Analisi II - Preparazione Orale: Teoremi con DIMOSTRAZIONE

Teorema della Media Integrale (Int doppi/tripli)

X compatto, connesso, misurabile; f continua in $X \Rightarrow \exists \underline{c} \in X: \int_X f(\underline{x})\, d\mu = f(\underline{c}) \cdot \mu(X)$

Dim: · Se $\mu = 0$ vale $\forall \underline{c} \in X$
· Se $\mu > 0$, per Wstrass $\exists \min_X f = m,\ \max_X f = M \Rightarrow m \cdot \mu(X) \le \int_X f\, d\mu \le M \cdot \mu(X) \Rightarrow m \le \underbrace{\frac{1}{\mu(X)} \int_X f\, d\mu}_{\text{media integrale per def.}} \le M$

Per Bolzano, $\exists \underline{c} \in X: f(\underline{c}) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f\, d\mu$ ■

Teoremi sulla differenziabilità

$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \frac{\Delta f - df}{\|\Delta \underline{x}\|} = 0 \overset{def}{\iff} f$ diff, ovvero $\Delta f - df = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$; $df = \nabla f \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$

① f differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X} \Rightarrow f$ continua in $\underline{x}_0$

$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0) \Rightarrow f(\underline{x}) - p(\underline{x}) = \overbrace{o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)}^{r(x)}$

Dim: $\Rightarrow f$ diff $\Rightarrow \forall \underline{x} \in X$, $\underbrace{f(\underline{x}) - f(\underline{x}_0)}_{\Delta f} = \underbrace{\nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{df} + r(\underline{x})$

Inoltre, $\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} \underbrace{\nabla f(\underline{x}_0)(\underline{x} - \underline{x}_0)}_{0} + \underbrace{r(\underline{x})}_{\text{infin.}} = 0 \Rightarrow$ incremento della f tende a $0 \Rightarrow \exists \lim_{\underline{x} \to \underline{x}_0} f(\underline{x})$ ed è $= f(\underline{x}_0)$ $\Rightarrow$ f continua ■

② f differenziabile in $\underline{x}_0 \in \mathring{X} \Rightarrow f$ derivabile lungo ogni direzione $\underline{v}$ e $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0) = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$, con $\|\underline{v}\| = 1$.

Dim: f diff $\Rightarrow f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) \overset{def}{=} \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x}_0 + t\underline{v} - \underline{x}_0) + r(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0) = t \cdot \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v} + r(\underline{x}_0 + t\underline{v}) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Ne segue che $\|\underline{x}_0 + t\underline{v} - \underline{x}_0\| = |t|\,\|\underline{v}\| = |t|$ poiché $\underline{v}$ è un versore; essendo $r(\underline{x}) = o(\|\underline{x} - \underline{x}_0\|)$ si ha:

$\lim_{t \to 0} \frac{r(\underline{x}_0 + t\underline{v})}{t} \overset{def}{=} 0$; $\lim_{t \to 0} \frac{t \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$ poiché $\Delta f = df + r(\underline{x})$!!

Che implica che $\lim_{t \to 0} \frac{f(\underline{x}_0 + t\underline{v}) - f(\underline{x}_0)}{t} = \nabla f(\underline{x}_0) \cdot \underline{v}$ che per def è la $\frac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x}_0)$ ■

· f diff $\Rightarrow$ piano $z = p(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0)$ è piano tangente a G_f in $P_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0, f(\underline{x}_0))$ con interp. geometrica $\iff \underline{x} \in \mathbb{R}^2$

derivabilità, diff.tà, deriv. direzionale in $\underline{x} \in \mathring{X}$ si estendono per continuità a ∂X se X è una regione $\Rightarrow f \in C^1(X)$ è diff in tutto X. SE f deriv. parz. tutte var e $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ tutte continue $\Rightarrow f$ È DIFF.

③ $f: X \to \mathbb{R}$ der. parz in $I_{\underline{x}_0}$ con $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$ $\forall x_i$, $i = 1, \dots, n$, e se der parz tutte CONTINUE in $\underline{x}_0 \Rightarrow f$ è diff. in $\underline{x}_0$

Dim: Supponiamo $n = 2$, obiettivo è dim. che $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} \frac{(f(x,y) - f(x_0,y_0)) - (f_x(x_0,y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0,y_0) \cdot (y - y_0))}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$

Poiché $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, $I_{\underline{x}_0} \subseteq X$; la dim. avviene maggiorando la f limitanda con una f certamente tendente a 0 e appl. il T. del Confronto. Bisogna scrivere l'incremento come SOMMA DI FUNZIONI IN UNA VARIABILE:

Consideriamo il punto $(x, y_0) \Rightarrow f(x,y) - f(x_0,y_0) = f(\overset{\text{fisso}}{x}, y) - f(x, y_0) + f(x, \overset{\text{fisso}}{y_0}) - f(x_0, y_0)$

Applico Lagrange (f cont. deriv. $[a,b] \Rightarrow \exists c \in (a,b): f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$) alla funzione $f(\cdot, y_0)$ in $I_{(x, x_0)} \Rightarrow \exists c \in (x, x_0)$ tale che:

$f(x, y_0) - f(x_0, y_0) = f_x(c_x, y_0)(x - x_0)$ analogamente $\exists d_{xy}: f(x,y) - f(x, y_0) = f_y(x, d_{xy})(y - y_0)$

Da cui segue che la Th $= \lim \frac{(f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0))(x - x_0) + (f_y(x, d_{xy}) - f_y(x_0,y_0)) \cdot (y - y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} \le \lim \frac{|\cdot| \cdot |x - x_0|}{\sqrt{\cdot}} + \frac{|\cdot| \cdot |y - y_0|}{\sqrt{\cdot}}$

≤ 1 per la disug. Δ

Si può quindi maggiorare con $|f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)| + |f_y(x, d_{xy}) - f_y(x_0,y_0)|$

Essendo $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ continua per Hp, e poiché $\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} |f_x(c_x,y_0) - f_x(x_0,y_0)| = 0$ idem su $y \Rightarrow 0 \le |Th| \le 0 \Rightarrow 0 \le Th \le 0$ ■

④ Teorema diff. f composte: $\underline{f}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$; $g: Y \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\underline{f}(X) \subseteq \mathring{Y}$

$\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, $\underline{f}(\underline{x}_0) = \underline{y}_0 \in \mathring{Y}$; supponiamo che $\underline{f}$ sia diff in $\underline{x}_0$ e g sia diff in $\underline{y}_0$.

Allora $h = g \circ \underline{f}$: $h(\underline{x}) = g(\underline{f}(\underline{x})) \in \mathbb{R}$ è diff. in $\underline{x}_0$ e $\frac{\partial h}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \nabla g(\underline{f}(\underline{x}_0)) \cdot \frac{\partial \underline{f}}{\partial x_i}(\underline{x}_0) = \frac{\partial g}{\partial y_1}(\underline{y}_0) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_i}(\underline{x}_0) + \dots$

$\underline{f}$ vett: $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$, der parz $\iff f_1, \dots, f_k$ sono der parz e $\left(\frac{\partial f_1}{\cdot}, \dots, \frac{\partial f_k}{\cdot}\right)$ è vettore der. parz.
Se der tutte var, $\begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_k \end{pmatrix}$ = mat. Jac. $f_1, \dots, f_k$; $x_1, \dots, x_n$

$\underline{f}$ è diff classe C^1 se le componenti lo sono; una $f \in C^1$ è certamente diff; se in aperto/regione è in tutto l'ins.

Teorema di Lagrange per funzioni SCALARI in più variabili

$f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\underline{p}, \underline{q} \in X: \underline{p} \ne \underline{q}$, $\overline{\underline{p}\underline{q}} \subseteq X$. Se f è continua in $\overline{\underline{p}\underline{q}}$ e diff in $\overline{\underline{p}\underline{q}} - \{\underline{p}, \underline{q}\}$, allora:

$\exists \underline{c} \in \overline{\underline{p}\underline{q}} - \{\underline{p}, \underline{q}\}: f(\underline{q}) - f(\underline{p}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{q} - \underline{p}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{c}) \cdot (q_i - p_i)$

Dim

Sia $\underline{\psi}: t \in [0,1] \to \underline{\psi}(t) = \underline{p} + t(\underline{q} - \underline{p}) \in \overline{\underline{p}\underline{q}}$ e supponiamo sia derivabile in $[0,1]$, con $\underline{\psi}'(t) = \underline{q} - \underline{p}$ $\forall t \in [0,1]$

Allora $f \circ \underline{\psi} = \varphi: t \in [0,1] \to f(\underline{\psi}(t))$ è differenziabile in $]0,1[$ e continua in $[0,1]$ (T diff. f composte, composta di diff) per il T. diff. f composte, $\forall t \in]0,1[$ $\varphi'(t) = \nabla f(\underline{\psi}(t)) \cdot \underline{\psi}'(t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{\psi}(t)) \cdot (q_i - p_i)$

Applicando il T. di Lagrange in $\mathbb{R}$ a φ in $[0,1]$, sappiamo che $\exists \tau \in]0,1[: \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\tau) \cdot (1 - 0)$

Essendo $\varphi(1) = f(\underline{q})$ e $\varphi(0) = f(\underline{p})$, detto $\underline{c} = \underline{\psi}(\tau)$ si ha la tesi ■

Teorema sulle f con gradiente NULLO

Importante conseguenza del T. Lagrange. Se f continua si estende a regioni intern. connesse.

