q_m - Q_c \leq 0$

①: $W_m - W_c < 0 \Rightarrow W_m < W_c \Rightarrow \eta_m < \eta_c$

②: $W_m = W_c \Rightarrow \eta_m = \frac{W_m}{Q_c}, \eta_c = \frac{W_c}{Q_c} \Rightarrow \eta_m = \eta_c$ Macchine reversibili

Esercizio

$n = 0,2$ mol, gas biatomico

AB isoterma irreversibile, assorbe $Q = 860$ J

BC adiabatica reversibile

CD isobara

DA isocora

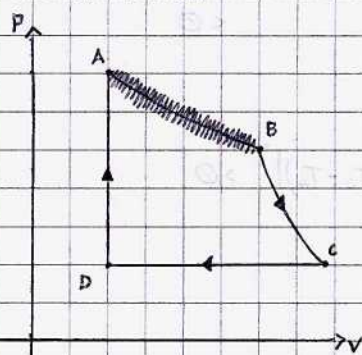
$$V_D = V_A = 5L$$

$$T_A = T_B = 900K$$

$$W_D = 10L$$

$$V_C = 15L$$

η ? Come cambia η se AB è reversibile?



$$Q_{AB} = W_{AB} = 860J \quad (\Delta U_{AB} = 0)$$

$$Q_{BC} = 0, W_{BC} = -n C_v (T_C - T_B) > 0 \quad (T_C < T_B)$$

$$Q_{CD} = n C_p (T_D - T_C) < 0 \quad (T_D < T_C); W_{CD} = P_C (V_D - V_C) < 0$$

$$Q_{DA} = n C_v (T_A - T_D) > 0 \quad \Delta U_{DA} = 0 \Rightarrow W_{DA} = 0$$

$$V_C^{1-\gamma} T_C = V_B^{1-\gamma} T_B \Rightarrow T_C = \left(\frac{V_B}{V_C}\right)^{\gamma-1} T_B;$$

$$P_C = \frac{nRT_C}{V_C} = P_D$$

$$T_D = \frac{P_D V_D}{nR}$$

Calcolare tutte le grandezze necessarie, troviamo η :

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = \frac{W_{AB} + W_{BC} + W_{CD}}{Q_{AB} + Q_{DA}} = \frac{W_{AB} - n C_v (T_C - T_B) + P_C (V_D - V_C)}{Q_{AB} + n C_v (T_A - T_D)} = 0,16 \Rightarrow \eta = 16\%$$

Se AB è reversibile, $Q_{AB} = W_{AB} = nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} > 0 \Rightarrow \eta = 0,20 = 20\%$

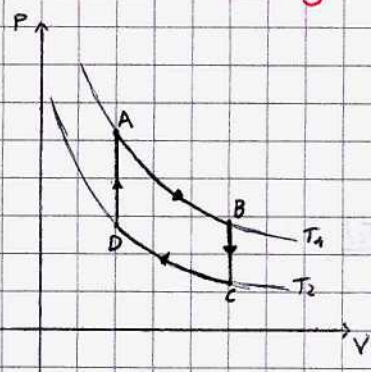
Dal teorema di Carnot si osserva che non è possibile raggiungere lo 0 assoluto della scala Kelvin:

$$T_x = T_0 \frac{Q_x}{Q_0}$$

Se $T_x = 0$ e $T_0 \neq 0$, allora $Q_x = 0$, ma ciò viola l'enunciato di Kelvin-Planck.

Esplikeremo ora alcuni particolari cicli, utili per gli svolgimenti di esercizi:

Ciclo di Stirling



Composto da due isoterme e due isocore:

• AB espansione isoterma; $\Delta U_{AB} = 0, Q_{AB} = W_{AB} = nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} > 0$

• BC + isocora, $W = 0 \Rightarrow Q_{BC} = \Delta U_{BC} = n C_v (T_2 - T_1) < 0$

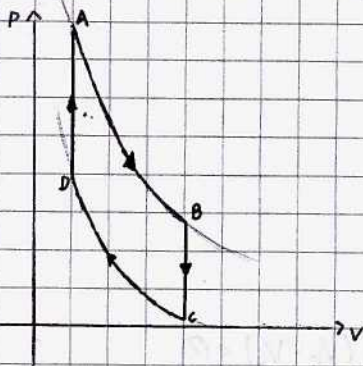
• CD compressione isoterma; $\Delta U_{CD} = 0, Q_{CD} = W_{CD} = nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B} < 0$

