AM II - Scheda Riassuntiva per le basi necessarie per sostenere la prima prova di esonero

20/11/2020

Riccardo Maria Polidoro

① Insiemi di definizione di funzioni scalari: calcolo e classificazione

- Insieme limitato: Può essere contenuto da una sfera chiusa
- Insieme chiuso: Contiene tutti i suoi punti di accumulazione ($X \equiv \overline{X}$)
- Insieme aperto: $X \equiv \mathring{X}$: tutti i punti di X sono interni ad X, ovvero $\exists I_{\bar{x}} \subseteq X \; \forall \bar{x} \in X$

Intorno di $\mathbb{R}^n$: sottoinsieme I di $\mathbb{R}^n$ che contiene una sfera aperta di $\mathbb{R}^n$ (⚠ dimensione dello spazio influisce sulla definizione di intorno!) di centro x_0

⚠ Esistono insiemi né aperti né chiusi

- Insieme compatto: chiuso e limitato

- Insieme Connesso $\Leftrightarrow \forall$ partizione $\exists$ punto $\in X_1$ di acc. per X_2

  Aperto [Ch.] connesso $\Leftrightarrow \nexists$ partiz. con insiemi tutti aperti [chiusi]

  Connesso per poligonali $\Rightarrow$ connesso (aperto $\Leftarrow$)

  Regione internamente connessa $\Rightarrow$ connesso

- Regione: $\forall x \in \partial X$, x è di acc.. Dominio $\Rightarrow$ regione chiusa.

② Integrali FONDAMENTALI in 1 variabile

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c = -\arccos x + c \qquad ⚠\; -1 \le x \le 1$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \log\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + c \qquad ⚠\; x \notin (-1,1)$$

(Utilizzati per $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$)

Regole di integrazione per parti / per sostituzione negli integrali definiti

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx \qquad \sqrt{\cdots} = \sqrt{a}(t-x) \Rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{a}}\sqrt{ax^2+bx+c} + x$$

oppure aggiungi e sottrai $\frac{p^2}{4}$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}\,dx \qquad t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\text{; se monomi pari } t = \operatorname{tg} x$$

$$\boxed{\int \sin^2 t\,dt = \int \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} \;;\quad \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}}$$

- $\int \sin^{2k} t\,dt = \int \sin t \cdot \sin^{2k-1} t\,dt \Rightarrow$ int. parti
- $\int \sin^{2k+1} t\,dt = \int \sin t \cdot \sin^{2k} t\,dt = \int \sin t \cdot (1-\cos^2 t)^{2k-2}\,dt$ ↳ IMMEDIATI

- $\int \sin^m t \cos^n t\,dt \rightarrow m \vee n \in \mathbb{N}_d \Rightarrow$ anche un dispari, sposti la pari all'altra trig $\Rightarrow$ int. immediati

  ↳ $m \wedge n \in \mathbb{N}_p \Rightarrow$ trasformi una pari $\Rightarrow$ potenze pari di solo una f trig.

③ Integrali doppi e tripli, coordinate polari, calcolo di baricentri e misure di insiemi di $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$

⚠ Formule parametriche: $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$; $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$; $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$ Utili per $\frac{1}{\sin^3 x}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

⚠

$$\sqrt{x^2+px+q} = \frac{\sqrt{\pm\Delta}}{2}\left(\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\pm\Delta}\right)^2 \mp 1}\right) \qquad + \Leftrightarrow \Delta > \emptyset\;;\; - \Leftrightarrow \Delta < \emptyset$$

$$\frac{\Delta}{4} = \frac{p^2 - 4aq}{4}$$

Oppure aggiungi e sottrai $\frac{p^2}{4}$ (se assente q c'è s)

$$\Delta < \emptyset:\; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{-\Delta}\right)^2 + 1}} = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}} \log\left|\frac{2x+p}{-\Delta} + \sqrt{\left(\frac{2x+p}{-\Delta}\right)^2 + 1}\right|$$

$$\Delta > \emptyset:\; \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{2x+p}{\Delta}\right)^2 - 1}} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}} \log\left|\frac{2x+p}{\Delta} + \sqrt{\left(\frac{2x+p}{\Delta}\right)^2 - 1}\right|$$

Scheda riassuntiva - Seconda prova di esonero (25/01/2021)

① Limiti di funzioni scalari in più variabili / funzioni vettoriali

Nella pratica sono di semplice risoluzione, ma richiedono ragionamento.