Se $f: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ der parz in tutto X APERTO CONNESSO con $\nabla f = \underline{0}$ $\forall \underline{x} \in X$, allora f è costante in X

Dim

Siano $\underline{p}$ e $\underline{q}$ due punti distinti di X; essendo aperto e connesso X è anche connesso per poligonali $\Rightarrow \exists$ poligonale di estremi $\underline{p}$ e $\underline{q}$ tutta contenuta in X: $\underline{P} = \bigcup_{i=1}^n \overline{P_i P_{i-1}}$ con $\underline{p} = \underline{p}_0 \ne \underline{p}_1 \ne \dots \ne \underline{p}_n = \underline{q}$

Essendo le der parz identicam. nulle in X, sono continue $\Rightarrow f$ è diff.le in tutto X e quindi in $\underline{P}$; applicando il T. Lagrange ad ogni segmento della poligonale:

$\overline{\underline{p}\underline{p}_1}: \exists \underline{c} \in \overline{\underline{p}\underline{p}_1}: f(\underline{p}_1) - f(\underline{p}) = \nabla f(\underline{c}) \cdot (\underline{p} - \underline{p}_1) = 0 \Rightarrow f(\underline{p}_1) = f(\underline{p})$ e così via perché $\nabla f = 0$ $\forall x \Rightarrow f(\underline{p}) = f(\underline{q})$
essendo $\underline{p}$ e $\underline{q}$ arbitrari vale $\forall \underline{x} \in X$ ■

Formula di Taylor con resto di Lagrange

Supponiamo $f \in C^2(I)$ e $f: t \in I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se $t_0 \in I$, $\forall t \in I: t \ne t_0$ $\exists \tau \in \mathring{I}_{(t, t_0)}$ tale che:

$h(t) = h(t_0) + h'(t_0)(t - t_0) + \frac{1}{2!} h''(\tau)(t - t_0)^2$ → resto di Lagrange, τ dipende da $t \Rightarrow$ non è un polinomio

In generale, per $f \in C^2(X)$, X aperto di $\mathbb{R}^n$, e $\underline{x}_0 \in \mathring{X}$; $\forall \underline{x} \ne \underline{x}_0: \underline{x} \in X$, $\overline{\underline{x}_0 \underline{x}} \subseteq X$, $\exists \underline{c} \in \mathring{\overline{\underline{x}_0 \underline{x}}}$ tale che:

$$f(\underline{x}) = f(\underline{x}_0) + \nabla f(\underline{x}_0) \cdot (\underline{x} - \underline{x}_0) + \frac{1}{2!} \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{c}) \cdot (x_i - x_i^0) \right]^{[2]}$$

→ quadrato simbolico: derivate seconde per $(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0)$

Dim

Sia S il segmento di estremi (x,y) e (x_0,y_0); esso è descritto da $\varphi: t \in [0,1] \to (x_0 + t(x - x_0),\ y_0 + t(y - y_0)) \in S$.
φ è di classe $C^\infty(I) \Rightarrow \varphi \in C^2([0,1])$. Essendo f una funzione di classe C^2 per ipotesi, la funzione composta $\Psi: t \in [0,1] \to \Psi(t) = (f \circ \varphi)(t)$, di una variabile reale, $\in C^2([0,1]) \Rightarrow$ per il T. diff. f composte Ψ è derivabile due volte.

$$\varphi'(t) = f_x(\varphi(t))(\underbrace{x-x_0}_{v_1}) + f_y(\varphi(t))(\underbrace{y-y_0}_{v_2}) \equiv \nabla f(\varphi(t))(\underline{P}-\underline{P_0}) \qquad \forall t\in[0,1]$$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(\varphi(t))(x-x_0)^2 + 2\underbrace{f_{xy}}_{\text{Schwartz } f_{xy}=f_{yx}}(\varphi(t))(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\varphi(t))(y-y_0)^2 = \left[f_x(\varphi(t))(x-x_0)+f_y(\varphi(t))(y-y_0)\right]^{[2]} \blacksquare$$

Applicando Taylor a $\cancel{\varphi}$ Ψ infatti: $\exists\, \tau\in[0,1]$: $\underbrace{\Psi(1) = \Psi(0) + \Psi'(0)(1-0) + \frac{1}{2!}\Psi''(\tau)(1-0)}$

$$\Downarrow$$

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \nabla f(\underline{x_0})\cdot(\underline{x}-\underline{x_0}) + \frac{1}{2!}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi)(x_i - x_i^0)\right]^{[2]} \text{ in } \mathbb{R}^2 \blacksquare$$

Eq. differenziali - Teoremi ecc.

- $V = U + v$: $\quad \forall u\in U,\ u+v\in V \Rightarrow U+v \subseteq V$
  $\quad \forall w\in V,\ w = u+v \Rightarrow w\in U+v \Rightarrow V\subseteq U+v$

  poiché $L(u+v)=\varphi$
  $L(v_1 - v_2) = 0$
  $\forall w,\ \exists u:\ L(w) = \varphi = L(u+v)\ \forall w$

Se $y_1,\dots,y_n \in C^n(I)$, $x_0\in I$, $W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}$ wronskiano

utile per int. gen eq. completa.

Teorema 2 sul Wronskiano (Prop. 2)

[Se $y_1,\dots,y_n$ sono n sol. dell'eq. omogenea, ~~allora sono dipendenti $\Leftrightarrow W(x)=0\ \forall x\in I$~~
~~indipendenti $\Leftrightarrow W(x)\neq 0\ \forall x\in I$~~] $\quad \exists$ Infinite n-ple sol. lin ind di $L(y)=0$ a coeff. continui

Dim

Indip $\cancel{\Leftrightarrow}$ $W(x)\neq 0$, puntiamo alla matrice I, costruendo opportunamente n problemi di Cauchy:

$$\underbrace{\begin{cases} L(y)=0 \\ y(x_0)=1 \\ y'(x_0)=0 \\ y^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases}}_{y_1(x)} ;\ \dots\ ; \underbrace{\begin{cases} L(y)=0 \\ y(x_0)=0 \\ y^{(n-2)}(x_0)=0 \\ y^{(n-1)}(x_0)=1\end{cases}}_{y_n(x)} \Rightarrow W(x_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{vmatrix} = 1$$

Se a coeff. continui, il P. Cauchy ha 1 sol. $\forall\, i=1,\dots,n \Rightarrow n$ soluzioni così costruite sono certamente linearmente indipendenti; moltiplicando per $\lambda\neq 0$ si ottiene che $\exists$ infinite sol. lin. ind. di un'eq. diff. (Prop. 2) $\blacksquare$

Integrale Generale eq Omogenea (Prop. 3)

È combinazione lineare di n sol. lin. ind. dell'equazione (e l'insieme delle sol. costituisce un sottospazio).

$y_1,\dots,y_n$ sol. di $L(y)=0$ lin ind $\Rightarrow \forall\, u(x)\ \exists!\,(\bar c_1,\dots,\bar c_n)$: $u = \bar c_1 y_1 + \dots + \bar c_n y_n$

Dim

Sia u una sol. $\neq 0$ (in cui $c_1=\dots=c_n=0$) e $x_0\in I$. Allora:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \dots + \lambda_n y_n(x_0) = u(x_0) \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \dots + \lambda_n y_n'(x_0) = u'(x_0) \\ \dots \\ \lambda_1 y^{(n-1)}(x_0) + \dots + \lambda_n y^{(n-1)}(x_0) = u^{(n-1)}(x_0)\end{cases}$$

è un sistema lineare NON OMOGENEO nelle incognite λ_i e con determinante dei coefficienti $W(x_0)$, NON NULLO PER IPOTESI ($y_1,\dots,y_n$ lin. ind) $\Rightarrow$ è un sistema di Cramer e ammette 1 SOL $\bar c_1,\dots,\bar c_n$.

Poiché $u(x)$ e $\bar c_1 y_1(x) + \dots + \bar c_n(y_n(x))$ sono entrambe sol. dell'eq. lin omogenea (u per ipotesi, l'altra perché combinazione lineare di soluzioni lin. ind.) e soddisfano lo stesso problema di Cauchy di punto iniziale x_0, esse coincidono in tutto l'intervallo I $\blacksquare$

Teorema sul Wronskiano

Se $y_1,\dots,y_n$ sono n soluzioni dell'eq. lineare omogenea, allora sono dip. $\overset{[\text{in}]}{\Leftrightarrow}$ $W_x \overset{[\neq]}{=} 0\ \forall x\in I$

- dip $\Leftrightarrow W = 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ dip $\Rightarrow \exists\,(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ non tutti nulli: $\lambda_1 y_1(x) + \dots + \lambda_n y_n(x) = 0\ \forall x \Rightarrow$ $\lambda_1 y_1' + \dots + \lambda_n y_n' = 0$, $\dots^{(n-1)} = 0$

Ciò implica che il sistema $\begin{cases} c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0 \\ \vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} = 0\end{cases}$ ha per sol. $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ non tutti nulli $\Rightarrow W(x) = 0\ \forall x\in I$ $\blacksquare$

$\boxed{\Leftarrow}$ $\exists\, x_0\in I$: $W(x_0) = 0 \Rightarrow y_1,\dots,y_n$ lin dip

Consideriamo $\begin{cases} c_1 y_1 + \dots + c_n y_n = 0 \\ \dots \\ c_1 y_1^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)} = 0\end{cases}$ ha det. coeff $= W(x_0) \overset{Hp}{=} 0 \Rightarrow \exists$ sol. non nulla del sistema

$\Rightarrow \bar c_1 y_1 + \dots + \bar c_n y_n$ soddisfa il prob Cauchy di punto iniziale x_0 e valori iniziali nulli $\overset{\text{T. esist/unic.}}{\Longrightarrow}$ $\bar c_1 y_1 + \dots + \bar c_n y_n = 0\ \forall x\in I$ $\blacksquare$

Analoga la dim sull'indip.