• DA + isocora, $W = 0 \Rightarrow Q_{DA} = \Delta U_{DA} = n C_v (T_1 - T_2) > 0$

$$\eta = \frac{W}{Q_{\text{ass}}} = \frac{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + nRT_2 \ln \frac{V_A}{V_B}}{nRT_1 \ln \frac{V_B}{V_A} + n C_v (T_1 - T_2)} \rightarrow \eta_{\text{carnot}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \eta_s < \eta_{\text{carnot}}$$

Ciclo di Otto

Alla base del motore a scoppio, è composto da due adiabatiche e due isocore:



AB adiabatica; $Q_{AB} = 0$, $W_{AB} = -nC_V(T_B - T_A)$

BC isocora; $W = 0$, $Q_{BC} = nC_V(T_C - T_B) < 0$

CD adiabatica; $Q_{CD} = 0$, $W_{CD} = -nC_V(T_D - T_C)$

DA isocora; $W = 0$, $Q_{DA} = nC_V(T_A - T_D) = -nC_V(T_D - T_A) > 0$

$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} - Q_{DA}}{Q_{DA}} = \frac{nC_V(T_C - T_B) + nC_V(T_A - T_D)}{nC_V(T_A - T_D)} = 1 - \frac{T_C - T_D}{T_A - T_D}$$

Consideriamo ora le trasformazioni adiabatiche, per semplificare ulteriormente la relazione:

$$\begin{aligned} T_A V_A^{\gamma-1} &= T_B V_B^{\gamma-1} \\ T_D V_D^{\gamma-1} &= T_C V_C^{\gamma-1} \end{aligned}$$

$$V_A = V_D, \quad V_B = V_C$$

$$\Downarrow$$

$$T_D V_A^{\gamma-1} = T_C V_B^{\gamma-1}$$

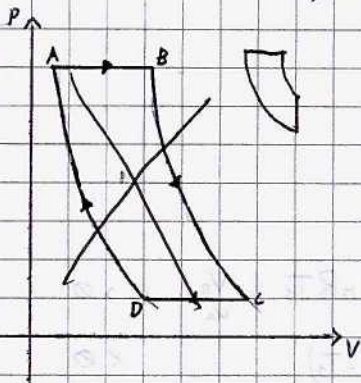
Segue che $(T_B - T_C) V_B^{\gamma-1} = (T_A - T_D) V_A^{\gamma-1}$ e, dunque, $\frac{T_B - T_C}{T_A - T_D} = \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}$

$$\text{Dunque, } \eta = 1 - \left(\frac{V_A}{V_B}\right)^{\gamma-1}$$

$\frac{V_A}{V_B} = r$, detto rapporto di rendimento

Ciclo Diesel

Composto da due isobare e due adiabatiche:



AB isobara; $Q_{AB} = nC_P(T_B - T_A) > 0$

BC adiabatica; $Q_{BC} = 0$

CD isocora; $Q_{CD} = nC_V(T_D - T_C) < 0$

DA adiabatica; $Q_{DA} = 0$

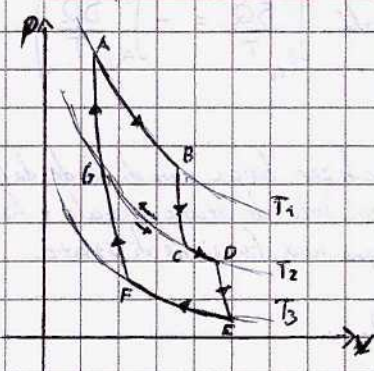
$$\eta = \frac{Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA}}{Q_{AB}} = \frac{nC_P(T_B - T_A) + nC_V(T_D - T_C)}{nC_P(T_B - T_A)}$$

$$\eta = 1 - \frac{C_V}{C_P} \cdot \frac{T_C - T_D}{T_B - T_A}$$

Nel Ciclo di Carnot, abbiamo visto come $\eta = 1 - \frac{|Q_{ced}}{Q_{ass}} = 1 - \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{|Q_{ced}|}{Q_{ass}} = \frac{T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{|Q_{ced}|}{T_2} = \frac{Q_{ass}}{T_1} \Rightarrow \frac{Q_1}{T_1} - \frac{|Q_2|}{T_2} = 0$