Esempio: $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \log(x^2-y^2) = 0$ $\quad X: \{(x,y): |x| \gneq |y|\}$, f continua in $(1,0)$ perché dotata di espressione elementare $\Rightarrow \lim f = f(1,0)$

$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \log(x^2-y^2) = -\infty$ poiché $\left.\begin{matrix} x^2 \to 1 \\ y^2 \to 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow x^2-y^2 \to 0$

NON VALE l'ipotesi di continuità poiché il limite è calcolato su un punto di frontiera; si applica il limite di funzione composta.

⚠ • **Teorema sul limite delle restrizioni**: Se due restrizioni della f hanno limite diverso, il limite $\nexists$ (si usano spesso gli assi x, y e le rette $y = kx$)

• **Teorema di regolarità per confronto** ("dei Carabinieri"): si usa spesso la disuguaglianza triangolare

$$\boxed{x \le |x| \le \sqrt{x^2+y^2} \equiv \|x+y\| \le |x|+|y|}$$

② Derivate parziali PRIME

Si deriva rispetto ad una delle variabili, l'altra si considera costante:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \overset{def}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$$

⚠ Sulla frontiera PUÒ PERDERE DI SIGNIFICATO

f derivab. parz. in $X \iff \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \exists$ finita $\forall x_i \in X$

Le derivate nei PUNTI DI FRONTIERA si definiscono $\iff x_0 \in \partial X$ è di accumulazione per $\mathring{X}$ e in I_{x_0} cadono punti tale che f è derivabile. Allora si considera:

$$\lim_{\underline{x}\to \underline{x_0}} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x})$$ se $\exists$ finito $\Rightarrow f$ è derivab. parz. in $\underline{x_0}$

③ Prolungamento per continuità di funzioni

Una funzione è prolungabile in $\underline{x_0}$ di frontiera $\iff \exists \lim_{\underline{x}\to\underline{x_0}\in\partial X} f(\underline{x}) = \ell \in \mathbb{R}$ $\quad$ Esiste FINITO

Derivabilità parziale

Si calcola l'insieme di definizione $X \Rightarrow$ Se è APERTO e le f (→ COMPONENTI) sono derivabili in tutto X, è certamente derivabile in tutto X

Se è CHIUSO ma nelle stesse ipotesi precedenti, occorre valutare la derivabilità su ∂X.

⚠ **NON HA SENSO VALUTARE LA DERIVABILITÀ DOVE f NON È DEFINITA!!**

⚠ f def. in aperto $\not\Rightarrow f$ coinvolte derivabili!

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ MA $\lim \frac{\partial f}{\partial x_i}\ \nexists \Rightarrow$ der. parz. NON CONTINUA

$f(x,y) = \sqrt{|xy|}$ der. parz. in $\left[\mathring{X} \cup (0,0)\right] - \{(x,0),(y,0): x,y \in \mathbb{R}-\{0\}\}$ $\quad \boxed{X = \mathbb{R}^2}$

Funzione di Classe $C^1(X)$: è derivabile con derivate parziali continue $\forall x \in X$, inclusa ∂X (altrimenti $C^1(\mathring{X})$)
Se f è di classe $C^1(\mathring{X})$ ed è derivabile sulla frontiera, è di classe $C^1(X)$

④ Vettore Gradiente

È il vettore avente per componenti le derivate ~~direzionali~~ parziali $\Rightarrow$ È DEFINITO SOLO NEI PUNTI IN CUI f È DERIVABILE RISPETTO A OGNI VARIABILE!!

$$\nabla f(\underline{x_0}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_0}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_0}) \right)$$

Se f è derivabile parzialmente in un insieme X, si può costruire il CAMPO GRADIENTE di f in X:

$$\nabla f : \underline{x} \in X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \nabla f(\underline{x}) \in \mathbb{R}^n$$

⑤ Derivate Direzionali

Sia $\underline{v}$ un VERSORE e R_0 la retta $x_0 + t\underline{v}$ $(t \in \mathbb{R})$

Implica la continuità della funzione ristretta alla retta R nell'intervallo in cui stiamo derivando

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(x_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x_0} + t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$$ SE ESISTE FINITO!!