Int gen eq. comp: $y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n + v$
$c_i\in\mathbb{R}$, y_i n sol. indip. omog.
v sol. part. completa

Metodo di Lagrange

$y_1,\dots,y_n$ sol. indip eq. lin omog $\Rightarrow \exists\, \gamma_1,\dots,\gamma_n\in C^1(I)$: $v: x\in I \to v(x) = \gamma_1(x)y_1(x) + \dots + \gamma_n(x)y_n(x)$ è sol eq. comp. $L(y)=\varphi$

$\gamma_1,\dots,\gamma_n$ si trovano risolvendo $\{\gamma_1',\dots,\gamma_n'$ e integrandole: $\begin{cases} y_1\gamma_1' + \dots + y_n\gamma_n' = 0 \\ y_1'\gamma_1' + \dots + y_n'\gamma_n' = 0 \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}\gamma_1' + \dots + y_n^{(n-1)}\gamma_n' = \cancel{0}\ \varphi\end{cases}$

Risoluzione Eq. Diff Lineari del primo ordine

Ordine $n \Rightarrow n$ integrali lin ind omogenea associata; in ordine 1 vuol dire trovare una f lin ind, ovvero non identicamente nulla (quindi $\neq 0\ \forall x\in I$ poiché per il T. Esist. e Unicità, dato che il prob. Cauchy con valore iniz. 0 è risolto solo da $f=0$).

$$y' = \underbrace{a(x)y + b(x)}_{\text{continue}}$$

omogenea associata: $y' = a(x)y$, scarto $y=0 \Rightarrow y\neq 0\ \forall x\in I$
considero $\frac{y'}{y} = a(x) \Rightarrow y = c\,e^{A(x)}$

Per l'int gen completa, considero sol. part $v(x)$ e applico Lagrange:
$\exists\, \gamma(x)\in C^1(I)$: $v(x) = \gamma(x)e^{A(x)}$, impongo v come soluzione: $v'(x) = a(x)v(x) + b(x) \Rightarrow \gamma'(x)e^{A(x)} + \underbrace{A'(x)}\gamma(x)e^{A(x)} = a(x)\gamma(x)e^{A(x)} + b(x) \Rightarrow$
$\Rightarrow \gamma'(x) = b(x)\cdot e^{-A(x)}\ \forall x\in I$

Il metodo si riflette per le eq. di ordine n ma con n costanti arbitrarie $\gamma\in C^1(I)$, in cui si considera il sistema lineare NON OMOGENEO esplicitato prima, da cui deriva che la soluzione deriva da $W(x)$: se $\neq 0$ è un sistema di Cramer e ammette unica soluzione.

Se i coefficienti sono funzioni costanti esistono metodi di calcolo più semplici:

Ad esempio, se $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$ ha $a_0,\dots,a_{n-1}$ costanti, se $\lambda\in\mathbb{R}$ e $e^{\lambda x}$ risolve l'eq. omogenea, essendo i coefficienti costanti si ha che:

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0\overset{\lambda^0=1}{}\right) = 0\ \forall x\in I$$

$\Rightarrow$ basta studiare l'eq. CARATTERISTICA associata alla omogenea $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$ nell'incognita λ

Per il T fond. Algebra, se polinomio grado n in campo complesso allora $P(z)$ ha n radici ma alcune con molt>1
$\Rightarrow$ Se λ risolve eq. caratt, $P(z)$ è divisibile per $(z-\lambda)$; è di molt. h se è divisibile per $(z-\lambda)^h$ e non $\wedge h+1$.

Quindi se z risolve la caratteristica, e^z risolve l'omogenea in $\mathbb{C}$; per considerare soluzioni reali si considerano le

Formule di Eulero

$$\begin{matrix} e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \\ e^{\bar z} = e^x(\cos y - i\sin y)\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}\frac{e^z + e^{\bar z}}{2} = e^x\cos y \\ \frac{e^z - e^{\bar z}}{2i} = e^x\sin y\end{matrix}$$

soluzioni poiché se z è una radice del polinomio lo è anche $\bar z$.

Per determinare l'int gen eq. diff. lin. a coeff. costanti, $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = \varphi$ bisogna:

1. Trovare n integrali lin. ind dell'omogenea associata.
2. Trovare una sol. part. della completa.

⚠ Complessi
$z = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$
$zz' = \rho\rho'(\cos(\vartheta+\vartheta') + i\sin(\vartheta+\vartheta'))$
$\frac{z}{z'} = \frac{\rho}{\rho'}(\cos(\vartheta-\vartheta') + i\sin(\vartheta-\vartheta'))$
$w^n = z \Rightarrow$
$\Rightarrow r = \rho^{1/n}$
$\vartheta = \frac{\vartheta + 2k\pi}{n}$
con $k\in\{0,\dots,n-1\}$
$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$
$z = x + iy$

Analisi II - Preparazione Orale, parte 2

Integrale generale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti $\quad L(y)=\varphi$

1: n integrali lin ind di $L(y)=0$

Consideriamo l'eq. caratteristica associata alla omogenea $\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$

- Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono soluzioni distinte reali dell'equazione caratt, $e^{\lambda_1 x}, \dots, e^{\lambda_n x}$ è una n-pla di soluzioni della eq. omogenea $L(y)=0$
- Se $\lambda_i \in \mathbb{R}$ è soluzione di molteplicità h, le funzioni $e^{\lambda x}, xe^{\lambda x}, \dots, x^{h-1}e^{\lambda x}$ sono ~~tutte~~ soluzioni indipendenti di $L(y)=0$ $\Rightarrow$ sostituendo alle h "$e^{\lambda x}$" soluzioni queste funzioni si ottiene una n-pla lin ind di soluzioni.
- Se $\alpha \pm i\beta$ sono soluzioni complesse coniugate dell'eq. caratt, allora $e^{(\alpha+i\beta)}$ è soluzione complessa di $L(y)=0$, sfruttando Eulero si ottiene che $e^{\alpha x}\cos\beta x$ ed $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ sono soluzioni reali di $L(y)=0$: $z=(\alpha+i\beta)x$, $\bar{z}=(\alpha-i\beta)x$

  Se $\alpha \pm i\beta$ hanno molteplicità k (eq. almeno di IV grado) si moltiplicano le due f ottenute da Eulero per $x, \dots, x^{k-1}$ ottenendo 2k soluzioni reali e distinte dell'eq. caratteristica:
  $xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ x^{k-1}e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ sono soluzioni lin. ind di $L(y)=0$

2: $v(x)$ soluzione particolare di $L(y)=\varphi$

Oltre al Metodo di Lagrange è possibile applicare metodi alternativi che risolvono anche per f non elementarmente integrabili:

① $\varphi(x)$ è un polinomio di grado $k \Rightarrow L(y)=P(x)$

- Se $\lambda=0$ NON è sol. della caratteristica, allora basta imporre che $v(x)$ sia soluzione applicando il principio d'identità dei polinomi (due polinomi sono uguali $\Leftrightarrow$ sono di ugual grado e i coefficienti corrispondenti sono simili.
- Se $\lambda=0$ È soluzione dell'eq. caratt. associata alla omogenea, di molteplicità m, si cerca $v(x)$ tra i polinomi di grado m+k, polinomi del tipo $x^m \cdot P(x)$, con $P(x)$ di grado k, per poi applicare il principio d'identità dei polinomi.

② $\varphi(x) = e^{\alpha x}\cdot P(x)$, con $P(x)$ di grado $k \Rightarrow L(y)=e^{\alpha x}P(x)$ $\qquad$ se $\alpha=0$ ↺

Costruiamo $v(x)$ analogamente a ①: $v(x) = e^{\alpha x}q(x)$ se $\lambda=\alpha$ NON è soluzione dell'eq. caratt.
$e^{\alpha x}\cdot x^m \cdot q(x)$ se $\lambda=\alpha$ È soluzione dell'eq. caratt. di molteplicità m [con $q(x)$ di grado k]

⚠ se $\lambda=\alpha$ è sol. allora nell'int gen omog compare $e^{\alpha x}$!!

③ $L(y) = e^{\alpha x}(\underbrace{P_1(x)}_{\text{grado h}}\cos\beta x + \underbrace{P_2(x)}_{\text{grado k}}\operatorname{sen}\beta x)$ $\qquad$ se $\beta=0$ ↺

Se φ non è un polinomio, bisogna applicare NECESSARIAMENTE LAGRANGE!

Costruiamo $v(x) = e^{\alpha x}(q_1(x)\cos\beta x + q_2(x)\operatorname{sen}\beta x)$ con grado di q_1 e $q_2 = \max\{h,k\}$ se $\alpha \pm i\beta$ NON risolve l'eq. caratteristica ($\Leftrightarrow e^{\alpha x}\cos\beta x$ non risolve l'int gen omog).
Altrimenti si moltiplica per x^m, con m molteplicità di $\alpha+i\beta$ come soluzione della caratteristica.

⚠ risolvi sempre con sen e cos in $v(x)$, anche se non compare nell'equazione!

Principio di Sovrapposizione

Se $L(y) = \varphi_1 + \varphi_2$, si può imporre v_1 sol. $L(y)=\varphi_1$, v_2 sol. $L(y)=\varphi_2$ $\Rightarrow L(v_1+v_2) = L(v_1)+L(v_2) = \varphi_1+\varphi_2$ perché L è un operatore lineare

Eq. differenziali a Variabili separabili

$y' = f(x)\cdot g(y)$ $\qquad$ NON sono lineari (tranne se $g(y)=y$), g ed f sono definite e continue in due aperti di $\mathbb{R}$

⚠ NON vale il Th. Esistenza e Unicità se non localmente; le sol. non sono definite in uno stesso insieme di definizione, le costanti possono NON variare in tutto $\mathbb{R} \Rightarrow y(x)=0\ \forall x$ è LOCALE.

