2019-2020; facoltà di Ingegneria Edile-Architettura

Geometria

prof.ssa Alma D'ANIELLO

Appunti di Riccardo M. Polidoro - riccardo-polidoro.org

Strutture algebriche

Le **strutture algebriche** sono degli insiemi sui quali è possibile definire delle operazioni. Logicamente, tali insiemi non vanno unicamente intesi come insiemi numerici: possono anche essere composti da polinomi (ad esempio). Parlando di insiemi numerici, è opportuno richiamarne i più importanti, in quanto in questa sezione di appunti si ragionerà prevalentemente con essi.

$$(\mathbb{N},+,\cdot) \quad (\mathbb{Z},+,\cdot) \quad (\mathbb{Q},+,\cdot) \quad (\mathbb{R},+,\cdot) \quad (\mathbb{C},+,\cdot)$$

La notazione impiegata indica l'insieme e alcune operazioni definite in esso. Si noti che tali insiemi sono particolari in quanto in essi la somma e il prodotto sono **operazioni binarie interne**, ovvero che lavorano su coppie di valori appartenenti all'insieme e hanno soluzioni appartenenti all'insieme stesso. Di conseguenza, si deduce che la sottrazione nell'insieme $\mathbb{N}$ è binaria, ma non interna.

Anelli

Si definisce un **anello** una struttura algebrica in cui valgono le seguenti proprietà:

Somma	Prodotto
Associativa e commutativa $a+(b+c)=(a+b)+c;\ a+b=b+a\ \forall a,b,c\in K$	È associativo e distributivo rispetto alla somma. $a(b+c)=ab+ac\ \forall a,b,c\in K$ $\cancel{a(bc)=(ab)c}$ $(b+c)a=ba+ca\ \forall a,b,c\in K$
Esiste l'elemento neutro (0) $0+a=a+0=a\ \forall a\in K$	
Ogni elemento $a\in K$ è dotato di opposto $-a$ tale che $a+(-a)=-a+a=0$	
Entrambe le operazioni sono binarie è interne: $a,b\in K \Rightarrow a+b,\ a\cdot b\in K$	

Dato che in $\mathbb{N}$ non esiste alcun elemento con un proprio opposto, esso non è un anello; infatti tra gli insiemi sopra considerati l'anello "elementare" è $\mathbb{Z}$, che si definisce **anello degli interi**.
Esistono anche anelli composti da un numero di elementi finito: il più elementare è $\mathbb{Z}_2=\{0;1\}$, in cui l'opposto di 1 è 1 stesso poiché nell'algebra di modulo n, ~~con n~~ se $a+b=n$ il risultato effettivo è 0. Nell'algebra di modulo 2 dunque $1+1=0$

Anello $\mathbb{Z}_2$

Nel caso degli insiemi composti da polinomi con grado limitato (es: $\mathbb{R}_2[x]$, coincidente con l'insieme di polinomi di grado minore o uguale a 2, ~~in quanto~~ nella indeterminata x, in quanto $\mathbb{R}_2[x]=\{ax^2+bx+c;\ a,b,c\in\mathbb{R}\}$), nessuno di essi è un anello poiché il prodotto non è interno.
Consideriamo ora l'insieme di tutti i polinomi nell'indeterminata x: esso è un anello.

$$\mathbb{R}[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \mid a_0,a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$$

Dato che in matematica si tende ad utilizzare una notazione precisa e sintetica, tale insieme può essere riscritto come:

$$\mathbb{R}[x]=\{a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n \mid a_i\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N}\}$$

"i" è un simbolo convenzionale che assume tutti i valori tra 0 ed n

$(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ è anche detto **anello dei polinomi nell'indeterminata x**.

Un anello $(K,+,\cdot)$ si dice **commutativo** se anche il prodotto è commutativo, ovvero $ab=ba\ \forall a,b\in K$

Un anello $(K,+,\cdot)$ si dice **unitario** se esiste l'elemento neutro anche rispetto al prodotto: ad esempio, se 1 è l'unità dell'anello, $a\cdot 1 = 1\cdot a = a\ \forall a\in K$. Se ne deduce che l'insieme dei numeri pari è un anello non unitario.

Proprietà elementari degli anelli	Dimostrazione
Leggi di cancellazione della somma: $a+b=a+c \Rightarrow b=c$	Siamo in un anello; $a+b=a+c \Rightarrow (-a)+(a+b)=(-a)+(a+c) \Rightarrow 0+b=0+c \Rightarrow b=c$
$a\cdot 0 = 0\cdot a = 0\ \ \forall a\in K$	$a(0+0)=a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 = (a\cdot 0 + a\cdot 0) \Rightarrow a\cdot 0 + 0 = a\cdot 0 + a\cdot 0 \Rightarrow a\cdot 0 = 0$ < Premessa: $a\cdot 0 + 0 = a\cdot 0$ >
$a(-b)=(-a)\cdot b = -ab\ \ \forall a,b\in K$	$ab+(-ab)=0=a\cdot 0 = a[b+(-b)] = ab + a(-b) \Rightarrow ab+(-ab) = ab + a(-b) \Rightarrow a(-b) = -ab$

Un elemento a appartenente ad un anello unitario K si dice **invertibile** se esiste un $a'\in K \mid a\cdot a' = a'\cdot a = 1$.
a', se esiste, si dice **inverso di a** e si denota con a^{-1}. Data la seconda proprietà della tabella sulle proprietà elementari degli anelli, 0 sicuramente non è invertibile.
In $\mathbb{Z}$, gli unici elementi invertibili sono -1 e 1, i cui inversi sono ~~solo~~ loro stessi.
In un insieme $\mathbb{R}[x]$ non esistono elementi inversi: l'inverso di un polinomio è una frazione algebrica, definita come un rapporto tra polinomi; essa dunque non appartiene all'insieme. Sono però invertibili le costanti a_0.
Negli insiemi $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ tutti gli elementi diversi da 0 sono invertibili $\rightarrow$ tali insiemi sono dei **campi**

Campi

Si definisce **campo** un anello commutativo unitario $(K,+,\cdot)$ in cui ogni elemento diverso da 0 è invertibile.

$(\mathbb{Q},+,\cdot)$ campo razionale ; $(\mathbb{R},+,\cdot)$ campo reale ; $(\mathbb{C},+,\cdot)$ campo complesso

Si osservi che gli anelli $\mathbb{Z}_n$ sono campi se n è un numero primo:

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}\quad 1\cdot 1 = 1$. $\quad \mathbb{Z}_3 = \{0,1,2\}\quad 1\cdot 1 = 1\ ;\ 2\cdot 2 = 1$

Dato che, come specificato prima, i polinomi non hanno polinomi inversi, negli anelli $(\mathbb{R}[x],+,\cdot)$ sono invertibili solo le costanti.

Proprietà dei campi	Dimostrazione
Legge di cancellazione per il prodotto $ab=ac,\ a\neq 0 \Rightarrow b=c$	$ab=ac$, sia a^{-1} l'inverso di a, $a^{-1}(ab)=a^{-1}(ac) \Rightarrow (a^{-1}a)b = (a^{-1}a)c \Rightarrow 1\cdot b = 1\cdot c \Rightarrow b=c$
Legge di annullamento del prodotto $ab=0 \Leftrightarrow a=0 \vee b=0$ Essendo $\Leftrightarrow$, occorre dimostrare sia $\Rightarrow$ che $\Leftarrow$.	$\Leftarrow$: Vale in tutti gli anelli, dunque anche nei campi $(a\cdot 0 = 0\cdot a = 0)$ $\Rightarrow$: Supponiamo $ab=0$, dimostriamo che se $a\neq 0$ allora necessariamente $b=0$. $ab=0\ ;\ a\cdot 0 = 0 \Rightarrow ab = a\cdot 0$, $a\neq 0$ per ipotesi e per la legge di cancellazione per il prodotto $b=0$.

Spazio Vettoriale su un campo

Consideriamo un campo $(k, +, \cdot)$, i cui elementi si dicono **scalari** (indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto) e un insieme V i cui elementi si dicono **vettori** (indicati con le suddette lettere sovrastate da una freccia).

V è uno spazio vettoriale se sono definite le seguenti operazioni:

- somma di vettori: $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in V$
- prodotto di uno scalare per un vettore: $h \in K, \vec{v} \in V \Rightarrow h\vec{v} \in V$

In particolare, la **somma di vettori** gode delle seguenti proprietà:

- È binaria e interna $(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in \mathbb{R}^2)$
- È associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro $(\vec{0}$, "vettore nullo"; $\vec{0} = (0,0)$; $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v})$
- Ogni vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ è dotato di opposto $-\vec{v}$ tale che $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

Per il **prodotto di uno scalare per un vettore** invece valgono le seguenti proprietà:

- $(h+k)\vec{v} = h\vec{v}+k\vec{v}, \quad \forall h,k \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari
- $h(\vec{v}+\vec{w}) = h\vec{v}+h\vec{w}, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ Proprietà distributiva rispetto alla ~~prodotto~~ somma di vettori
- $(hk)\vec{v} = h(k\vec{v}), \quad \forall h,k \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^2$ Proprietà distributiva rispetto al prodotto di scalari
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ Esistenza dell'elemento neutro per il prodotto vettore - scalare

⚠: $\mathbb{R}^2$ si legge "erre due"

Sapendo che, in questo corso, il campo più utilizzato sarà il **campo reale** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$, costituito da coppie ordinate di numeri reali. La dicitura "ordinate" lascia intuire l'importanza dell'ordine degli elementi che costituiscono la coppia.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Nella generica coppia ordinata (a,b), **a** si dice **prima componente** della coppia e **b** si dice seconda componente della coppia.

Logicamente, $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

⚠: n-pla si legge "ennupla"

In ~~I~~ un generico insieme $\mathbb{R}^n$, per operare con una somma di vettori si sommano le componenti di ugual posto, ad esempio, posti $\vec{v}=(a,b)$ e $\vec{w}=(a',b')$, $\vec{v}+\vec{w}=(a+a', b+b')$. Nel caso del prodotto di uno scalare per un vettore si moltiplica lo scalare per tutte le componenti del vettore: posti $h \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}(a,b) \in \mathbb{R}^2$, ne seguirà che $h\vec{v} = (ha, hb)$

Dato che, come si può osservare, in $\mathbb{R}^2$ le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare per un vettore sono definite (e valgono le relative proprietà), $\mathbb{R}^2$ è uno spazio vettoriale. Ciò vale anche per $\mathbb{R}^3$ (insieme costituito da terne ordinate di numeri reali) e qualsiasi altro insieme $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$$

a_n = n-esima componente $\qquad a_i$ = i-esima componente

$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ = n-pla di numeri reali

Un generico vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ può anche essere scritto nelle seguenti notazioni, comunemente utilizzate per il prodotto scalare di due vettori (che sarà definito a breve):

vettore riga $\vec{v} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$

vettore colonna $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Per tali notazioni si ricorre spesso alla parentesi tonda; per semplicità grafica è però ammesso ricorrere alla parentesi quadra (es: vettore colonna con molte componenti)

Proprietà degli spazi vettoriali
$h\vec{v} = \vec{0} \iff h = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$
$h(-\vec{v}) = (-h)\vec{v} = -(h\vec{v}) \quad \forall h \in K, \forall \vec{v} \in V$

Le dimostrazioni delle seguenti proprietà, applicate ad un generico spazio vettoriale V su un campo K, sono le medesime utilizzate per dimostrare proprietà analoghe ragionando sui campi.

Anche i polinomi, logicamente, possono essere considerati in relazione ai campi: definiti due generici polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, si osservi che per sommarli si sommano le loro "componenti di ugual posto". Inoltre, moltiplicando un polinomio per un generico numero $h \in \mathbb{R}$, bisognerà moltiplicare h per ogni singola componente.

$P(x) = ax^2 + bx + c$
$Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$
$h \in \mathbb{R}$

$P(x) + Q(x) = (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c')$

$h\,P(x) = hax^2 + hbx + hc$

Di conseguenza, sebbene non siano anelli, gli insiemi $\mathbb{R}_n[x]$ sono tutti spazi vettoriali sul campo reale.

Essendo valido per $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$,

anche $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ è uno spazio vettoriale.

Si noti nelle notazioni di $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}[x]$ la posizione della condizione "$n \in \mathbb{N}$": nel primo caso, essa è fissata; $\mathbb{R}_n[x]$ è dunque composto da polinomi di grado finito. Nel secondo, essendo tale condizione tra le parentesi graffe, $n \in \mathbb{N}$ non è una condizione fissa caratterizzante l'insieme: $\mathbb{R}[x]$ è dunque costituito da tutti i polinomi nell'indeterminata x.

Per discussioni precedenti, sappiamo che $\mathbb{R}[x]$ è una struttura algebrica particolarmente ricca, in quanto è sia un anello che uno spazio vettoriale. Strutture algebriche di questo tipo si dicono **algebre**.

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, su di esso si definisce un'altra importante operazione: quella di **prodotto scalare tra vettori**.

$$\vec{v}, \vec{w} \in V \Longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K$$

$\vec{v} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$
$\vec{w} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Si osserva sin da subito che tale operazione non è interna, dato che restituisce come risultato uno scalare; ~~tale~~ il prodotto scalare di vettori si opera attraverso la somma dei prodotti delle componenti di ugual posto. Nell'operazione, spesso si rappresenta il primo vettore come vettore riga e il secondo come vettore colonna.

Risulterà evidente che il prodotto scalare tra vettori può essere nullo anche se nessuno dei vettori è il vettore nullo; tale prodotto può anche essere negativo.
Se il prodotto ~~tra due vettori~~ scalare tra due vettori è nullo, essi si dicono **ortogonali**.

Esempio: $\vec{v} = (-4, 2)$, $\vec{w} = (1, 2) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_n \cdot a_n = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$
$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

Spazio Vettoriale su un campo

Consideriamo un campo $(k, +, \cdot)$, i cui elementi si dicono **scalari** (indicati con le lettere minuscole dell'alfabeto) e un insieme V i cui elementi si dicono **vettori** (indicati con le suddette lettere sovrastate da una freccia).

V è uno **spazio vettoriale** se sono definite le seguenti operazioni:

- somma di vettori: $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in V$
- prodotto di uno scalare per un vettore: $h \in K, \vec{v} \in V \Rightarrow h\vec{v} \in V$

In particolare, la **somma di vettori** gode delle seguenti proprietà:

- È binaria e interna $(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in \mathbb{R}^2)$
- È associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro ($\vec{0}$, "vettore nullo"; $\vec{0} = (0,0)$; $\vec{v}+\vec{0}=\vec{v}$)
- Ogni vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ è dotato di opposto $-\vec{v}$ tale che $\vec{v}+(-\vec{v})=\vec{0}$

Per il **prodotto di uno scalare per un vettore** invece valgono le seguenti proprietà:

- $(h+k)\vec{v} = h\vec{v}+k\vec{v}, \quad \forall h,k \in \mathbb{R}, \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ — Proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari
- $h(\vec{v}+\vec{w}) = h\vec{v}+h\vec{w}, \quad \forall h \in \mathbb{R}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ — Proprietà distributiva rispetto alla ~~prodotto~~ somma di vettori
- $(hk)\vec{v} = h(k\vec{v}), \quad \forall h,k \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^2$ — Proprietà distributiva rispetto al prodotto di scalari
- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ — Esistenza dell'elemento neutro per il prodotto vettore - scalare

Sapendo che, in questo corso, il campo più utilizzato sarà il **campo reale** $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, consideriamo l'insieme $\mathbb{R}^2$, costituito da coppie ordinate di numeri reali. La dicitura "ordinate" lascia intuire l'importanza dell'ordine degli elementi che costituiscono la coppia.

$$\mathbb{R}^2 = \{(a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$$

Nella generica coppia ordinata (a,b), **a** si dice **prima componente** della coppia e **b** si dice **seconda componente** della coppia.

Logicamente, $(a,b) = (a',b') \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$

In un generico insieme $\mathbb{R}^n$, per operare con una somma di vettori si sommano le componenti di ugual posto. ad esempio, posti $\vec{v}=(a,b)$ e $\vec{w}=(a',b')$, $\vec{v}+\vec{w}=(a+a', b+b')$. Nel caso del prodotto di uno scalare per un vettore si moltiplica lo scalare per tutte le componenti del vettore: posti $h \in \mathbb{R}$ e $\vec{v}(a,b) \in \mathbb{R}^2$, ne seguirà che $h\vec{v} = (ha, hb)$

Dato che, come si può osservare, in $\mathbb{R}^2$ le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare per un vettore sono definite (e valgono le relative proprietà), $\mathbb{R}^2$ **è uno spazio vettoriale**. Ciò vale anche per $\mathbb{R}^3$ (insieme costituito da terne ordinate di numeri reali) e qualsiasi altro insieme $\mathbb{R}^n$

$$n \in \mathbb{N}, \mathbb{R}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_i \in \mathbb{R}\}$$

a_n = n-esima componente $\qquad a_i$ = i-esima componente

$\vec{v} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ = n-pla di numeri reali

⚠: $\mathbb{R}^2$ si legge "erre due"

⚠: n-pla si legge "ennupla"

Un generico vettore $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ può anche essere scritto nelle seguenti notazioni, comunemente utilizzate per il prodotto scalare di due vettori (che sarà definito a breve):

vettore riga $\vec{v} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n]$

vettore colonna $\vec{v} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

Per tali notazioni si ricorre spesso alla parentesi tonda; per semplicità grafica è però ammesso ricorrere alla parentesi quadra (es: vettore colonna con molte componenti)

Proprietà degli spazi vettoriali
$h\vec{v} = \vec{0} \iff h = 0 \vee \vec{v} = \vec{0}$
$h(-\vec{v}) = (-h)\vec{v} = -(h\vec{v}) \quad \forall h \in K, \forall \vec{v} \in V$

Le dimostrazioni delle seguenti proprietà, applicate ad un generico spazio vettoriale V su un campo K, sono le medesime utilizzate per dimostrare proprietà analoghe ragionando sui campi.

Anche i polinomi, logicamente, possono essere considerati in relazione ai campi: definiti due generici polinomi $P(x)$ e $Q(x)$, si osservi che per sommarli si sommano le loro "componenti di ugual posto". Inoltre, moltiplicando un polinomio per un generico numero $h \in \mathbb{R}$, bisognerà moltiplicare h per ogni singola componente.

$P(x) = ax^2 + bx + c$
$Q(x) = a'x^2 + b'x + c'$
$h \in \mathbb{R}$

$P(x) + Q(x) = (a+a')x^2 + (b+b')x + (c+c')$

$h\,P(x) = hax^2 + hbx + hc$

Di conseguenza, sebbene non siano anelli, gli insiemi $\mathbb{R}_n[x]$ sono tutti spazi vettoriali sul campo reale.

Essendo valido per $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$,

anche $\mathbb{R}[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n ; a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\}$ è uno spazio vettoriale.

Si noti nelle notazioni di $\mathbb{R}_n[x]$ e $\mathbb{R}[x]$ la posizione della condizione "$n \in \mathbb{N}$": nel primo caso, essa è fissata; $\mathbb{R}_n[x]$ è dunque composto da polinomi di grado finito. Nel secondo, essendo tale condizione fra le parentesi graffe, $n \in \mathbb{N}$ non è una condizione fissa caratterizzante l'insieme: $\mathbb{R}[x]$ è dunque costituito da tutti i polinomi nell'indeterminata x.

Per discussioni precedenti, sappiamo che $\mathbb{R}[x]$ è una struttura algebrica particolarmente ricca, in quanto è sia un anello che uno spazio vettoriale. Strutture algebriche di questo tipo si dicono **algebre**.

Tornando allo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$, su di esso si definisce un'altra importante operazione: quella di **prodotto scalare tra vettori**.

$$\vec{v}, \vec{w} \in V \Longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in K$$

$\vec{v} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$
$\vec{w} = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i$$

Si osserva sin da subito che tale operazione non è interna, dato che restituisce come risultato uno scalare; ~~tale~~ il prodotto scalare di vettori si opera attraverso la somma dei prodotti delle componenti di ugual posto. Nell'operazione, spesso si rappresenta il primo vettore come vettore riga e il secondo come vettore colonna.

Risulterà evidente che il prodotto scalare tra vettori può essere nullo anche se nessuno dei vettori è il vettore nullo; tale prodotto può anche essere negativo.
Se il prodotto ~~tra due vettori~~ scalare tra due vettori è nullo, essi si dicono **ortogonali**.

Esempio: $\vec{v} = (-4, 2)$, $\vec{w} = (1, 2) \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + \ldots + a_n \cdot a_n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$$

$\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall a_i \in \mathbb{R}$
$\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{v} = \vec{0}$

Si definisce **norma** (o lunghezza o, in fisica, modulo) di $\vec{v}$, indicata con $\|\vec{v}\|$, la radice quadrata del prodotto scalare tra $\vec{v}$ e $\vec{v}$ stesso.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

In particolare, $\vec{v}$ si dice un **versore** se la sua norma è pari a 1.

Spazi vettoriali di natura geometrica

Premessa

Si definisce **relazione di equivalenza su un insieme** $\mathcal{R}$ una relazione riflessiva, simmetrica e transitiva.

- riflessiva: $x \mathcal{R} x \quad \forall x \in S$
- simmetrica: $x \mathcal{R} y \Rightarrow y \mathcal{R} x$
- transitiva: $x \mathcal{R} y, y \mathcal{R} z \Rightarrow x \mathcal{R} z$

Notazione: $x \mathcal{R} y$, $x \not\mathcal{R} y$

Un esempio di relazione di equivalenza è la condizione di parallelismo tra rette. Non sono relazioni di equivalenza le relazioni $\gtrless$.

Definita una relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ su un insieme S, e preso un generico elemento $a \in S$, si definisce **classe di equivalenza** di a, denotata con $\bar{a}$, il seguente sottoinsieme di S:

$$\bar{a} = \{ b \in S \mid a \mathcal{R} b \} \qquad a \in \bar{a}$$

Di conseguenza, se due elementi sono in relazione tra di loro, essi individuano la stessa classe di equivalenza.

$$a \mathcal{R} b \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} \quad ; \quad a \not\mathcal{R} b \Rightarrow \bar{a} \cap \bar{b} = \emptyset$$

a e b si dicono rappresentanti della classe di equivalenza.

Definito con Σ l'insieme dei punti dello spazio ordinato (si denotano con le lettere latine maiuscole; per le rette si utilizzano le lettere latine minuscole, per i piani le lettere greche).

Due rette si dicono **parallele** se appartengono allo stesso piano e non hanno punti in comune; se non hanno punti in comune, anche un piano e una retta si dicono paralleli.

Un **segmento** è una parte di retta compresa tra due punti; è orientabile in due modi possibili (es: AB/BA).

Direzione di un segmento: direzione della retta cui esso appartiene. Ciò implica necessariamente che due segmenti orientati sono paralleli se e soltanto se giacciono su rette parallele. Per estensione, anche le rette sono orientabili.

I vettori, essendo orientati, possono avere stessa direzione e verso opposto; per determinare la lunghezza di un determinato segmento orientato si sceglie un'opportuna unità di misura.

Considerato l'insieme S costituito da tutti i segmenti nello spazio, si definisce relazione di **equipollenza** tra due segmenti AB e CD, e si indica con $AB \equiv CD$, una relazione di equivalenza che associa i segmenti con stesso modulo, direzione e verso tra loro. Si dice **vettore libero** $\vec{V}$ di Σ ogni classe di equivalenza di segmenti orientati equipollenti. Un segmento orientato è dunque un rappresentante del vettore libero.

$$AB \equiv CD \Longleftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

Un vettore libero può dunque essere rappresentato in qualunque punto dello spazio. Denotando con $\vec{\Sigma}$ l'insieme dei vettori liberi di Σ $(\vec{v} \in \vec{\Sigma})$:

$$\forall \vec{v} \in \vec{\Sigma}, \forall O \in \Sigma, \exists! P \in \Sigma \mid \vec{v} = \overrightarrow{OP}$$

Un vettore libero risulta parallelo ad una retta se e soltanto se è rappresentabile con gli estremi sulla retta. Ciò vale anche per il parallelismo a un piano.

$\vec{r}$, $\vec{\pi}$ insieme dei vettori liberi di (paralleli a) r/π

Definita la lunghezza di $\vec{v}$ $\|\vec{v}\|$, pari alla lunghezza di un qualunque rappresentante di $\vec{v}$, occorre definire alcuni vettori particolari:

- $\vec{0}$: vettore nullo
- $(-\vec{v})$: vettore opposto $\quad \vec{v} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\vec{v} = \overrightarrow{BA}$
- versore $\Leftrightarrow \|\vec{e}\| = 1$ $\quad$ su una retta non orientata ci sono due possibili versori. Se è orientata, ce n'è uno solo.

Consideriamo due vettori $\vec{v}, \vec{w}$; si dice angolo dei due vettori $\vartheta \in [0, \pi]$ l'angolo che i due vettori formano se applicati in uno stesso punto. Se $\vartheta = 0$, i vettori si dicono paralleli e concordi; se $\vartheta = \pi$ i vettori sono paralleli e discordi; se $\vartheta = \pi/2$ i vettori si dicono ortogonali.

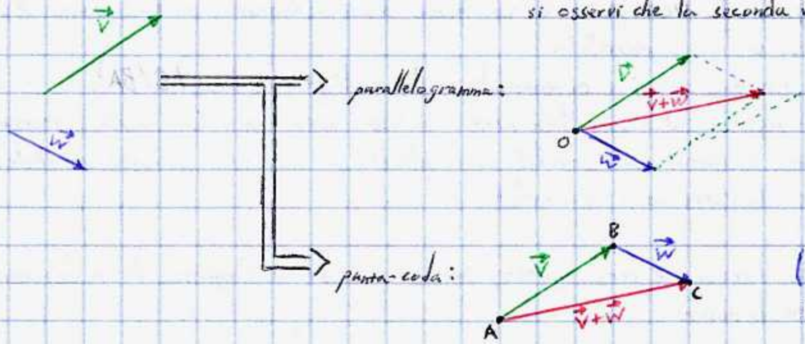
Definiti algebricamente $\vec{F}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$, bisogna darvi la definizione di spazi vettoriali geometrici, considerando gli scalari appartenenti (per semplicità) ad $\mathbb{R}$ e definendo geometricamente le operazioni di somma di vettori e prodotto di uno scalare per un vettore.

La somma di vettori "geometrica" si declina in tre diversi casi:

① $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno la stessa direzione e verso $\Rightarrow$ il vettore $\vec{v}+\vec{w}$ avrà stessa direzione e verso degli altri vettori e lunghezza pari alla somma delle lunghezze.
$$\|\vec{v}+\vec{w}\| = \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$$

② $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno stessa direzione, ma verso opposto $\Rightarrow$ il vettore $\vec{v}+\vec{w}$ avrà la stessa direzione dei vettori, verso del vettore di lunghezza maggiore e lunghezza pari al valore assoluto della differenza delle lunghezze.
$$\|\vec{v}+\vec{w}\| = |(\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\|)|$$

③ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ hanno direzioni diverse: si può ricorrere a due differenti regole, la scelta dipende dal contesto. Tra le due regole, dette "regola del parallelogramma" e "metodo punta-coda", si osservi che la seconda vale anche per i casi precedenti:



$(\vec{v} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow -\vec{v} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \vec{v} + (-\vec{v}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0})$

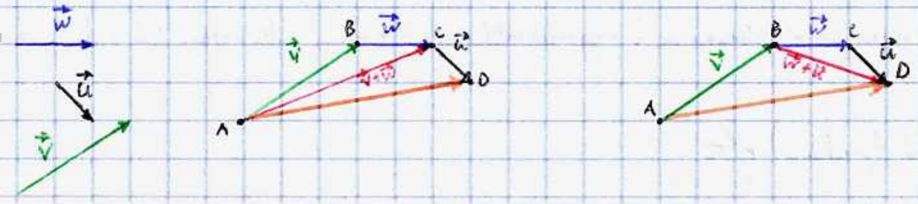
$\vec{v}+\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Si osserva dunque che valgono le seguenti proprietà:

- La somma di vettori è binaria e interna

  è associativa e commutativa
- Esiste l'elemento neutro $\vec{0}$ (vettore nullo) tale che $\vec{v} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$
- Ogni vettore $\vec{v}$ è dotato di opposto $-\vec{v}$

Dimostriamo graficamente la validità della p. associativa:



$(\vec{v}+\vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w}+\vec{u})$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$

riccardo.polidoro.org

Definiamo ora il prodotto di uno scalare per un vettore

$$h \in \mathbb{R}, \vec{v} \in \vec{\Sigma} \Rightarrow h\vec{v} \in \vec{\Sigma}$$

① $h = 0 \Rightarrow 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

② $h > 0 \Rightarrow h\vec{v}$ ha stessa direzione e verso di $\vec{v}$; $\|h\vec{v}\| = h\|\vec{v}\|$

③ $h < 0 \Rightarrow h\vec{v}$ ha la stessa direzione di $\vec{v}$ ma verso opposto ad esso; $\|h\vec{v}\| = (-h)\|\vec{v}\|$

$\Rightarrow \|h\vec{v}\| = |h| \cdot \|\vec{v}\|$

Valgono le seguenti proprietà:

$(h+k)\vec{v} = h\vec{v} + k\vec{v}$ $\qquad \forall h,k \in \mathbb{R}; \forall \vec{v},\vec{w} \in \vec{\Sigma}$

$h(\vec{v}+\vec{w}) = h\vec{v} + h\vec{w}$

$(hk)\vec{v} = h(k\vec{v})$

$1\vec{v} = \vec{v}$

Procedendo analogamente per $\vec{r}$ e $\vec{\pi}$, abbiamo definito i seguenti spazi vettoriali sul campo reale:

$\vec{r}$: spazio vettoriale dei vettori liberi di una retta r

$\vec{\pi}$: spazio vettoriale dei vettori liberi di un piano π

$\vec{\Sigma}$: spazio vettoriale dei vettori liberi dello spazio Σ

Come per i vettori numerici, se $\vec{w} = h\vec{v}$ i due vettori si dicono proporzionali (in particolare, il vettore $\vec{0}$ è proporzionale ad ogni vettore); geometricamente ciò si traduce in parallelismo tra i vettori. Si osservi che, in questo come in molti altri casi che analizzeremo, è possibile dedurre un'informazione geometrica da un'informazione algebrica: ad esempio, il segno dello scalare h considerato in detta definizione determina il verso relativo dei due vettori.

Definiamo ora dei particolari vettori, detti versori, paralleli a un determinato vettore $\vec{v}$, di modulo unitario ed opposti tra loro.

$$\vec{v} \neq \vec{0}, \qquad \vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \quad ; \quad (-\vec{e}) = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$$

Prodotto scalare di vettori geometrici

Viene così detto poiché il risultato di tale operazione è uno scalare

$$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\Sigma} \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$$

Premessa:

Se $\vec{v} = \vec{0} \vee \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = 0$

Se $\vec{v} \neq \vec{0} \wedge \vec{w} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{v}\ \vec{w}$ sono applicabili in uno stesso punto, individuando l'angolo $\vartheta \in [0, \pi]$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos\vartheta$$

Casi particolari

$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, con $\vec{v} \neq \vec{0} \wedge \vec{w} \neq \vec{0} \Rightarrow \cos\vartheta = 0 \Rightarrow \vartheta = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $\vec{v}$ e $\vec{w}$ si dicono ortogonali (legame algebra-geometria)

$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\vartheta = \|\vec{v}\|^2 \cdot 1 \Longrightarrow \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \|\vec{v}\|$ $\qquad$ "norma" e "lunghezza" identificano lo stesso concetto geometrico, i termini sono equivalenti.

Prodotto vettoriale di vettori geometrici

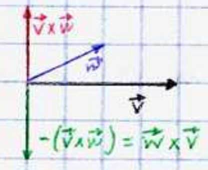
$$\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\Sigma} \longrightarrow \vec{v} \times \vec{w} \in \vec{\Sigma}$$

Se $\vec{v}$ e $\vec{w}$ sono proporzionali (in particolare, se almeno uno dei vettori è nullo), $\vec{v} \times \vec{w} = \vec{0}$

Il vettore $\vec{v} \times \vec{w}$ viene così identificato:

- $\|\vec{v} \times \vec{w}\| = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \operatorname{sen} \vartheta$ — Coincide con l'area del parallelogramma che ha per lati i due vettori; ricordiamo che $\vartheta \in [0, \pi]$
- direzione ortogonale al piano formato dai due vettori
- verso determinato dall'osservatore il quale vede sovrapporre $\vec{v}$ a $\vec{w}$ con una rotazione in senso antiorario. In alternativa, si impiega la regola della mano destra, direzionando l'indice come il primo vettore, il medio ("interno" alla mano) come il secondo vettore e analizzando la direzione assunta dal pollice.

Osserveremo più avanti che il prodotto vettoriale è strettamente connesso alla fisica.



Abbiamo dunque definito due tipologie di spazi vettoriali su un campo: quelli algebrici ($\mathbb{R}_2, \mathbb{R}_3, \dots, \mathbb{R}_n$ n-uple ordinate di num. reali) e quelli geometrici ($\vec{r}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$)

Definiremo ora la matrice, un oggetto composto da un numero n di righe ed m colonne ($n, m \in \mathbb{N}$). Esse si distinguono in base al numero di righe e di colonne che le compongono.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

Matrice 2×3

Si osserva che in ogni riga ci sono tanti elementi quanto il numero di colonne e viceversa. Le matrici con una sola riga o una sola colonna si dicono, rispettivamente, matrice riga e matrice colonna; esse sono due possibili rappresentazioni di un vettore numerico.

Esempio: Una matrice 2×3 ha dei vettori riga appartenenti ad $\mathbb{R}^3$ e vettori colonna appartenenti ad $\mathbb{R}^2$; da ciò si deduce che i vettori riga e i vettori colonna appartengono a diversi spazi vettoriali, tranne ~~te~~ nel caso in cui il numero di righe sia uguale a quello delle colonne.

Si definisce matrice quadrata una particolare matrice avente $n = m$ (altrimenti si dice "m. rettangolare"). Esse godono di particolari proprietà, come ad esempio la possibilità di calcolarne il determinante. Le matrici quadrate si possono dire di ordine n* (*di tipo $n \times n$)

Per identificare un certo elemento appartenente alla matrice, si ricorre alla notazione:

$$a_{nm}$$

Nella matrice in alto a sinistra, f è l'elemento di posto $(2,3)$

Attraverso tale notazione, possiamo indicare la matrice generica di tipo 2×3 e, di conseguenza, l'insieme formato da tutte le matrici di tal fatta:

$$\underbrace{M_{2\times3}}_{} = \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}}_{\text{generica matrice } 2\times3} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

i, j indicano un generico elemento della matrice; variano negli intervalli definiti in precedenza.

$M_{2\times3}$: indica il tipo di matrice; nel caso di matrici quadrate, essendo $n = m$, si utilizza un unico pedice (es: M_2)

È dunque possibile definire anche la matrice generica di tipo $n \times m$ e il relativo insieme:

$$M_{n\times m} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \overbrace{\left[a_{ij} \right]}^{\text{notazione sintetica}}{}_{\underbrace{1 \le i \le n,\ 1 \le j \le m}_{\text{a volte si elide poiché già noto}}} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$$

(Talvolta, risulta opportuno dividere una matrice in più matrici riga/colonna (i-ma riga, j-ma colonna))

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \end{bmatrix}$$
$$\cdots$$
$$\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{im} \end{bmatrix}_{1 \le i \le n}$$

Cercheremo ora di dare a tali insiemi la struttura di spazio vettoriale, per farlo occorre definire le operazioni di somma di matrici e prodotto di uno scalare per una matrice.

Somma di Matrici

Si può effettuare solo con matrici dello stesso tipo; per risolverla si sommano elementi di ugual posto.

Siano A, B matrici di tipo $n \times m$

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \qquad B = [b_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \qquad A+B = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}, \quad c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Proprietà della somma di matrici

- $A, B \in M_{n \times m} \Rightarrow A+B \in M_{n \times m}$
- $A+B = B+A \qquad \forall A, B$ dello stesso tipo
- $(A+B)+C = A+(B+C) \qquad \forall A, B, C$ dello stesso tipo
- $\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ esiste l'elemento neutro per la somma, in cui il generico elemento è uguale a 0 "matrice nulla"
- ogni matrice A è dotata di opposta $-A$: $A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \Rightarrow -A = [-a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}$; $A + (-A) = \underline{0}$

Prodotto di uno scalare per una matrice

$h \in \mathbb{R}, A \in M_{n \times m} \Rightarrow hA \in M_{n \times m}$

↳ logicamente, vale per qualsiasi campo

hA è la matrice che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per h.
In particolare: $(-1)A = -A$; $0A = \underline{0}$; $1A = A$

$$h \in \mathbb{R}, A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \Rightarrow hA = [c_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}}, \quad c_{ij} = h(a_{ij})$$

Proprietà del prodotto di uno scalare per una matrice

- $h(A+B) = hA + hB \qquad \forall h \in \mathbb{R}, \forall A, B \in M_{n \times m}$ proprietà distributiva rispetto alla somma di matrici
- $(h+k)A = hA + kA \qquad \forall h, k \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{n \times m}$ proprietà distributiva rispetto alla somma di scalari
- $(hk)A = h(kA) \qquad \forall h, k \in \mathbb{R}, \forall A \in M_{n \times m}$ proprietà distributiva rispetto al prodotto di scalari
- $1A = A \qquad \forall A \in M_{n \times m}$ esistenza dell'elemento neutro per il prodotto

Essendo definite tali operazioni, gli insiemi di tipo M_n, $M_{n \times m}$ sono modelli di spazio vettoriale su campo reale

Trasposta di una matrice

Data una matrice A, si dice trasposta di A (indicata col simbolo A^t) la matrice ottenuta da A scambiando le righe con le colonne. Se A è di tipo $n \times m$, ne segue logicamente che A^t è di tipo $m \times n$; esse sono dello stesso tipo solo se A è una matrice quadrata.