Ora, cercheremo di applicare il teorema di Carnot a macchine termiche che operano tra più sorgenti:

Macchina reversibile operante tra 3 sorgenti



$ABCDEF(G) \equiv \underbrace{ABCG(A)} + \underbrace{G(C)DEF(G)}$
 lavorano entrambi tra due sorgenti, applichiamo Carnot

• ABCG
 $\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CG}}{T_2} = 0 \quad \left(\frac{Q_{AB}}{T_1} - \frac{|Q_{CD}|}{T_2} = 0 \right)$

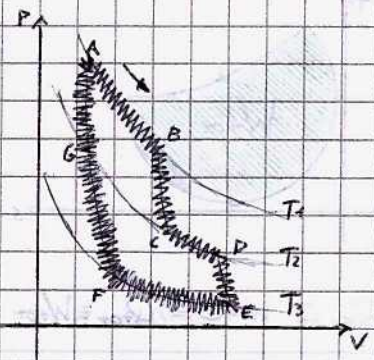
• GDEF
 $\frac{Q_{GD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{GC}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0$

Dunque, nell'intero ciclo:

$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{BC}}{T_2} + \frac{Q_{CG}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0 \Rightarrow \frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} = 0$$

Questa è un'estensione del Teorema di Carnot: in ogni macchina reversibile, $\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} = 0$

Macchina Irreversibile



Consideriamo la stessa macchina, ma con un ciclo irreversibile; operiamo la medesima scomposizione. La relazione caratterizzante però cambia:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_2|}{Q_1} < 1 - \frac{T_2}{T_1} = \eta_{Carnot} \Rightarrow \frac{|Q_2|}{T_2} < \frac{Q_1}{T_1}$$

• ABCG
 $\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{CG}}{T_2} < 0$

• GDEF
 $\frac{Q_{GC}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} < 0$

Dunque, nell'intero ciclo:

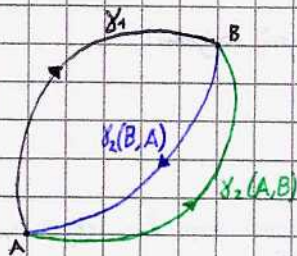
$$\frac{Q_{AB}}{T_1} + \frac{Q_{BC}}{T_2} + \frac{Q_{CG}}{T_2} + \frac{Q_{CD}}{T_2} + \frac{Q_{EF}}{T_3} < 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} < 0 \text{ in ogni macchina irreversibile}$$

In un ciclo generico, le trasformazioni sono considerabili come una sommatoria di diversi cicli di Carnot ^{si isoterme sommano} \forall due a due. Da ciò segue la disuguaglianza di Clausius; che rappresenta però un'approssimazione; considerando delle sorgenti termiche a temperatura infinitesimamente diversa, l'approssimazione è migliore: in questo caso si parla dello integrale di Clausius.

$$\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{T_i} \leq 0 \quad \oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad = 0 \Leftrightarrow \text{reversibile} \quad < 0 \Leftrightarrow \text{irreversibile}$$

Entropia

Sia AB un generico ciclo reversibile. Allora:



$$\oint \frac{\delta Q}{T} = 0$$

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_{A, \gamma_1}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_{B, \gamma_2}^A \frac{\delta Q}{T} = 0 \Rightarrow \left(\text{Perché } \int_{B, \gamma_1}^A \frac{\delta Q}{T} = - \int_{A, \gamma_2}^B \frac{\delta Q}{T} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{A, \gamma_1}^B \frac{\delta Q}{T} = \int_{A, \gamma_2}^B \frac{\delta Q}{T}$$

Dunque, questa grandezza fisica non dipende dalla trasformazione, ma solo da stato iniziale e finale del sistema; è dunque una funzione di stato.

Questa nuova funzione di stato si dice variazione di entropia, denotata con ΔS .