$\min_{t\in X} h(t) \overset{\text{def}}{=} \min\{h(t), t\in X\}$ nel CODOMINIO; $\quad t_0 \in X: h(t_0) = \min_{t\in X} h(t)$ PUNTO DI MINIMO, in X o una sua restrizione

Estremi relativi: min rel. $\Leftrightarrow \exists I_{t_0}: h(t_0) \le h(t)\ \forall t \in I_{t_0}\cap X$ $\qquad$ min ass $\Rightarrow$ min rel
proprio $\quad$ " $\quad$ $<$ " $\qquad\qquad$ $\not\Leftarrow$

Teorema di Fermat

$t_0 \in \mathring{X}$ estremo relativo in X, $h(t)$ derivabile in $t_0 \Rightarrow h'(t_0)=0$ $\quad \not\Leftarrow$ es. $h(t)=t^3$ per $t=0$

Dim
$t_0 \in \mathring{X}$ min rel $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists I_{t_0} \subseteq X: h(t_0) \le h(t)\ \forall t\in I_{t_0} \Rightarrow \forall t \in]t_0, t_0+\delta[,\ \dfrac{h(t)-h(t_0)}{t-t_0} \ge 0$
$]t_0-\delta, t_0[$, $\quad$ " $\quad \le 0$

Ciò implica che $h'_+(t_0) \ge 0$, $h'_-(t_0) \le 0$; ma essendo h derivabile in t_0 per ipotesi, $\lim_{t\to t_0} h'_+(t) = \lim_{t\to t_0} h'_-(t) = 0$ ∎ $\qquad$ Possibile solo nei punti INTERNI

Altra condiz è del II ordine, prescinde dalla monotonia: h derivabile in I, due volte in $t_0 \in I$, $h'(t_0)=0$, $h''(t_0) \le 0 \Leftrightarrow t_0$ è p.to di max rel. non necessariamente propria.

T. Fermat in $\mathbb{R}^n$

$\underline{x_0} \in \mathring{X}$ estremo relativo per f, $\underline{v}$ versore, f derivabile in $\underline{x_0}$ secondo la direzione $\underline{v} \Rightarrow \dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = 0$; in part. $\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$

Dim
$\underline{x_0} \in \mathring{X}$ min rel $\Rightarrow \exists I_{\underline{x_0}} \subseteq X: f(\underline{x_0}) \le f(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in I_{\underline{x_0}}$, inoltre $\exists \delta > 0: \underline{x_0}+t\underline{v} \in I_{\underline{x_0}}\ \forall t \in]-\delta, \delta[$; dunque:

$\dfrac{f(\underline{x_0}+t\underline{v}) - f(\underline{x_0})}{t}$ $\to \ge 0\ \forall t \in]0,\delta[$, $\to \le 0\ \forall t \in]-\delta, 0[$ $\quad$ per il t. permanenza del segno e il t. del confronto $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) = 0$

Oppure se $\varphi(t) = f(\underline{x_0}+t\underline{v})$, $\dfrac{\partial f}{\partial \underline{v}}(\underline{x_0}) \equiv \varphi'(0)$, applichi Fermat a φ.

Condizione utile: $\nabla f = \underline{0} \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ punto stazionario, eventualmente estr. rel.

Importanti:
estr. rel interni
p. non derivabilità
p. frontiera

Cond. SUFF II ord. estr. rel. in $\mathbb{R}^2$

$f: X_{\text{aperto}} \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2(X)$

$\underline{x_0} \in \mathring{X}$:
- $\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$
- $H(\underline{x_0}) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix} > 0 \Rightarrow \underline{x_0}$ p.to min [max] SENSO STRETTO
- $f_{xx}(\underline{x_0}) > 0$ [<]

Cond. NEC. II ord. estr. rel. in $\mathbb{R}^2$

$\underline{x_0}$ min. rel per f in $X \Rightarrow$
- $\nabla f(\underline{x_0}) = \underline{0}$
- $H(\underline{x_0}) \ge 0$
- $f_{xx}(\underline{x_0}) \ge 0$

$H<0 \Rightarrow$ NON ESTR. REL. (p. sella)
$H=0 \Rightarrow$ CASO INCERTO

Cond SUFF: Dim

Poiché $f \in C^2(X)$, X aperto, $H(\underline{x})$ è una funzione continua, per il T. permanenza segno $\exists I_{\underline{x_0}} \subseteq X: H(\underline{x}) > 0$ [f_{xx}] $\forall (\underline{x}) \in I_{\underline{x_0}}$.
Resta da dimostrare che i punti $\ne \underline{x_0}$ in questo intorno determinino valori maggiori di $f(\underline{x_0})$, si procede sfruttando la Formula di Taylor con resto di Lagrange del I ordine e di p.to iniziale $\underline{x_0}$.

Considerando $\underline{x} \in I_{\underline{x_0}}$, $\underline{x} \ne \underline{x_0}$ sappiamo che $\exists \underline{c} \in \overline{\underline{x}\,\underline{x_0}} \subseteq I_{\underline{x_0}}$: $f(\underline{x}) = f(\underline{x_0}) + \underbrace{0}_{\nabla f=\underline{0}\text{ per hp}} + \frac{1}{2}[f_{xx}(\underline{c})(x-x_0)^2 + 2f_{xy}(\underline{c})(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(\underline{c})\cdot(y-y_0)^2]$

Basta dimostrare che il quadrato simbolico è strettamente positivo ($\Rightarrow f(x,y) > f(x_0,y_0)$)

Consideriamo $\underline{x} = (x,y_0) \ne (x_0,y_0)$; $(x,y_0) \in I_{\underline{x_0}}$. Il quadrato simbolico può riscriversi nella forma:

- $(x,y_0) \Rightarrow [\cdot] = f_{xx}(\underline{c})(x-x_0)^2 > 0$ perché $x \ne x_0$ e $f_{xx} > 0$ per Hp; per il T. perm. segno siamo certi che $f_{xx} > 0$ in tutto $I_{\underline{x_0}}$
- Se $(x,y) \ne (x,y_0)$, $[\cdot] = \underbrace{(y-y_0)^2}_{>0 \text{ perché } y\ne y_0}\left(f_{xx}(\underline{c})\left(\dfrac{x-x_0}{y-y_0}\right)^2 + 2f_{xy}(\underline{c})\left(\dfrac{x-x_0}{y-y_0}\right) + f_{yy}(\underline{c})\right)$

Basta dimostrare che $f_{xx}(\underline{c})\cdot\lambda^2 + 2f_{xy}(\underline{c})\lambda + f_{yy}(\underline{c}) > 0$, poiché $\Delta < 0$ ($\Delta/4 = -H(\underline{c})$, con $H(\underline{c}) > 0$ per il t. perm. segno), il trinomio ha lo stesso segno del termine quadratico, positivo per ipotesi (f_{xx})

In $\mathbb{R}^n$ con $n \ge 3$ ci sono altre condizioni che studiano alcuni minori della Hessiana o i suoi autovalori (in $\mathbb{R}^2$, se gli autovalori sono $--$ è un max, $++$ un min, $+-$ sella ∄; se almeno un autovalore nullo è INCERTO).

Curve Semplici Aperte

Codomini di f omeomorfismo di forma simile in $I \in \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, f = rapp. par.

Se $I, J \subseteq \mathbb{R}$ intervalli compatti, $\exists\, g$ biunivoca e continua tra I e J, se $I = g(J)$ o viceversa, per il T. Bolzano g è strett. monotona; ciò vale per insiemi topologicamente equivalenti ma anche tra compatti ed $\mathbb{R}$ (con $g = \operatorname{tg} x$ ad esempio). Essendo I e J omeomorfi, se I è l'int. base di Γ, fissando $t \in I$ e $\tau \in J$ sappiamo che è possibile costruire l'omeomorfismo $t(\tau): J \to I$ strettamente monotono $\Rightarrow$ considerando $f(t(\tau)) \in \Gamma$ si osserva che esso è un omeomorfismo (prop. funzioni composte) e quindi una rapp. par di Γ di base $J \Rightarrow \exists$ infinite rapp. par di Γ, che si ottengono l'una dall'altra componendo con g strett. monotone.

Curve semplici Chiuse

Codomini di $f: [a,b] \to \Gamma$ continua, con $f(a) = f(b)$ e biunivoca in $[a,b[$

- Semplice chiusa $\Leftrightarrow$ unione di 2 semplici aperte con estremi in comune
- **Teorema di Jordan**: Curva semplice chiusa piana $\Rightarrow \mathbb{R}^2 - \Gamma = \bigcup_{i=1}^{2} A_i$, A_i aperti connessi disgiunti con $\partial A_i = \Gamma$, di cui quello interno se $\cup\Gamma$ è un dominio limitato e compatto, intern. connesso $\Rightarrow$ connesso; si dice DOMINIO DI JORDAN; può essere a più contorni se $\partial D = \Gamma \cup \Gamma_i$, $i = 1, \dots, n$ interne.

Orientare Γ

significa costruire una relazione d'ordine stretto sui punti di Γ sapendo che in $f(t)$ $t_1 < t_2$, scegliendo se $f(t_1) \gtrless f(t_2)$ si costruiscono due classi disgiunte che individuano la relazione scelta o la sua opposta; un orientamento è una delle due classi. Una curva chiusa si orienta intuitivamente come composizione di archi di curve, con lo stesso orientamento.

Lunghezza di Γ

$\mathcal{P} = \left\{ P = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{P_{i-1}, P_i} \text{ inscritte in } \Gamma \right\}$; $\left\{ \ell(P) = \sum_{i=1}^{n} \| P_i - P_{i-1} \|,\ P \in \mathcal{P} \right\} \subseteq [0, +\infty[\Rightarrow \exists \sup_{P \in \mathcal{P}} \ell(P) = \ell(\Gamma)$

Se $\ell(P) \in \mathbb{R}$, la curva si dice rettificabile.

Curve sempl. REG

- $f \in C^1(I)$; $\cdot\ f'(t) \neq 0\ \forall t \in I \Rightarrow \|f'(t)\| > 0\ \forall \dots$ $[f'(a) = f'(b)$ se CHIUSA$]$

Se Γ ammette una rapp par reg, È REGOLARE

Retta tg: $f = f_0 + \lambda(f'(t_0))$, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + \lambda x'(t_0) \\ \vdots \end{cases}$ NON DIPENDE DA f: f composta $\Rightarrow f'$ proporzionale

Nome deriva da discorso AM1 come retta sovrapp. secanti: $f = f_0 + \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \lambda$ sec. $\lim_{t \to t_0} = f'(t_0) \Rightarrow$ tg.