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} \longrightarrow A^t = [a'_{ij}]_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} \qquad a'_{ij} = a_{ji}$$

Nel caso delle matrici quadrate, $A \in M_n \Rightarrow A^t \in M_n$. Definita diagonale principale della matrice la diagonale i cui elementi hanno gli indice di riga uguale all'indice di colonna, si osserva che la trasposta di una matrice quadrata preserva la propria diagonale principale.

Proprietà della trasposta

- $(A^t)^t = A$
- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(hA)^t = h(A)^t$

Nel caso di matrici quadrate, si potrebbe dire che la trasposta "rovescia" la matrice intorno alla diagonale principale.

Matrici Quadrate

$n=m$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in M_n$$

La diagonale principale della matrice la divide in due triangoli:

- Al di sopra della diagonale principale, $i<j$
- Sotto la diagonale principale, $i>j$

Traccia di una Matrice (quadrata)

Si definisce traccia di una matrice quadrata la somma degli elementi della diagonale principale.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Proprietà della traccia di una matrice quadrata

- $tr(A) + tr(B) = tr(A+B)$
- $tr(hA) = h[tr(A)]$
- $tr(A^t) = tr(A)$

Alcune matrici particolari (quadrate)

- Matrice triangolare superiore: $a_{ij} = 0 \quad \forall i>j$ — tutti gli elementi sotto la diagonale principale sono uguali a 0
- Matrice triangolare inferiore: $a_{ij} = 0 \quad \forall i<j$ — tutti gli elementi sopra la diagonale principale sono uguali a 0
- Matrice diagonale: $a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j$
- Matrice scalare: matrice diagonale in cui gli elementi della diagonale principale sono uguali tra loro ($\underline{0}$ è m. scalare)

Se sommiamo matrici particolari dello stesso tipo, si ottengono matrici dello stesso tipo: la somma di matrici in un insieme composto da un tipo di matrici particolari è dunque interna

esempio: A, B matrici triangolari superiori, $h \in \mathbb{R} \Rightarrow$ $A+B$ matrice triangolare superiore
hA matrice triangolare superiore

Matrici Simmetriche e Antisimmetriche

Una matrice A si dice simmetrica se $A^t = A$, ovvero se $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i, \forall j$

Esempio

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 4 \\ -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Come per le altre matrici particolari, la somma di matrici simmetriche così come il prodotto di uno scalare per una matrice simmetrica restituisce una matrice simmetrica.

Per proseguire in tale dimostrazione, utilizziamo un metodo "elegante", ovvero sintetico di calcolo:

Siano A e B matrici simmetriche. Allora $A^t = A$, $B^t = B$

$$(A+B)^t = A^t + B^t \overset{Hp}{=} A+B \Rightarrow A+B \text{ è simmetrica}$$

$$(hA)^t = h(A)^t = hA \Rightarrow hA \text{ è simmetrica.}$$

Una matrice A si dice antisimmetrica se $A^t = -A$, ovvero se $a_{ij} = -a_{ji}$ $\forall i, \forall j$

Per tale condizione segue necessariamente che sulla diagonale principale ci sono solo zeri, in quanto lo zero è l'unico elemento il cui opposto coincide con sé stesso.

Esempio:
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad a_{ii} = -a_{ii} = 0$$

Vale la medesima proprietà dimostrata per le matrici simmetriche, con analoga dimostrazione.

Tornando alle matrici quadrate in generale, e all'insieme di matrici di dato tipo (es. $M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$), si osserva che valgono le seguenti proprietà:

$(M_2, +, \cdot)$ $\qquad$ $\cdot$ = prodotto di matrici (riga per colonna), spiegato più avanti

① $+, \cdot$ sono operazioni binarie interne $\qquad A, B \in M_2 \rightarrow A+B, AB \in M_2$

② $+$: è associativa e commutativa, esiste l'elemento neutro $\underline{0}$ e la matrice opposta

③ $\cdot$: è associativo e distributivo rispetto alla somma

Dunque, $(M_2, +, \cdot)$ è un anello; procedendo analogamente si osserva che vale per tutti gli insiemi M_n.

$$M_n = \{[a_{ij}]_{1 \le i,j \le n} : a_{ij} \in \mathbb{R}\}$$

Abbiamo dimostrato precedentemente che ~~le m~~ gli insiemi di tipo M_n sono degli spazi vettoriali, essendo anche anelli essi rappresentano delle algebre.

L'anello M_n: non è commutativo (il prodotto di matrici non è commutativo)

è unitario (esiste l'elemento neutro per il prodotto)

P

Prodotto di Matrici (righe per colonne)

Tale operazione non è quasi mai definita per matrici dello stesso tipo: per effettuarla è infatti necessario che il numero di colonne della prima matrice sia uguale al numero di righe di B, poiché le righe della prima matrice e le colonne della seconda devono essere composte dallo stesso numero di elementi.

$$AB = \underset{2\times3}{\overset{A}{\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&-1\end{bmatrix}}}\ \underset{3\times4}{\overset{B}{\begin{bmatrix}1&0&1&-1\\2&1&3&-2\\0&1&1&1\end{bmatrix}}} = \underset{2\times4}{\overset{AB}{\begin{bmatrix}5&5&10&-2\\2&0&2&-3\end{bmatrix}}}$$

Si osserva inoltre che se A è di tipo $n\times m$ e B è di tipo $m\times p$, allora AB è di tipo $n\times p$.

In un generico posto (i,j) della matrice prodotto si inserisce il prodotto scalare tra la i-ma riga della prima matrice per la j-ma colonna della seconda matrice.

Richiamo al prodotto scalare di vettori numerici

$$\vec{v}\cdot\vec{w} = [a_1\ a_2 \cdots a_n]\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\cdots\\b_n\end{bmatrix} = a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n$$

In simboli:

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le m}} \qquad B = [b_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$$

$$AB = [c_{ij}]_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}} \ \Big|\ c_{ij} = [a_{i1}\ a_{i2} \ldots a_{im}]\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\cdots\\b_{nj}\end{bmatrix} = a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{im}\cdot b_{nj} \Rightarrow c_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rj}$$

Proprietà del prodotto di matrici (righe per colonne)

Per aiutare nella comprensione, inizieremo elencando delle proprietà non valide:

NON vale la proprietà commutativa: $AB \neq BA$. Possono distinguersi tre casi:

① AB è definito, BA no (matrici rettangolari, es. 2×3, 3×4)

② Le operazioni sono definite entrambe (~~quadrate~~), ma le matrici ottenute sono diverse (~~valori diversi~~) (diverso tipo)

③ AB e BA sono dello stesso tipo (matrici quadrate), ma sono diverse (valori diversi)

Alcune particolari matrici, dette permutabili, rispettano la proprietà commutativa.

NON vale la legge di annullamento del prodotto: anche se $A\cdot\underline{0} = A$, si osserva ad esempio che:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}};\ \overset{B}{\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}} \Rightarrow \quad AB = \begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad BA = \begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} = \underline{0}$$

Esercizio: data la matrice A, determinare una matrice B con essa permutabile.

$$A = \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix} : \ AB = BA \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x&y\\z&t\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}x&y\\0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x&0\\z&0\end{bmatrix} \iff \begin{cases}x=x\\y=0\\z=0\end{cases} \Rightarrow B = \begin{bmatrix}x&0\\0&0\end{bmatrix} \text{ con } x\in\mathbb{R}$$

Le matrici permutabili sono sempre **matrici diagonali**.

Quando i prodotti sono possibili, valgono le seguenti proprietà:

① Proprietà associativa: $(AB)C = A(BC)$

② Proprietà distributiva rispetto alla somma: $A(B+C) = AB+AC$; $(\underbrace{B+C}_{\text{devono essere dello stesso tipo}})A = BA+CA$

③ P. distr. rispetto al prodotto per uno scalare: $(hA)B = h(AB) = A(hB)$

④ $(AB)^t = \cancel{B^t\cdot A^t}$ $\Rightarrow$ $(AB)^t = B^t\cdot A^t$

Matrice Unità

Rappresenta l'elemento neutro per il prodotto righe per colonne di matrici, consiste in una matrice diagonale composta da soli 1:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Per denotarla in forma più sintetica, si impiega il simbolo di Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & \text{se } i\neq j \end{cases} \implies I = [\delta_{ij}]_{1\leq i,j\leq n}$$

Teorema: Sia A una matrice di tipo $n\times m$; allora $I_n \cdot A = A \cdot I_m = A$. In particolare, se A è quadrata di ordine n, $AI_n = I_nA = A$

Dimostriamo $AI_m = A$; lo sviluppo risulterà analogo per l'altra relazione.

$$A = [a_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}} \qquad AI_n = [c_{ij}]_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq m}}$$

Basta dimostrare che $c_{ij} = a_{ij}$ $\forall i, \forall j$.

c_{ij} è il prodotto scalare tra la i-ma riga di A e la j-ma colonna di I

$$c_{ij} = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots \ a_{in}] \begin{bmatrix} \delta_{1j} \\ \delta_{2j} \\ \vdots \\ \delta_{nj} \end{bmatrix} = a_{i1}\delta_{1j} + a_{i2}\delta_{2j} + \ldots + a_{in}\delta_{nj} = \underset{(\text{altri}=0)}{a_{ij}\delta_{jj}} = a_{ij} \quad \forall i, \forall j$$

Matrici Invertibili

Sia A una matrice quadrata di ordine n.

A si dice **invertibile** se esiste A', quadrata di ordine n, tale che $A\cdot A' = A'\cdot A = I$.

A' si dice dunque inversa di A, si denota con A^{-1}

Logicamente, $\underline{0}$ non è invertibile, mentre l'inversa di I è I stessa.

Per verificare l'invertibilità di una matrice, si ricorre allo stesso procedimento per equazione matriciale descritto alla pagina precedente.

Esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ non inv $\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ inv $\quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ inv

Si osserva che una matrice quadrata risulta invertibile se il suo **determinante** è diverso da 0.

Proprietà delle Matrici invertibili

- L'inversa di una matrice, se esiste, è **unica**. Dim. per assurdo: supponiamo che A' e A'' siano inverse di A, allora:
  $$\left.\begin{matrix} AA' = A'A = I \\ AA'' = A''A = I \end{matrix}\right] \Rightarrow A' = A'I = A'(AA'') = (A'A)A'' = IA'' = A'' \qquad \underset{\text{unica}}{A' = A''}$$
- Se A è invertibile allora anche A^{-1} è invertibile; la sua inversa è uguale ad A.
- Se A è invertibile e $h\neq 0 \Rightarrow hA$ è invertibile; $(hA)^{-1} = h^{-1}\cdot A^{-1}$
  Dimostrazione: $(hA)(h^{-1}A^{-1}) = (hh^{-1})(AA^{-1}) = 1\cdot I = I$ analogo per $(h^{-1}A^{-1})(hA)$
- Se A e B sono invertibili, anche $A\cdot B$ è invertibile; $(AB)^{-1} = B^{-1}\cdot A^{-1}$
  Dimostrazione: $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$ analogo per $(B^{-1}A^{-1})(AB)$
- A, B invertibili $\not\Rightarrow$ $A+B$ invertibili
  Controesempio: $\underbrace{I + (-I)}_{\text{invertibili}} = \underbrace{0}_{\text{non invertibile}}$

Si ricorda che per negare una legge basta fornire un controesempio per cui essa non vale, che rende la legge non universalmente vera.

↳ di primo grado

$x+y-z=0$ equazione lineare in tre incognite

Nel caso in cui le incognite sono poche, si ricorre a lettere diverse per identificare diverse variabili; nel caso in cui vi siano molte incognite si utilizza invece un'unica lettera con indici diversi.

Solo nel caso in cui l'equazione lineare abbia un'unica incognita la soluzione è un numero; negli altri casi vi sono più soluzioni particolari, che identificano altrettanti vettori numerici. Ad esempio, per l'equazione in alto a sinistra sono soluzioni:

$$\underset{x\ y\ z}{(2,3,5)}\,;(4,2,6);\ \dots\ ;(h,k,h+k)\in\mathbb{R}^3;\ h,k\in\mathbb{R}$$

Oltre le soluzioni particolari, esiste anche una soluzione generica: essendo espressa in variabili essa restituisce tutte le possibili soluzioni. È dunque possibile considerare l'insieme delle soluzioni $S=\{(h,k,h+k),\ h,k\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$.

In generale, un'equazione lineare in n incognite viene così descritta:

$$a_1x_1+a_2x_2+\dots+a_nx_n=b$$

a_i è il coefficiente di x_i, $1\le i\le n$

Una soluzione è una n-pla di numeri reali tale che $(h_1,h_2,\dots,h_n)\in\mathbb{R}$ verifica l'equazione. L'insieme delle soluzioni S risulterà contenuto in $\mathbb{R}^n$

$a_i\in\mathbb{R}$ può essere uguale a 0:

$$2x-z=1\equiv 2x+0y-z=1$$

nel caso in cui sia necessario calcolare l'altra variabile, si precisa "nelle incognite x,y,z"; in tal caso y può assumere qualsiasi valore.

Caso particolare: equazione lineare degenere

Si ottiene un'equazione lineare degenere se tutti i coefficienti dell'equazione sono uguali a 0:

$$0x_1+0x_2+\dots+0x_n=b$$

→ $b\neq0$: nessuna soluzione; $S=\emptyset$

↳ $b=0$: ogni n-pla di numeri reali è soluzione; $S=\mathbb{R}^n$

Equazioni lineari NON degeneri: metodologia di risoluzione

① Si sceglie un'incognita con coefficiente $\neq0$ (variabile dipendente)

② Si ricava tale incognita in funzione delle rimanenti, dette variabili indipendenti

③ Si assegna un valore arbitrario alle variabili indipendenti (anche valore generici)

④ Si calcola il valore della variabile dipendente, ottenendo dunque una soluzione (particolare o generale)

⑤ Si identifica l'insieme delle soluzioni sfruttando la soluzione generica e la "densità" delle soluzioni attraverso un apice posto sull'infinito coincidente col numero di variabili indipendenti.

$2x-y-z=1$

$z=2x-y-1$

$x=1,\ y=5\ /\ x=h,\ y=k\quad h,k\in\mathbb{R}$

$z=-4\Rightarrow(1,5,-4)$ sol. part.

$(h,k,2h-k-1)$ sol. generica

$S=\{(h,k,2h-k-1):h,k\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^3$

∞^2 soluzioni

Un'equazione lineare si dice omogenea se il termine noto è uguale a 0

Si definisce incognita iniziale di un'equazione lineare la prima incognita con coefficiente $\neq0$; si ricorda a tal proposito che nelle equazioni lineari è sempre fissato un ordinamento nelle variabili.

Somma di Equazioni Lineari

$$
\begin{array}{l}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \\
+ \quad a_1' x_1 + a_2' x_2 + \ldots + a_n' x_n = b' \\
\hline
(a_1+a_1')x_1 + (a_2+a_2')x_2 + \ldots + (a_n+a_n')x_n = b+b'
\end{array}
$$

Si osserva che se una n-pla di numeri reali $(h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$ risolve entrambe le equazioni, essa risolve anche l'equazione somma.

Prodotto di un'equazione lineare per uno scalare

$$
\begin{array}{l}
a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b \\
\times h \\
\hline
(ha_1) x_1 + (ha_2) x_2 + \ldots + (ha_n) x_n = hb
\end{array}
$$

Analogamente, ogni n-pla di numeri reali che risolve l'equazione risolve anche l'equazione prodotto.

Due equazioni lineari che si ottengono l'una dall'altra mediante il prodotto per uno scalare si dicono proporzionali. Avendo le stesse soluzioni (se moltiplicate per uno scalare $\neq 0$), due equazioni proporzionali sono equivalenti.

Pur non essendo rilevante ai sensi del nostro corso, si osservi che anche le equazioni lineari costituiscono uno spazio vettoriale.

Sistemi Lineari

Un sistema lineare può avere $\begin{cases} 0 \\ 1 \\ \infty \end{cases}$ soluzioni, può essere scritto in forma $\begin{cases} \text{scalare} \\ \text{matriciale} \\ \text{vettoriale} \end{cases}$

Sistemi lineari: forma scalare

È un sistema rappresentato in questo modo:

$$
(n, m \in \mathbb{N}) \quad
\begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\
\ldots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m
\end{cases}
$$

Sistema lineare di m equazioni in n incognite; la sua soluzione è una n-pla di numeri reali che risolve TUTTE le equazioni del sistema. Dunque, l'insieme delle soluzioni S è dato dall'intersezione di tutti gli insiemi di soluzioni delle singole equazioni.

$$S = \bigcap_{i=1}^{m} S_i$$

Come per le equazioni lineari, due sistemi lineari nelle stesse incognite si dicono equivalenti se hanno le stesse soluzioni.

Se un sistema lineare ha ALMENO UNA soluzione (unico altro caso: ne ha infinite), esso si dice compatibile ($S \neq \emptyset$); altrimenti lo si dice incompatibile (o non compatibile; $S = \emptyset$)

Si osserva che a_{ij} è il coefficiente di x_j nella i-ma equazione $(1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$

Osservazione: il numero di equazioni/incognite in un sistema lineare non è un'informazione rilevante:

$$
\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \; S=\emptyset \quad ; \quad
\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \; \underset{\text{unica soluzione}}{(2,1)} \quad ; \quad
\begin{cases} x+y=6 \\ 2x+2y=12 \end{cases}
$$

infinite soluzioni $(5,1); (4,2); (6,0); (0,6); \ldots$

Presenza di un'equazione lineare degenere in un sistema lineare

Si distinguono due casi:

1. Il termine noto dell'equazione è $\neq 0$, ne segue che il sistema è incompatibile
2. Il termine noto dell'equazione è $= 0$, ne segue che il sistema risulta essere equivalente a quello costituito dalle rimanenti equazioni.

Sistema Lineare ridotto

$m \leq n$

Sfruttando la proprietà di equivalenza dei sistemi, possiamo risolvere sistemi di equazioni riconducendoli a sistemi equivalenti più semplici.

Un sistema lineare si dice **ridotto** (o "a scala", "a gradini") se l'incognita iniziale di ogni equazione ha coefficiente pari a 0 nelle equazioni successive.

Si osserva che il numero di equazioni risulta essere sempre minore o uguale al numero di incognite; nella risoluzione le incognite iniziali si considerano sempre come variabili dipendenti.

esempio di sistema ridotto

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ y-3z=4 \\ z=1 \end{cases}$$

Un sistema lineare ridotto ha **sempre soluzioni**:

① Se $m=n$, non ci sono variabili indipendenti $\Rightarrow$ la soluzione è **unica**.

② Se $m<n$, esistono $n-m$ variabili indipendenti $\Rightarrow$ il sistema ha ∞^{n-m} soluzioni

discussione del sistema: se e quante soluzioni

In un sistema a gradini si procede sempre in senso ascendente.

Schema risolutivo di un sistema lineare ridotto

① Le m incognite iniziali si assumono come variabili dipendenti, le eventuali $n-m$ come variabili indipendenti.

② Si ricavano le incognite iniziali in funzione delle rimanenti.

③ Si assegna un valore arbitrario alle variabili indipendenti

④ Si calcolano i valori delle variabili dipendenti affinché le uguaglianze siano verificate

⑤ Si trova la generica soluzione, l'insieme delle soluzioni; se le soluzioni sono infinite si mesplicita la "densità" delle soluzioni.

Metodo di Gauss (o di eliminazione) per la risoluzione di sistemi lineari

Tale metodo consiste nella ricerca di un sistema lineare ridotto equivalente al sistema di partenza.

Teorema: Ogni sistema lineare compatibile è equivalente a un particolare sistema ridotto.

Per trovare il sistema lineare ridotto equivalente si ricorre alle trasformazioni elementari:

T1: Scambiare di posto due equazioni

T2: Moltiplicare una delle equazioni per uno scalare diverso da 0

T3: Sommare ad una delle equazioni un'altra equazione del sistema moltiplicata per uno scalare

Esempio:

T3 -2, -1
$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 2x+3y-2z=6 \\ x+2y-3z=2 \end{cases} \quad \text{T3 } -1 \begin{cases} x+y+z=4 \\ y-4z=-2 \\ y-4z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=4 \\ y-4z=-2 \\ \cancel{0=0} \text{ eliminabile} \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=4 \\ y-4z=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=4-y-z=4+2-4z-z=6-5z \\ y=4z-2 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x=6-5z \\ y=4z-2 \end{cases}$$

$(6-5h, 4h-2, h) : h \in \mathbb{R}$ sol. generica; ∞^1 soluzioni

$$\text{T1} \begin{cases} 2x+3y-2z=6 \\ 2x+2y+2z=8 \\ x-2y-z=4 \end{cases} \quad \text{T3 } \begin{matrix} -1 \\ -1/2 \end{matrix} \begin{cases} 2x+2y+2z=8 \\ 2x+3y-2z=6 \\ x-2y-z=4 \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{T2} \\ \text{T3} \end{matrix} \begin{cases} 2x+2y+2z=8 \\ y-4z=-2 \\ -3y-2z=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y+z=4 \\ y-4z=-2 \\ -14z=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} x=27/7 \\ y=-2/7 \\ z=3/7 \end{cases}$$

$(27/7, -2/7, 3/7)$ unica sol.

Al variare dei termini noti delle equazioni che lo compongono, un sistema può avere soluzioni diverse (o non averne affatto). È dunque possibile stabilire per quali valori dei termini noti un determinato sistema ammette soluzioni.

Consiglio: Lasciare spazi vuoti nelle equazioni laddove sarebbe presente una variabile con coefficiente nullo aiuta a mettere bene a fuoco il problema e a prevenire errori.

Esempio:

$$\begin{cases} x + \quad z = a \\ \quad y + z = b \\ x + y + 2z = c \\ 2x + y + 3z = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + \quad z = a \\ \quad y + z = b \\ \quad y + z = c - a \\ \quad y + z = d - 2a \end{cases} ; \quad \begin{cases} x + \quad z = a \\ \quad y + z = b \\ 0 = c - b - a \\ 0 = d - b - 2a \end{cases}$$

Se $c - b - a \neq 0$ oppure $d - b - 2a \neq 0$ il sistema non ammette soluzioni.
Se $c = b + a$ e $d = b + 2a$, si ottiene il sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + \quad z = a \\ \quad y + z = b \end{cases} \qquad \infty^1 \text{ soluzioni}$$

Consiglio: Se l'incognita iniziale di un'equazione rispetto alla quale operiamo ha coefficiente pari a ± 1, risulterà semplice effettuare calcoli. Si consiglia, a tal proposito, di operare con le trasformazioni elementari (soprattutto T2 e T3)

Il teorema alla pagina precedente può essere scritto anche nel seguente modo:

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare di m equazioni in n incognite sia compatibile: il sistema è equivalente a un sistema lineare ridotto.
In particolare, se il sistema ridotto ha r equazioni, esso avrà ∞^{n-r} soluzioni.

Richiamo: $A \Rightarrow B$
A: c. sufficiente perché valga B
~~A⇐B~~ $A \Leftarrow B$
B: c. necessaria affinché valga A

Sistema Lineare Omogeneo

Un sistema lineare si dice omogeneo se ha tutti i termini noti $= 0$.
Ne segue che un sistema lineare omogeneo è sempre compatibile, poiché ammette sempre come soluzione il vettore nullo $(\vec{0})$.
Allo stesso modo, un sistema lineare non omogeneo non può mai ammettere la soluzione nulla.

Osservazione: A ogni sistema lineare è possibile associare un sistema lineare omogeneo sostituendo 0 ai termini noti:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Ponendo $b_1, b_2, \dots, b_m = 0$ si ottiene il sistema lineare omogeneo associato.

Matrici associate ad un sistema lineare

Ad un generico sistema lineare possono essere associate 4 matrici:

Matrice Incompleta:
(o dei coefficienti delle incognite)
tipo $m \times n$

$$A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{c. di } x_1 & \text{c. di } x_2 & \text{c. di } x_n \end{array} \end{array}$$

Matrice delle incognite:
(o colonna)
tipo $n \times 1$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Matrice completa:
tipo $m \times (n+1)$

$$A' = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

m. incompleta è una sottomatrice della completa

Matrice dei termini noti:
(o colonna)
tipo $m \times 1$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Esempio:

$$\begin{cases} 2x \quad -z = 3 \\ x + 2y \quad = 4 \end{cases} \Longrightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} ; \quad A' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} ; \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 0 - z \\ x + 2y + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \Longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{A} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}}_{B}$$

Questa equazione matriciale, risolvibile trovando valori per le incognite che verifichino il prodotto riga per colonna, coincide con la...

Forma Matriciale di un Sistema Lineare

È un'equazione matriciale del tipo $AX=B$, si risolve attraverso un'unica uguaglianza invece che operando le m uguaglianze da risolvere nel sistema lineare scritto in forma scalare: una n-pla di numeri reali è soluzione.

In generale:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots \; a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\|$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Per ottenere il sistema lineare omogeneo associato, basterà porre $AX = \underline{0}$

Sottospazi Vettoriali

Richiamando brevemente gli spazi vettoriali, un insieme V si dice spazio vettoriale su un campo K se su di esso sono definite una operazione di <u>somma di vettori</u> e una operazione di <u>prodotto di un vettore per uno scalare</u>, per le quali valgono determinate proprietà:

La somma di vettori è binaria e interna, associativa, commutativa. Esiste l'elemento neutro per la somma, detto vettore nullo ($\vec{0}$) e ogni vettore è dotato di opposto.

Per il prodotto di un vettore per uno scalare valgono la proprietà distributiva rispetto alla somma e al prodotto di scalari, la proprietà distributiva rispetto alla somma di vettori

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K. Consideriamo un sottoinsieme (non vuoto) U di V:

$$U \subseteq V$$

U è un sottospazio vettoriale di V se è uno spazio vettoriale rispetto alle stesse operazioni di V.
Poiché non è detto che siano verificate (le altre sì) occorrerà dimostrare l'esistenza dell'elemento neutro rispetto alla somma e l'esistenza degli elementi opposti, oltre alla chiusura dell'insieme rispetto alla somma e rispetto al prodotto:

1. $U \neq \emptyset$ insieme non vuoto
2. $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in U \Rightarrow \vec{u_1} + \vec{u_2} \in U$ chiuso rispetto alla somma
3. $h \in K, \vec{u} \in U \Rightarrow h\vec{u} \in U$ chiuso rispetto al prodotto
4. $\vec{0} \in U$ esistenza del vettore nullo
5. $\vec{u} \in U \Rightarrow -\vec{u} \in U$ esistenza degli opposti

Definizione: Sia $U \subseteq V$. U si dice <u>chiuso</u> se valgono le seguenti condizioni:

① $U \neq \emptyset$

② $\vec{u_1}, \vec{u_2} \in U \Rightarrow \vec{u_1}+\vec{u_2} \in U$

③ $h \in K, \vec{u} \in U \Rightarrow h\vec{u} \in U$

Ne segue che un sottospazio vettoriale è un particolare sottoinsieme chiuso. Vale il seguente teorema:

<u>Teorema:</u> Ogni sottoinsieme chiuso U di V è un sottospazio vettoriale di V.

Dimostrazione:

$$\frac{H_p}{U \neq \emptyset}$$

$\exists \vec{u} \in U \xRightarrow{③} 0\vec{u} \in U \Rightarrow \vec{0} \in U$; allo stesso modo, $\vec{u} \in U \Rightarrow -1 \cdot \vec{u} = -\vec{u} \in U$

<u>Esempio di operazioni con i sottospazi</u>

Unione di sottospazi: è un sottospazio SOLO SE uno dei sottospazi è contenuto nell'altro

Intersezione di sottospazi: è SEMPRE un sottospazio $\Rightarrow$ <u>Teorema:</u> Se U_1 e U_2 sono sottospazi vettoriali di V anche $U_1 \cap U_2$ lo è.

Consideriamo due sottospazi $U = \{(h, 0) : h \in \mathbb{R}\}$, $U' = \{(0, k) : k \in \mathbb{R}\}$

L'insieme $W = U \cup U' = \{(h, k) : h = 0 \wedge k = 0\}$ non è un sottospazio: $(2,0); (0,1) \in W$; $(2,1) \notin W$

$K = U \cap U' = \{\vec{0}\}$ è un sottospazio.

Un generico spazio vettoriale V ha sempre almeno due sottospazi ($\{\vec{0}\}$, V stesso); può non avere sottospazi propri.

Dimostrazione del teorema sull'intersezione di sottospazi vettoriali:

$U_1 \cap U_2 = \{\vec{v} \in V : \vec{v} \in U_1 \wedge \vec{v} \in U_2\}$

① $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$: essendo sottospazi, $\vec{0} \in U_1$, $\vec{0} \in U_2 \Rightarrow \vec{0} \in U_1 \cap U_2$

② $\vec{u}, \vec{v} \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \vec{u}, \vec{v} \in U_1; \vec{u}, \vec{v} \in U_2$. Essendo sottospazi, $\vec{u}+\vec{v} \in U_1$, $\vec{u}+\vec{v} \in U_2 \Rightarrow \vec{u}+\vec{v} \in U_1 \cap U_2$

③ $\vec{u} \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \vec{u} \in U_1, \vec{u} \in U_2 \Rightarrow h\vec{u} \in U_1, h\vec{u} \in U_2 \Rightarrow h\vec{u} \in U_1 \cap U_2$

Ad esempio, l'intersezione tra le matrici triangolari superiori e le triangolari inferiori è uguale all'insieme delle matrici diagonali; l'intersezione tra le matrici simmetriche e antisimmetriche è composta solo dalla matrice nulla.

Considerato lo spazio vettoriale su campo reale composto dalle matrici quadrate di ordine n, gli insiemi composti dalle relative matrici particolari sono sottospazi vettoriali di tale spazio vettoriale, in quanto risultano essere sottoinsiemi chiusi dello spazio

Esempi:

$\underbrace{M_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}}_{\text{spazio vettoriale}}$; $\underbrace{D = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : a, d \in \mathbb{R}\right\} \quad S = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} : a,b,d \in \mathbb{R}\right\} \quad A = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R}\right\}}_{\text{sottospazi vettoriali}}$

Esercizio esemplare sui sottospazi

$$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2+bx+c : a,b,c \in \mathbb{R}\}$$

$$U = \{ax^2+bx : a,b \in \mathbb{R}\} = \{ax^2+bx+c : a,b \in \mathbb{R}, c=0\}$$

Verifichiamo che U sia chiuso:

$$P(x) = a_1x^2+b_1x+c_1 \in U \,;\; Q(x) = a_2x^2+b_2x+c_2 \in U \qquad c_1, c_2 = 0$$

$$P(x)+Q(x) = (a_1+a_2)x^2+(b_1+b_2)x+(c_1+c_2) \qquad c_1+c_2=0 \Rightarrow P(x)+Q(x) \in U$$

$$hP(x) = (ha)x^2+(hb)x+hc \qquad c=0 \Rightarrow hc=0 \Rightarrow hP(x) \in U$$

(Se $c=1$, non sarebbe stato un sottospazio)

Sottospazi e insiemi delle soluzioni dei sistemi lineari

Considerato un sistema lineare in forma matriciale, l'insieme delle soluzioni sarà costituito da vettori colonna numerici. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare è un sottospazio solo se il sistema lineare è omogeneo:

- Il sistema non ha soluzioni $\Rightarrow S = \emptyset$, non è un sottospazio
- $S \neq \emptyset$, spesso però il vettore nullo $\vec{0}$ non vi appartiene (sistema non omogeneo)
- Se un sistema lineare è omogeneo, il suo insieme delle soluzioni è un sottospazio

Dimostrazione:

$$AX = \underline{0} \,,\; S \subseteq \mathbb{R}^n,\; \vec{v} = (h_1, h_2, \dots, h_n) \in S : A\vec{v} = \underline{0}$$

① $S \neq \emptyset$ poiché $A\vec{0} = \underline{0} \Rightarrow \vec{0} \in S$

② $\vec{v}, \vec{w} \in S \Rightarrow : A\vec{v} = \underline{0}, A\vec{w} = \underline{0}$ chiuso

$$A(\vec{v}+\vec{w}) = A\vec{v}+A\vec{w} = \underline{0}+\underline{0} = \underline{0}$$ la somma è interna

③ $\vec{v} \in S, h \in K \Rightarrow : A\vec{v} = \underline{0}, \quad A(h\vec{v}) = h(A\vec{v}) = h\underline{0} = \underline{0}$ il prodotto è interno

L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo si dice spazio delle soluzioni del sistema.

Consiglio: per dimostrare che un insieme è uno spazio vettoriale lo si può considerare come un insieme delle soluzioni di un sistema ~~o di un'equazione lineare~~ lineare omogeneo.

Laterale di un sottospazio vettoriale

Dato un sottospazio U, si dice laterale di U ogni sottoinsieme di V del tipo $\vec{v}+U$, $\vec{v}\in V$, definito da:

$$\begin{cases} \vec{v}\in V \\ U\subseteq V \end{cases} \qquad \vec{v}+U=\{\vec{w}\in V : \vec{w}=\vec{v}+\vec{u}, u\in U\}$$

$\vec{v}$ fissato, $\vec{u}\in U$ generico

esempio: $U\{(0,h):h\in\mathbb{R}\}$ sottospazio di $\mathbb{R}^2$, $\vec{v}=(1,0) \Rightarrow \vec{v}+U=\{(1,h):h\in\mathbb{R}\}$ (non sottospazio)

Teorema: L'insieme S' delle soluzioni di un sistema lineare compatibile non omogeneo è il laterale del sottospazio vettoriale delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato.

esempio: ~~$U=\{(0,h)$~~ $x-2y-1=0$ $\qquad x-2y=0 \Rightarrow S=\{(2h,h):h\in\mathbb{R}\}$

$S'=\{(2h+1,h):h\in\mathbb{R}\}$

$S'=(1,0)+S=\underbrace{(1,0)}_{\text{s. part. per } h=0 \text{ del sistema}}+(2h,h)$

Detta $\vec{v}$ una soluzione particolare del sistema ed S lo spazio delle soluzioni del sistema omogeneo associato, allora $S'=\vec{v}+S$. Questi due insiemi hanno lo stesso numero di elementi.

Dimostrazione

Sia $AX=B$ un generico sistema lineare in forma matriciale ed $AX=\underline{0}$ il sistema omogeneo associato. Sia $\vec{v}$ una soluzione particolare del primo sistema, dunque $A\vec{v}=B$.

① $S'\subseteq\vec{v}+S$:

Sia $\vec{w}\in S'$; allora $A\vec{w}=B$. $\quad$ Sia $\vec{t}=\vec{w}-\vec{v}$; allora $A\vec{t}=A(\vec{w}-\vec{v})=A\vec{w}-A\vec{v}=B-B=\underline{0}$

Ne segue che $A\vec{t}=\underline{0}$, dunque $\vec{t}\in S \Rightarrow \vec{w}=\vec{v}+\vec{t}$, con $\vec{t}$ generico $\in S \Rightarrow \vec{w}\in\vec{v}+S$

② $\vec{v}+S\subseteq S'$

Sia $\vec{w}\in\vec{v}+S$, allora $\vec{w}=\vec{v}+\vec{t}$, $\vec{t}\in S \Rightarrow A\vec{w}=A(\vec{v}+\vec{t})=A\vec{v}+\underbrace{A\vec{t}}_{t\in S}=B+\underline{0}=B$

dunque, $\vec{w}\in S'$

$S'=\vec{v}+S$ □

Combinazioni lineari di vettori

Sia V uno spazio vettoriale su campo K. Dati n vettori $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ ed n scalari $h_1,h_2,\dots,h_n\in K$,

$$h_1\vec{v}_1+h_2\vec{v}_2+\dots h_n\vec{v}_n=\sum_{i=1}^{n}h_i\vec{v}_i$$

si dice combinazione lineare di vettori $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$ secondo gli scalari $h_1,h_2,\dots,h_n$

Il risultato è un vettore; scelti opportunamente gli scalari si osserva che ogni vettore $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n$, oltre al vettore nullo, sono delle possibili combinazioni lineari dei suddetti vettori.

Precisazione: $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$: Non si esclude che due o più vettori possano essere uguali $\cup$ può essere importante l'ordine $\Rightarrow$ n-pla

$\{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$: Si esclude che due o più vettori siano uguali o non è importante l'ordine $\Rightarrow$ insieme

Definizione: Sia $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ una n-pla di vettori e $\vec{v} \in V$.