⚠ La derivabilità/continuità lungo ogni direzione NON IMPLICA la derivabilità/continuità globale!

⑥ Differenziale e DIFFERENZIABILITÀ

$$df(\underline{x_0}) = \nabla f \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) \longrightarrow df(\underline{x_0}): \underline{x} \in \mathbb{R}^n \longrightarrow \nabla f(\underline{x_0}) \cdot (\underline{x} - \underline{x_0}) \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{* Definito SE E SOLTANTO SE } f \text{ È DERIVABILE RISPETTO A TUTTE LE VARIABILI}}$

f si dice **DIFFERENZIABILE** in $\underline{x_0} \in \mathring{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, con $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, SE:

① : *

② : $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{\Delta f - df}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} = 0$ ovvero $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(\underline{x}) - f(\underline{x_0}) - \nabla f(\underline{x_0}) \cdot (\underline{x} - \underline{x_0})}{\|\underline{x} - \underline{x_0}\|} = 0$

Proprietà

- f differenziabile $\Rightarrow$ f CONTINUA
- f differenziabile $\Rightarrow$ f derivabile $\forall \underline{v}$ e $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = \nabla f(\underline{x_0}) \cdot \underline{v}$ ⚠ $\|\underline{v}\| = 1$!
- f differenziabile $\Rightarrow$ $z = f(x_0, y_0) + \nabla f(\underline{x_0}) \cdot (\underline{x} - \underline{x_0})$ PIANO TANGENTE in $P_0 \equiv (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$
- f derivabile parzialmente $\forall x_i$ con derivate continue $\Rightarrow$ f DIFFERENZIABILE

⑦ Derivate parziali per funzioni VETTORIALI

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0}), \dots, \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underline{x_0}) \right) \qquad \text{con } \underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$$

Se $\underline{f}$ è derivabile $\forall x_i$ si costruisce la MATRICE JACOBIANA $\frac{\partial(f_1, \dots, f_k)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}(\underline{x_0})$ $\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}$

- Derivata direzionale: si considera il vettore con componenti pari alle derivate direzionali delle componenti.
- DIFFERENZIABILE $\Longleftrightarrow$ le ($\underline{f}$) componenti sono differenziabili.
- $\underline{f}$ der. parz. con derivate continue $\Rightarrow$ $\underline{f}$ differenziabile.

<u>Teorema di differenziabilità di funzioni composte</u> $\boxed{\text{Utile per derivate parziali}}$

$\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ f. vettoriale TALE CHE $\underline{f}(X) \subseteq \mathring{Y}$

$g: Y \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ f. scalare

Se $\underline{f}$ è differenziabile in $\underline{x_0} \in \mathring{X}$ e g è differenziabile in $\underline{y_0} = \underline{f}(\underline{x_0})$, allora la funzione:

$h = g \circ \underline{f}: \quad \underline{x} \to g(\underline{f}(\underline{x})) \in \mathbb{R}$ È DIFFERENZIABILE in $\underline{x_0}$

Si ottiene che $\forall i = 1, \dots, n$, $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{y_0}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x_0}) + \dots + \frac{\partial g}{\partial y_k}(\underline{y_0}) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(\underline{x_0}) = \nabla g(\underline{f}(\underline{x_0})) \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{x_0})$

Esempio: $\varphi: t \in \mathbb{R} \to \underline{x_0} + t\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ha componenti $\varphi_i = x_i + tv_i$ <u>continue</u>

$\varphi'(t) = (\varphi_1'(t), \dots, \varphi_n'(t)) = (v_1, \dots, v_k) = \underline{v} \quad \forall t$

Considero la funzione $\underline{\Psi}: t \in [0, 1] \to P_1 + t(P_2 - P_1) \in \overline{P_1 P_2} \Rightarrow \underline{\Psi}'(t) = \underline{P_2} - \underline{P_1} \quad \forall t \in [0, 1]$