Curva è REG $\Leftrightarrow \exists\, \underline{t_f} = \pm \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ versore tg. positivo, $\nexists$ in cuspidi, segue l'orient. + $= \lim_{P \to P_0} \underline{s_P} = \lim_{P \to P_0} \frac{P - P_0}{\|P - P_0\|}$ vers. sec. pos.

Teorema: curva piana sempl reg $\Rightarrow$ localmente $\overset{\text{diag. } g}{\in} C^1(I), I \subseteq \mathbb{R}$: $\forall P_0 \in \Gamma\ \exists I_{P_0}: \Gamma \cap I_{P_0} = G_g, g \in C^1(I)$ $\quad I \subseteq \mathbb{R}$

- Curve gen reg: reg. tranne in un numero finito di punti:
  - derivabile in $[a,b]$
  - continua a meno di disc. I specie FINITE in num.
  - $f'(t) \neq 0$ tranne in un num. FINITO di punti
- Arco int. reg se $\exists\, f$ reg $\in C^1(I)$ tranne negli estremi
- Γ gen reg $\Rightarrow \Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$ curve consecutive, se $i = 2$ possono avere 2 estremi uguali. pg 107: prop!
- Γ sempl chiusa $= \partial D$ Jordan è orientata canonicamente $\Leftrightarrow (\underline{n_e}, \underline{t_f}) \cong (\underline{i}, \underline{j})$

< Ascisse Curvilinee, p. 112 > prox foglio

Int. Curvilineo: $\int_\Gamma f(P)\, ds$, se $\overset{[a,b]}{f}$ rapp. reg. è $= \int_a^b f(f(t)) \cdot \|f'(t)\|\, dt$

Lavoro e Circuitazione di un Campo lungo una curva ORIENTATA REG

Γ compatta, $f: [a,b] \to \Gamma$ rapp. par reg; orientata Γ si vede che il campo vett. $\underline{t}$ descritto dal vers. tg. è continuo; dunque se $\underline{v}$ è un campo continuo la funzione $P \in \Gamma \mapsto \underline{v}(P) \cdot \underline{t_P} \in \mathbb{R}$ è una f scalare CONTINUA SU Γ.

$$\int_\Gamma \underline{v}(P) \cdot \underline{t_P}\, ds = \pm \int_a^b X(f(t))\, x'(t) + \dots + Z(f(t)) \cdot z'(t)\, dt \qquad \left(\text{se } \underline{v}(x,y,z) = \overbrace{X + Y + Z}^{\in f(x,y,z)} \text{ e } \Gamma \subseteq A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^3 \right)$$

Lavoro se Γ aperta
Circuitazione se Γ chiusa

< Linguaggio forme diff., p. 117-118 e ss. > prox foglio

Formule Gauss nel PIANO

Se $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua e derivabile in A risp. $x\, [y]$, con $f_x\, [f_y]$ continua in A, e D è un dominio normale di $\mathbb{R}^2$ $\subseteq A$,

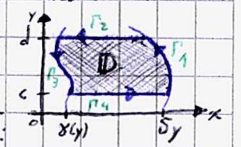
$$\iint_D \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} f(x,y)\, dy \qquad \left[\iint \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\, dx\, dy = -\int_{\partial D^+} f(x,y)\, dx \right]$$

Utile per baricentri ecc, INTEGRI PARZIALMENTE e fai una circuitazione. es: $x = f'(x^2/2)$ o $x f'(xy)$

Dim

Supponiamo D norm. risp. y per dimostrare la I formula (la seconda dualmente, gli altri casi sono + difficili).

$D \overset{Hp}{=} \{(x,y) : c \leq y \leq d,\ \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ $\qquad$ Th: $\iint_D f_x(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} f(x,y)\, dy$



$$\iint_D f_x(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f_x(x,y)\, dx = \int_c^d f(\delta(y), y) - f(\gamma(y), y)\, dy$$

Parametrizzando le Γ:

$\Gamma_1: \begin{cases} x = \delta(t) \\ y = t \end{cases}$ $t \in [c,d]$ concorde $\qquad \Gamma_3 = \begin{cases} x = \gamma(t) \\ y = t \end{cases}$ $t \in [c,d]$ discorde

$\Gamma_2: \begin{cases} x = t \\ y = d \end{cases}$ $t \in [\gamma(d), \delta(d)]$ discorde $\qquad \Gamma_4: \begin{cases} x = t \\ y = c \end{cases}$ $t \in [\gamma(c), \delta(c)]$ concorde

Avendo parametrizzato ∂D^+, calcoliamo:

$$\int_{\partial D^+} f\, dy = \int_c^d f(\delta(t), t)\, dt - \int_c^d f(\gamma(t), t)\, dt \quad \blacksquare$$

gli altri integrali si elidono perché $dy = y'(t)\, dt$ con y costante

VALGONO ANCHE PER DOMINI A PIÙ CONTORNI (purché REG), leggibili come unioni di domini normali (DI JORDAN (non normali!)) al più adiacenti; il risultato della formula di Gauss è la somma delle circuitazioni lungo le curve di ∂D orientate canonicamente.

Rotore di $\underline{v}$

: è un campo costruito partendo da $\underline{v} \in C^1(A) \Rightarrow$ continuo in A:

- $\mathbb{R}^3$: $\operatorname{rot} \underline{v}: (x,y,z) \to \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \underline{i} + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \underline{j} + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \underline{k}$

Per Ricordare: $\begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ X & Y & Z \end{pmatrix}$

- $\mathbb{R}^2$: $\operatorname{rot} \underline{v}: (x,y) \to \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \underline{k} \Rightarrow \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{k} = \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \in \mathbb{R}$

Teorema di Stokes nel Piano: $\underline{v} \in C^1(A)$, $A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^2$; $\forall D$ regolare: $D \subseteq A$ si ha che $\iint_D \operatorname{rot} \underline{v} \cdot \underline{k}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} \underline{v} \cdot d\underline{P}$

ovvero $\iint_D \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} X\, dx + Y\, dy$ ottenuto applicando Gauss

Divergenza di $\underline{v}$

: $\underline{v} \in C^1(A)$, A aperto; $\operatorname{div} \underline{v}: X \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$: $\operatorname{div} \underline{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ funzione scalare

Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^2$: $\underline{v}(x,y) = X(x,y)\underline{i} + Y(x,y)\underline{j} \in C^1(A)$; $\forall D$ regolare $\subseteq A = \mathring{A} \subseteq \mathbb{R}^2$ si ha che:

$$\iint_D \operatorname{div} \underline{v}\, dx\, dy = \iint_D \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy = \iint_D \frac{\partial X}{\partial x}\, dx\, dy + \iint_D \frac{\partial Y}{\partial y}\, dx\, dy \overset{\text{Gauss}}{=} \int_{\partial D^+} X\, dy - \int_{\partial D^+} Y\, dx = \int_{\partial D^+} X\, dy - Y\, dx$$

Th. div $\underline{v}$: $\iint_D \operatorname{div} \underline{v}\, dx\, dy = \int_{\partial D^+} \underline{v} \cdot \underline{n_e}\, ds$

Se D è a unico contorno (se più contorni si fa la somma!) e f è una rapp. par. reg. orientata + in ∂D^+ di base $[a,b]$:

$$\int_{\partial D^+} X\, dy - Y\, dx = \int_a^b -Y(x(t), y(t))\, x'(t) + X(x(t), y(t))\, y'(t)\, dt = \int_a^b X(f(t))\, (y'(t)) + Y(f(t))\, (-x'(t))\, dt =$$

$$= \int_a^b \underline{v}(f(t)) \cdot \underline{n_e}(f(t)) \cdot \|f'(t)\|\, dt = \int_a^b \underline{v} \cdot \underline{n_e}\, ds$$

$\Rightarrow$ si riconduce a un int. curvilineo $\to$ flusso uscente di ∂D di $\underline{v}$ (se forze)

Potenziale Scalare di $\underline{v}$

è una funzione $U(x,y,z)$ tale che $\nabla U = \underline{v}(x,y,z) = X(x,y,z)\underline{i} + Y(x,y,z)\underline{j} + Z(x,y,z)\underline{k}$

Se $\underline{v}$ è dotato di pot. sc. esso si dice campo conservativo, la relativa forma diff. si dice esatta in A ($\equiv$ diff. f; pg. 123). Essendo U primitiva della forma diff. $X\, dx + Y\, dy + Z\, dz$ segue che $\forall c \in \mathbb{R}$, $U + c$ è un potenziale sc. di $\underline{v}$.

Teorema: U_1, U_2 pot. di $\underline{v} \Rightarrow U_1 - U_2$ costante se $\underline{v}$ è continuo in A aperto connesso.

$\underline{v}$ continuo $\Rightarrow U_1, U_2 \in C^1(A) \Rightarrow U_1 - U_2 \in C^1(A)$; $\nabla(U_1 - U_2) = \nabla U_1 - \nabla U_2 = \underline{v} - \underline{v} = 0 \Rightarrow U_1 - U_2 = \text{cost.}$ (T. f. gradiente NULLO)

Analisi II - Preparazione Orale - Parte 3

Condizione NEC campo cons

$\underline{v}$ continuo in A aperto e ivi conservativo $\Rightarrow$ il lavoro lungo qualsiasi curva aperta con estremi contenuta in A dipende solo dagli estremi e dall'orientamento di Γ; le circuitazioni lungo curve chiuse sono invece sempre NULLE.