$\vec{v}$ è una combinazione lineare dei vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ se esiste una n-pla di scalari $(h_1, h_2, \dots, h_n)$ tale che $h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots + h_n\vec{v_n} = \vec{v}$, ovvero se l'equazione vettoriale $x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \dots + x_n\vec{v_n} = \vec{v}$ ha almeno una soluzione.

Data una n-pla di vettori e un vettore $\vec{v} \in V$, un'equazione vettoriale sovradescritta viene spesso rappresentata nel seguente modo:

$$x_1 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}}_{\vec{v_1}} + x_2 \underbrace{\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}}_{\vec{v_2}} + \dots + x_n \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}}_{\vec{v_n}} = \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}}_{\vec{v}} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Chiusura Lineare di una n-pla di vettori:

Sia X una n-pla di vettori $(X = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}))$

Si dice chiusura lineare di X, denotata con $L(X)$ oppure $L(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ $\hookrightarrow \langle X \rangle$ il seguente sottoinsieme di V:

$$L(X) = \{\vec{v} \in V : \vec{v} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots h_n\vec{v_n},\ h_1, h_2, \dots, h_n \in K\}$$

Si dice equazione della chiusura lineare una delle equazioni che determinano le proprietà delle componenti degli elementi di $L(X)$.

Proprietà

- $\vec{0} \in L(X)$
- $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in L(X)$ ovvero $X \subseteq L(X)$
- $L(X)$ è $\overset{un}{1}$ sottospazio vettoriale, detto sottospazio vettoriale di V generato da X

4 Se $X \subseteq \overset{(sottospazio)}{U} \Rightarrow L(X) \subseteq U$ è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene X.

Dimostrazione che $L(X)$ è un sottospazio vettoriale

- $L(X) \neq \emptyset$: $\vec{0} \in L(X)$
- $\vec{v}, \vec{w} \in L(X) \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} \in L(X)$: $\exists\ h_1, h_2, \dots h_n \mid \vec{v} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots + h_n\vec{v_n}$, $\exists\ k_1, k_2, \dots k_n \mid \vec{w} = k_1\vec{w_1} + k_2\vec{w_2} + \dots + k_n\vec{w_n}$ $\Rightarrow \vec{v}+\vec{w} = (h_1+k_1)(\vec{v_1}+\vec{w_1}) + \dots + (h_n+k_n)(\vec{v_n}+\vec{w_n}) \in L(X)$ comb. lineare secondo somma di scalari
- $\vec{v} \in L(X), h \in K \Rightarrow h\vec{v} \in L(X)$: $h\vec{v} = h(h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots + h_n\vec{v_n}) = hh_1\vec{v_1} + hh_2\vec{v_2} + \dots + hh_n\vec{v_n} \in L(X)$ comb. lineare secondo il prodotto di scalari

Proprietà dei sottospazi vettoriali relativa alle combinazioni lineari

Sia $U \subseteq V, U \neq \emptyset$. Le seguenti affermazioni sono logicamente $\overset{\Leftrightarrow}{\text{equivalenti}}$: a) U è un sottospazio vettoriale di V
b) U è chiuso rispetto alle combinazioni lineari

Dim

$a \Rightarrow b$: $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n} \in U \Rightarrow h_1\vec{v_1}, h_2\vec{v_2}, \dots h_n\vec{v_n} \in U \xrightarrow{\text{sottospazio}} \sum_{i=1}^{n} h_i\vec{v_i} \in U$

$b \Rightarrow a$ $\vec{v}, \vec{w} \in U \Rightarrow \vec{v}+\vec{w} = 1\vec{v} + 1\vec{w} \in U$ Segue la 4 proprietà della chiusura lineare
$\vec{v} \in U, h \in K \Rightarrow h\vec{v} \in U$

Applicazione della chiusura lineare alle matrici

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{matrix} \to \vec{v}_1 \\ \to \vec{v}_2 \\ \\ \to \vec{v}_m \end{matrix} \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{matrix} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \vec{w}_1 & \vec{w}_2 & \vec{w}_n \end{matrix} \in \mathbb{R}^m$$

Si dice spazio delle righe [colonne] di A il sottospazio vettoriale U [W] di $\mathbb{R}^{n\,[m]}$ generato dalle righe [colonne] di A.

$$U=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots \vec{v}_m);\quad W=L(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\dots,\vec{w}_n)$$

Esercizio riassuntivo

$\vec{v}_1=(1,2,3)$
$\vec{v}_2=(0,1,1)$
$\vec{v}_3=(1,0,1)$

a) Stabilire se i vettori $\vec{v}(2,1,1)$ e $\vec{w}(2,1,3)$ sono combinazioni lineari dei vettori dati; in caso di risposta affermativa determinare secondo quali scalari lo sono.

b) Determinare per quali valori di a,b,c il generico vettore (a,b,c) di $\mathbb{R}^3$ è combinazione lineare di $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$

c) Determinare $L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$

d) Determinare lo spazio delle righe/colonne della matrice ottenuta da $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$

ⓐ $x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix};\ \begin{bmatrix}x+z\\2x+y\\3x+y+z\end{bmatrix}=\overset{\vec{v}}{\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}} \iff \begin{cases}x+z=2\\2x+y=1\\3x+y+z=1\end{cases},\ \begin{cases}x+z=2\\y-2z=-3\\y-2z=-5\end{cases}$ $S=\emptyset$

$\vec{v}(2,1,1)$ non è c. lineare

Procedendo analogamente per $\vec{w}$: $\begin{cases}x+z=2\\y-2z=-3\\y-2z=-3\end{cases};\ \begin{cases}x+z=2\\y-2z=-3\\0=0\end{cases}$

è combinazione lineare dei vettori $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3$ in infiniti modi secondo gli scalari generici $(2-h,\ 2h-3,\ h)$

ⓑ $x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \iff \begin{cases}x+z=a\\2x+y=b\\3x+y+z=c\end{cases};\ \begin{cases}x+z=a\\y-2z=b-2a\\y-2z=c-3a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+z=a\\y-2z=b-2a\\0=c-b-a\end{cases}$

Se $c\neq a+b$ il sistema non ha soluzioni, altrimenti il sistema risulta equivalente al sistema lineare ridotto $\begin{cases}x+z=a\\y-2z=b-2a\end{cases} \Rightarrow (a,b,c)$ è una combinazione lineare di $\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3 \iff c=a+b$

ⓒ $L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\{(a,b,c) : c=a+b\}$

ⓓ $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$

$U=L(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)=\{(a,b,c) : c=a+b\}$

$W=L(\vec{w}_1,\vec{w}_2,\vec{w}_3)=\{(a,b,c) : a=2b+c\}$

$\begin{matrix}\\-2\\-1\end{matrix}\begin{cases}x+2y+3z=a\\y+z=b\\x+z=c\end{cases};\ \begin{cases}0=a-2b-c\\y+z=b\\x+z=c\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x+z=c\\y+z=b\\a=2b+c\end{cases}$

Spazi Vettoriali finitamente generabili

Uno spazio vettoriale V si dice *finitamente generabile* se "è generato" da un numero finito di vettori.

Sia $X = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V

Si dice che X è un *sistema di generatori* di V, o anche che i vettori $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}$ *generano* V se ogni vettore di V è combinazione lineare dei vettori di X, ovvero se:

$$\forall \vec{v} \in V \; \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) : \vec{v} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots + h_n\vec{v_n}$$

In particolare, $L(X) = V$

Si osserva che la maggior parte degli spazi vettoriali a noi noti sono finitamente generabili:

$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}$ $\qquad B = \{(1,0), (0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$; B è detto *base naturale* di $\mathbb{R}^2$

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a(1,0) + b(0,1)$$

$\mathbb{R}^3 = \{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ $\qquad B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^3$

$$(a,b,c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1)$$

Ne segue che $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ è finitamente generabile (generato da n vettori)

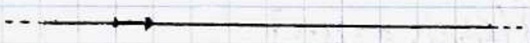
$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ $\qquad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subseteq M_2$

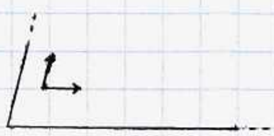
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$M_{2\times3} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ finitamente generabile da 6 matrici

Ne segue che $M_{m\times n}$ è finitamente generabile (generato da $m \cdot n$ vettori)

Per gli spazi vettoriali di natura geometrica:

$\vec{r}$  1 vettore genera lo spazio

$\vec{\pi}$  2 vettori generano lo spazio

$\vec{\Sigma}$  3 vettori generano lo spazio

$\mathbb{R}_2[x] = \{ax^2+bx+c : a,b,c \in \mathbb{R}\}$ $\quad B = \{x^2, x, 1\} \subseteq \mathbb{R}_2[x]$

$$ax^2+bx+c = a(x^2)+b(x)+c(1)$$

Procedendo analogamente, si osserva che $\mathbb{R}_n[x]$ si può generare con $n+1$ vettori.

$\mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$

$B = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\} \subseteq \mathbb{R}_n[x]$ genera $\mathbb{R}_n[x]$

Lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ NON è finitamente generabile: il grado dei polinomi non è limitato, non è possibile che la combinazione lineare di due o più polinomi sia di grado infinito. Anche gli spazi vettoriali formati da tutte le funzioni reali di variabile reale non sono finitamente generabili.

Sistemi di Generatori di sottospazi vettoriali

Risulta evidente che un sottospazio di uno spazio vettoriale finitamente generabile è anch'esso finitamente generabile.

Si consideri $M_2 = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R}\right\}$ e il relativo sottospazio $D = \left\{\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} : a,d \in \mathbb{R}\right\}$

$X = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\} \subseteq D$ è il sistema di generatori di D: esso è infatti un sottoinsieme (proprio) del sottospazio e ogni altro vettore di D può essere espresso come combinazione lineare dei vettori di X.

In particolare, un sistema di generatori di $L(X)$ è X stesso; $L(X)$ si dice sottospazio vettoriale generato da X proprio perché, per definizione, X è un sistema di generatori di $L(X)$

Esercizio

$x-2y+z=0$; trovare sist. generatori di $S \subseteq \mathbb{R}^3$

$x=2y-z \Rightarrow S = \{(2h-k, h, k) : h,k \in \mathbb{R}\}$

$(2h-k, h, k) = (2h, h, 0) + (-k, 0, k) = h(2,1,0) + k(-1,0,1) \Rightarrow X = \{(2,1,0), (-1,0,1)\} \subseteq S \subseteq \mathbb{R}^3$

In particolare, $S = L((2,1,0), (-1,0,1))$

Sistemi di generatori minimali

Sia $X = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n)$ una n-pla di vettori di V

Si dice che X è un sistema di generatori minimale di V se:

1. X è un sistema di generatori di V
2. Nessun sottoinsieme proprio Y di X è un sistema di generatori di V

Teorema: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V. Se X è un sistema di generatori di V ed uno dei vettori $\vec{v_i}$ di X è combinazione lineare dei rimanenti vettori di X, $X-\vec{v_i}$ è un sistema di generatori di V. Ne segue che X non è un sistema di generatori minimale.
In particolare, se un sistema di generatori X di V è minimale, nessun suo vettore è combinazione lineare dei rimanenti.

Dimostrazione: Supponiamo che $\vec{v_1}$ sia combinazione lineare di $\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}$. Proviamo che $X-\{\vec{v_1}\}=\{\vec{v_2},\vec{v_3},\dots,\vec{v_n}\}$ è un sistema di generatori di V. Occorre dimostrare dunque che ogni $\vec{v}\in V$ è combinazione lineare di $\{\vec{v_2},\vec{v_3},\dots,\vec{v_n}\}$

Per ipotesi, $\vec{v}=h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}$
$\vec{v_1}=k_2\vec{v_2}+\dots+k_n\vec{v_n}$

$$\Rightarrow \vec{v}=h_1(k_2\vec{v_2}+\dots+k_n\vec{v_n})+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=$$
$$=(h_1k_2+h_2)\vec{v_2}+\dots+(h_1k_n+h_n)\vec{v_n} \Rightarrow X-\{\vec{v_1}\} \text{ genera } V \quad \square$$

Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V ed U un sottospazio di V. X è un sistema di generatori di U se:

1) $\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\in U$

2) Ogni vettore di U è combinazione lineare di X

Si osserva inoltre (visibile nel prossimo esercizio) che ogni sistema di generatori contiene un sistema di generatori minimale

Esercizio: Determinare il sistema di generatori minimale dello spazio delle soluzioni dell'equazione $2x+3y-z=0$

$z=2x+3y$ $\quad x\mapsto h$, $y\mapsto k$, $z\mapsto 2h+3k$

$S=\{(h,k,2h+3k):h,k\in\mathbb{R}\}$

$$(h,k,2h+3k)=\underbrace{(h,0,2h)}_{\in S}+\underbrace{(0,k,3k)}_{\in S}=h(1,0,2)+k(0,1,3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow X=\{(1,0,2),(0,1,3)\} \text{ genera } S, \text{ minimale}$$

Esercizio: Sia $X=\{(1,0,1),(0,1,0),(2,0,2)\}$. Determinare il sistema minimale di generatori di $L(X)$

$X-(2,0,2)=\{(1,0,1),(0,1,0)\}$ sistema di generatori minimale di $L(X)$

Dipendenza e Indipendenza Lineare

Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V.

X si dice linearmente indipendente se l'unica combinazione lineare dei vettori di X che restituisce il vettore nullo è quella con tutti gli scalari uguali a 0, ovvero se $h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0} \iff h_1=h_2=\dots=h_n=0$, ovvero se l'equazione vettoriale $x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\dots+x_n\vec{v_n}=\vec{0}$ nelle incognite $x_1,x_2,\dots,x_n$ ha solo la soluzione nulla.

X si dice linearmente dipendente se esistono $h_1,h_2,\dots,h_n$ non tutti nulli tali che $h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0}$, ovvero se l'equazione vettoriale $x_1\vec{v_1}+x_2\vec{v_2}+\dots+x_n\vec{v_n}=\vec{0}$ ha altre soluzioni oltre quella nulla.

Definizione: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V. X si dice una <u>base</u> di V se:

1) X è un sistema di generatori di V

2) X è linearmente indipendente

Proprietà della dipendenza e indipendenza lineare

$X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$

1) Sia X formato da un solo vettore. X è linearmente dipendente $\iff \vec{v}=\vec{0}$

$$n=1 \Rightarrow X=\{\vec{v}\};\quad h\vec{v}=\vec{0}\begin{cases}\vec{v}=\vec{0}\Rightarrow X \text{ è linearmente dipendente}\\ \vec{v}\neq\vec{0}\Rightarrow h=0\Rightarrow X \text{ è linearmente indipendente}\end{cases}$$

2) $n=2$: $X=\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ è linearmente dipendente $\iff$ $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ sono proporzionali

Dimostrazione: $(\Rightarrow)$ X linearmente dipendente $\Rightarrow \exists\, h_1,h_2$ non tutti nulli tale che $h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}=0$; supponendo $h_1\neq 0$ allora $h_1\vec{v_1}=-h_2\vec{v_2}\Rightarrow \vec{v_1}=-h_1^{-1}h_2\,\vec{v_2}\Rightarrow \vec{v_1}=k\vec{v_2}\Rightarrow \vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$ sono proporzionali.

$(\Leftarrow)$ $\vec{v_1}=h\vec{v_2}\Rightarrow \vec{v_1}-h\vec{v_2}=\vec{0}\Rightarrow 1\cdot\vec{v_1}+(-h)\vec{v_2}=\vec{0}\Rightarrow\{\vec{v_1},\vec{v_2}\}$ è linearmente dipendente

3) Se uno dei vettori di X è il vettore nullo, X è linearmente dipendente

Dimostrazione: $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$, sia $\vec{v_1}=\vec{0}$, allora $1\vec{v_1}+0\vec{v_2}+\dots+0\vec{v_n}=\vec{0}\Rightarrow X$ è linearmente dipendente

4) Se due vettori di X sono proporzionali, X è linearmente dipendente. In particolare, ciò vale anche se X ha due vettori uguali tra loro.

Dimostrazione: Supponiamo che $\vec{v_1}=h\vec{v_2}\Rightarrow \vec{v_1}+(-h)\vec{v_2}=\vec{0}\Rightarrow 1\cdot\vec{v_1}+(-h)\vec{v_2}+0\vec{v_3}+\dots+0\vec{v_n}=\vec{0}$, X è linearmente dipendente

5) Se X è linearmente indipendente, ogni suo sottoinsieme è indipendente.

6) Se un sottoinsieme Y di X è dipendente, allora X è dipendente

Dimostrazione di 5), 6): Poiché l'ordine dei vettori non è importante, possiamo supporre $Y=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_r}\}$ $r<n$

Basta dimostrare che $X_{ind}\Rightarrow Y_{ind}$ (dim. elementare)
$Y\ dip \Rightarrow X\ dip$ (sfrutta proprietà precedenti)

Teorema 1 sulla dipendenza/indipendenza lineare

Sia X una n-pla di vettori di V. X è linearmente dipendente $\iff$ un vettore di X è combinazione lineare dei rimanenti vettori di X.

Dimostrazione: $(\Rightarrow)$ X linearmente dipendente $\overset{def}{\Longrightarrow}\exists\, h_1,h_2,\dots,h_n$ non tutti nulli tali che:

$h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0}$; Supponiamo $h_1\neq 0\Rightarrow h_1$ è invertibile in K

$h_1\vec{v_1}=-h_2\vec{v_2}+\dots+(-h_n)\vec{v_n}\Rightarrow \vec{v_1}=(-h_1^{-1}h_2)\vec{v_2}+\dots+(-h_1^{-1}h_n)\vec{v_n}$ è c. lineare dei restanti vettori

$(\Leftarrow)$ Sia $\vec{v_1}=(k_2\vec{v_2}+\dots+k_n\vec{v_n})$, allora $1\cdot\vec{v_1}-k_2\vec{v_2}+\dots-k_n\vec{v_n}=\vec{0}\Rightarrow X$ è linearmente dipendente

Per questo motivo, un sistema di generatori linearmente indipendente [dipendente] [non] è minimale. Ne segue che una base è un sistema di generatori minimale.

Teorema: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V. Sono equivalenti le affermazioni:

a) X è una base di V
b) X è un sistema di generatori minimale

Def: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V e B un sottoinsieme di X. B si dice *linearmente indipendente massimale* di X se è linearmente indipendente e ogni sottoinsieme Y di X che contiene propriamente B è dipendente.

Abbiamo ora gli strumenti necessari per dimostrare che ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale finitamente generabile contiene una base:

Sia Y un sistema di generatori finito di V; si dimostra che Y contiene una base di V:
Sia B una n-pla di vettori linearmente indipendente massimale in Y, allora ogni altro vettore di Y è combinazione lineare dei vettori di b; ne segue che B è un sistema di generatori di Y e quindi, essendo linearmente indipendente, una base di V.

Per semplicità, tranne se specificato diversamente, considereremo sempre spazi vettoriali finitamente generabili.

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato ed Y un sistema di generatori finito di V. Se X è linearmente indipendente allora X è contenuto in una base B di V.

Dimostrazione: Se Y è un sistema di generatori di $V \Rightarrow X \cup Y$ è un sistema di generatori di V; sia B un sottoinsieme linearmente indipendente massimale di Y che contiene X, allora B è una base di V per l'osservazione precedente.

Lemma di Steinitz: Sia $Y=\{\vec{w_1},\vec{w_2},\dots,\vec{w_m}\}$ un sistema di generatori di V ed $X=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$ un insieme linearmente indipendente di V; Allora:

① $n \leq m$

② $\exists\ \vec{w_{i1}},\vec{w_{i2}},\dots,\vec{w_{i\,m-n}} \in Y$ tali che l'insieme $X'=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n},\vec{w_{i1}},\vec{w_{i2}},\dots,\vec{w_{i\,m-n}}\}$ è un sistema di generatori di V

Dalla ① segue il seguente **corollario**: Tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno lo stesso numero di vettori.

Dimostrazione: Siano $B=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$ e $B'=\{\vec{w_1},\vec{w_2},\dots,\vec{w_m}\}$ basi di V. Dimostriamo che $n=m$:

B è una base di $V \Rightarrow B$ è un sistema di generatori di V
B' è una base di $V \Rightarrow B'$ è linearmente indipendente $\Rightarrow m \leq n$

B è una base di $V \Rightarrow B$ è linearmente indipendente
B' è una base di $V \Rightarrow B'$ è un sistema di generatori di V $\Rightarrow n \leq m$

$m \leq n,\ n \leq m \Rightarrow n=m$

Il numero di elementi di una base di uno spazio vettoriale si dice ~~base~~ *dimensione* dello spazio vettoriale; si indica col simbolo $\dim V$.

⊛

Osservazione: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V e $\vec{v}\in L(X) \Rightarrow \vec{v}$ è combinazione lineare dei vettori di X.
Allora $X\cup\{\vec{v}\}=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n},\vec{v}\}$ è linearmente dipendente

Osservazione: Se X è dipendente e $\vec{v}\in V$, $X\cup\{\vec{v}\}$ è dipendente

Teorema 2 sulla dipendenza/indipendenza lineare: Se X è linearmente indipendente e $\vec{v}\notin L(X)$, allora $X\cup\{\vec{v}\}$ è linearmente indipendente.

Dimostrazione: $X\cup\{\vec{v}\}=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n},\vec{v}\}$ è linearmente indipendente $\Leftrightarrow$ l'unica combinazione lineare che restituisce il vettore nullo è quella con tutti gli scalari $=0 \Rightarrow h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}+h\vec{v}=\vec{0} \Leftrightarrow h_1=h_2=\dots=h_n=h=0$.

① Proviamo $h=0$. Supponiamo per assurdo $h\neq 0 \Rightarrow \exists\, h^{-1}$

$h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}+h\vec{v}=\vec{0} \Rightarrow h\vec{v}=-h_1\vec{v_1}-h_2\vec{v_2}+\dots-h_n\vec{v_n}$; moltiplicando entrambi i membri per h^{-1},

$\vec{v}=-h^{-1}h_1\vec{v_1}-h^{-1}h_2\vec{v_2}+\dots-h^{-1}h_n\vec{v_n}\in L(X)$, contraddizione per ipotesi $\Rightarrow h=0$

Noto $h=0$, segue $h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0}$ combinazione lineare dei vettori di X, con X linearmente indipendente per ipotesi $\Rightarrow h_1=h_2=\dots=h_n=0$

N-pla di vettori linearmente indipendente massimale

Sia $X=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$ una n-pla di vettori di V.

X si dice linearmente indipendente massimale se:

① X è linearmente indipendente

② $X\cup\{\vec{v}\}$ è linearmente dipendente $\forall\vec{v}\in V$, ovvero ogni sottoinsieme Y di V che contiene strettamente X è dipendente.

Dal teorema 2 segue un'altra importante proprietà delle basi:

Sono logicamente equivalenti le affermazioni: ① X è una base di V

② X è linearmente indipendente massimale

Dalla ① segue che X è un sistema di generatori minimale $\Rightarrow$ qualsiasi vettore $\vec{v}\in V$ è combinazione lineare dei vettori di X.

Dimensioni degli spazi vettoriali noti

$\dim\mathbb{R}^2=2$ — $B=\{(1,0),(0,1)\}$ genera $\mathbb{R}^2$, è linearmente indipendente $\Rightarrow$ è una base di $\mathbb{R}^2$

$\dim\mathbb{R}^3=3$ — Analogo

$\dim\mathbb{R}^n=n$

Esercizio: Stabilire se $X\{(1,2),(3,4),(1,-1)\}\subseteq\mathbb{R}^2$:

a) è linearmente indipendente — NO, poiché non è contenuto in una base

b) è una base di $\mathbb{R}^2$ — NO

Si ricorda che una n-pla di vettori linearmente indipendente $\subseteq$ base $\subseteq$ insieme di generatori

$\dim M_2 = 4$ $\quad M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$; $\quad B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim M_{2\times3} = 6$ $\quad M_{2\times3} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$ analogo

$\dim M_{m\times n} = m \times n$

$\dim \mathbb{R}_2[x] = 3$ $\quad \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2 + bx + c\}$ $\quad B = \{x^2, x, 1\}$

$\dim \mathbb{R}_n[x] = n+1$ $\quad \mathbb{R}_n[x] = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n : a_i \in \mathbb{R}\}$ analogo

$\dim \vec{r} = 1$ $\quad B$ è costituita da un vettore $\neq \vec{0}$

$\dim \vec{\pi} = 2$ $\quad B$ è costituito da due vettori non paralleli

$\dim \vec{\Sigma} = 3$ $\quad B$ è costituito da tre vettori non paralleli

Importante conseguenza del fatto che un insieme linearmente indipendente $\subseteq$ base $\subseteq$ insieme di generatori è il seguente...

Teorema: Sia V uno spazio vettoriale finitamente generabile ($\dim V = n$) e sia $X = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ una n-pla di vettori di V.

a) X è linearmente indipendente $\Rightarrow X$ è una base di V

b) X è un sistema di generatori $\Rightarrow X$ è una base di V

È possibile effettuare tale ragionamento poiché X è composta da **n** vettori e $\dim V = n$.

Dimensioni di sottospazi vettoriali

Caso limite: $U = \{\vec{0}\}$, $\dim U = 0$, $B = \emptyset$

Teorema: Sia U un sottospazio vettoriale di V, con $\dim V = n$. Allora:

① $\dim U \leq \dim V$

② se $\dim U = \dim V \Rightarrow U = V$

Dimostrazione: Sia $\dim U = r$ e $X = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \ldots, \vec{u_r}\}$ una base di U

a) X base di U, $U \subseteq V \Rightarrow X$ è linearmente indipendente in $V \Rightarrow X \subseteq B$ base di V; B ha n vettori $\Rightarrow r \leq n$

b) Se $r = n \Rightarrow X$ ha n vettori; $n = \dim V$, X linearmente indipendente $\Rightarrow X$ base di $V \Rightarrow U = V$

Dimensioni di sottospazi vettoriali noti

① $\dim S$ (spazio delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo) = numero delle <u>variabili indipendenti</u>

Es: $x - y + z + 2t = 0$; $\quad S = \{(h-k-2l, h, k, l) : h,k,l \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^4 \Rightarrow$

$x = y - z - 2t$

$\Rightarrow X = \{\underset{h}{(1,1,0,0)}, \underset{k}{(-1,0,1,0)}, \underset{l}{(-2,0,0,1)}\}$ è una base di S; $\dim S = 3$

$y \to h \quad x \to h-k-2l$

$z \to k$

$t \to l$

② Sia $X=\{(1,2,0),(1,3,-1),(1,1,1)\}$

$\dim L(X)$?

X genera $L(X)$ per definizione, se è linearmente dipendente contiene una base.

$x\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\3\\-1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$; $\begin{cases}x+y+z=0\\2x+3y+z=0\\-y+z=0\end{cases}$; $\begin{cases}x+y+z=0\\y-z=0\\-y+z=0\end{cases}$; $\begin{cases}x+y+z=0\\y-z=0\\0=0\end{cases}$

infinite soluzioni $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ NON è una base.

$Y=X-\{(1,1,1)\}$ è linearmente indipendente massimale in X $\Rightarrow$ è una base di $L(X)$ $\Rightarrow$ $\dim L(X)=2$

Si osserva che, se $L(X)\subseteq\mathbb{R}^n$ e $\dim L(X)=n \Rightarrow L(X)=\mathbb{R}^n \Rightarrow X$ base di $\mathbb{R}^n$

③ $M_2=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}: a,b,c,d\in\mathbb{R}\right\}$, $\dim M_2=4$

$S=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\b&d\end{bmatrix}: a,b,d\in\mathbb{R}\right\}$; $B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\right\}\subseteq S$, lin. indip. sist. gen. $\Rightarrow \dim S=3$

Teorema: Sia B una n-pla di vettori di V. Sono equivalenti:

a) B è una base di V

b) B è linearmente indipendente massimale

c) B è un sistema di generatori minimale

d) $\forall\vec{v}\in V\ \exists!\,(h_1,h_2,\dots,h_n)\in K^n: \vec{v}=h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}$ — conseguenza del Teorema 3

Teorema 3 sulla dipendenza/indipendenza lineare: Sia $X=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ linearmente indipendente e $\vec{v}\in L(X)$; allora $\vec{v}$ si esprime in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di X.

Dimostrazione: $\forall\vec{v}\in L(X)\ \exists!(h_1,h_2,\dots,h_n)\in K^n: \vec{v}=h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}$

Supponiamo per assurdo che $\vec{v}$ sia esprimibile in più di un modo come combinazione lineare dei vettori di X:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}\\ \vec{v}=k_1\vec{v_1}+k_2\vec{v_2}+\dots+k_n\vec{v_n}\end{array}\right] \xrightarrow[\text{applicando le proprietà degli s. vett.:}]{\text{sottraendo membro a membro e}} \vec{0}=(h_1-k_1)\vec{v_1}+(h_2-k_2)\vec{v_2}+\dots+(h_n-k_n)\vec{v_n}$$

Essendo X linearmente indipendente, $h_i-k_i=0 \Rightarrow h_i=k_i$

Corollario: Sia $B=(\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V; sono equivalenti:

a) B è una base di V

b) $\forall\vec{v}\in V\ \exists!\,(h_1,h_2,\dots,h_n)\in K^n: \vec{v}=h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}$

$(h_1,h_2,\dots,h_n)$ si dicono coordinate del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base ordinata B:

$\vec{v}\underset{B}{\equiv}(h_1,h_2,\dots,h_n)$ oppure $[\vec{v}]=(h_1,h_2,\dots,h_n)$

Dimostrazione:

a) $\Rightarrow$ b) B base $\Rightarrow B$ genera $V \Rightarrow L(B)=V \Rightarrow \forall \vec{v} \in V\ \exists (h_1, h_2, \dots, h_n) : \vec{v} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \dots + h_n\vec{v_n}$;
essendo B linearmente indipendente, $\exists! (h_1, h_2, \dots, h_n)$ .....

b) $\Rightarrow$ a) ovvia: B è sistema di generatori con ogni vettore di V esprimibile come combinazione lineare di B in un unico modo (in particolare vale per $\vec{0}$)

Esercizio

Sia $X = \{(1,0,1), (2,1,3), (0,1,2)\}$

a) Verificare che X è una base di $\mathbb{R}^3$

b) Determinare le coordinate di $\vec{v} = (4,2,7)$ rispetto a X

c) determinare le coordinate del generico vettore (a,b,c) di $\mathbb{R}^3$ rispetto a X

a) Dimostrando che l'equazione vettoriale associata ha una sola soluzione $\forall a,b,c$, segue che ogni vettore di $\mathbb{R}^3$ si esprime in un unico modo come combinazione lineare dei vettori di X, dunque X è una base di $\mathbb{R}^3$.

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix} \Rightarrow^{-1} \begin{cases} x+2y = a \\ y+z = b \\ x+3y+2z = c \end{cases} ;^{-1} \begin{cases} x+2y = a \\ y+z = b \\ y+2z = c-a \end{cases} ; \begin{cases} x+2y = a \\ y+z = b \\ z = c-a-b \end{cases} \quad \square$$

c) Sfruttando il punto a), sarà sufficiente risolvere il sistema appena discusso per determinare gli scalari che permettono di esprimere il generico vettore come combinazione lineare della base.

$$\begin{cases} x = a-2y = a-2a\cancel{}-4b+2c = -a-4b+2c \\ y = b-z = b\cancel{+c}+a+b = a+2b-c \\ z = c-a-b = -a-b+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -a-4b+2c \\ y = a+2b-c \\ z = -a-b+c \end{cases}$$

Il vettore (a,b,c) dunque ha coordinate $(-a-4b+2c, a+2b-c, -a-b+c)$ rispetto alla base X

b) Sfruttando il punto c), noti $a=4, b=2, c=7$ basterà sostituire tali valori; altrimenti bisogna risolvere un'equazione vettoriale col vettore noto:

$$x\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\2\\7\end{bmatrix}$$

Sostituendo (sfruttando il punto c), si ottiene che le coordinate del vettore $\vec{v}$ rispetto a X sono $(2,1,1)$; sostituendole a x,y,z nell'equazione si osserva che essa risulta verificata.

Teorema: Sia $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ una base di V, $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{w} \underset{B}{\equiv} (y_1, y_2, \dots, y_n)$, allora:

- $\vec{v}+\vec{w} \underset{B}{\equiv} (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$
- $h\vec{v} \underset{B}{\equiv} (hx_1, hx_2, \dots, hx_n)$

Dimostrazione: $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \vec{v} = x_1\vec{v_1} + x_2\vec{v_2} + \dots + x_n\vec{v_n}$

$\vec{w} \underset{B}{\equiv} (y_1, y_2, \dots, y_n) \Rightarrow \vec{w} = y_1\vec{w_1} + y_2\vec{w_2} + \dots + y_n\vec{w_n}$

$\vec{u} = \vec{v}+\vec{w} = (x_1+y_1)\vec{u_1} + (x_2+y_2)\vec{u_2} + \dots + (x_n+y_n)\vec{u_n} \Rightarrow \vec{u} \underset{B}{\equiv} (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots, x_n+y_n)$

$h\vec{v} = (hx_1)\vec{v_1} + (hx_2)\vec{v_2} + \dots + (hx_n)\vec{v_n} \Rightarrow h\vec{v} \underset{B}{\equiv} (hx_1, hx_2, \dots, hx_n)$

Teorema: Sia $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ una base di V su $\mathbb{R}$ e $X = \{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \dots, \vec{w_m}\}$ un insieme di vettori di V.

A X è possibile associare il suo insieme delle coordinate, che ne conserva le proprietà; ciò consente di tradurre qualsiasi problema sugli spazi vettoriali in $\mathbb{R}^n$.

$$X \to [X]_{\mathbb{R}} = \{[\vec{w_1}]_{\mathbb{R}}, [\vec{w_2}]_{\mathbb{R}}, \dots, [\vec{w_m}]_{\mathbb{R}}\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

a) X è linearmente indipendente $\iff [X]$ è linearmente indipendente

b) X è linearmente dipendente $\iff [X]$ è linearmente dipendente

c) X è una base di $V \iff [X]$ è una base di $\mathbb{R}^n$

d) X è un sistema di generatori di $V \iff [X]$ genera $\mathbb{R}^n$ <...>

Non dimostreremo detto teorema, ma ne osserviamo alcune importanti applicazioni:

$$V = \mathbb{R}_2[x] = \{ax^2+bx+c : a,b,c \in \mathbb{R}\} \qquad B = \{x^2, x, 1\} \qquad \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$$

$$ax^2+bx+c \underset{B}{\equiv} (a, b, c)$$

Esercizio: Stabilire se $X = \{x^2+2x+3, 3x^2+2x+5, x^2+x-1\}$:
a) è linearmente indipendente
b) è una base di $\mathbb{R}_2[x]$

Per il teorema appena detto, $X \to [X] = \{(1,2,3), (3,2,5), (1,1,-1)\}$

L'esercizio è dunque riconducibile ad $\mathbb{R}^3$; basta risolvere l'equazione vettoriale seguente, dimostrando che il vettore nullo si ottiene per un'unica combinazione lineare $\to$ linearmente indipendente, è una base poiché risulta essere composta da 3 vettori.

$$x\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + y\begin{bmatrix}3\\2\\5\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$ se unica sol. per $x = y = z = 0 \Rightarrow$ lin. ind.

Formule di trasformazione delle coordinate

Supponiamo che $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ e $B' = (\vec{w_1}, \vec{w_2}, \dots, \vec{w_n})$ siano basi di uno spazio vettoriale V, $\vec{v}$ un vettore $\in V$.

$$\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad \vec{v} \underset{B'}{\equiv} (x'_1, x'_2, \dots, x'_n) \qquad x_i \neq x'_i$$

Considerando la matrice del cambiamento di base A, che ha per definizione le coordinate dei vettori della base B rispetto alla base B' (è una matrice invertibile, la sua inversa si utilizza per il procedimento inverso)

$$\begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\dots\\x'_n\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix} \qquad \left.\begin{array}{l}\vec{v_1} \underset{B'}{\equiv} (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1})\\ \vec{v_2} \underset{B'}{\equiv} (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2})\\ \dots \\ \vec{v_n} \underset{B'}{\equiv} (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})\end{array}\right\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}x'_1\\x'_2\\\dots\\x'_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{n1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases}x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n\\ x'_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n\\ \dots\\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n\end{cases}$$

formule di trasformazione delle coordinate

Criterio di indipendenza lineare (vale in $\mathbb{R}^n$ ed $M_{m \times n}$, è riconducibile ad ogni spazio vettoriale)

Sia $X = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n})$ una n-pla di vettori di V.

Se in ogni vettore (o matrice) vi è una componente diversa da $\emptyset$ che risulta essere $= \emptyset$ negli eventuali vettori successivi, X è certamente linearmente indipendente.

Mediante questo criterio risulterà semplice determinare le basi di uno spazio vettoriale. Messi in colonna, i vettori di X così organizzati assomigliano ad un sistema lineare ridotto; la similitudine però non si esaurisce qui: su una n-pla di vettori generica è possibile eseguire trasformazioni elementari per ottenere vettori equivalenti più semplici. (Un "sistema di vettori ridotti" è sempre lin. ind.)