⑧ Teorema di Lagrange per funzioni SCALARI in più variabili

$f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \qquad \underline{p}, \underline{q} \in X : \overline{\underline{p}\underline{q}} \subseteq X$

f continua in $\overline{\underline{p}\underline{q}}$ e diff. in $\overline{\underline{p}\underline{q}} - \{\underline{p}, \underline{q}\} \Rightarrow \exists \underline{c} \in \overline{\underline{p}\underline{q}} : f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{q} - \underline{p})$

Ne segue il TEOREMA SULLE f a gradiente nullo: se $\nabla f(\underline{x}) = \underline{0} \ \forall x \Rightarrow f$ è costante.

⑨ Derivate di ordine superiore

Se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ è a sua volta derivabile parzialmente rispetto a x_j, allora:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j x_i}(\underline{x_0}) = f_{x_i x_j}(\underline{x_0}) \quad \text{DERIVATA PARZIALE SECONDA} \begin{cases} \text{PURA} \iff i=j \\ \text{MISTA} \iff i \neq j \end{cases}$$

Classe $C^2(X) \iff f$ è derivabile risp. tutte le COPPIE con derivate continue ed è anche di classe $C^1(X)$

Per il TEOREMA DI SCHWARTZ, se $f \in C^2(X)$ le derivate seconde MISTE COINCIDONO

⑩ Equazioni differenziali

Ordinarie $\Rightarrow$ in una variabile; presenta legami tra una f e le sue derivate.

I ordine: $y' = f(x,y)$ — la derivata prima è funzione della funzione stessa, oltre che della variabile

⚠ Le equazioni vanno integrate SOLO NELL'INSIEME DI DEFINIZIONE di $y(x)$, ovvero $\forall x \in I \subseteq \mathbb{R}$

• Si definiscono **lineari** le equazioni del tipo $L(y) = \varphi$, ovvero tale che $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \varphi$.

Si studiano passando per l'equazione omogenea associata e determinando una soluzione particolare della equazione completa.

Osservazione: $L(y_1+y_2) = L(y_1) + L(y_2)$; $L(\alpha y) = \alpha L(y)$

Per le eq. lineari vale il **teorema di Esistenza e Unicità**: ogni problema di Cauchy per $L(y)=\varphi$ ammette una ed una sola soluzione; basta che i coefficienti siano CONTINUI $\Rightarrow$ l'unica soluzione del Problema di Cauchy con un qualunque valore iniziale nullo è la funzione identicamente nulla; le altre soluzioni saranno $\neq 0$ IN OGNI PUNTO.

Per determinare l'INTEGRALE GENERALE di un eq. lineare basta trovare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata e un integrale particolare dell'equazione completa.

$L(u) = 0 \qquad L(u+v) = \varphi$

$L(v) = \varphi \qquad L(v-v') = 0$; $\forall w: L(w) = \varphi, \exists u: L(v+u) = L(w) = \varphi$ e $w = v+u$

In generale, $y(x) = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + v$, con $c_i \in \mathbb{R}$, y_i sono n soluzioni indipendenti dell'omogenea e v una soluzione particolare della completa.

Considerando le y_i, sono indipendenti $\iff \begin{vmatrix} y_1(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall x \in I$ — Wronskiano $W(x_0)$ delle n funzioni $y_1, \dots, y_n$

Metodo di Lagrange

Se $y_1, \dots, y_n$ sono soluzioni dell'omogenea, $\exists$ n funzioni γ_i di classe $C^1(I)$ tale che $v = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i(x) y_i(x)$

E le γ si ottengono integrando le soluzioni del sistema $\begin{cases} y_1\gamma_1' + \dots + y_n\gamma_n' = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-2)}\gamma_1' + \dots + y_n^{(n-2)}\gamma_n' = 0 \\ y_1^{(n-1)}\gamma_1' + \dots + y_n^{(n-1)}\gamma_n' = \varphi \end{cases}$