1) Se Γ ha estremi $\underline{p}_1$ e $\underline{p}_2$ con $\underline{p}_1 = \underline{p}(a)$, $\underline{p}_2 = \underline{p}(b)$, $\underline{p}:[a,b]$ regolare concorde con or. $\underline{p}_1 \to \underline{p}_2$,

$$\int_\Gamma \underline{v}\cdot d\underline{p} = \int_a^b X(\underline{p}(t))x'(t)+Y(\underline{p}(t))y'(t)+Z(\underline{p}(t))z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{\partial U}{\partial x}(\underline{p}(t))\cdot x'(t)+\frac{\partial U}{\partial y}(\underline{p}(t))\cdot y'(t)+\frac{\partial U}{\partial z}(\underline{p}(t))\cdot z'(t)\,dt = \int_a^b \nabla U(\underline{p}(t))\cdot \underline{p}'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b (U\circ \underline{p})'(t)\,dt = \oint U(\underline{p}_2) - U(\underline{p}_1)$$

analog., Γ chiusa $\Rightarrow \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ con entrambi gli estremi in comune $\Rightarrow$ i due lavori sono uguali e opposti (or.) $\Rightarrow = \emptyset$

↑ Cond NEC e SUFF

- $\underline{v}$ campo continuo nel connesso A, lavoro su curva aperta con estremi contenuta in A dipende solo da estremi e orientamento $\Rightarrow \underline{v}$ conservativo.

Fissato $\underline{p}_0 \in A$, un pot. di $\underline{v}$ è: $U: \underline{p} \in A \to \int_{\underline{p}_0}^{\underline{p}} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds$ funzione integrale

Dim (n=2)

$\overline{\underline{p}} = (\bar{x},\bar{y}) \in A$, calcolo $\Delta U = U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y}) = \int_{\underline{p}_0}^{(x,\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds - \int_{\underline{p}_0}^{(\bar{x},\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds =$

$$= \underbrace{\int_{\underline{p}_0}^{(x,\bar{y})} \cdot\, ds + \int_{(\bar{x},\bar{y})}^{\underline{p}_0} \cdot\, ds}_{\text{lavoro su } \Gamma_1 \text{ e } \Gamma_2 \text{ consecutive}} = \int_{(\bar{x},\bar{y})}^{(x,\bar{y})} \underline{v}\cdot\underline{t}\,ds = \int_{\bar{x}}^{x} X(t,\bar{y})\,dt$$

Per il T. della media integrale $\exists\, c_x$ compreso tra x e $\bar{x}$: $U(x,\bar{y}) - U(\bar{x},\bar{y}) = \int_{\bar{x}}^{x} X(t,\bar{y})\,dt = X(c_x,\bar{y})(x-\bar{x})$

dividendo i tre termini per $(x-\bar{x})$ si ottiene che, poiché quando x tende a $\bar{x}$ c_x tende a $\bar{x}$ e poiché X è continua ($\Rightarrow \lim_{x\to\bar{x}} X(c_x,\bar{y}) = X(\bar{x},\bar{y})$) allora:

$$\lim_{x\to\bar{x}} \frac{U(x,\bar{y})-U(\bar{x},\bar{y})}{x-\bar{x}} = X(\bar{x},\bar{y}) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x}(\bar{x},\bar{y}) = X(\bar{x},\bar{y}) \ \blacksquare$$

analogo per y ma con un segmento // asse y

- Nelle stesse ipotesi ($\underline{v}$ continuo in A), se la circuitazione di $\underline{v}$ lungo una qualsiasi curva chiusa è nulla $\Rightarrow \underline{v}$ conservativo in A.

Dim

Γ_1 e Γ_2 curve sempl. aperte reg./gen reg contenute in A di primo estremo $\underline{p}_1$ e secondo $\underline{p}_2$; $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ è Γ gen reg. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{p} = \emptyset = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{p} + \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{p} = \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{p} - \int_{\overleftarrow{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{p} \Rightarrow \int_{\vec{\Gamma}_1} \underline{v}\cdot d\underline{p} = \int_{\vec{\Gamma}_2} \underline{v}\cdot d\underline{p} \ \blacksquare$$

Irrotazionalità e $\underline{v}$ conservativo

cond. NEC

$\underline{v}$ conservativo in $A \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v} = \emptyset$ in A (utile per dire $\text{rot}\,\underline{v} \neq \emptyset$, campo NON CONS)

Se U è un pot. sc. di $\underline{v}$, $U \in C^2(A)$; vale Schwartz:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \overset{S.}{=} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x} \overset{Hp}{=} \frac{\partial X}{\partial y} \Rightarrow \text{rot}\,\underline{v} = \emptyset$$

Teorema di Poincaré

$\underline{v} \in C^1(A)$, A stellato (convesso risp. 1 punto), $\text{rot}\,\underline{v} = \emptyset$ in $A \Rightarrow \underline{v}$ conservativo in A.

Teorema: $\underline{v} \in C^1(A)$, $\text{rot}\,\underline{v} = \emptyset$ in A, A semplicemente connesso in $\mathbb{R}^2$ (connesso e ogni curva sempl. chiusa $\subseteq A$ è ∂D jordan $\subseteq A$) $\Rightarrow \underline{v}$ conservativo in A.

Dim: Applichi Stokes a una Γ qualsiasi CHIUSA $\subseteq A \Rightarrow \int_{\vec{\Gamma}} \underline{v}\cdot d\underline{p} = \int_{\partial D^+} \underline{v}\cdot d\underline{p} = \iint \text{rot}\,\underline{v}\cdot k\,dx\,dy = \emptyset$ perché $\text{rot}\,\underline{v} \overset{Hp}{=} \emptyset$ $\blacksquare$

Se A ha un numero finito di componenti connesse (aperti disgiunti) semplicemente connesse si considerano i singoli potenziali scalari in A_i per valutarvi l'irrotazionalità di $\underline{v}$:

$U = U_i(x,y)$ se $(x,y) \in A_i$, $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ "funzione ad hoc"

Forme Differenziali

Tornando a lavoro e circuitazione, $\underline{v}\cdot d\underline{p}$ può essere visto in un'altra ottica: $d\underline{p} = dx\,\underline{i} + dy\,\underline{j} + dz\,\underline{k}$; se $\underline{v} = X\underline{i} + Y\underline{j} + Z\underline{k}$ continuo allora:

$\underline{v}\cdot d\underline{p}: (x,y,z) \in A \to X(x,y,z)\,dx + Y(x,y,z)\,dy + Z(x,y,z)\,dz$ con A ins. def. di $\underline{v}$.

La funzione è f di dx, dy, dz di primo grado che variano linearmente se sono fissati $x,y,z \Rightarrow$ la f si dice forma diff. lineare in $\mathbb{R}^3$ di coeff. X, Y, Z (continue in A).

- Int. curvilineo di F forma diff. lungo Γ sempl. orientata compatta regolare: $\int_\Gamma X\,dx + Y\,dy + Z\,dz \overset{def}{=} \pm \int_a^b X(\underline{p}(t))\cdot x'(t) + \ldots + Z(\underline{p}(t))\cdot z'(t)\,dt$ con $\underline{p}(t)$ rapp. par reg. di base $[a,b]$, $\pm$ in base a $\underline{p}$ e or. Γ

- Potenziale Scalare: la primitiva di un potenziale scalare $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$, una funzione $U:(x,y,z) \in A \to U(x,y,z) \in \mathbb{R}$ der. parz. in A tale che:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X\ ;\ \frac{\partial U}{\partial y} = Y\ ;\ \frac{\partial U}{\partial z} = Z$$

Primitiva di forma diff. in 1 var $X\,dx$: definita se $X(x)$ è continua in un intervallo, è una f derivabile nell'int. la cui $f' = X$

Oss

- $\underline{v}$ conservativo $\Leftrightarrow X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$ è forma diff. esatta (è diff. di una f: $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \ldots$)
- $\underline{v}$ irrotazionale $\Leftrightarrow Y_x = X_y;\ Y_z = Z_y;\ Z_x = X_z$ forma diff. chiusa (pagina)
- $\Rightarrow F$ diff. esatta con coeff. $\in C^1(A)$, A aperto connesso $\Rightarrow F$ chiusa ($\Leftarrow$ se e solo se A stellato / in $\mathbb{R}^2$, sempl. connesso)

Superfici ($\mathbb{R}^3$)

Codominio di una f vett. continua di 2 variabili reali definita in una regione internamente connessa ($\Rightarrow$ connessa), si denota con $\mathcal{S}$.

- T. Bolzano $\Rightarrow \mathcal{S}$ connesso di $\mathbb{R}^3$

- Se X dominio limitato (compatto!) di $\mathbb{R}^2$, $\underline{f}: (u,v) \in X \to \underline{f}(u,v) \in \mathcal{S}$ si dice rapp. par di $\mathcal{S}$ se $\underline{f}$ è biunivoca in $X \Rightarrow X$ e $\mathcal{S}$ sono omeomorfi (e $\underline{f}$ è un omeomorfismo).

Se X è una regione intern. connessa, $\underline{f}$ si dice rapp. di $\mathcal{S}$ (e STOP).

Teorema di Brouwer

$\mathbb{D}, \mathbb{D}'$ domini di Jordan di $\mathbb{R}^2$, $\underline{f}$ rapp. par di $\mathcal{S}$ di base $\mathbb{D}$.

Se φ è omeomorfismo di $\mathbb{D}$ su $\mathbb{D}'$ (sempre possibile per topo), allora φ trasforma punti $\in \mathring{\mathbb{D}}$ in punti $\mathring{\mathbb{D}}' \Rightarrow \varphi(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}'$

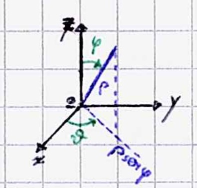
Analogamente, $\underline{f}(\partial\mathbb{D}) = B(\mathcal{S})$ bordo di $\mathcal{S}$ (stesso ruolo di estremi interv. di base) $\Rightarrow \mathcal{S}$ si dice sup. sempl. con bordo.

Superficie chiusa: è una superficie ~~semplice~~ compatta e priva di bordo, alcune possono essere immaginate come $\mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2$ adiacenti, che si intersecano solo nei rispettivi bordi (se solo parzialmente, $\mathcal{S}$ è ancora con bordo).

Coord. Sferiche permettono di parametrizzare prescindendo da curve aperte/chiuse etc.