Trasformazioni elementari di n-ple di vettori

T1: Scambiare di posto due vettori

T2: Moltiplicare un vettore per uno scalare $\neq \emptyset$

T3: Sommare ad un vettore di X un altro vettore di X moltiplicato per uno scalare.

Due n-ple di vettori X e Y si dicono equivalenti se si ottengono l'una dall'altra mediante un numero finito di trasformazioni elementari.

Teorema Siano X, Y n-ple di vettori di uno spazio vettoriale V, $X \sim Y$. Allora:

1. X linearmente indipendente $\Longleftrightarrow$ Y linearmente indipendente
2. X linearmente dipendente $\Longleftrightarrow$ Y linearmente dipendente
3. X sistema di generatori di V $\Longleftrightarrow$ Y sistema di generatori di V
4. X base di V $\Longleftrightarrow$ Y base di V
5. $L(X) = L(Y)$ generano lo stesso sottospazio

> ⚠: Sfruttare il criterio di indipendenza lineare semplifica i calcoli, ma richiede una spiegazione delle operazioni: occorre specificare $X \sim Y$, Y ind. per criterio indip. lin $\Rightarrow$ $\Rightarrow X$ ind.

Esempio

- Sia $X = \{(1,2,3), (3,2,5), (1,1,-1)\}$ [$(-1,2,1)$]

  a) X è linearmente indipendente? $X \sim Y$, Y indipendente per il criterio di indipendenza lineare $\Rightarrow X$ indipendente
  [Y contiene il vettore nullo $\Rightarrow Y$ dipendente $\Rightarrow X$ dip.]

$$X = \begin{array}{r} \\ -3 \\ -1 \end{array}\begin{cases} (1,2,3) \\ (3,2,5) \\ (1,1,-1) \end{cases} ; \begin{array}{r} \\ -\frac{1}{4} \\ \end{array}\begin{cases} (1,2,3) \\ (0,-4,-4) \\ (0,-1,-4) \end{cases} ; \begin{cases} (1,2,3) \\ (0,1,1) \\ (0,-1,-4) \end{cases} ; \begin{cases} (1,2,3) \\ (0,1,1) \\ (0,0,-3) \end{cases} = Y \quad \left[Y = \{(1,2,3), (0,1,1), (0,0,0)\} \right]$$

  b) X è una base di $\mathbb{R}^3$? X indipendente (punto a), $\dim \mathbb{R}^3 = 3 \Rightarrow X$ è base di $\mathbb{R}^3$ [X dip $\Rightarrow$ no]

  c) dimensione e base di $L(X)$? X genera $\mathbb{R}^3 \Rightarrow L(X) = \mathbb{R}^3$
  [$L(X) = L(Y) \Rightarrow Y$ genera $L(X)$; $Y' \{(1,2,3), (0,1,1)\}$ è una base di $L(X) \Rightarrow \dim L(X) = 2$]

- Determinare una base di $\mathbb{R}^4$ che contenga i vettori $\vec{v_1} = (1,1,1,\emptyset)$, $\vec{v_2}\ (1,2,1,3)$.

$B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3}, \vec{v_4}\}$ lin. ind.

$$\begin{array}{r} \\ -1 \\ \\ \\ \end{array}\begin{cases} (1,1,1,0) \\ (1,2,1,3) \\ ???\ ? \\ ???\ ? \end{cases} ; \overbrace{\begin{cases} (1,1,1,0) \\ (0,1,0,3) \\ (0,0,1,2) \\ (0,0,0,1) \end{cases}}^{Y}$$

verifica il criterio di indipendenza lineare $\Rightarrow B = \{(1,1,1,\emptyset), (1,2,1,3), (\emptyset,\emptyset,1,2), (\emptyset,\emptyset,\emptyset,1)\}$

Teorema: Due matrici A e A' dello stesso tipo si dicono equivalenti per righe se si ottengono l'una dall'altra mediante un numero finito di trasformazioni elementari sulle righe; le loro trasposte saranno equivalenti per colonne.

Dal teorema precedente sulle n-ple equivalenti di vettori, se A e A' sono equivalenti per righe esse hanno lo stesso spazio delle righe. Ciò avviene analogamente per le colonne.

La dimostrazione segue dalla definizione di matrici equivalenti per righe/colonne.

Matrice ridotta per righe [colonne]

È una matrice che rispetta le seguenti proprietà:

① Le eventuali righe [colonne] nulle sono in fondo alla matrice

② L'elemento iniziale non nullo in ogni riga [colonna] non nulla è $= 0$ nelle successive.

Dalla ② si osserva che le righe [colonne] non nulle di una matrice ridotta per righe [colonne] verificano il criterio di indipendenza lineare per definizione.

Matrice in forma canonica per righe [colonne]

Una matrice ridotta per righe [colonne] si dice in forma canonica per righe [] se l'elemento iniziale non nullo in ogni riga [] non nulla è uguale ad 1 ed è l'unico elemento diverso da 0 della colonna [riga] a cui appartiene.

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \tfrac{1}{3} \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{c} \\ \\ -4 \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{array}{c} -3 \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ridotta per righe

forma canonica per righe

$\underline{0}$, I sono matrici canoniche per righe e per colonne.

In questo caso si opera partendo dal basso (sist. lin. dall'alto)

Teorema

① Ogni matrice A è equivalente ad una matrice ridotta

② Ogni matrice A è equivalente ad un'unica matrice A' in forma canonica per righe [colonne], che si dice forma canonica per righe [colonne] di A.

Rango di una Matrice

Si dice rango di A, denotato con $r(A)$, il <u>massimo</u> numero di righe linearmente indipendenti di $A \Rightarrow r(A) \leq m$
$A_{m \times n}$

Osservazioni:

① Sia U lo spazio delle righe di A, allora $r(A) = \dim U$
Segue dal fatto che una base di U è un insieme massimale di righe linearmente indipendenti

② In una matrice ridotta, il rango è pari al numero di vettori non nulli

③ Matrici equivalenti per righe hanno lo stesso rango.

* ④ Il rango di A coincide col massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A

Strategia per determinare il rango di una matrice A ("e tante altre cose!"):

Determinare una matrice A' equivalente ad A che sia ridotta: essa preserverà le proprietà della matrice di partenza, ma risulterà di semplice calcolo.

* **Teorema:** Il massimo numero di righe linearmente indipendenti di una matrice <u>è uguale</u> al massimo numero di colonne linearmente indipendenti.
Segue che una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso rango.

$$r(A) = r(A)^t \qquad A_{m \times n} \Rightarrow \begin{cases} r(A) \leq m \\ r(A) \leq n \end{cases}$$

$\dim W = r(A) = \dim V$, con V spazio delle righe e W spazio delle colonne di A

Teorema: ~~Ogni~~ In una matrice quadrata di ordine **n**, sono logicamente equivalenti:

① $r(A)=n$

② $A \sim I$

In una matrice quadrata di ordine n, l'unica matrice in forma canonica per righe di rango n è I.

Dimostrazione

①⇒②: $r(A)=n$, se A' è l'unica (segue dal teorema sulle matrici in forma canonica) forma canonica per righe di $A \Rightarrow r(A')=n \Rightarrow A'=I \Rightarrow A\sim I$

②⇒①: $A\sim I \Rightarrow r(A)=r(I)=n$

Teorema: Definita matrice elementare ogni matrice che si ottiene effettuando un'unica trasformazione elementare sulla matrice I, se il rango di una matrice quadrata A di ordine n è uguale ad n, allora essa è invertibile; l'inversa di A si calcola eseguendo sulla matrice I le stesse trasformazioni elementari che si eseguono su A per trasformarla in I.

Esempio

$$A\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}I$$

$$\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=A'$$

Verifica: $\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$ □

Esercizio

Sia $X=\{(1,1,2,1),(3,2,-1,1),$ ~~(1,2,3,~~ $(1,0,-5,h)\}$ e A la matrice che ha per righe i vettori di X.
Determinare, al variare di h in $\mathbb{R}$,

a) $r(A)$
b) X linearmente dipendente / indipendente
c) dimensione e una base dello spazio delle righe U di A

$$A=\begin{bmatrix}1&1&2&1\\3&2&-1&1\\1&0&-5&h\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&-1&-7&-2\\0&-1&-7&h-1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&1&2&1\\0&+1&+7&+2\\0&0&0&h+1\end{bmatrix}=A'$$

① Se $h+1=0 \Rightarrow h=-1$

a) $r(A)=2$

b) $A\sim A'$, le righe di A' sono linearmente dipendenti ⇒ ⇒ le righe di A, ovvero i vettori di X, sono linearmente dip.

c) $B=\{(1,1,2,1),(0,+1,+7,+2)\}$ base dello spazio delle righe di A' e quindi di A.

② $h\neq -1$

a) $r(A)=3$

b) X è linearmente indipendente

c) La base dello spazio delle righe di A sono proprio le righe di A, essendo linearmente indipendenti ⇒ X è una base di detto spazio vettoriale.

Spazi Vettoriali Euclidei

Per lo studio di questo argomento, occorre richiamare alcuni argomenti trattati in precedenza:

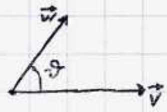
Prodotto scalare di vettori

In $\mathbb{R}^n$: $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow v \cdot w \in \mathbb{R}$

$\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\vec{w} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\vec{v} \cdot w = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vettori Geometrici: $\vec{v}, \vec{w} \in \vec{\Sigma}$



$$\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cos\vartheta \qquad \vartheta \in [0, \pi]$$

↳ lunghezza del vettore, stesso simbolo della norma (identificano lo stesso concetto in due diversi aspetti: geometrico e algebrico)

Norma/Lunghezza di un vettore

In $\mathbb{R}^n$ (norma): $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

Vettori geometrici (lunghezza): $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{v}\| \cos\vartheta} = \sqrt{\|\vec{v}\|^2} = \|\vec{v}\|$ norma

In particolare, richiamiamo:

	$\mathbb{R}^n$	Vett. Geometrici
Vettori ortogonali	$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$	$\vartheta = \pi/2$
Versori	$\|\vec{e}\| = 1$	$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$

Sia V uno spazio vettoriale su campo reale $\mathbb{R}$. Si dice che V è uno **spazio vettoriale euclideo** se su V è definita un'operazione di prodotto scalare $\vec{v}, \vec{w} \in V \longrightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} \in \mathbb{R}$ tale che:

1. $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v} \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$ — l'operazione è simmetrica (termine diverso da "commutativa")
2. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} \quad \forall \vec{u}, \vec{w}, \vec{v} \in V$
3. $(h\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v}(h\vec{w}) = h(\vec{v} \cdot \vec{w}) \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall h \in \mathbb{R}$
4. $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0 \quad \forall \vec{v} \in V$; in particolare $\vec{v} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

Riassumendo, il prodotto scalare in uno spazio vettoriale euclideo è una forma bilineare (2-3) simmetrica (1) definita positiva (4).

Dimostrazioni	$\mathbb{R}^n$	V. Geometrici ($\vec{\Sigma}$)
1	Verificata poiché in $\mathbb{R}^n$ il prodotto è commutativo	Elementare ed ovvio
2	~~Porre h vicino a xi, poi yi, poi moltiplicare~~ Proprietà distributiva dei numeri reali rispetto alla somma	trigonometria
3	Porre h vicino a x_i, poi y_i, poi fuori dal prodotto scalare	$h\vec{v} = \|h\| \cdot \|\vec{v}\|$
4	$\vec{v} \cdot \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \geq 0$	$\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2 \geq 0$

In virtù delle dimostrazioni a fianco, $\mathbb{R}^n$ e $\vec{\Sigma}$ sono degli importanti esempi di spazi vettoriali euclidei

Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Dato $\vec{v} \in V$, si dice **norma** di $\vec{v}$, denotata con $\|\vec{v}\|$, il numero reale positivo definito da:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$$

Valgono le seguenti proprietà:

① $\cdot \ \|\vec{v}\| \geq 0 \quad \forall \vec{v}$, in particolare $\|\vec{v}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}$

② $\cdot \ \|h\vec{v}\| = |h| \, \|\vec{v}\|$, in particolare $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$

③ $\cdot \ \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ disuguaglianza triangolare o di Minkowski

④ $\cdot \ (\vec{v} \cdot \vec{w} \leq) \ \|\vec{v} \cdot \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ disuguaglianza di Cauchy-Schwarz

Dimostrazioni

② $\|h\vec{v}\| = \sqrt{(h\vec{v}) \cdot (h\vec{v})} = \sqrt{h^2 (\vec{v} \cdot \vec{v})} = |h| \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = |h| \cdot \|\vec{v}\|$

④ $(t\vec{v} + \vec{w}) \cdot (t\vec{v} + \vec{w}) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R};$ per la proprietà 4 degli spazi vettoriali euclidei (prodotto scalare definito positivo)

$(t\vec{v})(t\vec{v}) + (t\vec{v})\vec{w} + \vec{w}(t\vec{v}) + \vec{w} \cdot \vec{w} \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R};$

$(\vec{v} \cdot \vec{v})t^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})t + (\vec{w} \cdot \vec{w}) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R};$ per la proprietà 2 degli spazi vettoriali euclidei

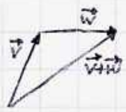
$\|\vec{v}\|^2 t^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w})t + \|\vec{w}\|^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ per le proprietà 3-1 degli spazi vettoriali euclidei

$at^2 + bt + c \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R};$ fissati $\underset{\geq 0}{a} = \|\vec{v}\|^2$, $b = 2(\vec{v} \cdot \vec{w})$, $c = \|\vec{w}\|^2$

⚠ Essendo $a \geq 0$, l'equazione è verificata $\Leftrightarrow \Delta \leq 0$. Dunque:

$b^2 - 4ac \leq 0 \Rightarrow \cancel{4}(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 - \cancel{4}\|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \leq 0;$

$(\vec{v} \cdot \vec{w})^2 \leq \|\vec{v}\|^2 \cdot \|\vec{w}\|^2 \Rightarrow \|\vec{v} \cdot \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|$ $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

③ $\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 = (\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + \vec{w}) =$ (Per i vettori geometrici:  elementare)

$= (\vec{v} \cdot \vec{v}) + (\vec{v} \cdot \vec{w}) + (\vec{w} \cdot \vec{v}) + (\vec{w} \cdot \vec{w}) =$

$= \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2$. Per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, (dimostrata in ④)

$\|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{v} \cdot \vec{w}) + \|\vec{w}\|^2 \leq \|\vec{v}\|^2 + 2(\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|) + \|\vec{w}\|^2 = (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2;$

$\|\vec{v} + \vec{w}\|^2 \leq (\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|)^2 \Rightarrow \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|$ $\boxed{\text{Q.E.D.}}$

In un qualunque spazio euclideo V, $\vec{e} \in V$ si dice un **versore** se la sua **norma** è uguale a 1.

Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ è un versore. Logicamente, anche $-\vec{e} = -\frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$ è un versore.

Dimostrazione: posto $h = \frac{1}{\|\vec{v}\|}$, $\vec{e} = h\vec{v}$. Allora:

$$\|\vec{e}\| = \|h\vec{v}\| = |h| \, \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1$$

Esercizio: Sia $\vec{v} = (1, 2, -1)$. Determinare un versore ad esso proporzionale.

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

$\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (1, 2, -1) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Proprietà dell'ortogonalità tra vettori

Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Sono dunque definite le operazioni $\vec{v}+\vec{w}$, $h\vec{v}$, $\vec{v}\cdot\vec{w}\in\mathbb{R}$

$\vec{v},\vec{w}$ si dicono **ortogonali** se $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$. Valgono le seguenti proprietà:

- $\vec{0}$ è ortogonale a qualunque vettore di V Dim: $\vec{v}\cdot\vec{0}+0=\vec{v}\cdot\vec{0}=\vec{v}\cdot(\vec{0}+\vec{0})=\vec{v}\vec{0}+\vec{v}\vec{0} \Rightarrow \vec{v}\vec{0}=\vec{0}$

- Se $\vec{v},\vec{w}$ sono ortogonali, $h,k\in\mathbb{R} \Rightarrow h\vec{v},k\vec{w}$ sono ortogonali.   Dim: $\vec{v},\vec{w}$ ortogonali $\Leftrightarrow \vec{v}\cdot\vec{w}=0$
$(h\vec{v})\cdot(k\vec{w})=(hk)(\underbrace{\vec{v}\cdot\vec{w}}_{=0})=0 \Rightarrow h\vec{v}\perp k\vec{w}$

Esempi:

$\boxed{\mathbb{R}^2}$ $\vec{v}=(1,2)$, $\vec{w}=(2,-1)$, $\vec{0}=(0,0)$ $\vec{v}\cdot\vec{0}=0$, $\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot2+2(-1)=0$

$\boxed{\mathbb{R}^3}$ $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(0,0,1)$, $\vec{u}=(0,1,-1)$, $\vec{u}'=(1,-1,0)$

$\vec{v}\cdot\vec{w}=1\cdot0+1\cdot0+0\cdot1=0$
$\vec{v}\cdot\vec{u}=1\cdot0+1\cdot1+0\cdot(-1)=1$ X
$\vec{v}\cdot\vec{u}'=1\cdot1+1(-1)+0\cdot0=0$

Esercizio: Dato un vettore, trovare un vettore ad esso ortogonale:

$\vec{v}=(1,3,0)$ $\vec{u}\perp\vec{v}$? $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono ortogonali $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$\vec{u}=(x,y,z)\perp v \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow x+3y=0$ (ricorda z)

$\vec{u}_1=(3,-1,1)$, $\vec{u}_2=(0,0,1)$

Per trovare un vettore $\perp$ a $\vec{v}$ sarà sufficiente trovare una soluzione particolare dell'equazione lineare.

Per trovare tutti i vettori $\perp\vec{v}$ basta trovare l'insieme delle soluzioni dell'equazione:

$y\to h$ $x\to-3h$
$z\to k$

$S=\{(-3h,h,k): h,k\in\mathbb{R}\}=\underbrace{\vec{V}_\perp}$ insieme costituito da tutti i vettori ortogonali a $\vec{v}$

Angolo di due vettori - definizione valida in un qualunque spazio euclideo

Richiamando i vettori geometrici, nei relativi spazi vettoriali l'operazione di prodotto scalare è definita come:
$\vec{v}\cdot\vec{w}=\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cos\vartheta$, con $\vartheta\in[0,\pi]$. In particolare, per $0\le\vartheta<\frac{\pi}{2}$ l'angolo si dice acuto, per $\frac{\pi}{2}<\vartheta\le\pi$ si dice ottuso e per $\vartheta=\frac{\pi}{2}$ si dice retto $(\vec{v}\cdot\vec{w}=0)$.

In un generico spazio vettoriale euclideo, si dice **angolo di due vettori** $(\vec{v},\vec{w}\neq\vec{0})$ l'unico angolo $\vartheta\in[0,\pi]$ tale che $\cos\vartheta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$. Infatti, considerando la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz $(|\vec{v}\cdot\vec{w}|\le\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|)$:

$$|\vec{v}\cdot\vec{w}|\le\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\| \Rightarrow -\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\le\vec{v}\cdot\vec{w}\le\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|;$$

dividendo membro a membro, essendo $\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|>0$: $(\vec{v},\vec{w}\neq\vec{0})$

$$-\frac{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\le\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\le\frac{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|} \Rightarrow -1\le\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}\le1$$

Insiemi Ortogonali

Sia V uno spazio vettoriale euclideo, $X=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_n\}\subseteq V$ si dice **ortogonale** se i vettori di X sono a due a due ortogonali, ovvero se $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=0\ \forall i\neq j$.
In particolare, X si dice **ortonormale** se è ortogonale e i vettori di X sono versori, ovvero se $\vec{v}_i\cdot\vec{v}_j=\underbrace{\delta_{ij}}$ simbolo di Kronecker

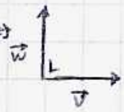
Esempi

$X=\{\vec{v}_1\}$ sempre ortogonale

$X=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ ortogonale $\Leftrightarrow \vec{v}_1\cdot\vec{v}_2=\vec{v}_1\cdot\vec{v}_3=\vec{v}_2\cdot\vec{v}_3=0$

Per trovare insiemi ortonormali, conviene trovare un insieme ortogonale e dividere ogni vettore per la sua norma.
Ne segue che non si può ricavare un insieme ortonormale se $\vec{0}\in X$ ortogonale

Si dice **base ortogonale** una base formata da vettori ortogonali. Analogamente, si dice **base ortonormale** una base formata da versori ~~ortogonali~~ ortogonali. Ne segue che la base naturale di uno spazio vettoriale di tipo $\mathbb{R}^n$ è sempre ortonormale.

Negli spazi vettoriali geometrici: $X=\{\vec{v},\vec{w}\}$ ortogonale $\Rightarrow$  ortonormali se $\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=1$

$X=\{\vec{v},\vec{w},\vec{u}\}$ ortogonale $\Rightarrow$  ortonormale se $\|\vec{v}\|=\|\vec{w}\|=\|\vec{u}\|=1$

Teorema: Sia $X=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$. Se X è ortogonale e $\vec{0}\notin X$, X è sicuramente linearmente indipendente.

Dimostrazione: X è linearmente indipendente $\Leftrightarrow h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0} \Leftrightarrow h_1=h_2=\dots=h_n=0$

Supponendo $h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n}=\vec{0}$, $\quad (h_1\vec{v_1}+h_2\vec{v_2}+\dots+h_n\vec{v_n})\cdot\vec{v_1}=\vec{0}\cdot\vec{v_1};$

$$h_1(\vec{v_1}\cdot\vec{v_1})+\underbrace{h_2(\vec{v_2}\cdot\vec{v_1})+\dots+h_n(\vec{v_n}\cdot\vec{v_1})}_{=0 \text{ poiché } X \text{ è ortogonale per ipotesi}}=\vec{0};$$

$$h_1(\vec{v_1}\cdot\vec{v_1})=\vec{0} \Rightarrow h_1=0 \quad (\vec{v_1}\neq\vec{0} \text{ per ipotesi})$$

Esercizio: Sia $\vec{v}=(1,1,-1)$.

a) determinare una base ortogonale B di $\mathbb{R}^3$ che contenga $\vec{v_1}$
b) determinare una base ortonormale B' di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\vec{v_1}$
c) determinare un versore $\vec{e_1}$ proporzionale a $\vec{v_1}$
d) determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che contenga $\vec{e_1}$

> Si noti che in $\mathbb{R}^3$ è impossibile trovare più di 4 vettori in un insieme di vettori ortogonali (il quarto è $\vec{0}$), poiché gli insiemi linearmente indipendenti hanno un numero di elementi minore o uguale alla dimensione dello spazio vettoriale di riferimento.

a) $B=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\vec{v_3}\}$. Troviamo $\vec{v_2}\perp\vec{v_1}$ e $\vec{v_3}: \vec{v_3}\perp\vec{v_1} \overset{(\wedge)}{\cap} \vec{v_3}\perp\vec{v_2}$

$\vec{v_2}=(x,y,z): \vec{v_1}\cdot\vec{v_2}=0 \Rightarrow x+y-z=0$ $\quad$ es. $\vec{v_2}=(1,1,2)$

$$\vec{v_3}=\begin{cases}x+y-z=0\\x+y+2z=0\end{cases};\quad\begin{cases}x+y-z=0\\3z=0\end{cases};\quad\begin{cases}x=-y\\z=0\end{cases}\quad \text{es. } \vec{v_3}=(1,-1,0)$$

$B=\{(1,1,-1),(1,1,2),(1,-1,0)\}$

b) $\|\vec{v_1}\|\neq 1 \Rightarrow$ non esiste alcuna base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che contiene $\vec{v_1}$

c) $\vec{e_1}=\dfrac{1}{\|\vec{v_1}\|}\cdot\vec{v_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot(1,1,-1) \Rightarrow \vec{e}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

d) $B'=\left\{\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{1}{\sqrt{6}},\dfrac{2}{\sqrt{6}}\right),\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$ basta dividere ogni vettore per la sua norma.

Matrice Ortogonale

Una matrice A quadrata di ordine n si dice **ortogonale** se $A^t=A^{-1}$

$$A^t=A^{-1} \Leftrightarrow A\cdot A^t=A^t\cdot A=I$$

Teorema: Sono equivalenti:

1) A è ortogonale $\quad (\Leftrightarrow A\cdot A^t=A^t\cdot A=I)$

2) Le righe di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ $\quad$ (ortonormale $\Rightarrow \vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=\delta_{ij}$)

3) Le colonne di A sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Dim $1\Rightarrow 2$: $A\cdot A^t=[a_{ij}]\cdot[a_{ji}]=I \Rightarrow \vec{v_i}\cdot\vec{v_j}=\delta_{ij}$ $\quad$ ovvero

$$\begin{array}{c}\vec{v_i}\\ \begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\end{array}\cdot\begin{array}{c}\vec{v_j}\\ \begin{bmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{m1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{m2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{mn}\end{bmatrix}\end{array}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

($2\Rightarrow 1$, $3\Rightarrow 1$ lasciate come esercizio)

Analogo per $1\Rightarrow 3$

Complemento Ortogonale

Si definisce complemento ortogonale l'insieme costituito da tutti i vettori ortogonali a quelli dati.

$\vec{v}^{\perp}$ compl. ort. di $\vec{v}$ $\quad$ $\{\vec{v},\vec{w}\}^{\perp}$ compl. ort. di $\vec{v}$ e $\vec{w}$

Sia $X=\{\vec{v_1},\vec{v_2},\dots,\vec{v_n}\}$ una n-pla di vettori di V. si dice complemento ortogonale di X, denotato con $X^{\perp}$, l'insieme formato da tutti i vettori di V che sono ortogonali ad ogni vettore di X, ovvero:

$$X^{\perp}=\{\vec{v}\in V:\vec{v}\cdot\vec{v_i}=0,\ \forall i\}$$

Proprietà del complemento ortogonale

1) $\vec{v}\in X\cap X^{\perp}\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$ $\qquad$ Dim: $\vec{v}\in X\cap X^{\perp}\Rightarrow\vec{v}\in X,\vec{v}\in X^{\perp}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow\vec{v}=\vec{0}$

2) $X\subseteq Y\Rightarrow Y^{\perp}\subseteq X^{\perp}$ $\qquad$ Dim. ovvia

3) Se $U=L(X)\Rightarrow U^{\perp}=X^{\perp}$ $\qquad$ Es: $U=\{(h,k,0):h,k\in\mathbb{R}\}$; $B=\{(1,0,0),(0,1,0)\}$, $U^{\perp}=B^{\perp}=\{(0,0,h):h\in\mathbb{R}\}$

4) $X^{\perp}$ è <u>sempre</u> un sottospazio vettoriale di V

<u>Dimostrazione della 4</u>: È sufficiente dimostrare che $X^{\perp}$ è chiuso rispetto alla somma e al prodotto di uno scalare per un vettore:

1. $X^{\perp}\neq\emptyset$ poiché $\vec{0}\in X^{\perp}$, infatti $\vec{0}\cdot\vec{u}=0\ \forall\vec{u}\in X$
2. $\vec{v_1},\vec{v_2}\in X^{\perp}\Rightarrow\vec{v_1}\cdot\vec{u}=0=\vec{v_2}\cdot\vec{u}\ \forall\vec{u}\in X\Rightarrow(\vec{v_1}+\vec{v_2})\vec{u}=\vec{v_1}\cdot\vec{u}+\vec{v_2}\cdot\vec{u}=0+0=0\Rightarrow(\vec{v_1}+\vec{v_2})\in X^{\perp}$ $\quad$ $X^{\perp}$ chiuso rispetto alla somma
3. $\vec{v}\in X^{\perp},h\in\mathbb{R}\Rightarrow\vec{v}\cdot\vec{u}=0\ \forall\vec{u}\in X\Rightarrow(h\vec{v})\vec{u}=h(\vec{v}\cdot\vec{u})=h0=0\Rightarrow h\vec{v}\in X^{\perp}$ $\quad$ $X^{\perp}$ chiuso rispetto al prodotto di uno scalare per un vettore

Sistemi Lineari: Forma Vettoriale

Ricapitolando, nelle pagine precedenti sono state analizzate:

- Forma scalare: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m\end{cases}$

- Forma matriciale: $\underbrace{\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{bmatrix}}_{B}$ $\qquad$ matrice completa $A'=\begin{array}{c}\begin{matrix}\vec{a_1}&\vec{a_2}&\dots&\vec{a_n}&\vec{b}\end{matrix}\\\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}&b_m\end{bmatrix}\end{array}$

$$A\quad X\quad=\quad B$$

Forma Vettoriale

partendo da $\begin{bmatrix}a_{11}x_1&a_{12}x_2&\dots&a_{1n}x_n\\a_{21}x_1&a_{22}x_2&\dots&a_{2n}x_n\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}x_1&a_{m2}x_2&\dots&a_{mn}x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{bmatrix}$ si ottiene:

$$\begin{bmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{bmatrix}x_1+\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\\dots\\a_{m2}\end{bmatrix}x_2+\dots+\begin{bmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{bmatrix}x_n=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_m\end{bmatrix}$$

forma vettoriale di un sistema lineare

Rappresentandola sinteticamente,

$$\vec{a_1}x_1+\vec{a_2}x_2+\dots\vec{a_n}x_n=\vec{b}$$

> Si osserva dunque che il vettore $\vec{v}(h_1,h_2,\dots,h_n)$ è soluzione del sistema $\Leftrightarrow$ $\vec{b}$ è combinazione lineare dei vettori $\vec{a_1},\vec{a_2},\dots,\vec{a_n}$ secondo gli scalari $h_1,h_2,\dots,h_n$.

Teorema: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema lineare abbia soluzione è che la <u>colonna</u> dei termini noti sia combinazione lineare delle <u>colonne</u> dei coefficienti delle incognite, ovvero se:

$$\vec{b} \in L(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$$

Teorema: Supponiamo che il sistema abbia soluzione, allora se i vettori sono linearmente indipendenti esso ha una e una sola soluzione; se i vettori sono linearmente dipendenti esso ha infinite soluzioni.

Si ricorda che i vettori $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \dots, \vec{a_n})$ coincidono con le <u>colonne</u> di A

Teorema di Rouché-Capelli

Teorema di Rouché-Capelli: Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema abbia soluzioni è che sia:

$$r(A) = r(A')$$

Ciò perché se $\vec{b}$ è combinazione lineare dei vettori di A, $r(A) = r(A')$. Altrimenti, se $\vec{b}$ <u>non è</u> combinazione lineare dei vettori di A, il sistema è incompatibile e $r(A') = r(A) + 1$. *Si ricorda che in questo caso il rango si considera coincidente al massimo numero di <u>colonne</u> linearmente indipendenti.*

Teorema: Sapendo che $r(A) \leq n$, supponendo che il sistema sia compatibile (per il teorema appena enunciato, $r(A) = r(A')$),

Il sistema ha:

una e una soluzione $\iff r(A) = r(A') = n$

∞ soluzioni $\iff r(A) = r(A') < n$

si ricorda che n coincide col numero di incognite (e dunque di coordinate di $\vec{v}$)

Teorema: Sia $r(A) = r(A') = h < n$

Allora il sistema ha $n-h$ variabili indipendenti e dunque ∞^{n-h} soluzioni.

Caso particolare: Sistemi lineari omogenei $(\vec{b} = \vec{0})$

Il sistema è logicamente sempre compatibile, occorre semplicemente verificare se ha solo la soluzione nulla o altre soluzioni oltre quella nulla (anche se si sarebbe portati a calcolare il numero di soluzioni sfruttando il teorema appena esplicitato, nel caso di sistemi lineari omogenei l'unico discrimine considerato è se il sistema ha una soluzione o più soluzioni).

Un sistema lineare omogeneo ha solo la soluzione nulla $\iff r(A) = n$, ovvero se il massimo numero di colonne linearmente indipendenti è pari al numero di incognite.

Determinante di una Matrice <u>quadrata</u> di ordine n

⚠: esiste il determinante SOLO delle <u>matrici quadrate</u>

Premessa: Permutazione dei primi n numeri naturali

Volendo dare un'idea del concetto matematico, una permutazione dei primi n numeri naturali è un possibile allineamento dei primi numeri naturali.

Ad esempio:

$n=2$ $\quad (1,2)$; $(2,1)$
standard

$n=3$ $\quad (1,2,3)$; $(2,3,1)$; $(3,1,2)$
standard

$(1,3,2)$; $(2,1,3)$; $(3,2,1)$

$n=4$ $\quad$ 24 permutazioni

Le permutazioni si distinguono in permutazioni di classe pari o permutazioni di classe dispari a seconda del numero di "scambi" effettuati rispetto alla permutazione standard (pari per definizione): se si ha un numero di scambi pari, la permutazione è di classe pari e viceversa.

Il numero di permutazioni dei primi n numeri naturali è pari a $n!$ (n fattoriale); metà di queste sono di classe pari, l'altra di classe dispari. Nello schema a fianco, per $n=3$ le permutazioni di classe pari occupano la prima riga, quelle di classe dispari occupano la seconda riga.

Per determinare facilmente se una permutazione è di classe pari o dispari, la si riferisce sempre alla permutazione standard: osservando la seguente simbologia, si noti che la prima riga è sempre occupata dalla configurazione standard. Tali permutazioni si rappresentano con lettere greche; in particolare la permutazione standard si denota con la lettera ι (iota, lettera simile a 1).

Riprendendo lo schema precedente:

$n=2$ $\quad \iota = \underset{\text{pari}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \quad \sigma = \underset{\text{dispari}}{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$

$n=3$ $\quad \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ pari

$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ dispari

In generale: $\quad \iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Determinante di una matrice

Associamo ora ad ogni permutazione un prodotto di elementi della matrice. Ad esempio:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix} \longrightarrow a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Si definisce determinante di una matrice, denotato con $|A|$ o $\det A$, la somma dei prodotti appena definiti, operati per ciascuna permutazione e presi col segno $(-)$ se associati ad una permutazione di classe dispari.

$n=2 \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad \det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

$n=3 \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

↓ Pari (+)

$\iota = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$

↓ Dispari (−)

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \boxed{+} a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \boxed{+} a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Osservazioni

1) In ogni addendo c'è un elemento per ogni riga ed un elemento per ogni colonna

2) Se $\sigma \neq \iota$, in ogni prodotto c'è almeno un elemento al di sopra della diagonale principale e almeno un elemento al di sotto della diagonale principale

3) Se $n=1 \Rightarrow A = [a_{11}]$, $\det A = a_{11}$

Nelle matrici di tipo **3x3**, è possibile applicare la cosiddetta **regola di Sarrus**:

$$|A| = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11} \cdot a_{12} \cdot a_{13} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + - a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{32}$$

Determinante di una matrice generica

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Denotando con S_n l'insieme di tutte le permutazioni dei primi n numeri naturali (dunque S_n ha $n!$ elementi):

$\sigma \in S_n$ Denotiamo con $r(\sigma)$ il numero di scambi rispetto alla standard

$$\det A = |A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{r(\sigma)} \underbrace{a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}}_{\text{indici di posto di } a} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} + \sum_{\sigma \neq \iota}^{S_n} (-1)^{r(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

Proprietà del determinante di una matrice

[Perlopiù ricavate dalle osservazioni]

1. Se ~~su~~ una riga [colonna] di A è il vettore nullo allora $|A| = 0$
2. Se A è una matrice triangolare allora $|A|$ è pari al prodotto degli elementi della diagonale principale $\Rightarrow |A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$
3. Una matrice e la sua trasposta hanno lo stesso determinante $\Longrightarrow |A| = |A^t|$

Determinanti e trasformazioni elementari

Dalla proprietà 2 risulta evidente che il calcolo del determinante di una matrice triangolare è particolarmente semplice; sappiamo inoltre associare ad una matrice generica una matrice "più semplice" mediante le trasformazioni elementari. Operando dette trasformazioni il determinante della matrice di partenza cambia, ma è sempre proporzionale a quello della matrice associata. Vediamo come:

T1: Se B si ottiene da A scambiando due righe [colonne], $|B| = -|A|$ non cambia se il numero di T1 è pari!

T2: Se B si ottiene da A moltiplicando una riga [colonna] per uno scalare $h \neq 0$, $|B| = h|A|$

T3: Se B si ottiene da A sommando ad una riga [colonna] un'altra riga [colonna] moltiplicata per uno scalare $h \neq 0$, $|A| = |B|$

Esempi (si noti che, a differenza che per il rango, si può operare indifferentemente su righe e su colonne)

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow - \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

2 scambi $\Rightarrow |A|$ non cambia; essendovi 1 in prima posizione i successivi calcoli sono semplici

$$\begin{array}{c} \\ (2) \\ (2) \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow \frac{1}{4} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 6 & 4 & 6 \\ 10 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Per l'"inversa" della T2; essendo la prima colonna formata da termini pari i successivi calcoli sono semplici.

Teorema: Se A e B sono equivalenti per righe [colonne] e $|A| = 0$, allora anche $|B| = 0$.