Eq. Diff. Lineari del PRIMO ORDINE

$y' = a(x)y + b(x)$

Si scarta la soluzione nulla ($\in$ all'insieme delle soluzioni) e si risolve l'omogenea associata:

$$y' = a(x)y \Rightarrow \frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow \log|y| = \int a(x)dx + c_1 \Rightarrow |y| = e^{A(x)+c_1}$$

e dunque $|y| = k\,e^{A(x)}$ $(k>0)$ $\Rightarrow y = c\,e^{A(x)}$ $(c \in \mathbb{R} \Rightarrow$ include $c=0)$

Si cerca poi una sol. part. applicando il metodo di Lagrange:

$\boxed{v(x) = \gamma(x)\,e^{A(x)}}$ soluzione $\Leftrightarrow$ $v'(x) = a(x)v(x) + b(x) \Rightarrow \boxed{\gamma'(x)\,e^{A(x)} = b(x)}$

$\gamma(x) = \int b(x)\cdot e^{-A(x)}dx$ [e spesso si suppone $c=0$]

" " " di ORDINE N

La risoluzione tramite Wronskiano e metodo di Lagrange porta al calcolo di n integrali.

Se i coefficienti sono FUNZIONI COSTANTI, esistono altri metodi di risoluzione:

Lo studio dell'equazione omogenea avviene mediante l'equazione caratteristica:

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \Rightarrow \overbrace{e^{\lambda x}}^{\text{sol. dell'omogenea}, \neq 0\ \forall x}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Posso studiare l'equazione $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$, che restituirà soluzioni in λ.

Otteniamo dunque che: $y(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + \dots + c_ne^{\lambda_n x}$ int. gen. OMOGENEA

Se λ_i ha molteplicità n, si considera $c_ie^{\lambda_i x} + c_{i+1}\,x\,e^{\lambda_i x} + \dots + c_{i+n-1}\,x^{n-1}e^{\lambda_i x}$

Se $\lambda = \alpha + i\beta$, $e^{(\alpha+i\beta)}$ è una soluzione complessa; per le formule di Eulero abbiamo però le sol. reali:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \;;\; e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \Rightarrow y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + \dots$$

Casi Particolari sui TERMINI NOTI

▶ $L(y) = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\operatorname{sen}\beta x)$ si considera $v(x) = e^{\alpha x}(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\operatorname{sen}\beta x)$, con q_i polinomio di GRADO MASSIMO tra P_1 e P_2 e, se $\lambda = \alpha + i\beta$ risolve l'eq. con molt. m, si moltiplicano per x^m

- Se $\beta = 0 \Rightarrow L(y) = e^{\alpha x}P_1(x)$ si considera $v(x) = e^{\alpha x}q(x)$, con $q(x)$ di grado pari a $P(x)$ tranne se $\lambda = \alpha$ risolve con molt. m l'eq. caratt.: in tal caso si moltiplica per x^m
- Se $\alpha = 0 \Rightarrow L(y) = P(x)$ $v(x) = q(x)$ di grado pari a P se $\lambda = 0$ non è sol., altrimenti si considera $v(x) = x^m(q(x))$, con $m = \text{molt}(\lambda = 0)$

▶ Se $L(y) = \varphi_1 + \varphi_2$, si possono considerare due soluzioni particolari tali che $L(v_1) = \varphi_1$ e $L(v_2) = \varphi_2$, sommandole alla fine nell'integrale generale.

Eq. Diff. A VARIABILI SEPARABILI

NON SONO LINEARI $\Rightarrow$ non vale il Teorema di esistenza e unicità. Sono equazioni del tipo:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

f e g sono funzione continue definite in aperti di $\mathbb{R}$.

(lineare $\Leftrightarrow$ $g(y) = y$!)

⚠: Nella determinazione dell'integrale generale, occorrerà effettuare lo studio di c tale che $y(x) \lesseqgtr 0$ abbia soluzioni!

Le soluzioni STAZIONARIE $\underset{y(x)=0}{g(y) = 0}$ sono certamente soluzioni, vengono tipicamente scartate!

Per esplicitare l'integrale generale occorre dunque VALUTARE PRIMA c e il conseguente intervallo delle soluzioni in cui x è definita.