Considerando z asse polare,

$$\begin{cases} x = \rho\,\text{sen}\,\varphi\cos\vartheta \\ y = \rho\,\text{sen}\,\varphi\,\text{sen}\,\vartheta \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases}$$



Supert. Rotazione $\underline{p}:[a,b] \to \Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$, insieme dei punti $\in$ circ. di centro asse polare, passanti per Γ e ortogonali all'asse polare = sup. rot., in cui una delle tre coord. non varia nella singola circonf.; le altre due variano in f del raggio della $\odot \Rightarrow$ coord. polari.

Se $\Gamma \subseteq xy$ conviene ruotare la terna di assi nella rappresentazione grafica.

$$\Gamma: \underline{p}: \begin{cases} y = y(u) \\ z = z(u) \\ x = \emptyset \end{cases} \overset{\text{rotaz. } z}{\Rightarrow} \mathcal{S}: \begin{cases} x = y(u)\cos v \\ y = y(u)\,\text{sen}\,v \\ z = z(u) \end{cases}$$

Supert. Regolari: $\mathcal{S}$ con bordo, $\underline{p}$ rapp. par di base $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato e connesso. $\underline{p}$ regolare $\Leftrightarrow \underline{p} \in C^1(\mathbb{D})$, $\underline{p}_u(u,v) \wedge \underline{p}_v(u,v)$ è $\neq \emptyset\ \forall (u,v) \in \mathbb{D} \Rightarrow \|\underline{p}_u \wedge \underline{p}_v\| > \emptyset\ \forall (u,v) \in \mathbb{D}$.

Esplicitando $\underline{p}_u \wedge \underline{p}_v$ per componenti ($\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}\underline{i} - \ldots + \ldots$) si osserva che le componenti coincidono con i minori della matrice Jacobiana ottenuti cancellando la i-ma riga $\Rightarrow r(J) = 2\ \forall (u,v) \in \mathbb{D}$, $\|\underline{p}_u \wedge \underline{p}_v\| > \emptyset = \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} > \emptyset$

Piano Tangente ad S: $\underline{f}$ regolare $\Rightarrow$ $\underline{f}_u$ e $\underline{f}_v$ lin ind $\Rightarrow$ individuano un piano. Considerando le infinite Γ reg ($\subseteq S$) passanti per $\underline{f}_0 \in S$, esse sono tutte e sole le immagini di curve reg. contenute in $\mathbb{D}$ e passanti per (u_0, v_0); le Γ sono tutte dotate di retta tg perché regolari $\Rightarrow$ $\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v$ individua piano tg.

S regolare $\Rightarrow$ ammette piano tg. in ogni punto. Vale un Th. per cui se $\underline{f} \in C^1(A)$ con A privo di punti cuspidali, $\underline{f}$ si può prolungare in $\mathbb{R}^2$ come $\in C^1(\mathbb{R}^2)$ $\Rightarrow$ punti del bordo $\equiv$ punti interni. Se no l'asserto vale solo in $\mathring{S}$.

eq: $\underline{f} = \underline{f}_0 + \lambda\, \underline{f}_u(u_0,v_0) + \mu\, \underline{f}_v(u_0,v_0)$ $\quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

eq. cart: J_i parametri giacitura $\Rightarrow$ $J_1(u_0,v_0)(x - x(u_0,v_0)) + J_2 \cdots + J_3 \cdots = 0$

$\underline{f} \in C^1(\mathbb{D}) \Rightarrow$ diff.bile, richiama da xy il th. su diff.tà

Retta Normale: individuata dai versori $\pm \dfrac{\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v}{\|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\|}$ $\Rightarrow$ si delineano 2 campi vettoriali che associano ai punti di S il vers. normale $\Rightarrow$ S regolare delinea due campi vett. continui tramite i versori normali; scegliere un $\underline{n}_{\underline{f}}$ su un punto implica sceglierli su tutta S, ORIENTANDOLA: le $\underline{f}$ di S si dividono in 2 classi disgiunte a seconda del segno del versore normale.

Unendo + sup. otteniamo sup. chiuse/aperte $\Rightarrow$ se chiuse la retta normale si distingue tra interna e esterna (domin. racchiuso da S); vale un T. analogo al T. di Jordan: S chiusa $= \partial\mathbb{D}$ Jordan dello spazio connesso e limitato.

S gen reg. se è $\bigcup$ finita di sup. reg. tale che sono a due a due adiacenti/concatenate tramite sup. adiacenti, con al più i bordi in comune.

Orientaz. $B(S)$: S reg con bordo $\Rightarrow$ $B(S) = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma$ semplici $= \Gamma$ chiusa gen reg (dominio di base di $\underline{f}$ ha $\partial\mathbb{D}$ gen reg) e $\underline{f}$ trasforma.
Orientando S in un suo punto di regolarità del bordo si considera il piano tangente e una sua retta ortogonale alla retta tg. al punto del bordo; su questa retta normale consideriamo il versore $\underline{\nu}$ orientato verso l'interno della S; l'orientamento canonico del bordo è quello per cui $(\underline{t}, \underline{\nu}, \underline{n}) \cong (\underline{i}, \underline{j}, \underline{k})$.

Ne segue che una sup. gen.reg. è orientata se su due sup. adiacenti le porzioni di bordo in comune vengono percorse in maniera opposta $\Rightarrow$ bisogna orientare coerentemente le porz. di regolarità.

Th Ogni sup reg è localmente il diagramma di una $f \in C^1$.

Area S reg, $\underline{f}$ reg di base $\mathbb{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ reg $\Rightarrow$ $\forall \underline{f}_u \times \underline{f}_v$: $\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v \neq \underline{0}$, $\underline{f} \in C^1(\mathbb{D}) \Rightarrow \underline{f}_u, \underline{f}_v$ ▱ di area $\|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\| = \|\underline{f}_u\| \|\underline{f}_v\| \operatorname{sen}\alpha$

$$\operatorname{area}(S) \overset{def}{=} \iint_{\mathbb{D}} \|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\|\, du\, dv = \iint_{\mathbb{D}} \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2}\, du\, dv \quad \text{non dipende da } \underline{f}/\mathbb{D}$$

Sup. rot $\Rightarrow$ Pappo-Guldino: $\text{Area} = \ell(\Gamma) \cdot \text{circonf. baricentro } \Gamma \text{ in rot.}$

$$\operatorname{area}(S) = 2\pi \int_a^b x(u) \|\underline{f}'(u)\|\, du = \ell(\Gamma) \cdot \frac{\int_\Gamma x\, ds}{\ell(\Gamma)} \cdot 2\pi \qquad \Gamma \in zx \Rightarrow \sqrt{J_1^2 + J_2^2 + J_3^2} = \sqrt{x(u)^2 (x'(u)^2 + z'(u)^2)}$$

$\Rightarrow$ rotaz. z, $\text{area} = 2\pi \int_\Gamma x\, ds$

Int. Superficiale S sup. reg., $\mathcal{R} = \{S_1, \ldots, S_n\}$: $\bigcup S_i = S$, S_i reg. $\forall i$

$f: S \to \mathbb{R}$ continua in $S \Rightarrow \forall S_i$: $\exists \min_{S_i}/\max_{S_i} f$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} s'_{\mathcal{R}} = \sum \min f \cdot \operatorname{area}(S_i) \Rightarrow S' = \{s'_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\} \\ s''_{\mathcal{R}} = \sum \max f \cdot \operatorname{area}(S_i) \Rightarrow S'' = \{s''_{\mathcal{R}}, \mathcal{R}\} \end{array}$ separati

Se contigui, $\sup S' = \inf S'' = \int_S f\, d\sigma$

Se $\underline{f}$ regolare di S, $\mathbb{D}$ base regolare, $\int_S f\, d\sigma = \iint_{\mathbb{D}} f(\underline{f}(u,v)) \cdot \|\underline{f}_u \wedge \underline{f}_v\|\, du\, dv = \iint f(\underline{f}(u,v)) \cdot \sqrt{J_i^2}\, du\, dv$

Flusso $\underline{w}$ attraverso sup. ORIENTATA

S reg. orientata $\Rightarrow$ flusso $\underline{w}$ continuo su S $\overset{def}{=} \int_S \underline{w}_{\underline{f}} \cdot \underline{n}_{\underline{f}}\, d\sigma = (\pm) \iint_{\mathbb{D}} X(\underline{f}(u,v)) \cdot J_1(u,v) + Y \cdot J_2 + Z \cdot J_3\, du\, dv$ — se $\underline{f}$ conc/disc. or

T. DIVERGENZA $\mathbb{R}^3$ $\Longleftrightarrow$ S CHIUSA
$\underline{w} \in C^1(A)$, A aperto $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \forall S$ chiuse gen reg $\subseteq A$, detto T dominio: $\partial T = S$, $\iiint_T \operatorname{div} \underline{w}\, dx\, dy\, dz = \int_S \underline{w} \cdot \underline{n}_e\, d\sigma$ ↳ NORMALE EXT

T. Stokes $\mathbb{R}^3$
$\underline{w} \in C^1(A)$, A aperto $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \forall S$ con bordo reg gen reg ORIENTATA $\subseteq A$,

flusso del rotore $\leftarrow$ $\displaystyle\int_S \operatorname{rot} \underline{w} \cdot \underline{n}\, d\sigma = \int_{B(S)^+} \underline{w} \cdot d\underline{p}$ $\rightarrow$ circuitaz. $\underline{w}$ in $B(S)$

Ascisse Curvilinee
È un sistema di riferimento su una curva.
Sia Γ semplice aperta con estremi/chiusa, orientata e rettificabile. Fissato $\underline{p}_0 \in \Gamma$,

aperta: $s(\underline{p}) = \begin{cases} \ell(\Gamma_{\underline{p}_0, \underline{p}}) & \text{se } \underline{p} \text{ segue } \underline{p}_0 \text{ su } \Gamma \\ 0 & \text{se } \underline{p}_0 = \underline{p} \\ -\ell(\Gamma_{\underline{p}, \underline{p}_0}) & \text{se } \underline{p} \text{ precede } \underline{p}_0 \end{cases}$

chiusa: si individua Γ^+ di estremi $\underline{p}_0, \underline{c}$ e Γ^- di estremi $\underline{c}, \underline{p}_0$ $\Rightarrow$ $s(\underline{p}) = \begin{cases} \ell(\Gamma_{\underline{p}_0, \underline{p}}) & \text{se } \underline{p} \in \Gamma^+ \\ 0 & \text{se } \underline{p}_0 = \underline{p} \\ -\ell(\Gamma_{\underline{p}, \underline{p}_0}) & \text{se } \underline{p} \in \Gamma^- \end{cases}$

È possibile costruire una rap. par. dipendente solo da $s(\underline{p})$, componendo $s(\underline{p})$ e $\underline{p}(t)$ otteniamo $(s \circ \underline{p})(t)$: $t \in [a,b] \to s(\underline{p}(t)) \in \mathbb{R}$
f. reale di 1 var indicata con $s(t)$: $t \in [a,b] \to s(t) \in \mathbb{R}$
e si dimostra che è strett. monotona e continua.
per Bolzano il codominio è un intervallo, per Weierstrass è un compatto, che sappiamo avere lunghezza $\ell(\Gamma)$.