Dim: Essendo le matrici equivalenti, i loro determinanti sono proporzionali, ma $h \cdot 0 = 0 \cdot h = 0 \quad \forall h$

Si nota che il metodo di trasformazione è conveniente solo se esso conduce la matrice data ad una matrice triangolare equivalente in <u>pochi passaggi</u>:

- $\begin{vmatrix} 6 & 6 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 2 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -10 \end{vmatrix} = 30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} \overset{(2)}{=} -30 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -30$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3$

- $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 4$

Determinante e dipendenza/indipendenza lineare

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sia le righe che le colonne di A sono vettori di $\mathbb{R}^n$

Come è noto, sono logicamente equivalenti:

a) $r(A) = n$
b) le righe di A sono linearmente indipendenti
c) le colonne di A sono linearmente indipendenti
d) le righe di A sono una base di $\mathbb{R}^n$ ($\dim \mathbb{R}^n = n$)
e) le colonne di A sono una base di $\mathbb{R}^n$
f) $A \sim I$ (dimostrato precedentemente)
g) A è invertibile (segue dalle proprietà delle matrici elementari)
h) $\boxed{\det A \neq 0}$

<u>Dim. f ⟹ h</u>

$A \sim I$, $|I| = 1 \neq 0 \Rightarrow |A| \neq 0$

<u>Dim. h ⟹ a</u>

$|A| \neq 0$; A equivale a una matrice triangolare con gli elementi della diagonale principale diversi da $0 \Rightarrow r(B) = r(A) = n$

Analogamente, se $|A| = 0$, A non è invertibile, non è equivalente ad I ...

Determinanti ed operazioni con le matrici

1) $|A+B| \neq |A+B|$ esempio: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} |A| = 0 \\ |B| = 0 \end{matrix}$ $|A+B| = 1$ $\left(A+B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$

2) $|hA| = h^n |A|$ segue dalla T2

3) $|AB| = |A| \cdot |B|$ <u>Teorema di Binet</u>

Dal teorema di Binet seguono molti altri teoremi.

Corollari del Teorema di Binet

① A invertibile $\Rightarrow |A| \neq 0$ $\left(\Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|\right)$

<u>Dimostrazione</u>: A è invertibile $\Rightarrow \exists A^{-1}$ inversa di A: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$. Per il <u>teorema di Binet</u>, $|A| \cdot |A^{-1}| = |A \cdot A^{-1}| = |I|$.

Poiché $|I| = 1 \neq 0 \Rightarrow |A| \cdot |A^{-1}| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$ $\left(\Rightarrow |A^{-1}| = 1/|A|\right)$

② $|-A| = (-1)^n |A|$

<u>Dimostrazione</u>: $|-A| = |(-1)A| = (-1)^n |A|$

③ Se A è ortogonale, $|A| = \pm 1$ (A si dice ortogonale se $A^{-1} = A^t$)

Ulteriore proprietà delle matrici ortogonali

<u>Dimostrazione</u>: $|A|^2 = |A| \cdot |A| = |A| \cdot |A^t| = |AA^t| = |AA^{-1}| = |I| = 1 \Rightarrow |A| = \pm 1$

Teorema di Laplace

Premessa: Complemento algebrico di un elemento di una matrice quadrata

Si dice complemento algebrico dell'elemento a_{ij}, denotato con A_{ij}, il determinante della matrice M_{ij} che si ottiene da A cancellando la riga i-ma e la colonna j-ma, preso col segno + o col segno meno a seconda che $i+j$ sia pari(+) o dispari(-), ovvero:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}|M_{ij}|$$

Inoltre, l'elemento a_{ij} si dice di posto pari se $i+j$ è pari, di posto dispari se $i+j$ è dispari.

Esempio

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Operando per righe: $A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = 1\cdot 6 + 1(-4) + 3\cdot 0 = 2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = 2(-2) + 3(2) + 2(0) = 2$$

Operando per colonne: $A_{11} = 6$, $A_{21} = -2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$

$$a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = 1\cdot 6 + 2(-2) + 0(-7) = 2$$

Teorema di Laplace

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Il determinante di A è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga[colonna] comunque fissata per i rispettivi complementi algebrici, ovvero:

Fissata $[a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]_{1 \le i \le n}$, $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Analogamente, fissata $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{bmatrix}_{1 \le j \le n}$, $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$

Si osserva che conviene scegliere la riga/colonna con molti 0 (calcoli meno determinanti), individuabile anche attraverso il metodo di trasformazione (basta ricondurre la matrice ad una equivalente con molti 0 su una riga[colonna], non deve essere necessariamente triangolare)

Esercizio

$X = \{(h-4, -6, 0), (3, h+5, 0), (3, 6, h+5)\}$ stabilire se X è lin. ind (per quali valori di h), è una base di $\mathbb{R}^3$, il rango della matrice che ha per righe i vettori di X.

Operiamo sulla matrice A, calcolandone il determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} h-4 & -6 & 0 \\ 3 & h+5 & 0 \\ 3 & 6 & h+5 \end{vmatrix} \overset{\text{Laplace}}{=} (h+5)\begin{vmatrix} h-4 & -6 \\ 3 & h+5 \end{vmatrix} = (h+5)[(h-4)(h+5)+18] = (h+5)(h^2-4h+5h-20+18) = (h+5)(h^2+h-2) =$$

$$= (h+5)(h+2)(h-1)$$

evita il parametro nelle t. elementari

Se $h \neq -5 \wedge h \neq -2 \wedge h \neq 1$, $|A| \neq 0 \Rightarrow X$ è lin. ind, una base di $\mathbb{R}^3$, $r(A) = 3$

Se $h = -5$, $A = \begin{bmatrix} -9 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ le prime due righe sono lin. ind $\Rightarrow r(A) = 2$ $\quad \dim U = 2$

U spazio righe di A

Secondo Teorema di Laplace

Non nome effettivo

La somma dei prodotti degli elementi di una riga [colonna] per i complementi algebrici degli elementi di un'altra riga [colonna] è *sempre* uguale a 0

Dimostrazione

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$; consideriamo le prime due righe della matrice $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = 0$

Applichiamo Laplace a B:

$$|B| = a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + \ldots + a_{2n}A_{1n} = 0$$

Coincidono (complementi su A)

Esempio:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 1\left(-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) + 2\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 3\left(-\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\right) = 5 - 8 + 3 = 0 \quad \square$$

Aggiunta di una matrice

Si dice aggiunta di A, denotata con **adjA**, la trasposta della matrice dei complementi algebrici degli elementi di A

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{adj}A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

matrice dei complementi algebrici

Teorema: $A \cdot (\text{adj}A) = (\text{adj}A) \cdot A = |A| I = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix}$

In particolare, se $|A| = 0$, $A \cdot (\text{adj}A) = (\text{adj}A) \cdot A = \underline{0}$

Dimostriamo $A \cdot (\text{adj}A) = |A| \cdot I$ (analogamente per $(\text{adj}A) \cdot A$, ma operando sulle colonne)

$$A \cdot (\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{bmatrix} = |A| I \quad \square$$

O: segue dal I T. di Laplace

O: segue dal II T. di Laplace

Teorema: Se $|A| \neq 0$, allora A è invertibile. In particolare, $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj}A)$

(In precedenza è stato dimostrato che A invertibile $\Rightarrow |A| \neq 0$ (segue dal teorema di Binet))

Dimostrazione

$$A \cdot \left(\frac{1}{|A|}\text{adj}A\right) = \frac{1}{|A|}(A \cdot \text{adj}A) = \frac{1}{|A|}(|A| \cdot I) = 1I = I \quad \square$$

Esempio

Sia $A=\begin{bmatrix}3&2&1\\1&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}$

a) Stabilire se A è invertibile
b) In caso di risposta positiva, trovare A^{-1}
c) Eseguire la verifica

a) $|A|=\begin{vmatrix}3&2&1\\1&1&3\\0&0&2\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=2\neq 0 \Longrightarrow A$ è invertibile

per il teorema appena dimostrato

b) $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4&5\\-2&6&-8\\0&0&1\end{bmatrix}$

Il prodotto lo lasciamo sciolto per semplicità di calcoli (frazioni nella matrice implica una maggior probabilità di errore)

c) Verifichiamo che $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$:

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-4&5\\-2&6&-8\\0&0&1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}3&2&1\\1&1&3\\0&0&2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I \quad \square$$

Analogamente per $A\cdot A^{-1}$

Sistemi di Cramer

Un sistema lineare si dice di Cramer se sono verificate contemporaneamente:

1) Il numero di equazioni è uguale al numero delle incognite
(segue che la matrice A dei coefficienti delle incognite è quadrata)

2) Il determinante della matrice A dei coefficienti delle incognite è diverso da 0
(segue che il rango di A è uguale ad n)

Osservazione definita A' la matrice completa, si osserva che $\underbrace{n}_{\text{numero di righe/colonne di } A}=r(A)\leq \underbrace{r(A')}_{\text{ha una colonna in più}}\leq \underbrace{n}_{\text{numero di righe di } A'} \Longrightarrow r(A')=n \Longrightarrow$ Un sistema di Cramer è sempre compatibile ed ha una e una sola soluzione.

Regola di Cramer per la risoluzione dei Sistemi Omonimi

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2\\\dots\dots\dots\dots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\dots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\equiv\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\dots\\b_n\end{bmatrix}\equiv AX=B$$

L'**unica soluzione** di un sistema di Cramer è data da:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)=\left(\frac{|A_1|}{|A|},\frac{|A_2|}{|A|},\dots,\frac{|A_n|}{|A|}\right)$$

Dove la matrice A_i è la matrice che si ottiene da A sostituendo alla **i-ma colonna** la colonna dei termini noti.

Esempi: $A_1=\begin{bmatrix}b_1&a_{12}&\dots&a_{1n}\\b_2&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\b_n&a_{2n}&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$; $A_2=\begin{bmatrix}a_{11}&b_1&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&b_2&\cdots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&b_n&\dots&a_{nn}\end{bmatrix}$; ... ; $A_n=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&b_2\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&b_n\end{bmatrix}$

Dunque, $x_1=\dfrac{|A_1|}{|A|}$, $x_2=\dfrac{|A_2|}{|A|}$, ..., $x_n=\dfrac{|A_n|}{|A|}$.

Dimostrazione della validità della regola di Cramer

$$AX=B,\ |A|\neq 0 \Longrightarrow A \text{ è invertibile, } A^{-1}=\frac{1}{|A|}\,\mathrm{adj}\,A$$

$$AX=B \Rightarrow A^{-1}(AX)=A^{-1}(B) \Longrightarrow (A^{-1}A)X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow I\cdot X=A^{-1}\cdot B \Rightarrow X=A^{-1}\cdot B \quad \square$$

Esplicitando l'ultimo risultato ottenuto:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} b_1(A_{11})+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1} \\ b_1A_{12}+b_2A_{22}+\dots+b_nA_{n2} \\ \cdots \\ b_1A_{1n}+b_2A_{2n}+\dots+b_nA_{nn} \end{bmatrix}$$

Analizziamo ora i determinanti delle matrici A_i:

$$|A_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Applichiamo Laplace} \\ \text{secondo la prima colonna}\end{pmatrix} = \underbrace{b_1A_{11}+b_2A_{21}+\dots+b_nA_{n1}}$$

perché coincidenti con i complementi algebrici omologhi su A

$$|A_i| = \underset{\text{secondo la } i\text{-ma colonna}}{\text{Applichiamo Laplace}} = b_1A_{1i}+b_2A_{2i}+\dots+b_nA_{ni} = \sum_{j=1}^{n} b_jA_{ji} \qquad (i \text{ fissato})$$

Dunque, $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} |A_1| \\ |A_2| \\ \cdots \\ |A_n| \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A_1|/|A| \\ |A_2|/|A| \\ \cdots \\ |A_n|/|A| \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{QED}}$

Esercizio

Sia $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h \end{bmatrix}$

a) Stabilire per quali valori di h A è invertibile

b) Scelto a piacere un valore di h per cui A è invertibile, determinare A^{-1}

c) Data $B=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$, stabilire per quali valori di h il sistema lineare associato ($AX=B$) è di Cramer

d) Scelto a piacere un valore di h per cui il sistema è di Cramer, risolverlo applicando la regola di Cramer.

a) $|A| \overset{(-2)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{1} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & h-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & h-2 \end{vmatrix} = h-2+3 = h+1 \qquad |A|\neq 0 \iff h\neq -1$

Se $|A|=0$, cioè se $h=-1$, A non è invertibile

Se $|A|\neq 0$, cioè se $h\neq -1$, A è invertibile

Attenzione: Matrici equivalenti <u>non hanno</u> la stessa inversa!

b) Sia $h=0$. Allora $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ è invertibile.

$$A^*=\begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \mathrm{adj}\,A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1}=\frac{1}{|A|}\mathrm{adj}\,A = 1\cdot\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad h=0 \Rightarrow |A|=1$$

c) Il sistema $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ y+z=3 \\ 2x+y+hz=0 \end{cases}$ $\quad |A|\neq 0 \iff h\neq -1 \Rightarrow$ Il sistema è di Cramer se $h\neq -1$

d) Sia $h=0 \Rightarrow |A|=1$ $\quad x=\frac{|A_1|}{|A|}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2$; $\quad y=\frac{|A_2|}{|A|}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4$; $\quad z=\frac{|A_3|}{|A|}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 7$

Unica soluzione: $(2,-4,7)$

Sottomatrici e Minori di una Matrice

Sia A una matrice di tipo $m\times n$, e siano $i_1, i_2, \dots, i_h$ h righe della matrice A e $j_1, j_2, \dots, j_k$ k colonne della matrice A.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Si dice sottomatrice di A determinata dalle righe $i_1, i_2, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, j_2, \dots, j_k$ la matrice di tipo $h\times k$ definita da:

$$\begin{bmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i_hj_1} & a_{i_hj_2} & \cdots & a_{i_hj_k} \end{bmatrix}$$

Esempio

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

- fissando $\begin{matrix} i_1=1, i_2=3 \\ j_1=2, j_2=3, j_3=4 \end{matrix}$, si ottiene la sottomatrice $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$, determinata da 1^a e 3^a riga, 2^a, 3^a e 4^a colonna.
- fissando le prime due righe e la prima e terza colonna, la sottomatrice ottenuta è quadrata di ordine 2: $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$
- fissando solo una riga e una colonna (3^a riga, 2^a colonna) si ottiene una matrice 1×1: $[7]$ (caso limite)
- in questo caso, la più grande sottomatrice quadrata è di ordine 3: fissiamo tutte le righe e prima, seconda, quarta colonna: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{bmatrix}$
  Si osserva che il numero di sottomatrici quadrate di ordine massimo è pari al maggior numero tra n e m
- fissando tutte le righe e tutte le colonne, si osserva che A è sottomatrice di sé stessa (caso limite)

Si definisce **minore di A di ordine h** il determinante di una sottomatrice di A quadrata di ordine h. In particolare, se la sottomatrice è determinata dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$, si dice anche che il minore è determinato dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$.

Esempio

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1$ "minore di ordine 3" ; $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$ "minore di ordine 2" $|7| = 7$ minore di ordine 1 determinato dalla 3^a riga e 2^a colonna

Orlato di un Minore

Sia $|M|$ il minore di ordine h determinato dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$; si dice **orlato** di questo minore ogni minore di ordine $h+1$ che si ottiene aggiungendo una riga ed una colonna a quelle già fissate.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

consideriamo il minore $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$, ovvero il minore determinato da 1^a e 2^a riga e 1^a e 2^a colonna.

Tale minore ha **2 orlati**:

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix}$ aggiunta di 3^a riga e 3^a colonna

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ ho "orlato" con la 3^a riga e la 4^a colonna

Si osserva che, malgrado vi siano 4 minori di ordine $h+1$ (leggasi "1 superiore"), solo due di questi sono orlati del minore specificato.

Esistono tre importanti teoremi in relazione agli orlati che permettono una semplicità di discussione di matrici rettangolari:

Teorema 1: Sia $|M|$ il minore di ordine h determinato dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$ della matrice A.
Se $|M| \neq 0$, allora:

a) le righe $i_1, \dots, i_h$ di A sono linearmente indipendenti
b) le colonne $j_1, \dots, j_h$ di A sono linearmente indipendenti
c) $r(A) \geq h$

Teorema 2: Sia $|M|$ il minore di ordine h determinato dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$ della matrice A.
Se $|M| \neq 0$ e se tutti i minori di ordine $h+1$ sono uguali a 0, allora:

a) le righe $i_1, \dots, i_h$ di A sono un insieme massimale di righe linearmente indipendenti $\Rightarrow$ una base dello spazio delle righe
b) le colonne $j_1, \dots, j_h$ di A sono un insieme massimale di colonne linearmente indipendenti $\Rightarrow$ una base dello spazio delle colonne
c) $r(A) = h$

Teorema 3 o
Teorema degli Orlati: Sia $|M|$ il minore di ordine h determinato dalle righe $i_1, \dots, i_h$ e dalle colonne $j_1, \dots, j_h$ della matrice A.
Se $|M| \neq 0$ e se tutti gli orlati del minore sono uguali a 0, allora:

a) le righe $i_1, \dots, i_h$ di A sono un insieme massimale di righe linearmente indipendenti e dunque una base dello spazio delle righe

b) le colonne $j_1, \dots, j_h$ di A sono un insieme massimale di colonne linearmente indipendenti e dunque una base dello spazio delle colonne

c) $r(A) = h$

Esercizio

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 & h \end{bmatrix}$ Determinare, al variare di $h \in \mathbb{R}$: a) $r(A)$
b) una base di U spazio delle righe
c) una base di W spazio delle colonne

Si può procedere in due modi: a) trasformazioni elementari
b) teorema degli orlati (utile nel caso in cui vi siano molti parametri)

a) Sfruttando le trasformazioni, si trova $A' \sim A$, $A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & h-1 \end{bmatrix}$. Se $h \neq 1 \Rightarrow r(A) = r(A') = 3 = \dim U = \dim V$
Base $=$ 3 righe/colonne lin. ind.
Se $h = 1 \Rightarrow r(A) = r(A') = 2 = \dim U = \dim V$

b) $1 \leq r(A) \leq 3$
la sottomatrice $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ha determinante $\neq 0 \Rightarrow r(A) \geq 2$. Studiamo i due orlati di questo minore:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

si osservi che il determinante è uguale a zero poiché due righe sono proporzionali; alternativamente si osserva che l'applicazione di La Place alla terza colonna della matrice determina $|A| = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 1 & -1 & h \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & h-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & h-3 \end{vmatrix} = h-3+2 = h-1$$

Per il teorema degli orlati, se $h-1 = 0 \Rightarrow h = 1$, $r(A) = 2$; la base dello spazio delle righe/colonne coincide con i vettori riga/colonna del minore di ordine 2 ($|M| \neq 0$)
Se, viceversa, $h \neq 1$, $r(A) \geq 3$ per il t. orlati, ma $r(A) \leq 3$ come prima osservazione $\Rightarrow r(A) = 3$; le righe/colonne di questo minore sono basi del rispettivo spazio

Applicazione del teorema degli Orlati ai sistemi lineari

Discutere il seguente sistema lineare al variare di h in $\mathbb{R}$. In particolare stabilire per quali valori di h il sistema è di Cramer.

$$\begin{cases} x+2y+z=1 \\ x+3y+2z=-1 \\ 3x+7y+4z=h \end{cases}$$ matrice incompleta $A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&3&2\\3&7&4\end{bmatrix}$ matr. completa $A'=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&3&2&-1\\3&7&4&h\end{bmatrix}$

Si osserva che il sistema ha per matrice completa la matrice studiata nell'esercizio precedente:

$|A|=0$; $r(A)\leq 2$ ma $\exists$ minore di ordine $2\neq 0 \Rightarrow r(A)=2$

$r(A')\geq 2$; $r(A')=2 \Leftrightarrow h=1$ per dimostrazione precedente

Per il teorema di Rouché-Capelli, il sistema ha soluzioni $\Leftrightarrow r(A)=r(A')$

Dunque $r(A)=r(A')=2 \Leftrightarrow h=1$; il sistema è compatibile ed ha ∞^{n-h} soluzioni $=\infty^1$ soluzioni (altrimenti non ha soluzione)

Logicamente, il sistema non è mai di Cramer.

Sistema lineare parametrico

$$\begin{cases} kx+k^2y=k^3 \\ k^2x+ky=k^3 \\ (k^2-1)x+(k-1)y=k^3 \end{cases} \qquad A'=\left[\begin{array}{cc:c} k & k^2 & k^3 \\ k^2 & k & k^3 \\ k^2-1 & k-1 & k^3 \end{array}\right] \qquad \begin{array}{l} r(A)\leq 2 \\ r(A')\leq 3 \end{array}$$ se $r(A')=3$ il sistema non ha soluzione

⚠: **Se una delle matrici è quadrata conviene sempre studiarne il determinante.**

Se $|A'|\neq 0 \Rightarrow r(A')=3$ sistema incompatibile per il teorema di Rouché-Capelli

$$|A'|=\begin{vmatrix} k & k^2 & k^3 \\ k^2 & k & k^3 \\ k^2-1 & k-1 & k^3 \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} k & k^2 & 1 \\ k^2 & k & 1 \\ k^2-1 & k-1 & 1 \end{vmatrix} = k^3\begin{vmatrix} k-k^2 & k^2-k & 0 \\ k^2 & k & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = k^3(k^2-k)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ k^2 & k & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = k^3(k^2-k)\left(-\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}\right) = -2k^3(k^2-k) \Rightarrow$$

$\Rightarrow |A'| = -2k^4(k-1) = 0 \rightarrow k=0,\ k=1$ Se $k\neq 0,1$, il sistema non è compatibile

Se $k=0$, $A'=\left[\begin{array}{cc:c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right]$ $r(A)=1=r(A')$ il sistema ha $\infty^{2-1}=\infty^1$ soluzioni

Se $k=1$, $A'=\left[\begin{array}{cc:c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ $\begin{array}{l} r(A)=1 \\ r(A')=2 \end{array}$ il sistema non ha soluzioni.

Autovalori ed Autovettori

(Si considerano unicamente matrici quadrate)

Sia $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ e $\vec{v}=(x_1,x_2,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$

$A\vec{v}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \cdots \\ x_n' \end{bmatrix}$

Sia $\lambda\in\mathbb{R}$; λ si dice un **autovalore di A** se $\exists \vec{v}\in\mathbb{R}^n, \vec{v}\neq\vec{0}$ tale che $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

Sia $\vec{v}\in\mathbb{R}^n, \vec{v}\neq\vec{0}$; $\vec{v}$ si dice un **autovettore di A corrispondente all'autovalore λ** se $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$

Osservazione: Se A è una matrice diagonale, gli autovalori sono gli elementi della diagonale; inoltre la base naturale di $\mathbb{R}^n$ è una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.

Esempio: $A=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}$ Sia $B=\{\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3}\}=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ la base naturale di $\mathbb{R}^3$

$A\vec{e_1}=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\\0\end{bmatrix}=3\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=3\vec{e_1}$ analogo per $\vec{e_2},\vec{e_3}$

Esercizio a) Verificare che i vettori dell'insieme $X=\{(1,2,1),(-1,0,1),(-3,6,1)\}$ sono autovettori di $A=\begin{bmatrix}1&0&3\\3&1&3\\2&1&0\end{bmatrix}$

b) Stabilire se il vettore $(1,0,0)$ è un autovettore di A

Per definizione, $\vec{v}$ è un autovettore di A se $A\vec{v}$ è proporzionale a $\vec{v}$.

a) Sia $\vec{v_1}=(1,2,1)$, $\vec{v_2}(-1,0,1)$, $\vec{v_3}=(-3,6,1)$

$$A\vec{v_1}=\begin{bmatrix}1&0&3\\3&1&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\8\\4\end{bmatrix}=4\cdot\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}=4\vec{v_1}$$

$4,-2,0$ sono gli autovalori della matrice A

$$A\vec{v_2}=\begin{bmatrix}1&0&3\\3&1&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\0\\-2\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=-2\vec{v_2}$$

$$A\vec{v_3}=\begin{bmatrix}1&0&3\\3&1&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-3\\6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=0\begin{bmatrix}-3\\6\\1\end{bmatrix}=0\,\vec{v_3}$$

b) Sia $\vec{v}=(1,0,0)$

$$A\vec{v}=\begin{bmatrix}1&0&3\\3&1&3\\2&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$ non è un autovettore di A

Sia λ un autovalore di A ($\Rightarrow \exists \vec{v}\in\mathbb{R}^n, \vec{v}\neq\vec{0}: A\vec{v}=\lambda\vec{v}$); $\vec{v}\neq\vec{0}$, $\vec{v}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ è un autovettore di A corrispondente all'autovalore λ se $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$, ovvero se:

$$\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$$

Gli autovettori di A corrispondenti all'autovalore λ sono le soluzioni <u>non nulle</u> dell'equazione matriciale $AX=\lambda X \Leftrightarrow \lambda X-AX=\underline{0} \Leftrightarrow \lambda IX-AX=\underline{0} \Leftrightarrow \underline{(\lambda I-A)X=\underline{0}}$

Gli autovettori di A corrispondenti all'autovalore λ sono le soluzioni <u>non nulle</u> del sistema $(\lambda I-A)X=\underline{0}$, ovvero il sistema:

$$\begin{cases}(\lambda-a_{11})x_1-a_{12}x_2+\dots-a_{1n}x_n=0\\-a_{21}x_1+(\lambda-a_{22})x_2+\dots-a_{2n}x_n=0\\\cdots\\-a_{n1}x_1-a_{n2}x_2+\dots+(\lambda-a_{nn})x_n=0\end{cases}$$

Se esistono soluzioni non nulle di un sistema lineare omogeneo, ne esistono infinite. Di conseguenza, **esistono infiniti autovettori corrispondenti ad un autovalore λ**. Essendo il sistema lineare omogeneo $(\lambda I-A)X=\underline{0}$ un sistema **di n equazioni in n incognite**, ha altre soluzioni oltre quella nulla se e solo se $r(\lambda I-A)<n$.

Infatti, $$\lambda I-A=\begin{bmatrix}\lambda&0&\cdots&0\\0&\lambda&\cdots&0\\\vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&\lambda\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-a_{11}&-a_{12}&\cdots&-a_{1n}\\-a_{21}&\lambda-a_{22}&\cdots&-a_{2n}\\\vdots&&&\vdots\\-a_{n1}&-a_{n2}&\cdots&\lambda-a_{nn}\end{bmatrix}$$

λ è un autovalore di $A \Leftrightarrow r(\lambda I-A)<n \Leftrightarrow |\lambda I-A|=0$;
Dunque λ è un autovalore di A se è una soluzione dell'equazione $|tI-A|=0$

$|tI-A|$, polinomio di grado n nella indeterminata t, si dice *polinomio caratteristico* di A

Definizione: Sia A una matrice quadrata di ordine n. Il polinomio di grado n nell'indeterminata t $|tI-A|$ si dice *polinomio caratteristico di A*.

Teorema: a) Gli autovalori di A sono le radici del polinomio caratteristico
b) Se λ è un autovalore, gli autovettori di A corrispondenti all'autovalore λ sono le soluzioni non nulle del sistema $(\lambda I-A)X=\underline{0}$

a) $\Rightarrow$ una matrice A quadrata di ordine n ha al più n autovalori distinti.

L'insieme delle soluzioni di questo sistema lineare, denotato con H_λ, è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e viene detto **autospazio** di A corrispondente all'autovalore λ.
$\dim H_\lambda$ si dice **molteplicità geometrica** dell'autovalore λ; $mg(\lambda)\geq 1$ (vettori $\neq\vec{0}$), coincide col numero di vettori linearmente indipendenti corrispondenti all'autovalore λ.
Si dice **molteplicità algebrica** dell'autovalore λ la sua molteplicità algebrica come radice del polinomio caratteristico; $ma(\lambda)\geq 1$

Richiamo

$(x-1)^{2}\cdot(x-2)^{1}\cdot(x+3)^{4}=0$

$x=1 \quad ma(1)=2$
$x=2 \quad ma(2)=1$
$x=3 \quad ma(3)=4$

Teorema: $1\leq mg(\lambda)\leq ma(\lambda)$

Teorema: Autovettori corrispondenti ad autovalori distinti sono linearmente indipendenti
(Segue un importante corollario)

Corollario: Siano $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ gli autovalori di A, $H_{\lambda_1}, H_{\lambda_2}, \dots, H_{\lambda_r}$ i relativi autospazi, $B_1, B_2, \dots, B_r$ le relative basi. Allora l'insieme $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_r$ è linearmente indipendente.
In particolare, B è una base di $\mathbb{R}^n \iff \sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) = n$. In altre parole, esiste una base di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A se e solo se $\sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) = n$

Esercizi

Determinare autovettori e autovalori delle seguenti matrici:

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Troviamo il polinomio caratteristico, ricordando che la somma delle molteplicità algebriche delle radici è sempre $\leq n$: se $p(x)$ è un polinomio di radici $x_1, x_2, \dots, x_r$ allora $\sum_{i=1}^{r} x_i \leq n$

$$|tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 \\ -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2) - 2 = t^2 - 2t - t + 2 - 2 = t^2 - 3t = t(t-3) = 0 \begin{cases} t = 0 \\ t = 3 \end{cases}$$

autovalori di A
$ma(0) = 1$
$ma(3) = 1$

Troviamo gli autovettori corrispondenti all'autovalore $\lambda = 0$, sostituendo a t il valore 0:

$$\begin{cases} -x - 2y = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y \qquad (-2h, h) : h \in \mathbb{R} \text{ generica sol.}$$

$$H_0 = \{(-2h, h) : h \in \mathbb{R}\} \Rightarrow B_0 = \{(-2, 1)\} \Rightarrow mg(0) = 1 = \dim H_0$$

Analizziamo ora gli autovettori per $\lambda = 3$:

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y \qquad (h, h) : h \in \mathbb{R} \text{ generica sol.}$$

$$H_3 = \{(h, h) : h \in \mathbb{R}\} \Rightarrow B_3 = \{(1, 1)\} \Rightarrow mg(3) = \dim H_3 = 1$$

$B = B_0 \cup B_3 = \{(-2, 1), (1, 1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori di A.

② $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Polinomio caratteristico: $\begin{vmatrix} t-3 & 0 & -1 \\ 0 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-3)^2 (t-2) = 0 \begin{cases} t = 3 & m.a.(3) = 2 \\ t = 2 & m.a.(2) = 1 \end{cases}$

$t = 3$

$$\begin{cases} -z = 0 \\ 0 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} z &= 0 \\ x &= h \\ y &= k \end{aligned} \qquad H_3 = \{(h, k, 0) : h, k \in \mathbb{R}\};\ B_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\} \Rightarrow mg(3) = 2$$

$t = 2$

$$\begin{cases} -x - z = 0 \\ -y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} y &= 0 \\ z &= -x \end{aligned} \qquad H_2 = \{(h, 0, -h) : h \in \mathbb{R}\};\ B_2 = \{(1, 0, -1)\} \Rightarrow mg(2) = 1$$

$B = B_3 \cup B_2$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A.

③ $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ $\quad |tI - A| = \begin{vmatrix} t & -1 \\ 1 & t \end{vmatrix} = t^2 + 1 \quad \nexists$ autovalori $\in \mathbb{R}$ (il polinomio non ha radici reali)

④ $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\quad |tI - A| = \begin{vmatrix} t-1 & 1 \\ -1 & t+1 \end{vmatrix} = (t-1)(t+1) + 1 = t^2 - 1 + 1 = t^2 = 0 \iff t = 0 \qquad ma(0) = 2$

$t = 0$

$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \qquad H_0 = \{(h, h) : h \in \mathbb{R}\} \quad B_0 = \{(1, 1)\},\ mg(0) = 1$$

$\nexists$ una base di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori.

Osservazione: $mg(\lambda) = \dim(H_\lambda) = n - r(\lambda I - A) \geq 1$

Definizione 1: Due matrici A e B si dicono *simili* se esiste una matrice invertibile E tale che $B = E^{-1}AE$ (si ricorda che il prodotto di matrici non è commutativo)
Si osserva che la relazione di ~~equivalenza~~ similitudine tra matrici è una relazione di equivalenza - la dimostrazione è lasciata al lettore.

Definizione 2: Una matrice A quadrata di ordine n si dice **diagonalizzabile** se è simile ad una matrice diagonale, cioè se esiste una matrice invertibile E tale che $E^{-1}AE = D$ è una matrice diagonale. Per la risoluzione, si sfrutta il seguente Teorema:

Teorema: Una matrice A quadrata di ordine n è diagonalizzabile se e solo se esiste una base B di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.
Detta E la matrice che ha per colonne i vettori di B, risulta $E^{-1}AE = D$, dove D è una matrice diagonale che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, contati tante volte quanto è la loro molteplicità geometrica.

$$B = \{\underset{\lambda_1}{\vec{v_1}}, \underset{\lambda_2}{\vec{v_2}}, \dots, \underset{\lambda_n}{\vec{v_n}}\} \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Corollario: A è diagonalizzabile se e solo se $\sum_{i=1}^{r} mg(\lambda_i) = n$; si ricorda che $mg(\lambda) = n - r(\lambda I - A)$

Teorema: Sia A una matrice simmetrica. Allora:

a) A è diagonalizzabile
b) Gli autovalori di A sono tutti reali
c) Esiste una base ortonormale B di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A
d) Esiste una matrice ortogonale E tale che $E^{-1}AE$ è diagonale (E è la matrice che ha per colonne i vettori della base ortonormale B)

Teorema: Se A ha n autovalori distinti allora A è diagonalizzabile.

Esercizio della volta scorsa

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ è diagonalizzabile?

Si ricorda: $|tI - A| = (t-3)^2(t-2)$

$B_3 = \{(1,0,0), (0,1,0)\}$, $\lambda = 3$
$B_2 = \{(1,0,-1)\}$, $\lambda = 2$

$B = B_3 \cup B_2 = \{(1,0,0), (0,1,0), (1,0,-1)\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ formata da autovettori di A, dunque A è diagonalizzabile.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad ; \quad E^{-1}AE = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$\lambda = 3$

⚠: Diagonalizzare A significa trovare B, calcolare E ed E^{-1}, effettuare il prodotto $E^{-1}AE$ e verificare che la matrice diagonale coincide con quanto detto a livello teorico.
Determinare se A è diagonalizzabile implica solo il verificare l'esistenza di B (sfruttando il corollario in questa pagina non è necessario neanche calcolarla)

Consiglio: per calcolare E^{-1} conviene sfruttare $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$, lasciando $\frac{1}{|A|}$ fuori.

Applicazioni

Siano V e W spazi vettoriali su uno stesso campo K (esempio: $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$). Si dice che f è un'applicazione da V in W, e scriviamo $f: V \to W$ se f fa corrispondere ad ogni $\vec{v} \in V$ uno ed un solo vettore $\vec{w} \in W$; si dice anche che f trasforma ogni $\vec{v} \in V$ in un vettore $\vec{w} \in W$ univocamente determinato.

$$\underset{(\in V)}{\vec{v}} \longrightarrow \boxed{\ f\ } \longrightarrow \underset{(\in W)}{\vec{w}} = f(\vec{v})$$

$\vec{w}$ si dice immagine di $\vec{v}$ mediante f, si denota con $f(\vec{v})$: $f(\vec{v})=\vec{w}$

V si dice dominio di f, W si dice codominio di f

⚠ Una applicazione lineare si definisce individuando dominio, codominio e come la f trasforma gli elementi del dominio.

Esempio

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \qquad (x,y) \mapsto (x,y,0) \qquad f(x,y) = (x,y,0)$$

$$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y,z) \mapsto (x,y) \qquad g(x,y,z) = (x,y)$$

Sia $f: V \to W$, $\vec{v} \mapsto f(\vec{v}) = \vec{w}$. Consideriamo un vettore $\vec{w} \in W$.

L'insieme $f^{-1}(\vec{w}) = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}\}$, costituito da tutti gli elementi del dominio che hanno come immagine $\vec{w}$, può essere:

- $\emptyset$
- $\neq \emptyset$
  - $\exists!\, \vec{v} \in V$ tale che $f(\vec{v}) = \vec{w}$
  - $\exists$ più vettori di V che hanno come immagine $\vec{w}$

$f^{-1}(\vec{w}) \in V$ si dice **immagine inversa** di $\vec{w}$

Riprendendo le applicazioni dell'**Esempio**, e scegliendo dei vettori $\vec{w}$ a piacere:

$$f: \quad \vec{w} = (1,2,0) \longrightarrow f^{-1}(\vec{w}) = \{(1,2)\}$$
$$\vec{w} = (1,2,3) \longrightarrow f^{-1}(\vec{w}) = \emptyset$$

In generale, se $\vec{w} = (x,y,z)$, $f^{-1}(\vec{w}) \neq \emptyset \iff z = 0$

$$g: \quad \vec{w} = (1,2) \longrightarrow g^{-1}(\vec{w}) = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = (1,2)\} = \{(x,y,z) : x=1, y=2\} = \{(1,2,z) : z \in \mathbb{R}\}$$

Si dice **immagine** di f, denotata con $\mathrm{Im}\, f$, il seguente sottoinsieme di W:

$$\mathrm{Im}\, f = \{\vec{w} \in W : \exists \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}\} = \{\vec{w} \in W : f^{-1}(\vec{w}) \neq \emptyset\} = \{f(\vec{v}) : \vec{v} \in V\} \subseteq W$$

Riprendendo le applicazioni dell'**Esempio**:

$$\mathrm{Im}\, f = \{(x,y,z) : z = 0\} = \{(h,k,0) : h,k \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathrm{Im}\, g = \mathbb{R}^2$$

Un'applicazione f si dice **suriettiva** se $\mathrm{Im}\, f = W$, ovvero se $\forall \vec{w} \in W\ \exists \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}$

iniettiva se $\vec{v}_1 \neq \vec{v}_2 \implies f(\vec{v}_1) \neq f(\vec{v}_2)$, ovvero se a elementi diversi del dominio corrispondono elementi diversi nel codominio

biiettiva (anticamente detta corrispondenza biunivoca) se è sia iniettiva che suriettiva, ovvero se $\forall \vec{w} \in W\ \exists!\, \vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{w}$.