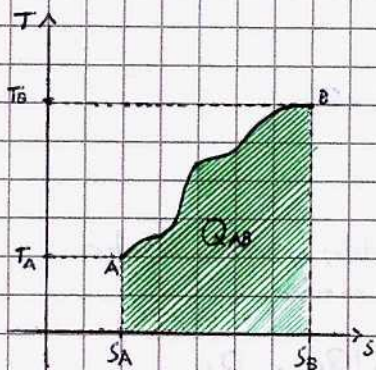
$$S_B - S_A = \Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T}$$

- È una grandezza additiva/estensiva (come il calore)
- si misura in $[J/K]$

→ perché f. di stato ⇒ è esatto

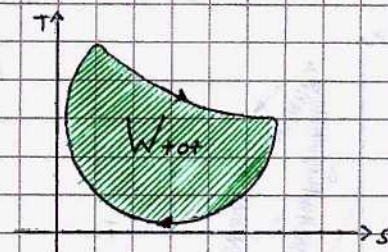
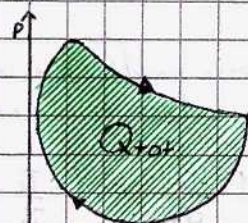
$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

Essendo una funzione di stato, è possibile considerare il piano T-S:



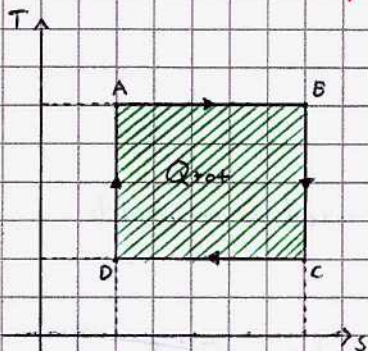
$$\delta Q = T dS \Rightarrow Q = \int T(s) dS$$

In un ciclo:



$$Q_{tot} = Q_{acc} - |Q_{ced}|; \text{ supponendo il ciclo reversibile, } Q - W = 0 \Rightarrow Q_{tot} = W_{tot}$$

Ciclo di Carnot nel piano T-S

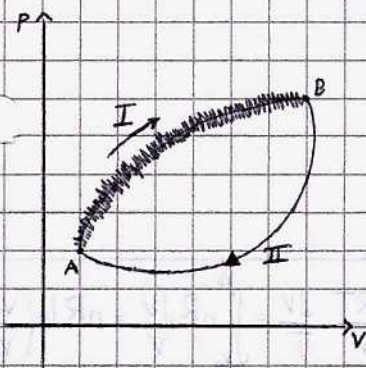


$$dS = \frac{\delta Q}{T}$$

adiabatica: $\delta Q = 0 \Rightarrow dS = 0 \Leftrightarrow S_i = S_f$

isoterma: $\Delta S = \frac{1}{T} \int_A^B \delta Q = \frac{Q}{T} = S_B - S_A$

Consideriamo ora un ciclo con almeno una trasformazione irreversibile:



$$\int_{A_I}^B \frac{\delta Q}{T} + \int_B^A \frac{\delta Q}{T} < 0;$$

$$\int_{A_I}^B \frac{\delta Q}{T} < \int_{A_{II}}^B \frac{\delta Q}{T} \Rightarrow S_B - S_A > \int_{A_I}^B \frac{\delta Q}{T}$$

Essendo una trasformazione irreversibile, la funzione di stato non è definita

Supponendo che il sistema sia isolato (ovvero che $\delta Q = 0$), si osserva che

$$S_B - S_A > 0$$

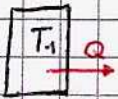
Da ciò segue che, considerando l'universo (sistema + ambiente), ΔS è sempre ≥ 0 ; poiché nella realtà non esistono trasformazioni adiabatiche irreversibili, nella realtà ΔS non è mai $= 0$ (è sempre > 0)

$$\Delta S_u = \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} \geq 0 \rightarrow \Delta S_u = 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} = -\Delta S_{amb}$$

$$\Delta S_u > 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} + \Delta S_{amb} > 0 \Rightarrow \Delta S_{sist} \neq -\Delta S_{amb}$$

Considerazioni sull'Entropia in vari Sistemi

Trasferimento di Calore da un serbatoio di calore



$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T_1} = \frac{1}{T_1} \int_A^B \delta Q = \frac{Q}{T_1}$$

se $Q < 0$, $\Delta S < 0$. Altrimenti, se la sorgente assorbe calore, $Q > 0$ e $\Delta S > 0$

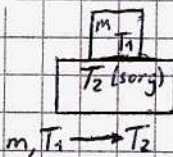
Trasferimento di Calore da una sorgente calda ad una fredda



$$\Delta S_{tot} = \Delta S_c + \Delta S_f \Rightarrow \frac{-|Q|}{T_c} + \frac{Q}{T_f} = Q \left(-\frac{1}{T_c} + \frac{1}{T_f} \right)$$