⚠ La risoluzione di un Problema di Cauchy NON SI LIMITA a trovare c_i, ma $u(x) = \left(\sum c_i y_i\right) + v$

(11) Cenni sui Numeri Complessi

$z = \alpha + i\beta$; $|z| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $z = \alpha + i\beta \Rightarrow \overset{\text{(coniugato)}}{\bar{z}} = \alpha - i\beta$, $z\bar{z} = z^2$; $\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z'}}{|z'|^2}$

$\downarrow$

$z[\rho, \vartheta]$: $\rho = |z|$, $\vartheta = \arg z \Rightarrow z = \rho(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$ $\begin{bmatrix} \alpha = x = \rho\cos\vartheta \\ \beta = y = \rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ • $zz' = \rho\rho'\left(\cos(\vartheta + \vartheta') + i\,\mathrm{sen}(\vartheta + \vartheta')\right)$; $z/z' = \rho/\rho'\left(\cos(\vartheta - \vartheta') + i\,\mathrm{sen}(\vartheta - \vartheta')\right)$

• $z^n = \rho^n\left(\cos(n\vartheta) + i\,\mathrm{sen}(n\vartheta)\right)$

➡ • $\sqrt[n]{z} = w \Rightarrow w^n = z \Longleftrightarrow w_k = \rho^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\vartheta + 2k\pi}{n}\right)\right)$, $k \in 0, \dots, n-1$

• $e^z = e^\alpha(\cos\beta + i\,\mathrm{sen}\,\beta)$

Se z è radice di un polinomio a coefficienti reali, anche $\bar{z}$ lo è (radici complesse CONIUGATE)

Scheda Riassuntiva - Terza Prova di Esonero (23/04/2021)

① Studio di Massimi e minimi di funzioni scalari

1. Determinare l'insieme di definizione X — estr. rel. $\Rightarrow \nabla = 0$
2. Valutare la derivabilità in $\mathring{X}$ e cercare i punti stazionari applicando il T. di Fermat
3. Valutare eventualmente l'Hessiano nei punti trovati (H nec. > 0, $f_{xx} \gtrless 0$ min/max)
4. Se $H = 0$, applicare la def. di estremo relativo e valutare se $\exists$ intorni che verificano la condizione ($f(x,y) \geq f(x_0, y_0)$)
5. Se in dubbio, si possono applicare osservazioni sulle funzioni (es: $\sqrt{\cdot}$ è una f non negativa) o considerare delle restrizioni significative (se monotone, il punto è di sella)

Se si cercano max/min assoluti, ci si ferma a "2." e si confrontano $f(x_0, y_0)$ con i valori nei vertici del dominio e nei punti di max/min nella frontiera, trovati analizzando f' ristretta all'arco Γ_i, oltre che nei punti di non derivabilità.

② Curve Semplici

Curva sempl. aperta: codominio di omeomorfismo di forma simile $f: \begin{cases} \text{continua} \\ \text{binnivoca} \\ \text{inversa continua} \end{cases}$, rapp. par. della curva.

$\exists \infty$ rapp. par: se I, J stessa natura topologica, $\exists f$ binnivoca e continua tra i due, se uno è codominio dell'altro la f è $\overset{\text{strett.}}{\text{monotona}}$ (Bolzano) $\Rightarrow$ Se $f: I \to \mathbb{R}$ e J omeomorfo a I, $\exists\, t(\tau): J \to I$ omeomorfismo di forma simile $\Rightarrow \exists\, (f \circ t)(\tau) \in \Gamma$ rapp. par di Γ di base J.

Per il T. Bolzano, è un connesso ma è priva di punti interni

Curva sempl. chiusa: se f continua, $f(a) = f(b)$ e f è binnivoca in $[a,b[$ (ma l'inversa è certamente NON continua in a)
$f(a) \overset{!}{=} f(b)$ si dice punto di chiusura.

Sono insiemi compatti e connessi

T. di Jordan: curva sempl. chiusa del piano divide $\mathbb{R}^2$ in due insiemi disgiunti, quello limitato si dice Dominio di Jordan e può essere a più contorni, non variano le prop. topologiche.