Ciò implica che $f^{-1}: W \to V$, definita da $f^{-1}(\vec{w}) = \vec{v}$ tale che $f(\vec{v}) = \vec{w}$ è un'applicazione.

In particolare, risulta: $f^{-1}(f(\vec{v})) = \vec{v}$; $f(f^{-1}(\vec{w})) = \vec{w}$

Applicazioni Lineari

Sia $f: V \to W$ un'applicazione. Si dice che f è un'applicazione lineare, anche detta **omomorfismo**, se:

① $f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \quad \forall \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$ — *lineare rispetto alla somma*

② $f(h\vec{v}) = h \cdot f(\vec{v}) \quad \forall h \in K, \forall \vec{v} \in V$ — *lineare rispetto al prodotto per uno scalare*

Casi particolari: Se un omomorfismo è iniettivo, esso si dice monomorfismo
suriettivo, esso si dice epimorfismo
Se in un omomorfismo dominio e codominio coincidono, esso si dice **endomorfismo**

Se $f: V \to V$ è un'applicazione lineare, essa si dice un **endomorfismo** di V (in particolare, se risulta biiettiva, si dice **automorfismo**)

Se $f: V \to W$ è un'applicazione lineare biiettiva, essa si dice un **isomorfismo**. V e W si dicono isomorfi, e si scrive $V \simeq W$

Autovalori e Autovettori di un Endomorfismo

Sia $f: V \to V$ un endomorfismo e $\vec{v} \neq \vec{0}$; $\vec{v}$ è un **autovettore** di f se $f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

λ si dice **autovalore** di f se $\exists \vec{v} \in V, \vec{v} \neq \vec{0} : f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$

$H_\lambda = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \lambda \vec{v}\} \subseteq V$ è l'*autospazio di f corrispondente all'autovalore λ*.

Si dimostra facilmente che H_λ è un sottospazio vettoriale di V; inoltre $\dim H_\lambda =$ molt. geometrica dell'autovalore λ.

Proprietà delle Applicazioni Lineari

① f "conserva" il vettore nullo, ovvero $f(\vec{0}_V) = \vec{0}_W$

Dim: Sia $\vec{v} \in V$, allora: $f(\vec{0}_V) = f(0 \cdot \vec{v}) \overset{\text{def}}{\underset{②}{=}} 0 \cdot f(\vec{v}) = \vec{0}_W$ □

② f "conserva" le combinazioni lineari, cioè se $\vec{v} = h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \ldots + h_n\vec{v_n}$, allora $f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} h_i f(\vec{v_i})$

Dim: $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} h_i \vec{v_i} \implies f(\vec{v}) = f(h_1\vec{v_1} + h_2\vec{v_2} + \ldots + h_n\vec{v_n}) \overset{\text{def}}{=} f(h_1\vec{v_1}) + f(h_2\vec{v_2}) + \ldots + f(h_n\vec{v_n}) \overset{\text{def}}{=} h_1 f(\vec{v_1}) + h_2 f(\vec{v_2}) + \ldots + h_n f(\vec{v_n})$ □

⚠ Corollario: Un'applicazione lineare f è **univocamente determinata** dai valori che assume sui vettori di una base (note le immagini dei vettori della base, è calcolabile l'immagine di qualunque vettore).

Esercizi

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x,y,0)$ è lineare, iniettiva, non suriettiva

$f': \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f'(x,y) = (x,y,1)$ non è lineare: l'immagine della somma è $\neq$ dalla somma delle immagini

$g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y,z) = (x,y)$ è lineare, suriettiva, non iniettiva

$\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\bar{f}(x,y,z) = (y,x,z)$ è un isomorfismo.

autovettori: $\bar{f}(1,1,0) = (1,1,0)$; $\lambda = 1$; $H_1 = \{(h,h,k) : h,k \in \mathbb{R}\}$
$\bar{f}(1,-1,0) = (-1,1,0)$; $\lambda = -1$; $H_{-1} = \{(h,-h,0) : h \in \mathbb{R}\}$

- $f_0: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f_0(x,y,z) = (0,0,0)$ è lineare, non iniettiva; tutti i vettori sono autovettori rispetto a $\lambda = 0$
- $i: V \to V$, $i(\vec{v}) = \vec{v} \quad \forall \vec{v} \in V$
- $t: M_n \to M_n$, $t(A) = A^t$ è lineare (proprietà delle matrici trasposte). Autovettori: Mat. simm. $\lambda = 1$
Mat. antisimm. $\lambda = -1$

Esercizi

$d: \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$, $d(ax^2+bx+c) = 2ax+b$ c = autovettori corrispondenti a $\lambda = 0$

$B = \{x^2, x, 1\}$; Consideriamo $f_B : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3$, $ax^2+bx+c \longmapsto (a,b,c)$

L'applicazione f_B è un **isomorfismo**: $\mathbb{R}_2[x]$ è isomorfo a $\mathbb{R}^3$.

In generale, per una generica applicazione $f_B: V \to \mathbb{R}^n$, con $\dim V = n$ (dunque $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$):

$\vec{v} \underset{B}{\equiv} (h_1, h_2, \dots, h_n)$; $f_B(\vec{v}) = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ è lineare e biiettiva $\Rightarrow$ è un isomorfismo

$f: M_n \to M_n$, $f(A) = A^{-1}$ Non è un'applicazione: non tutte le matrici sono invertibili.

$\det: M_n \to \mathbb{R}$, $\det(A)$ è un'applicazione, ma non è lineare

Esercizio sul Corollario della 2 $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ base naturale di $\mathbb{R}^3$

Siano $f(1,0,0) = (2,1,-1)$
$f(0,1,0) = (1,1,0)$
$f(0,0,1) = (0,2,1)$

Calcoliamo $f(1,1,3)$:
Essendo $(1,1,3) = 1\cdot(1,0,0) + 1\cdot(0,1,0) + 3(0,0,1)$, per la proprietà 2
$f(1,1,3) = 1\cdot f(1,0,0) + 1 f(0,1,0) + 3 f(0,0,1) =$
$= (2,1,-1) + (1,1,0) + (0,6,3) = (3,9,2)$

3 Sia $X = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ linearmente dipendente. Allora $f(X) = \{f(\vec{v_1}), f(\vec{v_2}), \dots, f(\vec{v_n})\}$ è dipendente.

⚠ Dimostrazione: X è linearmente dipendente $\Rightarrow \exists\, h_1, h_2, \dots, h_n$ non tutti nulli tali che $\sum_{i=1}^{n} h_i \vec{v_i} = \vec{0}_V \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} h_i f(\vec{v_i}) = f(\vec{0}_V) \overset{1}{\Longrightarrow} \sum_{i=1}^{n} h_i f(\vec{v_i}) = \vec{0}_W$, con $h_1, h_2, \dots, h_n$ non tutti nulli $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(X)$ è linearmente dipendente.

Ciò non è generalmente valido per l'indipendenza lineare

Esempio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (x,y,0)$

$X = \{(1,0,0), (0,0,1)\}$ lin. ind., MA $f(X) = \{f(1,0,0), f(0,0,1)\} = \{(1,0,0), \underline{(0,0,0)}\}$ lin. dip.!

Nucleo di f

Definita un'applicazione lineare $f: V \to W$, si dice nucleo di f, denotato con $\mathrm{Ker}\, f$ (dall'inglese "kernel"), il seguente sottoinsieme di V:

$$\mathrm{Ker}\, f = \{\vec{v} \in V : f(\vec{v}) = \vec{0}_W\} = f^{-1}(\vec{0}_W)$$

Esempio: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $f(x,y,z) = (x,y,0)$

$\mathrm{Ker}\, f = \{(x,y,z) : f(x,y,z) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) : (x,y,0) = (0,0,0)\} = \{(x,y,z) : x = 0, y = 0\} = \{(0,0,h) : h \in \mathbb{R}\}$

Teorema: $\text{Ker} f$ è un sottospazio di V

Dimostrazione: a) $\vec{0} \in \text{Ker} f$ poiché $f(\vec{0}_V) \overset{①}{=} \vec{0}_W$

b) $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \text{Ker} f \Rightarrow f(\vec{v_1}) = \vec{0},\ f(\vec{v_2}) = \vec{0} \Rightarrow f(\vec{v_1}+\vec{v_2}) = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v_1}+\vec{v_2} \in \text{Ker} f$

c) $\vec{v} \in \text{Ker} f \Rightarrow f(\vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow f(h\vec{v}) \overset{②}{=} h f(\vec{v}) = h\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow h\vec{v} \in \text{Ker} f$

Immagine di f

$\text{Im} f = \{\vec{w} \in W : \exists \vec{v} \in V \text{ tale che } f(\vec{v}) = \vec{w}\}$; $\quad \text{Im} f = f(V) \subseteq W$

Teorema: a) $\text{Im} f$ è un sottospazio di W

→ b) Se $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ è una base di V allora $f(B)$ è un sistema di generatori di $\text{Im} f$. In particolare, $\dim \text{Im} f \leq \dim V$

→ c) $\dim \text{Ker} f + \dim \text{Im} f = \dim V$

Dimostrazione:

a) $\text{Im} f \neq \emptyset$ poiché ~~$\text{Im} f$~~ $V \neq \emptyset$

$\vec{w_1}, \vec{w_2} \in \text{Im} f \Rightarrow \vec{w_1} = f(\vec{v_1}),\ \vec{w_2} = f(\vec{v_2}) \qquad \vec{v_1}, \vec{v_2} \in V$

$\vec{w_1} + \vec{w_2} = f(\vec{v_1}) + f(\vec{v_2}) = f(\vec{v_1} + \vec{v_2}) \in \text{Im} f \qquad$ poiché $\vec{v_1}+\vec{v_2} \in V$

$\vec{w} \in \text{Im} f \Rightarrow \vec{w} = f(\vec{v}), \vec{v} \in V$

$h\vec{w} = h f(\vec{v}) = f(h\vec{v}) \in \text{Im} f \qquad$ poiché $h\vec{v} \in V$

b) $\vec{w} \in \text{Im} f \Rightarrow \vec{w} = f(\vec{v})$ con $\vec{v} \in V$

$\vec{v} \in V \Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} h_i \vec{v_i} \overset{②}{\Longrightarrow} f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} h_i f(\vec{v_i})$; poiché $\vec{w} = f(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} h_i f(\vec{v_i}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(B) = \{f(\vec{v_1}), f(\vec{v_2}), \ldots, f(\vec{v_n})\}$ è un sistema di generatori di $\text{Im} f$

Poiché $f(B)$ contiene una base di $\text{Im} f$ risulta $\dim \text{Im} f \leq \dim V$

Applicazioni lineari iniettive

Si ricorda che f è iniettiva $\Leftrightarrow$ non accade mai che vettori diversi abbiano la stessa immagine.

Teorema: 1) f iniettiva $\Leftrightarrow \text{Ker} f = \{\vec{0}\}$

2) Se f iniettiva, allora:

a) $X = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}\}$ linearmente indipendente $\Rightarrow f(X) = \{f(\vec{v_1}), f(\vec{v_2}), \ldots, f(\vec{v_n})\}$ lin. indipendenti

b) Se B è una base di V allora $f(B)$ è una base di $\text{Im} f$; dunque $f(B)$ è un sistema di generatori linearmente indipendente.
In particolare, $\dim \text{Im} f = \dim V \leq \dim W$

Applicazioni lineari suriettiva

Si ricorda che f è suriettiva se $\mathrm{Im}\, f = W$

Poiché $\mathrm{Im}\, f \overset{def}{\subseteq} W$, per dimostrare che f è suriettiva basta dimostrare che $\dim \mathrm{Im}\, f = \dim W$

In particolare, se f è suriettiva allora $\dim W \leq \dim V$

Applicazioni lineari bijettive (isomorfismi)

Se f è un isomorfismo, allora:

a) X linearmente dipendente $\Longleftrightarrow$ $f(X)$ è linearmente dipendente
b) X linearmente indipendente $\Longleftrightarrow$ $f(X)$ è linearmente indipendente
c) X genera V $\Longleftrightarrow$ $f(X)$ genera W
d) B è una base di V $\Longleftrightarrow$ $f(B)$ è una base di W
e) $\dim V = \dim W$
f) $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $\Longleftrightarrow$ $f(\vec{v}) \underset{f(B)}{\equiv} (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e molto altro...

Un importante isomorfismo: Sia V uno spazio vettoriale su campo K, $\dim V = n$, $B = \{\vec{v_1}, \vec{v_2}, \dots, \vec{v_n}\}$ una base di V.

L'applicazione $f: V \to K$ definita da $f_B(\vec{v}) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, dove $x_1, x_2, \dots, x_n$ sono le coordinate del vettore $\vec{v}$ rispetto alla base B, è un isomorfismo.
È particolarmente utile per verificare in $\mathbb{R}^n$ vari problemi in altri spazi vettoriali (proprietà viste precedentemente).

Applicazioni Matriciali

Si anticipa che ogni applicazione lineare tra spazi vettoriali di qualsiasi natura sul campo reale può essere letta come Applicazione Matriciale.
Le applicazioni matriciali sono particolari applicazioni lineari.

Sia $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ una matrice di tipo $m \times n$ e sia $\vec{v} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Allora, $A\vec{v} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \dots \\ x_m' \end{bmatrix}$ è un vettore $\vec{w} = (x_1', x_2', \dots, x_m') \in \mathbb{R}^m$

L'applicazione $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{v} \longmapsto A\vec{v}$ $(= f_A(\vec{v}))$ si dice applicazione matriciale definita da A. Dunque, $f_A(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1', x_2', \dots, x_m')$.

Si può dimostrare che tale applicazione è lineare.

Per definire un'applicazione matriciale, bisogna individuare dominio, codominio e come opera la applicazione.
In forma scalare, l'equazione matriciale scritta in alto diventa un sistema di equazioni, le quali sono dette equazioni dell'applicazione matriciale f_A. Tali equazioni sono utili per la risoluzione di esercizi: sostituendo le coordinate del vettore noto ($\vec{v}$ oppure $\vec{w}$, a seconda dei casi).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = x_1' \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = x_2' \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = x_m' \end{cases}$$

Ricordando che $f^{-1}(\vec{w})$ può essere vuoto, con 1 elemento o con infiniti elementi ciò è in perfetta concordanza con il numero di soluzioni del sistema lineare appena definito.

Esempi

① $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ matrice di tipo 2x3 $f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$; $f_A(x,y,z) = (x', y')$. Si richiede di definire l'applicazione matriciale associata.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

Dunque, $x' = x + y - z$, $y' = 2x + y + 3z$ → Segue che $f_A(x,y,z) = (x+y-z, 2x+y+3z)$

Ad esempio, $f_A(1,1,2) = (1+1-2, 2+1+6) = (0, 9)$.

Calcoliamo ora le immagini dei vettori della base naturale del dominio (ovvero di $\mathbb{R}^3$):

$f_A(1,0,0) = (1,2)$

$f_A(0,1,0) = (1,1)$

$f_A(0,0,1) = (-1,3)$

Si nota che le immagini dei vettori della base naturale di $\mathbb{R}^3$ coincidono con le colonne di A.

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ matrice di tipo 3x2 $f_A: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $f_A(x,y) = (x', y', z')$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x + y = x' \\ 2x + 3y = y' \\ x - y = z' \end{cases} \Rightarrow f_A(x,y) = (x+y, 2x+3y, x-y)$$

Calcoliamo $f_A^{-1}(2,5,1)$. Per farlo sarà sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \\ -2y = -1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x + y = 2 \\ y = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Il sistema non ha soluzione, dunque $f_A^{-1}(2,5,1) = \emptyset$. Ne segue che nessun vettore di $\mathbb{R}^2$ ha come immagine il vettore assegnato e, di conseguenza, $\vec{w} \notin \mathrm{Im} f_A$

Dagli esempi, si può dedurre facilmente che $\mathrm{Ker} f_A = f_A^{-1}(\vec{0})$ ~~e~~ è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Inoltre, si vede facilmente che le immagini dei vettori della base naturale di $\mathbb{R}^n$ sono le colonne di A:

$f_A(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$

$f_A(0, 1, \dots, 0) = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$

$\dots$

$f_A(0, 0, \dots, 1) = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$

Da questa osservazione segue che le colonne di A sono un sistema di generatori di $\mathrm{Im} f_A$, ma, generando anche lo spazio delle colonne di A, ne segue a sua volta che $\mathrm{Im} f_A$ coincide con lo spazio delle colonne di A.

Esempio

① $A=\begin{bmatrix}1&1\\2&3\\1&-1\end{bmatrix}$ $f_A(x,y)=(x+y,2x+3y,x-y)$ Trovare la dimensione e una base di $\mathrm{Ker} f_A$ e $\mathrm{Im} f_A$. Stabilire se f_A è iniettiva o suriettiva.

1) Poiché $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim V$, sappiamo che $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^2 = 2$

2) $\mathrm{Ker} f_A$ è l'insieme delle soluzioni del sistema $\begin{cases}x+y=0\\2x+3y=0\\x-y=0\end{cases}$; $\begin{cases}x+y=0\\y=0\\x=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\y=0\\0=0\end{cases}$; $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$

dunque $\mathrm{Ker} f=\{(0,0)\}$, $B_{\mathrm{Ker} f_A}=\emptyset$, $\dim \mathrm{Ker} f=0 \Longrightarrow$ f è iniettiva

3) ~~Poiché~~ Dalla 1) segue che $\dim \mathrm{Im} f_A=2$; poiché $\dim \mathrm{Im} f_A \neq \dim \mathbb{R}^3$, $\mathrm{Im} f_A \neq \mathbb{R}^3 \Rightarrow$ f_A non è suriettiva

4) L'insieme $X=\{(1,2,1),(1,3,-1)\}$, formato dalle colonne di A, genera $\mathrm{Im} f_A$; essendo inoltre linearmente indipendente è dunque una base di $\mathrm{Im} f_A$, concordante col fatto che $\dim \mathrm{Im} f_A=2$

② $A=\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&1&3\end{bmatrix}$ $f_A(x,y,z)=(x+y-z,2x+y+3z)$ Si risolvano le stesse richieste.

Le equazioni di f_A sono $\begin{cases}x+y-z=x'\\2x+y+3z=y'\end{cases}$

1) $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^3 = 3$

2) $\mathrm{Ker} f_A$ è l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases}x+y-z=0\\2x+y+3z=0\end{cases};\ \begin{cases}x+y-z=0\\-y+5z=0\end{cases};\ \begin{cases}x+y-z=0\\y-5z=0\end{cases};\ \begin{cases}x=-y+z\\y=5z\end{cases};\ \begin{cases}x=-4z\\y=5z\end{cases}\quad z=h\rightarrow \begin{matrix}x=-4h\\y=5h\end{matrix}$$

$\mathrm{Ker} f_A=\{(-4h,5h,h):h\in\mathbb{R}\}$; $(-4h,5h,h)=h(-4,5,1) \Rightarrow B_{\mathrm{Ker} f_A}=\{(-4,5,1)\}$ è una base di $\mathrm{Ker} f_A$ e dunque $\dim \mathrm{Ker} f_A=1$

Verifica: $f_A(-4,5,1)=(0,0)$. $\mathrm{Ker} f_A \neq \{(0,0)\} \Longrightarrow$ f_A non è iniettiva

3) $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = 3 \Longrightarrow \dim \mathrm{Im} f_A = 2$

$\mathrm{Im} f_A \subseteq \mathbb{R}^2$; $\dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^2 = 2 \Longrightarrow \mathrm{Im} f_A = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ f_A è suriettiva (qualunque base di $\mathbb{R}^2$ è una base anche di $\mathrm{Im} f_A$)

Da quanto osservato prima segue che $\mathrm{Im} f_A$ è lo spazio delle colonne di A. Ciò implica che:

$$\dim \mathrm{Im} f_A = r(A)$$
$$\dim \mathrm{Ker} f_A = n - r(A)$$

poiché $\dim \mathrm{Ker} f_A + \dim \mathrm{Im} f_A = \dim \mathbb{R}^n$, con n numero delle colonne di A

Da ciò segue un importante Corollario:

Se S è lo spazio delle soluzioni del sistema lineare omogeneo a fianco, allora $\dim S = n - r(A) =$ numero delle variabili indipendenti del sistema.

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=0\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=0\\\dots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=0\end{cases}$$

Osserviamo infine che se A è una matrice quadrata di ordine n, allora $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.
Per rendere più chiare le idee, riporteremo un esempio di seguito:

Esercizio

Sia $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad f_A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

1) determiniamo f_A e le relative equazioni: $f_A(\vec{v}) = A\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = x' \\ x+z = y' \\ x+2y-z = z' \end{cases}$

2) determiniamo $f_A(1,2,3) = \begin{cases} 1+2 = x' \\ 1+3 = y' \\ 1+4-3 = z' \end{cases} = (3,4,2)$

3) determiniamo $f_A^{-1}(3,2,4)$. Per definizione, coincide con l'insieme delle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x+y = 3 \\ x+z = 2 \\ x+2y-z = 4 \end{cases} ; \begin{cases} x = 3-y \\ z = -1-y \end{cases} \qquad y = h \to x = 3-h,\ z = -1-h$$

$$f_A^{-1}(3,2,4) = \{(3-h, h, -1-h) : h \in \mathbb{R}\}$$

4) determiniamo la dimensione e una base di $Ker f_A$, per poi stabilire se f_A è iniettiva.

$$Ker f = \begin{cases} x+y = 0 \\ x+z = 0 \\ x+2y-z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ z = y \end{cases} \qquad y = h \to x = -h,\ z = h$$

$$Ker f_A = \{(-h,h,h) : h \in \mathbb{R}\}$$

$(-h,h,h) = h(-1,1,1) \Rightarrow B_{Ker f_A} = \{(-1,1,1)\} \Rightarrow f_A$ non è iniettiva

5) determiniamo la dimensione e una base di $Im f_A$, per poi stabilire se f_A è suriettiva

$\dim Im f = \dim \mathbb{R}^3 - \dim Ker f = 3-1 = 2 \Rightarrow$ due colonne linearmente indipendenti di A sono una base di $Im f_A$.
Ad esempio, $B = \{(1,1,1), (0,1,-1)\}$ è una base di $Im f_A$

$\dim Im f_A \neq \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow f_A$ non è suriettiva

6) Verificare che $(1,-3,5)$ è un autovettore di f (ovvero se $f(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$)

$f_A(1,-3,5) = (-2,6,-10) = (-2)(1,-3,5) \Rightarrow (1,-3,5)$ è un autovettore di f_A corrispondente all'autovalore 2.

Molti dei risultati si potevano ottenere più rapidamente sapendo che $r(A) = 2$:

$r(A) = 2 \Rightarrow \dim Im f_A = 2 \Rightarrow f_A$ non è suriettiva
$\dim Ker f_A = 3 - \dim Im f_A = 1 \Rightarrow f_A$ non è iniettiva

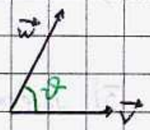
Osserviamo infine che, come visto nell'esercizio, se la matrice A è quadrata allora f_A è un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$.
Essendo $f_A(\vec{v}) = A\vec{v}$, autovalori ed autovettori di f_A coincidono con autovalori ed autovettori di A; dunque si parla anche in questo caso di endoformismo diagonalizzabile.

Geometria Analitica

Risulterà utile ai fini della comprensione di questo modulo rivedere le valutazioni fatte a inizio corso per ciò che concerne i vettori geometrici; in particolare segnaliamo:

- $\vec{r}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$
- equipollenza di segmenti orientati
- vettore libero (di $\vec{r}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$)
- primo e secondo estremo del segmento orientato
- $\vec{0}$ insieme dei segmenti orientati nulli = vettore nullo
- $\vec{BA}$ si dice opposto di $\vec{AB}$: $\vec{BA} = -\vec{AB}$
- $\|\vec{v}\|$ = lunghezza di qualunque seg. orientato che rappresenta $\vec{v}$
- $\vec{e}$ versore $\Rightarrow \|\vec{e}\| = 1$

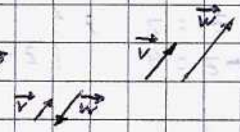
Si riportano in maniera più estesa altre definizioni già fornite in passato:



- Angolo di due vettori: angolo $\vartheta \in [0, \pi]$ formato da $\vec{v}, \vec{w}$ se applicati nello stesso punto

- Vettori paralleli: Possono essere:

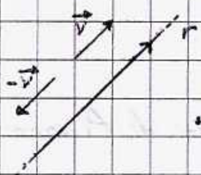
  - Paralleli e concordi, e si scrive $\vec{v} \upuparrows \vec{w}$
  - Paralleli e discordi, e si scrive $\vec{v} \uparrow\downarrow \vec{w}$

  In generale, si scrive $\vec{v} /\!/ \vec{w}$

  - Un vettore si dice parallelo ad una retta [piano] se può essere rappresentato coi suoi estremi sulla retta [sul piano]

- Retta Orientata: se $\vec{v} /\!/ r$ si può orientare la retta in due modi: concordemente al vettore $\vec{v}$ o concordemente a $-\vec{v}$. Una generica retta r è dunque sostegno di due rette orientate



  - Angolo di due rette orientate: definite due rette orientate r ed s, il loro angolo è pari all'angolo formato dai vettori $\vec{v} \upuparrows r$, $\vec{w} \upuparrows \vec{s}$.

- Posizioni Reciproche di rette: Si distinguono due casi:

  - Nel piano: possono essere parallele o incidenti
  - Nello spazio: possono essere parallele, incidenti o sghembe

Due rette parallele o incidenti sono complanari: esiste cioè un piano che contiene entrambe.
Due rette sghembe non sono complanari.

La Geometria Analitica si occupa di risolvere problemi di natura geometrica struttando argomenti di tipo algebrico. Logicamente, ciò passa attraverso la costruzione di spazi vettoriali di natura geometrica:

r retta $\longrightarrow$ $\vec{r}$ vettori liberi di r

π piano $\longrightarrow$ $\vec{\pi}$ vettori liberi di π

Σ spazio ordinario $\longrightarrow$ $\vec{\Sigma}$ vettori liberi di Σ

Abbiamo visto che $\vec{r}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$ sono modelli di spazio vettoriale euclideo sul campo reale $\mathbb{R}$. Sono dunque definite:

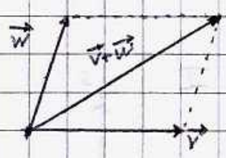
- Somma di vettori (vettore)
- Prodotto di uno scalare per un vettore (vettore)
- Prodotto scalare di vettori (scalare)
- Prodotto vettoriale (vettore)

Definiamo dunque queste operazioni:

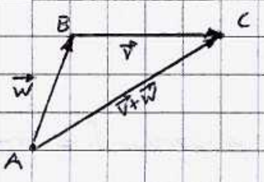
Somma di Vettori : $\vec{v}+\vec{w}$

Si opera con due diversi procedimenti:

Regola del parallelogramma



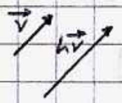
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

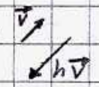


Prodotto di uno scalare per un vettore : $h\vec{v}$

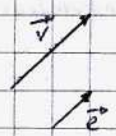
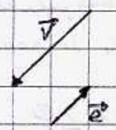
Distinguiamo tre casi:

1) $h=0 \Rightarrow 0\vec{v}=\vec{0}$

2) $h>0 \Rightarrow$  stessa direzione e verso di $\vec{v}$; $\|h\vec{v}\| = h\|\vec{v}\|$

3) $h<0 \Rightarrow$  stessa direzione, verso opposto a $\vec{v}$; $\|h\vec{v}\| = (-h)\|\vec{v}\|$

Caso particolare se $\vec{e}$ è un versore,

 $\vec{v}=x\vec{e}$, $x=\|\vec{v}\|$  $\vec{v}=x\vec{e}$, $x=-\|\vec{v}\|$

Prodotto Scalare

Se $\vec{v},\vec{w} \neq \vec{0}$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = \|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\vartheta$

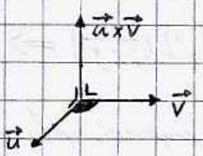
Se $\vec{v} \vee \vec{w} = \vec{0}$, $\vec{v}\cdot\vec{w} = 0$ per definizione

Si osserva che: 1) $\vec{v},\vec{w} \neq \vec{0}$: $\vec{v}\cdot\vec{w}=0 \Leftrightarrow \cos\vartheta = 0 \Leftrightarrow \vartheta=\frac{\pi}{2}$ concorde con la definizione di vettori numerici "ortogonali"

2) $\cos\vartheta = \dfrac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{w}\|}$ concorde a quanto detto per i vettori numerici

3) $\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$ = norma di $\vec{v} = \|\vec{v}\|$ = lunghezza di $\vec{v}$

Prodotto Vettoriale



1) $\vec{u}\times\vec{v}$ è ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$

2) $\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot|\operatorname{sen}\vartheta|$

3) Se $\vec{v}=\vec{0} \vee \vec{u}=0 \vee \vec{v}\parallel\vec{u}$, $\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}$

Si ricorda che non è un'operazione in cui vale la proprietà commutativa

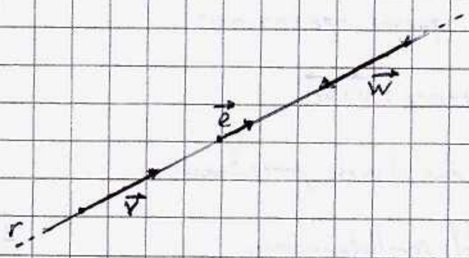
e altre proprietà...

Abbiamo dunque definito gli spazi vettoriali euclidei $\vec{r}, \vec{\pi}, \vec{\Sigma}$, cercheremo di definirne dimensione e il significato di dipendenza/indipendenza lineare.

Valutiamo $\vec{r}$:

$\dim \vec{r} = 1$; $B = \{\vec{e}\}$, $\vec{e} \neq \vec{0} \Rightarrow$ è lin. ind.

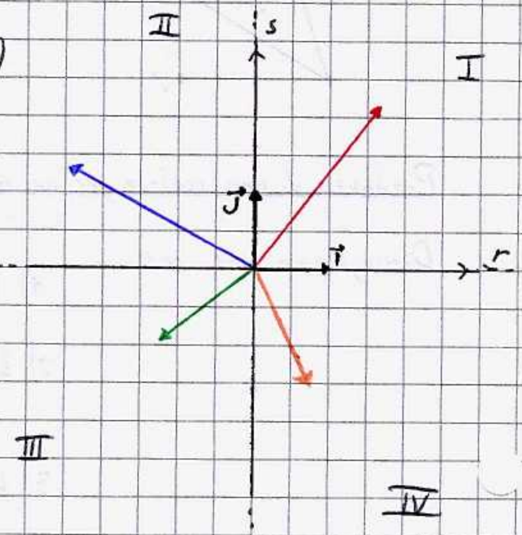
$\vec{v} = x\vec{e}$, $x > 0$
$\vec{w} = x\vec{e}$, $x < 0$



Valutiamo $\vec{\pi}$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ lin. ind. (= vettori non proporzionali = vettori non paralleli)

Nei 4 casi considerati a fianco, i vettori sono considerabili come somme di vettori appartenenti alle rette r ed s:



1. Le componenti su r[s] sono $\uparrow\uparrow$ ad $\vec{i}$ [$\vec{j}$]
2. La componente su r è $\uparrow\downarrow$ ad $\vec{i}$, quella su s è $\uparrow\uparrow$ a $\vec{j}$
3. La componente su r[s] è $\uparrow\downarrow$ ad $\vec{i}$ [$\vec{j}$]
4. La componente su r è $\uparrow\uparrow$ ad $\vec{i}$, quella su s è $\uparrow\downarrow$ a $\vec{j}$

Dunque, ogni vettore del piano è combinazione lineare dei vettori di B, poiché:

$$\vec{v} = \vec{v_1} + \vec{v_2} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

dunque, B genera $\vec{\pi}$; essendo linearmente indipendente B è una base di $\vec{\pi}$ e, di conseguenza, $\dim \vec{\pi} = 2$

Come abbiamo visto, nel
I quadrante: $x \geq 0$ $y \geq 0$
II quadrante: $x \leq 0$ $y \geq 0$
III quadrante: $x \leq 0$ $y \leq 0$
IV quadrante: $x \geq 0$ $y \leq 0$

Si può dunque costruire l'isomorfismo $\vec{v} \in \vec{\pi} \longrightarrow (x,y) \in \mathbb{R}^2$ definito da $\vec{v} \equiv (x,y)$

$$\vec{v} \equiv (x,y), \vec{w}(x',y') \Longrightarrow \vec{v} + \vec{w} \equiv (x+x', y+y')$$
$$h\vec{v} \equiv (hx, hy)$$

Teorema: Se B è una base ortonormale, allora:

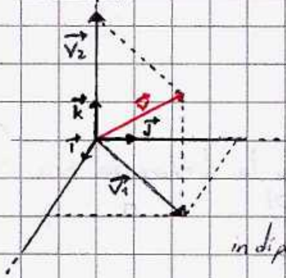
$$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' \quad ; \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \cos\vartheta = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\|} = \frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Dimostrazione: $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$, $\vec{w} = x'\vec{i} + y'\vec{j} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = (x\vec{i} + y\vec{j}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j}) = (xx')(\vec{i} \cdot \vec{i}) + (xy')(\vec{i} \cdot \vec{j}) + (yx')(\vec{j} \cdot \vec{i}) + (yy')(\vec{j} \cdot \vec{j}) \Rightarrow$$

se la base è ortonormale $\Rightarrow \vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy'$ (Dim. analoga per le altre proprietà, applicando le relative definizioni)

Consideriamo ora $\vec{\Sigma}$



Sia $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ linearmente indipendente ($\vec{i}, \vec{j}$ non proporzionali, $\vec{k}$ non è combinazione lineare di $\vec{i}$ e $\vec{j}$ $\longrightarrow$ $\vec{i}$ e $\vec{j}$ non paralleli, $\vec{k}$ non appartiene al piano individuato da $\vec{i}$ e $\vec{j}$).

$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x\vec{i} + y\vec{j}) + z\vec{k} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \Rightarrow B$ genera $\vec{\Sigma}$, essendo linearmente indipendente B è una base di $\vec{\Sigma}$.

Dunque, $\dim \vec{\Sigma} = 3$

$\vec{v} \in \vec{\Sigma} \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ isomorfismo;

$\vec{v} \equiv (x, y, z)$, $\vec{w} \equiv (x', y', z')$

$\vec{v} + \vec{w} \equiv (x + x', y + y', z + z')$, $h\vec{v} \equiv (hx, hy, hz)$

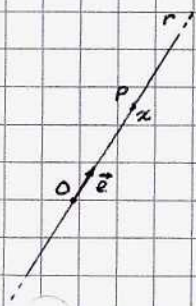
Teorema: Se B è una base ortonormale, allora:

$\vec{v} \cdot \vec{w} = xx' + yy' + zz'$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\cos\vartheta = \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}} \qquad \vec{v} \times \vec{w} \equiv \left(\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \right)$$

Punti

Definiamo ora gli enti geometrici fondamentali negli spazi vettoriali appena definiti, partendo logicamente dal punto.



Si dice riferimento cartesiano di r ogni coppia $C(O, \{\vec{e}\})$, dove $O \in r$ è un punto, detto origine del riferimento, ed $\vec{e}$ è un versore.

Se $\overrightarrow{OP} = x\vec{e}$, x si dice ascissa del punto P nel riferimento cartesiano C e scriviamo $P \underset{C}{\equiv} x$.

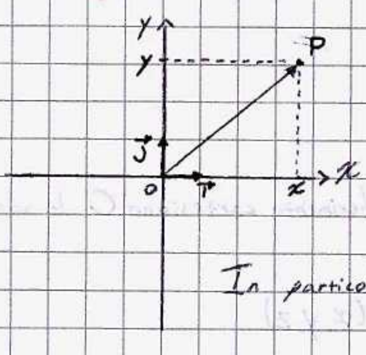
Osserviamo che $x = \|\overrightarrow{OP}\|$ oppure $x = -\|\overrightarrow{OP}\|$

L'applicazione $P \in r \longrightarrow x \in \mathbb{R}$ è biettiva

---

Sia π un piano. Si dice riferimento cartesiano di π ogni coppia $C(O, B)$, con O origine del riferimento e $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ una base ortonormale di $\vec{\pi}$.

Si definiscono due rette orientate: l'asse x, retta passante per O e $\uparrow\uparrow \vec{i}$
l'asse y, retta passante per O e $\uparrow\uparrow \vec{j}$



Se $P \in \pi$, si dicono coordinate del punto P nel riferimento cartesiano C le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base B.