Essendo $T_c > T_f$, $\Delta S > 0$; il processo è infatti irreversibile (enunciato di Clausius)

Corpo solido e Sorgente (solo corpo)



La temperatura finale della massa è pari alla temperatura della sorgente

$$\Delta S_{sist} = \int \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{mC dT}{T} = mC \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \Rightarrow \Delta S = mC \ln \frac{T_2}{T_1}$$

variazione dell'entropia della massa m nel passaggio da T_1 a T_2

Corpo solido e sorgente (entrambi)

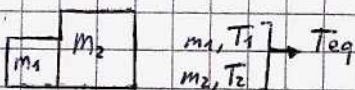
Consideriamo come universo il corpo e la sorgente:

$$\Delta S_u = \Delta S_{corpo} + \Delta S_{sorgente} = mC \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{Q}{T_2} = mC \ln \frac{T_2}{T_1} + \frac{mC(T_2 - T_1)}{T_2}$$

se uno dei termini è < 0 , si osserva che l'altro è > 0 . Ciò dipende da $T_1 \leq T_2$

sempre > 0

Scambio tra due corpi solidi



$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 = m_1 C_1 \ln \frac{T_{eq}}{T_1} + m_2 C_2 \ln \frac{T_{eq}}{T_2} > 0 \quad (+ \text{irreversibile})$$

• Cambiamenti di fase

Sono trasformazioni sempre isoterme; $\Delta S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{m \lambda}{T} = \frac{m \lambda}{T}$

• Gas ideale

Vale il I principio della termodinamica: $\delta Q - \delta W = dU$

$$\Delta S = \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^B \frac{\delta W}{T} + \int_A^B \frac{dU}{T}$$

Valutiamo: $\int_A^B \frac{dW}{T} = \int_A^B \frac{P dV}{T} = \int_A^B \frac{nRT}{V} \frac{dV}{T} = \int_{V_A}^{V_B} nR \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)$

$$\int_A^B \frac{dU}{T} = \int_A^B \frac{n C_V dT}{T} = n C_V \ln \frac{T_B}{T_A}$$

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A} + n C_V \ln \frac{T_B}{T_A} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta S = n \left(R \ln \frac{V_B}{V_A} + C_V \ln \frac{T_B}{T_A} \right)$$

Se +. isoterma, $dU = 0 \Rightarrow \Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A}$

Se +. isocora, $dW = 0 \Rightarrow \Delta S = n C_V \ln \frac{T_B}{T_A}$

Se la trasformazione è isobara, $\Delta S = n C_P \ln \frac{T_B}{T_A}$:

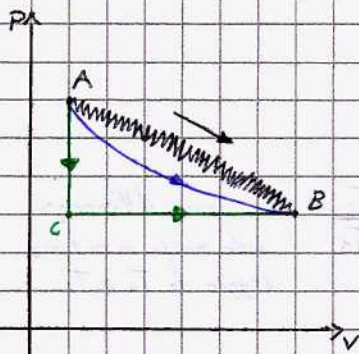
$$\frac{V_B}{V_A} \Rightarrow \frac{nRT_B}{P_B} \cdot \frac{P_A}{nRT_A} = \frac{T_B}{T_A} \cdot \frac{P_A}{P_B} \Rightarrow \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \cdot \frac{P_A}{P_B} \right) = \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + \ln \left(\frac{P_A}{P_B} \right)$$

Ⓢ se isobara

Dunque, in una +. isobara $\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)$, dunque:

$$\Delta S = nR \ln \frac{V_B}{V_A} + n C_V \ln \frac{T_B}{T_A} = nR \ln \frac{T_B}{T_A} + n C_V \ln \frac{T_B}{T_A} = n (R + C_V) \ln \frac{T_B}{T_A} = n C_P \ln \frac{T_B}{T_A} \quad \square$$