Coordinate polari: rapp. par dipendenti da $\rho(\vartheta)$ in cui $\begin{cases} x = \rho(\vartheta)\cos\vartheta \\ y = \rho(\vartheta)\,\mathrm{sen}\,\vartheta \end{cases}$ se $\rho(\alpha) = \rho(\alpha + 2k\pi)$ la curva è chiusa

Una rapp par può essere concorde o discorde con l'orientamento: ATTENZIONE $\quad \|\rho'(t)\| = \sqrt{\rho^2(\vartheta) + (\rho'(\vartheta))^2}$

③ Curve semplici regolari o generalmente regolari

1. $f \in C^1(I)$
2. $f'(t) \neq \underline{0} \;\; \forall t \in I$
3. $f'(a) = f'(b)$

Se Γ ammette una rapp par con le prop. 1, 2 (se chiusa 1, 2, 3), allora essa si dice regolare

Si osserva che ogni curva piana è localmente il diagramma di una $f \in C^1(I_{t_0}, \Gamma)$

Se f è derivabile e con derivata continua tranne in un numero finito di punti (con disc. I specie) e $f'(t) \neq \underline{0}$ tranne in un numero finito di punti, la curva si dice generalmente regolare. Essa è la composizione di archi internamente regolari, detti tratti di regolarità.

④ Tangenti, normali, lunghezza e orientamento canonico di curve

Retta tangente a P_0: $\quad P = P_0 + \lambda f'(t_0),\ \lambda \in \mathbb{R} \equiv \begin{cases} x = x_0 + \lambda x'(t_0) \\ y = y_0 + \lambda y'(t_0) \\ \dots \end{cases}$ $\boxed{\text{Bisogna trovare } t_0}$ non dipende dalla rapp. par

Versore tangente positivo: $\underline{t}_{P_0} = \dfrac{\pm f'(t_0)}{\|f'(t_0)\|}$ con $\pm$ a seconda che la rapp par sia concorde/discorde

è una $(\Leftarrow)$ per la regolarità

Retta normale: definibile solo nel piano, divisa in semiretta int/ext $\Rightarrow$ versore normale int/ext.

Versore normale esterno $\underline{n_e}$: fondamentale per definire l'orientamento canonico della curva, ovvero quello tale che $(\underline{n_e}, \underline{t}_{P_0})$ è congruente a $(\underline{i}, \underline{j})$, analiticamente ottenuto se $\begin{vmatrix} n_1 & n_2 \\ t_1 & t_2 \end{vmatrix} > 0$

$\Rightarrow$ se $\underline{n_e} = (x'(t_0), y'(t_0)) \Longrightarrow \underline{t}_P = \left(-\dfrac{y'(t_0)}{\|f'\|}, \dfrac{x'(t_0)}{\|f'\|}\right)$

Se Γ è regolare e $f: [a,b]$ è una rapp. par regolare, $\ell(\Gamma) = \displaystyle\int_a^b \|f'(t)\|\,dt$

⑤ Ascisse Curvilinee

Γ aperta orientata rettificabile ($\ell(\Gamma) \in \mathbb{R}$):

$$s(p) = \pm \ell(\Gamma_{p_0, p}) \quad \text{a seconda che } p_0 \text{ preceda [segua] } p, \text{ con } p_0 \text{ fissato.}$$

Se Γ chiusa:

$$s(p) = \pm \ell(p_0, p) \quad \text{a seconda che } p \in \Gamma^{\pm}, \text{ con } \pm \text{ a seconda che } p_0 \text{ preceda o segua } \underline{c} \text{ nell'arco considerato, con } \underline{c} \text{ punto di chiusura.}$$

Si possono costruire rapp par dipendenti dalle $s(p)$: $(s \circ p)(t) : t \in [a,b] \to s(p(t)) \in \mathbb{R}$ indicata con $s(t)$; è strettamente monotona e continua; per Bolzano il codominio è un intervallo, per Wstrass è un compatto di lunghezza $\ell(\Gamma)$.

L'inversa $t(s)$ è continua e strett. monotona con stessa monotonia

$\Rightarrow$ $q(s) : s \in [c,d] \to q(s) = p(t(s)) \in \Gamma$ è una rapp par in funzione di s, definita a partire da p.