$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} \longrightarrow \overrightarrow{OP} \underset{B}{\equiv} (x, y) \longrightarrow P \underset{C}{\equiv} (x, y)$

In particolare, x si dice ascissa del punto P
y si dice ordinata del punto P

Teorema: Se $P \underset{C}{\equiv} (x_1, y_1)$ e $Q \underset{C}{\equiv} (x_2, y_2)$, allora:

$$\overrightarrow{PQ} \underset{B}{\equiv} (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

Dim. Poiché $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$, le coordinate di $\overrightarrow{PQ}$ sono la differenza tra le coordinate di $\overrightarrow{OQ}$ (= coordinate di Q) e le coordinate di $\overrightarrow{OP}$ (= coordinate di P) □

Corollario:

Se $P \equiv (x_1, y_1)$ e $Q \equiv (x_2, y_2)$, allora:

$$d(P,Q) \left(= \|\overrightarrow{PQ}\|\right) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dim.:

Basta osservare che $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|$, come riportato nel teorema.

In conclusione, fissato un riferimento cartesiano C del piano resta definita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti del piano e le coppie ordinate di numeri reali:

$$P \in \pi \longrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Cambiamento di Riferimento

Siano definiti
$C = (O, B)$ $\quad$ $C'(O', B')$
$B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}\}$ $\quad$ $B' = \{\vec{\imath}', \vec{\jmath}'\}$
$P \underset{C}{\equiv} (x, y)$ $\quad$ $P \underset{C'}{\equiv} (x', y')$ $\quad$ cambiando il riferimento, cambiano le coordinate di uno stesso punto

Allora, $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$, dove $\vec{\imath} \underset{B'}{\equiv} (a_{11}, a_{21})$; $\vec{\jmath} \underset{B'}{\equiv} (a_{12}, a_{22})$

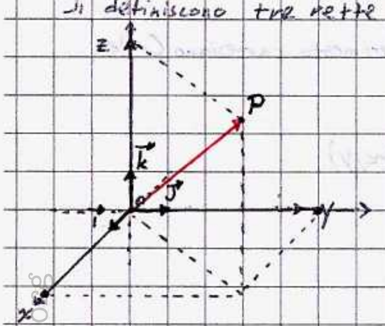
$$O \underset{C'}{\equiv} (b_1, b_2)$$

In forma scalare,

$$\begin{cases} x' = a_{11} x + a_{12} y + b_1 \\ y' = a_{21} x + a_{22} y + b_2 \end{cases}$$
← formule di trasformazione delle coordinate

Sia Σ lo spazio ordinario. Si dice <u>riferimento cartesiano</u> di Σ ogni coppia $C = (O, B)$, con O origine del riferimento e $B = \{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$ una base ortonormale di Σ.

Si definiscono tre rette orientate: asse x, retta passante per O e $\parallel \vec{\imath}$
asse y, retta passante per O e $\parallel \vec{\jmath}$
asse z, retta passante per O e $\parallel \vec{k}$



Se $P \in \Sigma$, si dicono coordinate del punto P nel riferimento cartesiano C le coordinate del vettore $\overrightarrow{OP}$ rispetto alla base B.

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{OP} \underset{B}{\equiv} (x, y, z) \Rightarrow P \underset{C}{\equiv} (x, y, z)$$

In particolare, x si dice ascissa del punto P
y si dice ordinata del punto P
z si dice quota del punto P

Teorema: Se $P \underset{C}{\equiv} (x_1, y_1, z_1)$ e $Q \underset{C}{\equiv} (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$\overrightarrow{PQ} \underset{B}{\equiv} (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Dim analoga al teorema su π

Corollario: Se $P \underset{C}{\equiv} (x_1, y_1, z_1)$ e $Q \underset{C}{\equiv} (x_2, y_2, z_2)$, allora:

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Dim. analoga al corollario su π.

In conclusione, fissato un riferimento cartesiano C dello spazio Σ resta definita una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei punti dello spazio e le terne ordinate di numeri reali

$$P \in \Sigma \longrightarrow (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Cambiamento di Riferimento

Siano definiti:

$C = (O, B)$ $\quad$ $C' = (O', B')$

$B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\quad$ $B' = \{\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'\}$

$P \underset{C}{\equiv} (x, y, z)$ $\quad$ $P' \underset{C'}{\equiv} (x', y', z')$ $\quad$ cambiando il riferimento, cambiano le coordinate di uno stesso punto.

Allora,
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix},$$
dove $\vec{i} \underset{B'}{\equiv} (a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\vec{j} \underset{B'}{\equiv} (a_{12}, a_{22}, a_{32})$, $\vec{k} \underset{B'}{\equiv} (a_{13}, a_{23}, a_{33})$

$O \underset{C'}{\equiv} (b_1, b_2, b_3)$

In forma scalare,

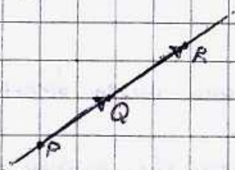
$$\begin{cases} x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + b_1 \\ y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + b_2 \\ z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + b_3 \end{cases}$$
formule di trasformazione delle coordinate

Esercizio

Dati i punti P, Q ed R, a) stabilire se sono allineati

b) in caso di risposta negativa, trovare il perimetro del triangolo PQR

$\boxed{(1)\ P \equiv (1,2,0),\ Q \equiv (2,1,1),\ R \equiv (0,3,-1)}$



a) se i punti sono allineati, $\overrightarrow{PQ}$ e $\overrightarrow{PR}$ sono paralleli e, di conseguenza, proporzionali:

$\overrightarrow{PQ} = (2-1,\ 1-2,\ 1-0) = (1,-1,1)$

$\overrightarrow{PR} = (0-1,\ 3-2,\ -1-0) = (-1,1,-1)$

$\Longrightarrow \overrightarrow{PR} = (-1)\overrightarrow{PQ} \Rightarrow$ i punti sono allineati.

$\boxed{(2)\ P \equiv (1,2,1),\ Q \equiv (2,1,1),\ R \equiv (0,2,-1)}$

a) $\overrightarrow{PQ} = (1,-1,0)$, $\overrightarrow{PR} = (-1,0,-2)$ $\Rightarrow$ i punti non sono allineati

b) $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$

$d(P,R) = \|\overrightarrow{PR}\| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

$d(RQ) = \|\overrightarrow{RQ}\| = \sqrt{(2+0)^2 + (1-2)^2 + (1+1)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

$\Longrightarrow P = \sqrt{2} + \sqrt{5} + 3$

Rette

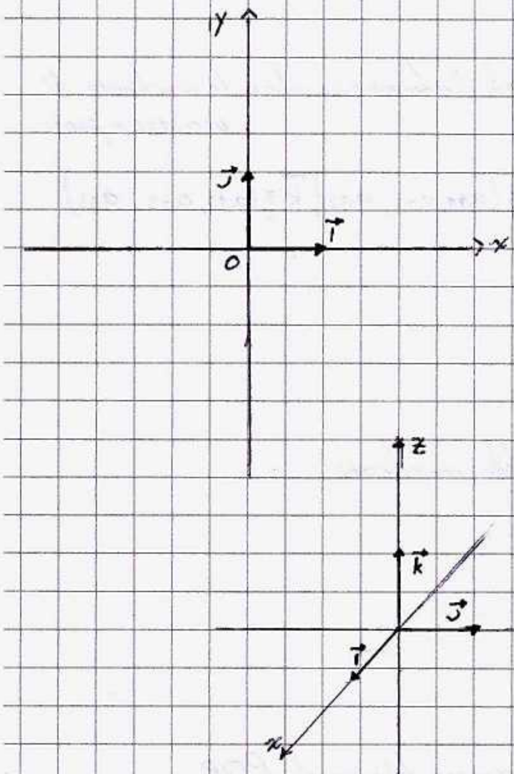
Sia r una retta del piano o dello spazio.
Si dicono numeri o parametri direttori di r le coordinate di un vettore non nullo $\vec{v}$ parallelo a r.

Si osserva dunque che i parametri direttori di una retta non sono univocamente determinati, poiché un qualunque vettore $\vec{w} = h\vec{v}$ (con $h \neq 0$) è per definizione parallelo alla retta r, dunque le sue coordinate sono parametri direttori di r.

<u>Nel piano</u>, $\vec{v} \equiv (l, m)$; <u>Nello Spazio</u>, $\vec{v} \equiv (l, m, n)$

Se r è una retta <u>orientata</u>, i suoi parametri direttori sono le coordinate di un vettore non nullo $\vec{v}$ <u>parallelo e concorde</u> a r.
Anche in questo caso, i parametri direttori sono determinati a meno di un coefficiente di proporzionalità $h \in \mathbb{R}$, in questo caso rigorosamente <u>positivo</u>.

Osservazione: Rette parallele hanno gli stessi numeri direttori

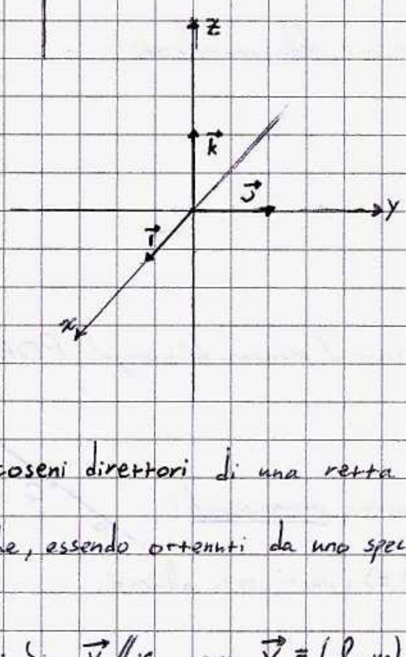


<u>Nel piano</u>: $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$

numeri direttori dell'asse x: $(l, m) = (1, 0)$
Poiché $\vec{i} \underset{B}{\equiv} (1, 0)$ è parallelo all'asse x

numeri direttori dell'asse y: $(l, m) = (0, 1)$
Poiché $\vec{j} \underset{B}{\equiv} (0, 1)$ è parallelo all'asse y

<u>Nello Spazio</u>: $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



numeri direttori dell'asse x: $(l, m, n) = (1, 0, 0)$
Poiché $\vec{i} \underset{B}{\equiv} (1, 0, 0)$ è parallelo all'asse x

numeri direttori dell'asse y: $(l, m, n) = (0, 1, 0)$
Poiché $\vec{j} \underset{B}{\equiv} (0, 1, 0)$ è parallelo all'asse y

numeri direttori dell'asse z: $(l, m, n) = (0, 0, 1)$
Poiché $\vec{k} \underset{B}{\equiv} (0, 0, 1)$ è parallelo all'asse z

Si dicono coseni direttori di una retta orientata r le coordinate di un <u>versore</u> $\vec{e}$ parallelo e concorde ad r.
Si nota che, essendo ottenuti da uno specifico versore, i coseni direttori di una retta orientata sono univocamente determinati.

<u>Nel piano</u>: Sia $\vec{v} \parallel r$, con $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (l, m)$

$$\text{Allora, } \vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \implies \vec{e} \underset{B}{\equiv} \left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}} \right)$$

<u>Nello Spazio</u>: Sia $\vec{v} \parallel r$, con $\vec{v} \underset{B}{\equiv} (l, m, n)$.

$$\text{Allora, } \vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v} \implies \vec{e} \underset{B}{\equiv} \left(\frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}, \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}} \right)$$

Esercizio

Sia r la retta passante per $A \equiv (1,0,2)$ e $B \equiv (3,1,1)$. Determinare:
a) i numeri direttori di r
b) i coseni direttori di r orientata da A a B
c) i coseni direttori di r orientata da B a A

a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB} // r$

$$\vec{v} \equiv (3-1,\ 1-0,\ 1-2) = (2,1,-1) \Rightarrow (l,m,n) = (2,1,-1)$$

b) $\vec{e} = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \vec{v}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2+1^2+(-1)^2} = \sqrt{6} \Rightarrow \vec{e} \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

c) $-\vec{e} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

Il termine coseni direttori deriva dal seguente teorema:

Teorema: I coseni direttori di una retta r sono i coseni degli angoli che la retta r forma con gli assi coordinati.

$\boxed{\text{Dim}}$

Nel Piano

$\vec{v} \underset{B}{\equiv} (l,m)$, $\vec{i} \underset{B}{\equiv} (1,0)$, $\vec{j} \underset{B}{\equiv} (0,1)$

$$\cos\vartheta_x = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

$$\cos\vartheta_y = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2}}$$

Nello Spazio

$\vec{v} \underset{B}{\equiv} (l,m,n)$, $\vec{i} \equiv (1,0,0)$, $\vec{j}(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$

$$\cos\vartheta_x = \frac{\vec{v}\cdot\vec{i}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{i}\|} = \frac{l}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\vartheta_y = \frac{\vec{v}\cdot\vec{j}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{j}\|} = \frac{m}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

$$\cos\vartheta_z = \frac{\vec{v}\cdot\vec{k}}{\|\vec{v}\|\cdot\|\vec{k}\|} = \frac{n}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Osservazione

$l > 0 \Rightarrow \cos\vartheta_x > 0 \Rightarrow 0 \leq \vartheta_x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \vartheta_x$ acuto

$l = 0 \Rightarrow \cos\vartheta_x = 0 \Rightarrow \vartheta_x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r \perp$ asse x

$l < 0 \Rightarrow \cos\vartheta_x < 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \vartheta_x \leq \pi \Rightarrow \vartheta_x$ ottuso

Esercizio

Sia r la retta passante per $A \equiv (1,0,2)$ e $B \equiv (3,1,1)$; determinare i coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo acuto con l'asse z

$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-1)$ $\quad \vec{e} \equiv \left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ $\quad -\vec{e} \equiv \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$

La scelta giusta è $-\vec{e}$ poiché in questo caso $\vartheta_z = \frac{1}{\sqrt{6}} \Rightarrow \vartheta_z$ è acuto

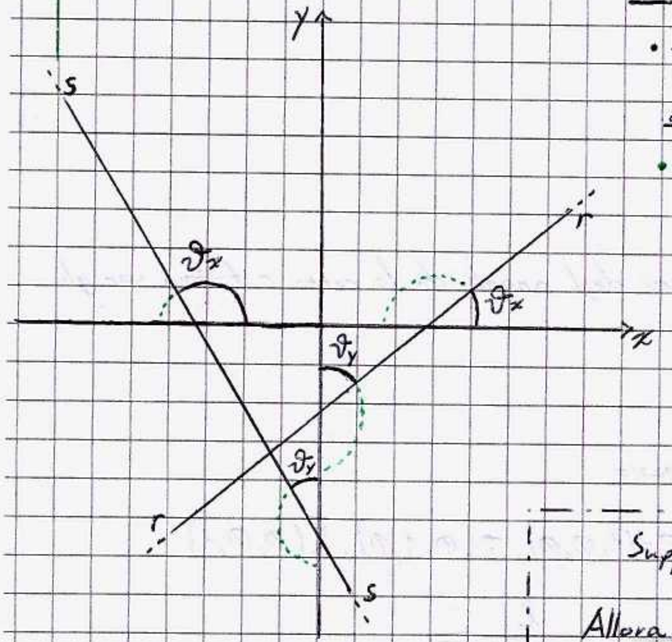
Esercizio

Sia r la retta per $A \equiv (1,2,1)$ e $B \equiv (1,1,3)$. Determinare i coseni direttori di r orientata in modo da formare un angolo ottuso con l'asse x.

$\overrightarrow{AB} = (0,-1,2)$ $\quad \vec{e} \equiv \left(0, -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ $\quad -\vec{e} \equiv \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$l = 0 \implies$ nessuna scelta è giusta, la retta r è ortogonale all'asse x

Alcune osservazioni nel piano



r

- $\vartheta_x < \frac{\pi}{2}, \vartheta_y < \frac{\pi}{2} \implies \cos\vartheta_x, \cos\vartheta_y > 0$

oppure

- $\vartheta_x > \frac{\pi}{2}, \vartheta_y > \frac{\pi}{2} \implies \cos\vartheta_x, \cos\vartheta_y < 0$

s

- $\vartheta_x > \frac{\pi}{2}, \vartheta_y < \frac{\pi}{2} \implies \cos\vartheta_x < 0, \cos\vartheta_y > 0$

oppure

- $\vartheta_x < \frac{\pi}{2}, \vartheta_y > \frac{\pi}{2} \implies \cos\vartheta_x > 0, \cos\vartheta_y < 0$

Supponiamo che r non sia parallela all'asse y, cioè $\cos\vartheta_x \neq 0$.

Allora:

$$tg\,\vartheta_x = \frac{sen\,\vartheta_x}{\cos\vartheta_x} = \frac{\cos\vartheta_y}{\cos\vartheta_x} = \frac{m}{l}$$

$\implies$ da m, l, n è possibile ricavare l'"orientamento" di r

$tg\,\vartheta_x$ si dice coefficiente angolare della retta r

Condizioni di Parallelismo e ortogonalità tra due rette

Date due rette r ed s del piano di numeri direttori (l,n) ed (l',n') rispettivamente, allora

$r // s \iff \exists h \in \mathbb{R} : (l', m') = h(l, m)$

$r \perp s \iff ll' + mm' = 0$

Date due rette r ed s dello spazio di numeri direttori (l,m,n) ed (l',m',n') rispettivamente, allora:

$r // s \iff \exists h \in \mathbb{R} : (l', m', n') = h(l, m, n)$

$r \perp s \iff ll' + mm' + nn' = 0$

Dim

Sia $\vec{v} \equiv (l,m)$ parallelo a r e $\vec{w} \equiv (l',m')$ parallelo a s. Allora:

$r // s \iff \vec{v} // \vec{w} \iff \vec{w} = h\vec{v} \iff (l',m') = h(l,m)$

$r \perp s \iff \vec{v} \perp \vec{w} \iff \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \iff ll' + mm' = 0$

Lo stesso vale per lo spazio, ma con una coordinata in più.

Equazioni di una retta nel piano e nello Spazio

Ogni retta è univocamente determinata da un punto $P_0 \in r$ e da un vettore $\vec{v} // r$

Cerchiamo subito una condizione affinché un generico punto P del piano [spazio] appartenga ad r.

Si riconosce subito che $P \in r \iff \overrightarrow{P_0P} // \vec{v} \iff \overrightarrow{P_0P} = h\vec{v}$

Tutti i modi di rappresentare una retta mediante equazioni si basano su questa relazione.

Equazione parametrica di una retta

Nel piano:

Teorema: Sia r una retta del piano di numeri direttori (l,m) e passante per $P_0 \equiv (x_0, y_0)$; allora la retta può essere rappresentata nella forma:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \end{cases}, h \in \mathbb{R}$$

Tale equazione è detta parametrica poiché i punti di r si ottengono assegnando dei valori ad h.

$\boxed{\text{Dim}}$: Sia $P \equiv (x,y)$ generico; $\vec{v} \equiv (l,m)$, $P_0 \equiv (x_0, y_0) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P} \equiv (x - x_0, y - y_0)$. Di conseguenza:

$$P \in r \iff \overrightarrow{P_0P} // \vec{v} \iff \exists h \in \mathbb{R} : \overrightarrow{P_0P} = h\vec{v} \iff \exists h \in \mathbb{R} : (x - x_0, y - y_0) = h(l,m) = (hl, hm) \iff$$
$$\iff \exists h \in \mathbb{R} : \begin{cases} x - x_0 = hl \\ y - y_0 = hm \end{cases} \iff \exists h \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \end{cases} \quad \square$$

Osservazione: Se $l, m \neq 0$, la condizione $(x - x_0, y - y_0) = h(l,m)$ si può anche scrivere:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} \ (= h),$$ che si dice equazione di r sotto forma di rapporti uguali. Tale rappresentazione è molto usata e importante, ma porta a brutti errori.

Retta per due punti:

Siano $A \equiv (x_1, y_1)$, $B \equiv (x_2, y_2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = x_1 + h(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + h(y_2 - y_1) \end{cases}$$

Osservazione: Se $x_1 \neq x_2$, $y_2 \neq y_1 \Rightarrow \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$

Osservazione: Le equazioni parametriche della retta non sono univocamente determinate (utilizzo operativo: puoi avere rette coincidenti con diverse espressioni).

Esercizio

Dati i punti $A \equiv (1,1)$, $B \equiv (2,-1)$, $P \equiv (3,5)$, trovare
a) le eq. par. retta r per A e B
b) " s per P e $// r$
c) " t per P e $\perp r$

a) $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (1, -2) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 1 - 2h \end{cases}; h \in \mathbb{R}$

b) $s: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \end{cases}, h \in \mathbb{R}$ $\quad (x_0, y_0) = (3,5)$; $(l,m) = (1,-2) \Rightarrow s: \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 5 - 2h \end{cases}, h \in \mathbb{R}$

c) $(x_0, y_0) = (3,5)$, n.d. di $r = (1,-2)$, n.d. di $t = (l,m)$; $t \perp r \Rightarrow l - 2m = 0 \Rightarrow (l,m) = h(2,1)$ supponiamo $h = 1$

$t: \begin{cases} x = 3 + 2h \\ y = 5 + h \end{cases}, h \in \mathbb{R}$

Nello Spazio

Vale lo stesso Teorema, solo che con tre coordinate: n.d. di r (l, m, n), $P_0 \equiv (x_0, y_0, z_0) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad r: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \\ z = z_0 + hn \end{cases} \qquad h \in \mathbb{R}$$

Esercizio

$$r: \begin{cases} x = 1+h \\ y = 2-h \\ z = h \end{cases} \qquad P \equiv (1, 2, 1) \qquad P \in r?$$

Applicando la definizione, $P \in r \Leftrightarrow \exists h: \begin{cases} 1 = 1+h \\ 2 = 2-h \\ 1 = h \end{cases}$; $\begin{cases} h = 0 \\ h = 0 \\ h = 1 \end{cases} \Rightarrow P \notin r$ (Poiché il sistema non ha soluzione)

Equazione Cartesiana di una retta

Nel Piano:

Teorema: Ogni retta r del piano può essere rappresentata mediante un'equazione lineare non degenere in due incognite, del tipo:

$$r: ax + by + c = 0$$

Vale anche il viceversa: ogni eq. non degenere (lineare) in due incognite rappresenta una retta nel piano.

I punti della retta sono i punti del piano le cui coordinate sono la soluzione dell'equazione; inoltre $(l, m) = (-b, a)$

$\boxed{\text{Dim}}$ $P_0 \equiv (x_0, y_0)$, $P \equiv (x, y)$, $\vec{v} \equiv (l, m)$; $\overrightarrow{P_0P} \equiv (x - x_0, y - y_0)$. Allora:

$$P \in r \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{P_0P} = h\vec{v} \Leftrightarrow (x - x_0, y - y_0) = h(l, m) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & l \\ y - y_0 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m(x - x_0) - l(y - y_0) = 0 \,;\, mx - ly + (-mx_0 + ly_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ax + by + c = 0$$

Osservazione 1) $\vec{v} \equiv (-b, a) \parallel r \Rightarrow \vec{w} \equiv (a, b) \perp r$ (poiché $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0) \Rightarrow (a, b)$ n.d. retta $\perp r$

2) Se $a = 0 \Rightarrow r \parallel$ asse x
$b = 0 \Rightarrow r \parallel$ asse y
$c = 0 \Rightarrow r$ passa per l'origine (l'equazione diventa omogenea $\rightarrow$ ammette la sol. nulla)

Nello Spazio

Teorema: Ogni retta r dello spazio si rappresenta mediante un sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite:

$$r: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \quad \text{con} \begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} \text{ di rango 2}$$

(∞^1 soluzioni $\Rightarrow \infty^1$ punti)

I punti della retta sono le soluzioni del sistema; inoltre si osserva che:

$$(l, m, n) = \left(\begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \right)$$

essendo il rango della matrice sovraindicata pari a 2, almeno uno dei suoi minori di ordine 2 $\Rightarrow (l, m, n)$ sono le coordinate di un vettore diverso dal vettore nullo

Dim ⚠ Le dimostrazioni servono per effettuare gli esercizi

$P \equiv (x,y,z)$, $P_0 \equiv (x_0,y_0,z_0)$, $\vec{v}(l,m,n)$; $\overrightarrow{P_0P} = (x-x_0, y-y_0, z-z_0)$. Dunque:

$$P \in r \iff \overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v} \iff \overrightarrow{P_0P} = h\vec{v} \iff (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = h(l,m,n) \iff$$

$$\iff r\left(\begin{bmatrix} x-x_0 & l \\ y-y_0 & m \\ z-z_0 & n \end{bmatrix}\right) = 1$$

Non è possibile (non ha senso) calcolare il determinante della matrice; supponiamo $l \neq 0$, allora:

$$r\left(\begin{bmatrix} x-x_0 & l \\ y-y_0 & m \\ z-z_0 & n \end{bmatrix}\right) = 1 \iff \begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_0 & l \\ y-y_0 & m \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-x_0 & l \\ z-z_0 & n \end{vmatrix} = 0 \end{cases}$$

sistema lineare di 2 equazioni in 3 incognite.

Applicazione del teorema degli Orlati ad l (supposto $\neq 0$)

Osservazione: Come le equazioni parametriche, anche le equazioni cartesiane non sono univocamente determinate (sistemi lineari equivalenti ottenuti da trasformazioni elementari)

Passaggio da equazione parametrica a cartesiana (e viceversa)

P → C : Basta ricavare il parametro da una delle equazioni sostituendolo a quelle restanti.

Esempio: $\begin{cases} x = 1+h \\ y = 2-h \\ z = -1+2h \end{cases}$ $\quad h = x-1 \quad \Rightarrow \begin{cases} y = 2-(x-1) \\ z = -1+2(x-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3 = 0 \\ 2x-z-2 = 0 \end{cases}$

C → P : Basta risolvere il sistema.

Esempio: $r: \begin{cases} x+y-z+1 = 0 \\ 2x+3y+z-3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-z+1 = 0 \\ y+3z-5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y+z-1 = -5-3z+z-1 \\ y = 5-3z \end{cases}; \begin{cases} x = -6+4z \\ y = 5-3z \end{cases}$

$$z = h \rightarrow x = -6+4h,\ y = 5-3h \Rightarrow \begin{cases} x = -6+4h \\ y = 5-3h \\ z = h \end{cases},\ h \in \mathbb{R}$$

Rette sghembe e complanari

Siano $r: \begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z+d_1 = 0 \\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2 = 0 \end{cases}$ due rette nello spazio.

$s: \begin{cases} a_3x+b_3y+c_3z+d_3 = 0 \\ a_4x+b_4y+c_4z+d_4 = 0 \end{cases}$

Le rette sono complanari $\iff \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$

Se il determinante è $\neq 4$, le rette sono incidenti. Altrimenti, esse sono sghembe.

Dim : Sistema lineare delle 4 equazioni, teorema di Rouché-Capelli.

Piani

Sia α un piano di Σ. Si dicono **parametri di giacitura** di α le coordinate di un vettore $\vec{a}$ ortogonale ad α.

Teorema: Ogni piano α dello spazio è univocamente determinato da un punto e dai suoi parametri di giacitura. Si osserva che piani paralleli hanno gli stessi parametri di giacitura.

Teorema: Ogni piano α dello spazio si può rappresentare mediante un'equazione lineare non degenere in 3 incognite, ovvero:

$$\alpha: ax+by+cz+d=0$$

Dove $\vec{a}\equiv(a,b,c)$ è un vettore ortogonale ad α, i punti di α sono le soluzioni dell'equazione.

Per questo teorema, faremo 2 dimostrazioni:

① $P_0\equiv(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$; $\vec{a}\equiv(a,b,c)\perp\alpha$

$$P\equiv(x,y,z)\in\Sigma \Rightarrow \overrightarrow{P_0P}\equiv(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

$$P\in\alpha \iff \overrightarrow{P_0P}\perp\vec{a} \iff \overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{a}=0 \iff a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \iff$$
$$\iff ax+by+cz+(-ax_0-by_0-cz_0)=0 \iff ax+by+cz+d=0 \quad \square$$

i coefficienti delle incognite sono proprio le coordinate del vettore $\vec{a}\perp\alpha$

② Sia $P_0\equiv(x_0,y_0,z_0)\in\alpha$, $\vec{v}\equiv(l,m,n)$ e $\vec{w}\equiv(l',m',n')$ due vettori paralleli ad α e non paralleli tra loro;

$$P\equiv(x,y,z) \Rightarrow \overrightarrow{P_0P}\equiv(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$$

Allora, $P\in\alpha \iff P$ è combinazione lineare di $\vec{v}$ e $\vec{w}$ $\iff (x-x_0,y-y_0,z-z_0)$ è c.lin. di (l,m,n) e (l',m',n');
$\iff$ ciò si ha imponendo
$$\begin{vmatrix} x-x_0 & l & l' \\ y-y_0 & m & m' \\ z-z_0 & n & n' \end{vmatrix}=0 \iff$$

$$\iff \begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix}(x-x_0)+\left(-\begin{vmatrix} l & l' \\ n & n' \end{vmatrix}\right)(y-y_0)+\begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \end{vmatrix}(z-z_0)=0 \iff$$ Laplace I Colonna

$$\iff ax+by+cz+d=0 \quad , \text{con } a=\begin{vmatrix} m & m' \\ n & n' \end{vmatrix},\ b=\left(-\begin{vmatrix} l & l' \\ n & n' \end{vmatrix}\right),\ c=\begin{vmatrix} l & l' \\ m & m' \end{vmatrix}$$

Si riconosce subito che il vettore $\vec{a}(a,b,c)$ è ortogonale al piano, infatti $\vec{a}=\vec{v}\times\vec{w}$

Caso Particolare: Piano per 3 punti non allineati

Siano $A\equiv(x_0,y_0,z_0)$, $B\equiv(x_1,y_1,z_1)$ e $C\equiv(x_2,y_2,z_2)$; allora i vettori:

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}\equiv(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)$$
$$\vec{w}=\overrightarrow{AC}\equiv(x_2-x_0,\ y_2-y_0,\ z_2-z_0)$$
sono vettori paralleli al piano e non paralleli tra loro

Il piano passante per A,B,C si ottiene ponendo:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & x_1-x_0 & x_2-x_0 \\ y-y_0 & y_1-y_0 & y_2-y_0 \\ z-z_0 & z_1-z_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0$$

Esercizi

① $r: \begin{cases} x-y+z+1=0 \\ 3x-2y-z+3=0 \end{cases}$; $P\equiv(1,2,1)$ $\quad$ α per P ortogonale a r?

a) $\boxed{\alpha \perp r}$ $\quad \vec{v} \parallel r \Rightarrow \vec{v} \perp \alpha$. $\quad \vec{v}\equiv(l,m,n)$; $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ $l=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=3$, $m=\left(-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right)=4$, $n=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=1$

Dunque, $\vec{v}\equiv(3,4,1) \perp \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha: 3x+4y+z+d=0$

b) $\boxed{P\in\alpha}$ $\Rightarrow 3\cdot1+4\cdot2+1\cdot1+d=0 \Leftrightarrow 12+d=0 \Leftrightarrow d=-12$

Dunque, $\alpha: 3x+4y+z-12=0$

② Dati i punti $A\equiv(1,2,1)$, $B\equiv(2,-1,3)$ e $C\equiv(0,1,1)$, a) Verificare che non siano allineati
b) Trova le equazioni del piano passante per A,B,C

a) $\vec{AB}\equiv(1,-3,2)$, $\vec{AC}\equiv(-1,-1,0) \Rightarrow \vec{AB}$ e $\vec{AC}$ non sono proporzionali $\Rightarrow A,B,C$ non sono allineati

b) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y-2 & -3 & -1 \\ z-1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; $\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}(x-1) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}(y-2) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}(z-1)=0 \Rightarrow 2x-2y-4z+6=0$

Dunque, $\alpha: x-y-2z+3=0$ $\quad$ ⚠: semplifica il più possibile l'equazione del piano

③ Date le rette $r: \begin{cases} x=1+h \\ y=2-h \\ z=3 \end{cases}$ ed $s: \begin{cases} x=-t \\ y=1+2t \\ z=t \end{cases}$ e $P\equiv(2,1,1)$

Determinare l'equazione del piano α passante per P e $\parallel$ alle due rette.

$\vec{v}\equiv(l,m,n)=(1,-1,0)\parallel r$ $\quad$ non $\parallel$ tra loro
$\vec{w}\equiv(l',m',n')=(-1,2,1)\parallel s$

$\alpha\parallel r \Leftrightarrow \alpha\parallel\vec{v}$
$\alpha\parallel s \Leftrightarrow \alpha\parallel\vec{w}$ $\Longleftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(x-2) - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(y-1) + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}(z-1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x-y+z+2=0 \Rightarrow \alpha: x+y-z-2$

⚠: Si preferisce avere il coefficiente della $x>0$

④ $r: \begin{cases} x=1+h \\ y=2-h \\ z=h \end{cases}$; $P\equiv(1,1,2)$

a) verificare $P\notin r$
b) scegliere due punti $A,B\in r$
c) il piano che contiene r e P è il piano per i punti A,B,P

$\Rightarrow$ eq. del piano α che contiene r e P

⑤ Date due rette r ed s, determinare l'equazione del piano passante per le due rette (ovvero che le contiene)

Procedimento: a) verificare che le rette sono complanari
b) scegliere due punti $A,B\in r$ e un punto $C\in s$ (⚠: $C\notin r$! $\neq$ punto intersez. (se esiste))
c) il piano α che contiene r ed s è il ~~piano~~ piano per i punti A,B,C

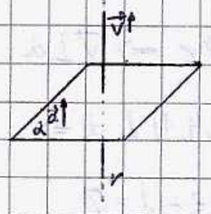
...

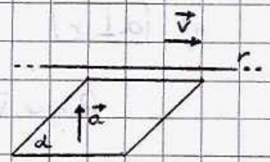
Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra retta e piano

Sia r una retta di numeri direttori (l,m,n) e α un piano di parametri di giacitura (a,b,c).
Allora:

$$r /\!/ \alpha \iff al+bm+cn=0$$

$$r \perp \alpha \iff \exists h \in \mathbb{R} : (a,b,c)=h(l,m,n)$$





$\boxed{\text{Dim}}$: Basta osservare che:

$$r /\!/ \alpha \iff \vec{v} \perp \vec{a} \quad (\vec{v} \cdot \vec{a} = 0)$$
$$r \perp \alpha \iff \vec{v} /\!/ \vec{a} \quad (\vec{a} = h\vec{v})$$

Condizioni di parallelismo e ortogonalità tra due piani

Siano α e β due piani di parametri di giacitura rispettivamente (a,b,c) e (a',b',c'). Allora,

$$\alpha /\!/ \beta \iff \exists h \in \mathbb{R} : (a',b',c') = h(a,b,c)$$

$$\alpha \perp \beta \iff aa'+bb'+cc'=0$$

$\boxed{\text{Dim}}$: Basta osservare che:

$$\alpha /\!/ \beta \iff \vec{a} /\!/ \vec{a}_1 \iff (a',b',c') = h(a,b,c)$$

$$\alpha \perp \beta \iff \vec{a} \perp \vec{a}_1 \iff aa'+bb'+cc'=0$$

$\boxed{\text{Esercizio}}$

Siano $\alpha: x+y-z+1=0$, $\beta: 2x+3y+z-3=0$, $P \equiv (1,2,0) \in \Sigma$. Determinare:

a) l'equazione del piano α' per $P /\!/ \alpha$
b) l'equazione del piano γ passante per P e ortogonale ad α
c) le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per P e ortogonale ad α
d) le equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per P e parallela sia ad α che a β

a) $\alpha': ax+by+cz+d=0$

- $\alpha' /\!/ \alpha \Rightarrow (a,b,c)=h(1,1,-1)$; ad esempio, $(a,b,c)=(1,1,-1) \Rightarrow \alpha': x+y-z+d=0$

- $P \in \alpha' \Rightarrow 1+2-0+d=0$; $d+3=0$; $d=-3$

Dunque, $\alpha': x+y-z-3=0$

b) Tutti i piani che contengono una retta $r \perp \alpha$ sono ortogonali ad α. (Oss)

$$\gamma: ax+by+cz+d=0$$

- $\gamma \perp \alpha \iff aa'+bb'+cc'=0 \Rightarrow a+b-c=0 \Rightarrow c=a+b$; ad esempio $\begin{matrix} a=1 \\ b=1 \\ c=2 \end{matrix} \Rightarrow \gamma: x+y+2z+d=0$

- $P \in \gamma \Rightarrow 1+2+0+d=0 \Rightarrow d=-3$

Dunque, $\gamma: x+y+2z-3=0$

c) 1) $r: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \\ z = z_0 + hn \end{cases}, h \in \mathbb{R}$ oppure 2) $r\left(\begin{bmatrix} x-x_0 & l \\ y-y_0 & m \\ z-z_0 & n \end{bmatrix}\right) = 1$

1) • $P \in r \Rightarrow (x_0, y_0, z_0) \equiv (1, 2, 0)$

• $r \perp \alpha \Rightarrow (l, m, n) = h(1, 1, -1)$ ad esempio, $(l, m, n) = (1, 1, -1)$

$r: \begin{cases} x = 1+h \\ y = 2+h \\ z = -h \end{cases}, h \in \mathbb{R}$ da qui è possibile ricavare le equazioni cartesiane. Infatti: $h = -z \Rightarrow \begin{cases} x = 1-z \\ y = 2-z \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x+z-1 = 0 \\ y+z-2 = 0 \end{cases}$

In alternativa:

$r\begin{bmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 1 \\ z & -1 \end{bmatrix} = 1$ Scegliamo un minore di ordine 1 diverso da 0. per il t. degli orlati bisogna imporre i suoi orlati = 0 $\Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ y-2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ z & -1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x-y+1 = 0 \\ x+z-1 = 0 \end{cases}$

d) Applichiamo lo stesso ragionamento del punto c:

1) $r: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \\ z = z_0 + hn \end{cases}, h \in \mathbb{R}$ $(x_0, y_0, z_0) = (1, 2, 0)$

• $r /\!/ \alpha: l+m-n = 0$

• $r /\!/ \beta: 2l+3m+n = 0$

$r /\!/ \alpha, r /\!/ \beta \Rightarrow r: \begin{cases} l+m-n = 0 \\ 2l+3m+n = 0 \end{cases}; \begin{cases} l+m-n = 0 \\ m+3n = 0 \end{cases}; \begin{cases} l = 4n \\ m = -3n \end{cases}$ ad esempio, $l = 4$, $m = -3$, $n = 1$

Dunque, $(l, m, n) = (4, -3, 1)$ e quindi:

$r: \begin{cases} x = 1+4h \\ y = 2-3h \\ z = h \end{cases}$ da cui $r: \begin{cases} x = 1+4z \\ y = 2-3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-4z-1 = 0 \\ y+3z-2 = 0 \end{cases}$

In alternativa,

$r\begin{bmatrix} x-1 & 4 \\ y-2 & -3 \\ z & 1 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} x-1 & 4 \\ y-2 & -3 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} y-2 & -3 \\ z & 1 \end{vmatrix} = 0 \end{cases}; r: \begin{cases} -3x+3-4y+8 = 0 \\ y-2+3z = 0 \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} 3x+4y-11 = 0 \\ y+3z-2 = 0 \end{cases}$

Retta come intersezione di due piani

Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz+d = 0 \\ a'x+b'y+c'z+d' = 0 \end{cases}$, con $r\begin{bmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{bmatrix} = 2$

I piani $\alpha: ax+by+cz+d = 0$ e $\beta: a'x+b'y+c'z+d' = 0$ sono due piani non paralleli di Σ che contengono la retta r, ovvero $r = \alpha \cap \beta$.