• Espansione Libera di un Gas Perfetto



Sappiamo che un'espansione libera è una trasformazione irreversibile ed isoterma; per calcolare ΔS consideriamo una trasformazione isoterma reversibile passante per stato iniziale e finale:

$$\begin{aligned} \Delta S &= \int_A^B \frac{\delta Q}{T} = \frac{1}{T} \int_A^B \delta Q \stackrel{\text{isoterma}}{=} \frac{1}{T} \int_A^B \delta W = \frac{1}{T} \int_A^B P dV = \\ &= \frac{1}{T} \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nR \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nR \ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right) = \Delta S = S_B - S_A \end{aligned}$$

In alternativa, è possibile calcolare ΔS considerando trasformazioni isobara e isocora passanti per gli stati A e B e passanti per un punto C intermedio:

$$\begin{aligned} S_B - S_A = \Delta S &= \Delta S_{AC} + \Delta S_{CB} = \int_A^C \frac{\delta Q}{T} + \int_C^B \frac{\delta Q}{T} = \int_A^C n C_V \frac{dT}{T} + \int_C^B n C_P \frac{dT}{T} = \\ &= n C_V \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right) + n C_P \ln \left(\frac{T_B}{T_C} \right) \end{aligned}$$

II Principio della Termodinamica in termini di Entropia



Consideriamo un frigorifero perfetto:

$$\Delta S_F = -\frac{|Q|}{T_F}; \quad \Delta S_C = \frac{Q}{T_C}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_F + \Delta S_C = \frac{Q}{T_C} - \frac{|Q|}{T_F} = Q \left(\frac{1}{T_C} - \frac{1}{T_F} \right) \quad T_C > T_F \Rightarrow \Delta S < 0 \quad \text{ASSURDO}$$



$\Delta S_U > 0$ implica il II principio della Termodinamica, che può essere dunque enunciato affermando che $\Delta S_U \geq 0$ implica la direzionalità delle trasformazioni (in particolare, si nota che nell'universo reale non esistono trasformazioni reversibili).

Ciò implica un concetto "filosofico": l'universo va verso una situazione di disordine (il caffè latte non tornerà ad essere caffè + latte!!!)

Esempi: Due corpi a contatto termico (raggiungono T_{eq} , non tornano a T_1 e T_2), espansione libera e mescolamento di gas...
Tutte le azioni spontanee non permettono di tornare alle condizioni iniziali.

Esercizi

Blocco di ghiaccio a 0°C è a contatto termico in un ambiente isolato con un blocco di rame a $T = 100^\circ\text{C}$. Raggiunta la temperatura di equilibrio, si è sciolta una massa m_x di ghiaccio. Calcolare m_x , ΔS .

$$T_{eq} = T_1 = 0^\circ\text{C} = 273\text{K}$$

$$Q_1 + Q_2 = 0; \quad m_x \lambda_f = m_{Cu} C_{Cu} (T_{eq} - T_2) \Rightarrow m_x = \frac{m_{Cu} C_{Cu} (T_2 - T_1)}{\lambda_f} = 1,8 \text{ kg}$$

$$\Delta S_U = \Delta S_{gh} + \Delta S_{Cu} = \frac{m_x \lambda_f}{T_1} + \int_{T_2}^{T_{eq}} \frac{\delta Q}{T} = 325 \frac{\text{J}}{\text{K}} > 0 \checkmark$$

$$\int_{T_2}^{T_{eq}} m_{Cu} C_{Cu} \frac{dT}{T} = m_{Cu} C_{Cu} \ln \frac{T_2}{T_{eq}} = -1872 \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

$$H_2O \begin{cases} m_1 = 240 \text{ kg}, T_1 = 283 \text{ K} \\ m_2 = 100 \text{ kg}, T_2 = 363 \text{ K} \end{cases}$$

Tf? ΔS_U ?

$$T_{eq}: m_1 (T_{eq} - T_1) + m_2 (T_{eq} - T_2) = 0 \Rightarrow T_{eq} = 306,7 \text{ K}$$

$$\Delta S_1 = \int \frac{\delta Q_1}{T} = m_1 C_{H_2O} \int_{T_1}^{T_{eq}} \frac{dT}{T} = m_1 C_{H_2O} \ln \frac{T_{eq}}{T_1} > 0$$

$$\Delta S_2 = \text{analogamente} = m_2 C_{H_2O} \ln \frac{T_{eq}}{T_2} < 0$$

$\Delta S_1 + \Delta S_2 > 0$ per forza!

Fine

24.04.2020

Fisica Generale

prof. ssa Lorenzana Parlato

19.05.2020 - 301