È sempre concorde con l'orientamento perché data dalla composizione di p e $t(s)$, che hanno sempre la stessa monotonia.

Si osserva che $s(t) = s(p(t)) = \pm \int_{t_0}^{t} \| p'(t) \| \, dt$ $\Rightarrow$ è una f integrale, derivabile in tutto $[a,b]$ e $s'(t) = \pm \| p'(t) \|$

$\Rightarrow$ $q(s)$ derivabile in tutto $[c,d]$ e $q'(s) = \pm \dfrac{p'(t(s))}{\| p'(t(s)) \|}$

⑥ Integrale Curvilineo

$\int_\Gamma f(p) \, ds$; se Γ regolare e p regolare di base $[a,b]$ è $= \int_a^b f(p(t)) \cdot \| p'(t) \| \, dt$

Utile per calcolare i baricentri: $x_B = \dfrac{1}{\ell(\Gamma)} \int_\Gamma x \, ds$

⑦ Lavoro e circuitazione di un campo vettoriale su una curva regolare orientata

$\underline{v}$ campo vett. continuo in un aperto A contenente Γ,

$\int_\Gamma \underline{v}(p) \cdot \underline{t} \, ds = \int_{\vec{\Gamma}} \underline{v} \cdot dp$

Se Γ regolare, e $\underline{v} = X(x,y,z)\underline{i} + Y(x,y,z)\underline{j} + Z(x,y,z)\underline{k}$,

$$\int_{\vec{\Gamma}} \underline{v} \cdot dp = \pm \int_a^b X(p(t))\, x'(t) + \ldots + Z(p(t))\, z'(t) \, dt$$

con $\pm$ a seconda che la rapp par sia concorde/discorde con l'orientamento

$$= \int_{\vec{\Gamma}} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

forma diff. lineare ottenuta da $dp = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$

⑧ Formule di Gauss nel Piano

Se ho una f continua che può essere immaginata come derivata rispetto a una var. di una funzione scalare continua e derivabile in uno stesso aperto A, e $\mathbb{D} \subseteq A$ è un dominio di Jordan,

$$\iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \, dx\,dy = \int_{\partial \mathbb{D}^+} f(x,y) \, dy \quad \text{oppure} \quad \iint_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \, dx\,dy = - \int_{\partial \mathbb{D}^+} f(x,y) \, dx$$

USATE PER AREE E BARICENTRI E PER RAPP PAR p: $dy = y'(\vartheta)\, d\vartheta$

Per le eq. polari, si ottiene che $\iint_D dx\,dy = \iint_{D'} \rho\, d\rho\, d\vartheta = \int_\alpha^\beta d\vartheta \int_0^{\rho(\vartheta)} \rho\, d\rho = \int_\alpha^\beta \frac{\rho^2(\vartheta)}{2}\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \rho^2(\vartheta)\, d\vartheta$

9) Divergenza e Rotore

$$\operatorname{div} \underline{v} : (x,y,z) \in A \to \frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z) + \ldots + \frac{\partial Z}{\partial z}(x,y,z)$$ con $\underline{v} \in C^1(A)$; è continua in A.

$$\operatorname{rot} \underline{v} : (x,y,z) \to \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right)\underline{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right)\underline{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\underline{k}$$ $\parallel$ e si ricorda con $\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$

Se $\underline{v} : \overset{A \subseteq}{\mathbb{R}^2} \to \mathbb{R}$, $\operatorname{rot} \underline{v} : (x,y) \in A \to \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right)\underline{k}$ e $\operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{k} \in \mathbb{R}$

Teorema di Stokes nel piano:

Se $\underline{v} \in C^1(A)$ e D regolare $\subseteq A$, $\iint_D \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{k} = \int_{\partial D^+} \underline{v} \cdot d\underline{p} \Rightarrow \iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{\partial D^+} X\,dx + Y\,dy$

Teorema della divergenza:

Nelle stesse ipotesi, $\iint_D \operatorname{div} \underline{v}\, dx\,dy = \iint_D \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\,dy = \int_{\partial D^+} X\,dy - Y\,dx$