Vale anche il viceversa: le equazioni di due piani messe a sistema sono le equazioni della retta r in forma cartesiana, in quanto r è intersezione tra i due piani.

Per questo motivo, le equazioni cartesiane di una retta r si dicono anche equazioni di r come intersezione (di) tra due piani.

Applicazione: retta per un punto perpendicolare (ortogonale e incidente) a una retta data

Basta osservare che la retta cercata è l'intersezione di due piani: il piano α che contiene la retta data e il punto e il piano β passante per il punto e ortogonale alla retta. messi a sistema, le equazioni cartesiane della retta sono individuate.

Esercizio

Siano $r: \begin{cases} x = 1-h \\ y = 2+h \\ z = 2h \end{cases}$, $h \in \mathbb{R}$, $P \equiv (1,0,2)$ $(\notin r)$. Determinare le equazioni ~~per~~ cartesiane della retta s per P perpendicolare ad r.

$s: \begin{cases} \alpha \text{ per } P \text{ ortogonale ad } r \\ \beta \text{ che contiene } r \text{ e } P \end{cases}$

· α) $(a,b,c) = (\ell,m,n) = (-1,1,2) \Rightarrow \alpha: -x+y+2z+d=0$
$P \in \alpha \Rightarrow -1+0+4+d=0 \Rightarrow d=-3$
Dunque, $\alpha: -x+y+2z-3=0 \Longleftrightarrow \alpha: x-y-2z+3$ preferibile coeff. $x>0$

· β) $A,B \in r$: $h=0 \rightarrow A \equiv (1,2,0)$
$h=1 \rightarrow B \equiv (0,3,2)$ β è il piano per A,B,P

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y & 2 & 3 \\ z-2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ \cancel{y} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ y+z-2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2\begin{vmatrix} x-1 & -1 \\ y+z-2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x-3+y+z-2=0$$

Dunque, $\beta: 3x+y+z-5=0$

Di conseguenza, $s: \begin{cases} x-y-2z+3=0 \\ 3x+y+z-5=0 \end{cases}$

Applicazione: retta per un punto incidente a due rette sghembe

Basta osservare che la retta cercata è l'intersezione di due piani: il piano α che contiene r e P e il piano β che contiene s e P (con r,s le due rette sghembe).

Caso particolare: Se il piano α contenente r e P è parallelo ad s allora la retta cercata risulta parallela e non incidente a s, comunque complanare.

Fascio di Piani

Sia $r: \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ una retta di Σ.

Si dice fascio di piani di asse la retta r l'insieme $\mathcal{F}$ formato da tutti e soli i piani che contengono la retta r.
Si dimostra che se α e $\beta \in \mathcal{F}$ (con $\alpha \neq \beta$) allora l'equazione di ogni altro piano del fascio è combinazione lineare delle equazioni di α e β.
Di conseguenza, l'equazione del fascio è data da:

$$\mathcal{F}: h(ax+by+cz+d)+k(a'x+b'y+c'z+d')=0$$

Applicazioni

① Piano che contiene una retta r e un punto P
(considera il fascio di piani di asse r e imponi il passaggio per P $(h,k \mid P\in\alpha)$)

② Piano per due rette complanari
(considera il fascio di asse una retta, imponi il passaggio per $P \in$ altra retta)

③ Date due rette sghembe, trovare il piano che ne contiene una ed è parallelo all'altra
(considera il fascio di piani di asse la retta r, imponi il parallelismo con s.

Esercizio

Data la retta $r: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ 2x+3y+z-3=0 \end{cases}$ e $P \equiv (1,1,0)$, trovare l'equazione del piano α contenente r e P

$\mathcal{F}(r): h(x+y-z+1)+k(2x+3y+z-3)=0$ eq. del fascio

$P \in \alpha \Rightarrow \alpha)$ $h(1+1-0+1)+k(2+3+0-3)=0$; $3h+2k=0$; $3h=-2k$ ad es. $h=2, k=-3$

Dunque, $\alpha: 2(x+y-z+1)-3(2x+3y+z-3)=0 \Rightarrow -4x-7y-5z+11=0 \Rightarrow \alpha: 4x+7y+5z-11=0$

Distanze

Siano A e B due **punti** del piano o dello spazio; la **distanza tra A e B** coincide con $\|\overrightarrow{AB}\|$
(Essendo simili (ma differendo per una componente), considereremo le seguenti situazioni nello spazio)

Se $A, B \in \Sigma$, $A \equiv (x_1, y_1, z_1)$; $B \equiv (x_2, y_2, z_2)$

Allora $d(A,B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

Generalizzando, siano $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ due sottoinsiemi di Σ (punto, retta, piano, curva, ...), allora:

$$d(\mathcal{S},\mathcal{P}) = \inf\{d(P,Q): P \in \mathcal{S}, Q \in \mathcal{P}\}$$

Coincide dunque con la minima distanza o, come nel caso di una curva asintotica col relativo asintoto ($d=0$), con l'estremo inferiore dell'insieme delle distanze (curva e asintoto non si toccano mai, ma $d=0$)

Naturalmente, se $\mathcal{S} \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$, allora $d(\mathcal{S},\mathcal{P})=0$; come detto non vale il viceversa

Casi Particolari

1) Distanza di un punto P da una retta r

Sia α il piano per P ortogonale ad r: esso la interseca nel punto P', detto proiezione di P su r.
Si osserva che $d(P,r)=d(PP')$
Nel piano, invece del piano α si sfrutta una retta s per P ortogonale ad r.

2) Distanza di un punto P da un piano α

Sia r la retta per P ortogonale ad α; essa interseca il piano nel punto P' (proiezione di P su α).
Si osserva che $d(P,\alpha)=d(P,P')$

Tutti i problemi possono essere ricondotti alle tipologie 1) e 2)

3) Distanza tra due rette parallele r ed s

Scelto un punto $P \in r$, risulta $d(r,s)=d(P,s)$

4) Distanza tra due piani paralleli α e β

Scelto un punto $P \in \beta$, risulta $d(\alpha,\beta)=d(P,\alpha)$

5) Distanza tra un piano e una retta paralleli tra loro

Scelto un punto $P \in r$, risulta $d(r, \alpha) = d(P, \alpha)$

6) Distanza tra due rette sghembe r ed s

Sia α il piano che contiene la retta s ed è parallelo ad r, allora $d(r,s) = d(r,\alpha)$

Se $P \in r$ e $Q \in s$ sono tali che $d(r,s) = d(P,Q)$ allora la retta t per i punti P e Q si dice **retta di minima distanza** delle rette sghembe r ed s. I punti P e Q si possono determinare imponendo che sia contemporaneamente $\vec{PQ} \perp r$ e $\vec{PQ} \perp s$

Esercizi

$r: \begin{cases} x = 1+h \\ y = 2-h \\ z = 3h \end{cases}$ $\quad P \equiv (1, 0, 3)$ $\quad$ determinare $d(P, r)$

1) Osserviamo che $P \notin r$: il sistema $\begin{cases} 1 = 1+h \\ 0 = 2-h \\ 3 = 3h \end{cases}$ non ha soluzione

2) Determiniamo il piano α per P ortogonale ad r:

$\alpha: ax + by + cz + d = 0 \qquad (a,b,c) = (l,m,n) = (1,-1,3)$

$P \in \alpha \Rightarrow 1 + 9 + d = 0 \Rightarrow d = -10 \Rightarrow \alpha: x - y + 3z - 10 = 0$

3) Determiniamo $P' = \alpha \cap r$:

$$\underbrace{(1-h)}_{} - \underbrace{(2-h)}_{} + 3\underbrace{(3h)}_{} - 10 = 0 \Rightarrow 1 + h - 2 + h + 9h - 10 = 0;\ 11h - 11 = 0;\ h = 1$$

$\longrightarrow$ coordinate del generico punto di r

$\Downarrow$

$P' \equiv (2, 1, 3)$

4) $d(P,r) = d(PP') = \|\vec{PP'}\| = \sqrt{(2-1)^2 + (1-0)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{2}$

Sia $Q \equiv (2,1,3)$. Determinare $d(Q,r)$.

1) $Q \in r$? $\begin{cases} 2 = 1+h \\ 1 = 2-h \\ 3 = 3h \end{cases}$ ha soluzione per $h = 1 \Rightarrow Q \in r \Rightarrow d(Q,r) = 0$

$\alpha: x - y + 2z + 1 = 0$, $P \equiv (3, 0, 4)$. Determinare $d(P, \alpha)$.

1) Verifichiamo $P \notin \alpha$: $3 - 0 + 8 + 1 = 12 \neq 0$ ✓

2) Troviamo la retta r per P ortogonale ad α:

$r: \begin{cases} x = x_0 + hl \\ y = y_0 + hm \\ z = z_0 + hn \end{cases}$ $\qquad (x_0, y_0, z_0) = (3, 0, 4)$; $(l,m,n) = h(a,b,c)$; ad esempio, $(l,m,n) = (1,-1,2)$

dunque, $r: \begin{cases} x = 3 + h \\ y = 0 - h \\ z = 4 + 2h \end{cases}$

3) Troviamo $P' = r \cap \alpha$

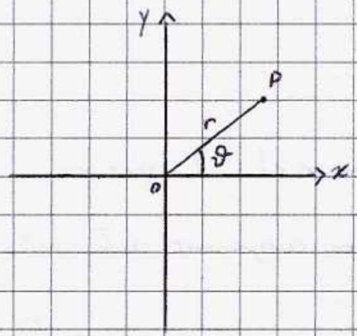
$(3+h) + h + 2(4+2h) + 1 = 0;\ 6h + 12 = 0;\ h = -2 \Rightarrow P' = (1, 2, 0)$

4) $d(P,\alpha) = d(P,P') = \|\vec{PP'}\| = \sqrt{(3-1)^2 + (0-2)^2 + (4-0)^2} = \sqrt{4+4+16} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Alcuni argomenti di Geometria Analitica Nel Piano

Coordinate polari di un punto

Fissato un sistema di riferimento C in un piano π e un punto $P \equiv (x,y)$



Il punto P risulta univocamente determinato da $r = d(O,P)$ e da $\vartheta \in [0, 2\pi[$, angolo che il vettore $\overrightarrow{OP}$ forma col semiasse positivo delle x.

r e ϑ si dicono coordinate polari del punto P.

Inoltre, risulta: $\begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\,\text{sen}\,\vartheta \end{cases}$

Punto medio di un segmento

Si dice punto medio M di un segmento AB il punto del segmento equidistante da A e B.

Se M è il punto medio del segmento AB, allora B si dice simmetrico di A rispetto a M.

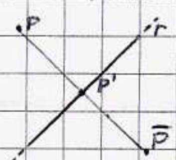
Teorema: Se $A \equiv (x_1, y_1)$ e $B \equiv (x_2, y_2)$, allora $M \equiv \left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

$\boxed{\text{Dim}}$

Sia $M \equiv (x,y)$, allora poiché $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ risulta $(x-x_1, y-y_1) = (x_2-x, y_2-y)$, da cui risulta $x - x_1 = x_2 - x$ e $y - y_1 = y_2 - y$ e dunque $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$ $\boxed{\text{QED}}$

Simmetrico di un punto P rispetto a una retta r

Sia r una retta, P un punto ed P' la proiezione di P su r. Si dice simmetrico di P rispetto a r il simmetrico $\overline{P}$ di P rispetto a P'



Campo Complesso

Prima di procedere nella trattazione e nello studio delle coniche, risulta utile definire il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi:

$$\mathbb{C} = \{a+ib : a,b \in \mathbb{R}, i^2 = 1\}$$

Risulta naturalmente $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, infatti $\mathbb{R} = \{a+ib : b = 0\}$

I numeri complessi $a+ib$ ed $a-ib$ si dicono **coniugati**

La trattazione dei numeri complessi viene spesso accennata al liceo: quando un'equazione di secondo grado non ha soluzioni reali, essa ha in realtà due soluzioni complesse. Ad esempio, l'equazione $x^2+y^2+1=0$ ammette come soluzioni $(i, 0)$ e $(0, i)$.

Per una migliore descrizione delle coniche risulta dunque necessario distinguere tra **punti reali** e **punti immaginari** del piano: Un punto reale è un punto in cui entrambe le coordinate sono reali, mentre in un punto immaginario almeno una delle coordinate non è reale.

Allo stesso modo, una **retta immaginaria** è una retta di equazione $ax+by+c=0$ in cui almeno uno tra a, b, c non è reale. Due rette r ed s si dicono immaginarie coniugate se i rispettivi coefficienti delle incognite sono numeri complessi coniugati.

Coniche

Si dice **conica** ogni curva Γ del piano che si rappresenta in un riferimento, e quindi in ogni riferimento, mediante un'equazione di secondo grado in x e y, ovvero un'equazione del tipo:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$$

Esempi

1) $x^2-y^2=0$

Poiché $(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)=0$, la conica è formata dalle rette r ed s di equazione rispettivamente $x+y=0$ e $x-y=0$.
Si dice che la conica è **formata da due rette reali e distinte**, dette **componenti** della conica

2) $x^2+y^2-2xy=0$

Poiché $x^2+y^2-2xy=(x-y)^2=0$ la conica è formata da un'unica retta "contata due volte" si dice che la conica è costituita da **due rette reali e coincidenti**.

Coniche formate da rette si dicono **coniche degenere**; logicamente il nostro studio si focalizzerà sulle coniche non degenere.
Prima di procedere ad introdurre brevemente l'argomento coniche, osserviamo alcune definizioni relative alla simmetria:

Sia Γ una curva del piano, O un punto fissato, $\overline{P}$ il simmetrico di un generico punto P rispetto ad O. Si dice che O è **centro di simmetria** di Γ se:

$$P\in\Gamma \Rightarrow \overline{P}\in\Gamma$$

Sia r una retta, $\overline{P}$ il simmetrico di un generico punto P rispetto ad r. Si dice che la retta r è **asse di simmetria** (ortogonale) della curva Γ se:

$$P\in\Gamma \Rightarrow \overline{P}\in\Gamma$$

Circonferenza

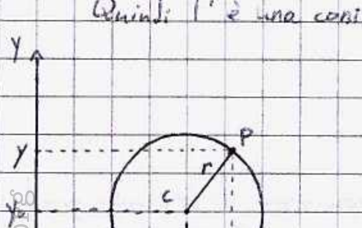
Sia $C\equiv(x_0,y_0)$ un punto del piano e $r>0$; si dice circonferenza di centro C e raggio r il luogo geometrico Γ dei punti P del piano aventi distanza r da C. Sia $P\equiv(x,y)$.

$$P\in\Gamma \Leftrightarrow d(P,C)=r \Leftrightarrow (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r \Leftrightarrow x^2+y^2-2x_0x-2y_0y+x_0^2+y_0^2-r^2=0$$

Ovvero, Γ ha equazione:

$$ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0\text{, dove: } a=b=1;\ c=0;\ d=-2x_0;\ e=-2y_0;\ f=x_0^2+y_0^2-r^2$$

Quindi Γ è una conica.



Se il centro C della conica è l'origine del riferimento, la conica diventa

$$x^2+y^2-r^2=0$$

Osservazione: Il centro C è centro di simmetria di Γ; ogni retta per il centro è asse di simmetria

Le equazioni parametriche della circonferenza sono:

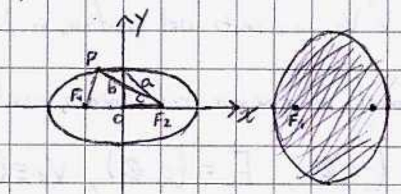
$$\begin{cases} x=x_0+r\cos\vartheta \\ y=y_0+r\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases} \qquad \vartheta\in[0,2\pi[$$

Se $r<0$, la circonferenza si dice immaginaria

Ellisse

Siano F_1 ed F_2 due punti del piano tali che $d(F_1,F_2)=2c$, con $c\geq 0$.
Sia $a>c$; si dice ellisse il luogo geometrico Γ dei punti P del piano tali che:

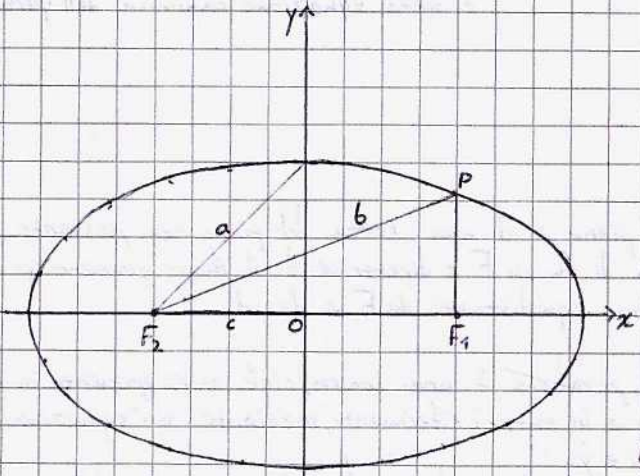
$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$



F_1 e F_2 si dicono fuochi di Γ.

Sia O il punto medio del segmento F_1F_2.
La retta F_1F_2 e l'asse del segmento F_1F_2 sono assi di simmetria di Γ, e si dicono assi di Γ.
Il punto O è centro di simmetria; O si dice centro dell'ellisse Γ.
I punti di intersezione di Γ con gli assi si dicono **vertici**.

Si dimostra che Γ si rappresenta in un riferimento, e dunque in tutti i riferimenti, mediante un'equazione di secondo grado in x e y.
Consideriamo il sistema di riferimento in figura:



Osserviamo che $F_1\equiv(c,0)$, $F_2\equiv(-c,0)$

Se $P\equiv(x,y)$, allora:

$$P\in\Gamma \iff \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a \iff$$

$\iff (\ldots)$ sviluppiamo i calcoli $\iff$

$$\iff \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \text{con } b^2=a^2-c^2$$

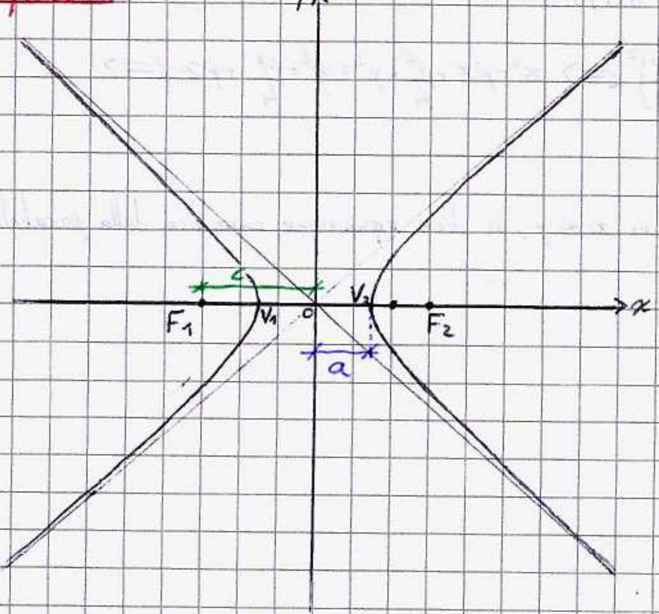
Quest'equazione di secondo grado in x e y si dice **equazione canonica dell'ellisse.**

Se $F_1\equiv F_2$, ovvero se $c=0$, si ottiene una circonferenza.
se $c<0$, si ottiene un'ellisse immaginaria

~~Iperbole~~ Osservazioni

- Se $b>a>0$, l'ellisse è verticale
- Se troviamo $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, l'ellisse ha centro $C\equiv(h,k)$

Iperbole



Siano F_1 ed F_2 due punti nel piano tale che $d(F_1,F_2)=2c$, $c>0$. Sia $0<a<c$; si dice iperbole il luogo geometrico Γ dei punti P del piano tali che:

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$$

F_1 ed F_2 si dicono fuochi di Γ

Per dimostrare che l'iperbole è una conica, è sufficiente dimostrare che essa può essere rappresentata in un riferimento, e dunque in tutti i riferimenti, mediante un'equazione di secondo grado in x e y.
Consideriamo il sistema di riferimento in figura

Si osserva che l'origine O del riferimento è il punto medio del segmento F_1F_2, l'asse x è la retta F_1F_2, l'asse y è l'asse del segmento F_1F_2.
Si osserva che le due rette sopracitate sono assi di simmetria dell'iperbole; essi si dicono assi della iperbole. Il punto O è centro di simmetria, e si dice centro dell'iperbole.
I punti V_1 e V_2, indicati nel grafico, si dicono vertici dell'iperbole.

Osserviamo che in questo riferimento, risulta:

$$F_1 \equiv (-c, 0),\quad F_2 \equiv (c, 0),\quad V_1 \equiv (-a, 0),\quad V_2 \equiv (a, 0)$$

Sia $P \equiv (x, y)$. Allora:

$$P \in \Gamma \iff |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a \iff$$

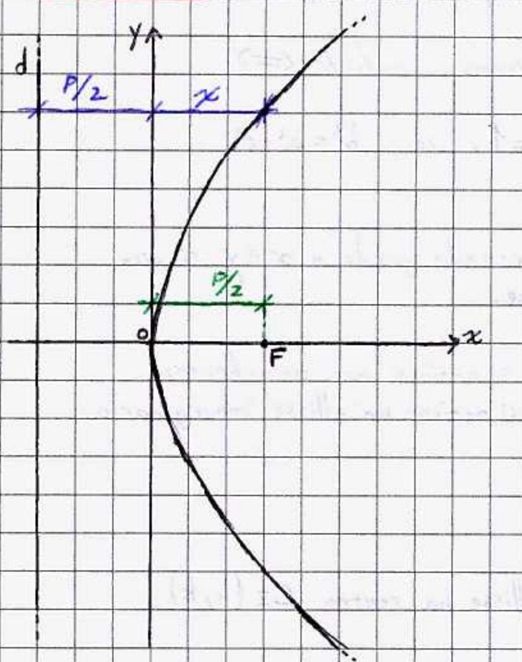
$$\iff \left|\sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2}\right| = 2a \iff (\dots)$$

$$\iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ con } b^2 = c^2 - a^2$$

Quest'equazione di II grado in x e y è detta equazione canonica dell'iperbole.

L'ellisse e l'iperbole si dicono coniche a centro.

Parabola



Sia F un punto del piano e d una retta del piano non passante per F; si dice parabola di fuoco F e direttrice d il luogo geometrico Γ dei punti P del piano equidistanti da F e da d.

Si dimostra che la parabola è una conica, cioè si rappresenta in un riferimento, e dunque in tutti i riferimenti, mediante un'equazione di secondo grado in x e y.
La retta per F ortogonale a d è asse di simmetria della parabola, e si dice asse della parabola.
Il punto d'intersezione tra la parabola Γ e il suo asse si dice vertice della parabola.

Consideriamo il sistema di riferimento in figura e sia $d(F,d) = p$.
Allora:

$$F \equiv \left(\frac{p}{2}, 0\right);\quad d: x + \frac{p}{2} = 0.$$

Sia $P \equiv (x, y)$. Allora:

$$P \in \Gamma \iff d(P,F) = d(P,d) \iff$$

$$\iff \sqrt{(x-p/2)^2+y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right| \iff \left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \iff \cancel{x^2} - px + \cancel{\frac{p^2}{4}} + y^2 = \cancel{x^2} + \cancel{\frac{p^2}{4}} + px \iff$$

$$\iff y^2 = 2px$$

Dunque, $\Gamma: y^2 = 2px$, che è un'equazione di II grado in x e y, si dice equazione canonica della parabola

Matrice associata ad una conica

Sia $\Gamma: ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ una conica. La matrice simmetrica di ordine 3:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & c/2 & d/2 \\ c/2 & b & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$$

"$e/2 + e/2 = e$"

Si dice matrice associata alla conica Γ.

Con queste posizioni, l'equazione di Γ si può anche scrivere:

$$\Gamma: a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

o, alternativamente:

$$\Gamma: (x, y, 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

Se Γ è una conica non degenere e $P\equiv(\bar{x},\bar{y})\in\Gamma$, allora la retta t tangente a Γ nel punto P ha equazione:

$$t: (\bar{x} \;\; \bar{y} \;\; 1)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}=0$$

Classificazione di coniche degenere

La conica Γ è degenere se e solo se $|A|=0$.

- Se $r(A)=1$, la conica è costituita da due rette reali e coincidenti, e si dice che essa è doppiamente degenere.
- Se $r(A)=2$, la conica si dice semplicemente degenere. Si distinguono tre casi, dipendenti dal minore della matrice A ottenuto cancellando 3^a riga e 3^a colonna:
  - $A_{33}<0$: La conica è costituita da due rette reali e distinte, incidenti.
  - $A_{33}>0$: La conica è costituita da due rette immaginarie coniugate (un solo punto reale)
  - $A_{33}=0$: La conica è costituita da due rette parallele (reali o immaginarie coniugate)

Esempi

- $\Gamma: x^2+y^2-2xy-1=0$

$$x^2+y^2-2xy-1=(x-y)^2-1=(x-y+1)(x-y-1) \qquad [A_{33}<0]$$

- $\Gamma: x^2+y^2-2xy+1=0$

$$x^2+y^2-2xy+1=(x-y)^2+1=(x-y+i)(x-y-i) \qquad [A_{33}>0]$$

Esercizi

① Verificare che le coniche $\Gamma: x^2+4y^2-2x-4y+1=0$ e $\Gamma': 2x^2+2xy-4y^2-2x+2y=0$ sono degenere e determinarne le componenti.

① $\Gamma: x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=0$

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 4 & -2\\ -1 & -2 & 1\end{bmatrix}; \quad |A|=0,\ r(A)=1 \Rightarrow \text{la conica } \Gamma \text{ è doppiamente degenere.}$$

$$x^2+4y^2+4xy-2x-4y+1=(x+2y-1)^2$$

Osservazione: $(a,b,c)=(1,2,1)$ è la prima riga della matrice.

② $\Gamma': 2x^2+2xy-4y^2-2x+2y=0$

$$A=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}; \quad |A|=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 1 & -4 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & -1\\ 3 & -3 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0; \quad r(A)=2 \Rightarrow$$

la conica Γ' è semplicemente degenere, costituita da due rette reali e distinte, incidenti.

$$2x^2+2xy-4y^2-2x+2y=0 \Rightarrow x^2+xy-2y^2-x+y=0;$$

$$x^2+(y-1)x-2y^2+y=0;$$

Fissiamo $a=1,\ b=y-1,\ c=-2y^2+y$

$$x=\frac{-(y-1)\pm\sqrt{(y-1)^2+8y^2-4y}}{2}=$$

$$=\frac{-y+1\pm\sqrt{y^2+1-2y+8y^2-4y}}{2}=\frac{-y+1\pm\sqrt{9y^2-6y+1}}{2}=\frac{-y+1\pm\sqrt{(3y-1)^2}}{2}=$$

$$=\frac{-y+1\pm(3y-1)}{2}=\begin{cases}+ & 2y \quad (=x_1)\\ - & -4y+2 \quad (=x_2)\end{cases}$$

Ricordiamo che, se x_1 e x_2 sono le radici del polinomio ax^2+bx+c, allora $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, dunque $x^2+xy-2y^2-x+y=(x-2y)(x+4y-2)$.

Le rette componenti sono:

$$r:\ x-2y=0 \quad ; \quad s:\ x+4y-2=0$$

Per trovare il punto comune alle due rette è sufficiente risolvere il sistema:

$$\begin{cases}x-2y=0\\ x+4y-2=0\end{cases}; \quad \begin{cases}x-2y=0\\ 6y-2=0\end{cases}; \quad \begin{cases}x=2y=\frac{2}{3}\\ y=\frac{1}{3}\end{cases}$$

Dunque, r ed s sono incidenti nel punto $P\equiv\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$

⚠ Per quanto possano sembrare simili sul piano grafico, parabola e iperbole sono radicalmente diverse: mentre la iperbole ha due asintoti, l'angolo formato da una tangente alla parabola con l'asse di simmetria della parabola tende a 0 all'infinito.

Classificazione di Coniche non degenere

Sia Γ la conica di equazione $a_{11}x^2+a_{22}y^2+2a_{12}xy+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$

ed $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ la matrice simmetrica associata.

Γ è non degenere $\iff$ $|A|\neq 0$. Come per le coniche degenere, si distinguono tre casi a seconda del valore del minore:

$$A_{33}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$$

- $A_{33}>0$: La conica è una ellisse reale o immaginaria
  - immaginaria: Se a_{11} e $|A|$ sono concordi (priva di punti reali)
  - reale: Se a_{11} e $|A|$ sono discordi (infiniti punti reali)

Caso particolare: Se $a_{11}=a_{22}$ e $a_{12}=0$, l'ellisse è una circonferenza.

- $A_{33}=0$: La conica è una parabola

- $A_{33}<0$: La conica è una iperbole

Rette tangenti a coniche non degenere in un punto P

Sia $P\in\Gamma$, $P\equiv(\bar{x},\bar{y})$, allora la tangente $t(P)$ a Γ nel punto P ha equazione:

$$[\bar{x}\ \ \bar{y}\ \ 1]\,A\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1\end{bmatrix}=0$$

In particolare, se è nota l'equazione canonica della conica non degenere di riferimento, risulta

- ellisse: $t(P): \dfrac{\bar{x}}{a^2}x+\dfrac{\bar{y}}{b^2}y=1$

- parabola: $t(P): y\bar{y}-px-p\bar{x}=0$

- iperbole: $t(P): \dfrac{\bar{x}}{a^2}x-\dfrac{\bar{y}}{b^2}y=1$

Osservazioni

Se Γ è una conica a centro, il centro è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}=0\end{cases}$$

I numeri direttori degli assi della conica sono rispettivamente (l,m) ed (l',m'); si nota che essi sono una coppia di autovettori ortogonali della matrice simmetrica $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

In particolare, nel caso di una parabola, uno dei due autovettori è nullo; per l'altro bisogna fare particolari considerazioni.

Se Γ è una iperbole, i numeri direttori degli asintoti si determinano risolvendo l'equazione:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy = 0$$

Se gli asintoti sono perpendicolari, l'iperbole si dice equilatera.

Esercizio

Data $\Gamma: 3x^2 + 8xy - 3y^2 + 2 = 0$; classificarla, verificare che $P \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \Gamma$, trovare la tangente a Γ nel punto P.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-25) = -50 \neq 0 \Rightarrow \Gamma \text{ è non degenere}$$

Valutiamo $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -25 < 0 \Rightarrow \Gamma$ è una iperbole

$$P \in \Gamma: 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 8\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 = \frac{3}{4} - 2 - \frac{3}{4} + 2 = 0 \Rightarrow P \in \Gamma \ \square$$

$$t(P): \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{3}{2} + \frac{4}{2} & -\frac{4}{2} - \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{7}{2} & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t(P): \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y + 2 = 0 \Rightarrow t(P): x - 7y + 4 = 0$$

Quadriche (nello spazio)

Si dice quadrica ogni superficie dello spazio che si rappresenta in un riferimento, e dunque in tutti i riferimenti, mediante un'equazione di II grado in x, y e z:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

Ad ogni quadrica Γ si associa una matrice simmetrica:

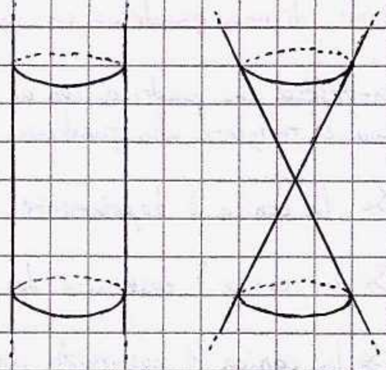
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Come visto per le coniche, una quadrica è degenere se e solo se $|A| = 0$

Classificazione di Quadriche degenere

Si distinguono diversi casi:

- $r(A) = 1$: due piani reali e coincidenti
- $r(A) = 2$: due piani distinti, immaginari o coniugati
- $r(A) = 3$: cono o cilindro indefinito (figura a fianco)



Quadriche non degenere

$|A| \neq 0 \iff r(A) = 4$

Si distinguono diversi casi, a seconda del segno del minore A_{44}.

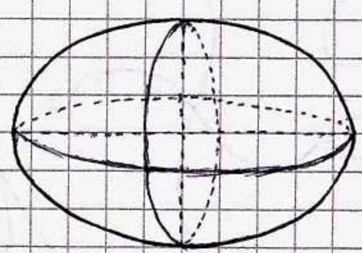
Ellissoide: Può essere reale o immaginario; caso particolare è la sfera.

- $A_{44} > 0$

Eq. Canoniche

reale: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

imm: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$



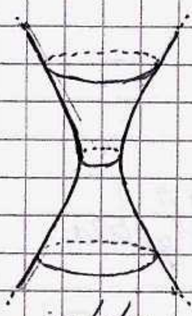
Iperboloide: Si distinguono iperboloide iperbolico e iperboloide ellittico a seconda dell'asse della conica "scelto per la rotazione"

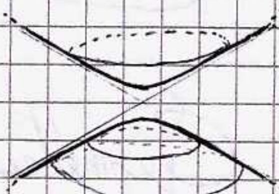
- $A_{44} < 0$

Eq. Canoniche

iperb.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

ell.: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$


iperbolico


ellittico

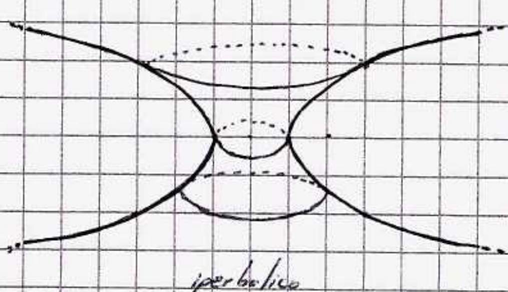
Paraboloide: Anche in questo caso vi è la distinzione fra iperbolico ed ellittico.

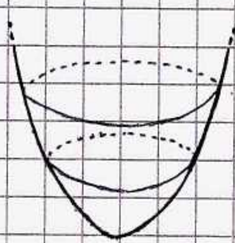
- $A_{44} = 0$

Eq. Canoniche

iperb.: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - z = 0$

ell.: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z = 0$


iperbolico


ellittico

Intersezione di una quadrica con un piano e classificazione dei punti di una quadrica

Se si interseca una quadrica con un piano si ottiene una conica.
Se il piano è tangente alla quadrica, la conica che ne deriva è degenere (tangente in un punto P della quadrica)

- Se la conica è doppiamente degenere il punto P si dice parabolico
- Se la conica è costituita da due rette reali e distinte il punto P si dice iperbolico
- Se la conica è costituita da due rette immaginarie coniugate (un solo punto reale) il punto P si dice ellittico

Si può dimostrare che i punti di una quadrica sono tutti dello stesso tipo; da ciò deriva la nomenclatura di paraboloidi ed iperboloidi; oltre al termine "iperbolico" è inoltre invalso il termine rigato (è costituito da un insieme di rette).

Fine

20.04.2020

Geometria & Algebra

prof.ssa Alma D'Aniello

28.04.2020: 30 L