Ne segue che $s(t)$ è invertibile; l'inversa $t(s)$ è certamente continua e strett. monotona, con monotonia uguale a $s(t)$.
Dunque la f inversa $\underline{q}$: $s \in [c,d] \to \underline{q}(s) = \underline{p}(t(s)) \in \Gamma$ è una rapp. par. in f della ascissa curvilinea, sempre definita a partire dalla $\underline{p}$ scelta.
Ma $\underline{q}$ è sempre concorde con l'or: se $\underline{p}(t)$ concorde, $s(t) \Rightarrow t(s)$ strett. cresc. $\Rightarrow$ concorde
$\underline{p}(t)$ discorde, $s(t) \Rightarrow t(s)$ strett. decresc $\Rightarrow (\underline{p} \circ t)(s)$ concorde

Ciò si riflette su Γ chiusa: $\underline{p}(a) = \underline{p}(b)$, avvicinandosi agli estremi $s(t)$ tende a $s(\underline{p}(a)) \equiv s(\underline{c})$; essendo continua s tende a $-\ell(\Gamma^-)$ mentre avvicinandosi a b $s(\underline{p}(t)) \to \ell(\Gamma^+)$

$\underline{q}$ è reg. se $\underline{p}$ è reg; $s(t) = s(\underline{p}(t)) = \pm \int_{t_0}^{t} \|\underline{p}'(\tau)\|\, d\tau$ lunghezza di un arco

$\Rightarrow$ $s(t)$ è una f integrale, derivabile in tutto $[a,b]$; $s'(t) = \pm \|\underline{p}'(t)\|$ con $\pm$ in base a $\underline{p}$ e l'or. su Γ.

$\underline{p}$ reg. $\Rightarrow s'(t) \neq 0\ \forall t \Rightarrow t(s)$ derivabile in tutto $[c,d]$ $\Rightarrow t'(s) = 1/s'(t(s))$ $\Rightarrow$ $\underline{q}$ derivabile in tutto $[c,d]$

$\underline{q}'(s) = \pm \dfrac{\underline{p}'(t(s))}{\|\underline{p}'(t(s))\|} = \underline{T}_{\underline{p}}$ $\Rightarrow$ $\underline{q}$ è una rapp. par. reg., $\|\underline{q}'(s)\| = 1$

Successioni di funzioni p. 125
Legge che associa a ogni numero naturale una funzione (definite nello stesso $X \subseteq \mathbb{R}$)

Se $\exists \lim_n f_n(\bar{x}) \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X \Rightarrow (f_n)_n$ converge in $\bar{x}$.

(x/n)$_n$ • Convergenza puntuale in $Y \subseteq X \Longleftrightarrow$ converge $\forall x \in Y$ → si può costruire la funzione limite di f: $x \in Y \mapsto \lim_n f_n(x)$

$\Uparrow$ $(f_n)_n$ converge p. verso f in $Y \subseteq X \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x \in Y, \forall \varepsilon > 0\ \exists m_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n > m_{\varepsilon,x}$

($x + 1/n$)$_n$ • Convergenza uniforme: in $Y \subseteq X \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall n > m, \forall x \in Y$ ↗ non dip. da x

T. Continuità Limite: $(f_n)_n$ continue $\forall I$, conv. unif. verso $f\ \forall [a,b] \subseteq I \Rightarrow f$ continua in I

SERIE DI FUNZIONI

Successione delle somme parziali di una succ. di f $\Rightarrow$ può essere reg. $\Rightarrow \exists \lim_n S_n$ detto somma della serie; se $\in \mathbb{R}$ la serie si dice CONVERGENTE.

C. NEC. conv: $\sum_n f_n$ convergente $\Longrightarrow$ è generata da una succ. $(f_n)_n$ INFINITESIMA ($\not\Leftarrow$: $1/n$!)

Condizione di Conv puntuale/unif analoghe, la unif. si verifica difficilmente (calcolo somma serie?)
$\Downarrow$
Crit. assoluta convergenza: $\sum_n |f_n(x)|$ conv. $\forall x \in Y \Rightarrow \sum_n f_n$ conv. ass. $\Rightarrow$ conv. puntual. in Y.
$\Downarrow$
Se $\sum_n f_n$ è MAGGIORATA da una serie numerica conv. in $Y \subseteq X$ ($\exists (a_n)_n$, $a_n > 0$: $|f_n(x)| \leq a_n\ \forall x \in Y$, $\sum_n a_n$ conv.) allora la SERIE è ASS., UNIF., PUNT. CONVERGENTE

Analisi II - Preparazione Orale Parte 4

T. derivazione termine a termine

f_n derivabile in intervall. I $\forall n$, $\sum_n f_n$ conv. punt. I, $\sum_n f'_n$ conv. unif. $\forall [a,b] \subseteq I$ verso $\varphi(x)$

ALLORA f deriv. in tutto I e $f'(x) = \varphi(x)$ — der. somma = somma serie der.

$$f'(x) = \sum_n f_n'(x) = \varphi(x) \Rightarrow D\sum_n f_n = Df = \sum_n D f_n$$

T. integrazione "

$f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, f_n continue in $[a,b]$ $\forall n$, $\sum_n f_n$ conv. unif. verso f in I (f continua per T. cont. lim.):

ALLORA $\displaystyle\int_a^b \sum_n f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_n \int_a^b f_n(x)\,dx$ — analogo al precedente ma nell'ipotesi di conv. unif.

Serie di potenze

È la serie di funzioni: di punto iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ e coefficienti $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots$ con $(a_{n-1})_n$ successione NUMERICA.

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \dots + a_{n-1}(x-x_0)^{n-1} + \dots$$ generata da $(a_{n-1}(x-x_0)^{n-1})_n$

converge verso a_0 se $\bar{x} = x_0$; se $x_0 = 0$ e $a_i = 1$ $\forall i$ si ottiene la serie geometrica (conv. in $]-1,1[$)

Lemma: $\sum_n a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}$ conv. in $\bar{x} \neq x_0 \Rightarrow$ conv. in $]x_0-h, x_0+h[$, $h = |\bar{x}-x_0|$ e unif in ogni compatto contenuto

possiamo definire $\rho = \sup \{|\bar{x}-x_0|, \bar{x} \in X\}$ con X insieme dei punti in cui la serie converge

- $\rho = 0 \Leftrightarrow \sum_n a_{n-1}(x-x_0)^n$ conv. solo in x_0
- $\rho = +\infty \Leftrightarrow \sum_n$ " conv. ass $\forall x \in \mathbb{R}$, unif $\forall$ compatto
- $\rho \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sum_n$ " conv. ass in $\underbrace{]x_0-\rho, x_0+\rho[}_{I_\rho}$, unif $\forall [a,b] \subseteq I_\rho$, NON conv. all'esterno.

Th. Cauchy-Hadamard

Se $\exists \lim_n \sqrt[n]{a_n} = l$, con a_n succ. dei coeff. della serie di pot., allora $\rho = 1/l$

Dim

$$\sqrt[n]{|a_n| \cdot |x-x_0|^n} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x-x_0| \Rightarrow \lim_n \sqrt[n]{|a_n||x-x_0|^n} = l|x-x_0| \begin{cases} l = 0 & \text{conv. } \forall x \\ l = \pm\infty & \text{conv} \Leftrightarrow x = x_0 \\ l \in \mathbb{R} & \text{conv.} \Leftrightarrow |x-x_0| \leq 1/l \end{cases}$$

Th. D'Alembert

Se $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, a_n succ. coeff. serie pot, allora $\rho = 1/l$ — Dim analoga con crit. rapporto

OSS:

- Essendo generate da succ. di polinomi – continue – la somma di una serie di pot. è continua in $\mathring{I}_\rho$
- Per il Th. int. termine a termine, applicabile $\forall [a,b] \subseteq I_\rho$ ($\rho > 0$),

$$f = \int_a^b f(x)\,dx = \sum_n \int_a^b a_{n-1}(x-x_0)^{n-1}\,dx = a_0(b-a) + a_1\left[\frac{(x-x_0)^2}{2}\right]_a^b + \dots$$

analogamente, per il T. der. termine/termine:

$$a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$
$$\Downarrow D$$
$$a_1 + 2a_2(x-x_0) + \ldots + n a_n (x-x_0)^{n-1} + \ldots$$

Queste tre serie sono serie di potenze di punto iniziale x_0 che hanno lo stesso ρ

Applicando Cauchy-Hadamard:

$$\lim_n \sqrt[n]{n|a_n|} = \ell = \lim_n \sqrt{|a_n|}$$
$$\underset{1}{\swarrow}$$

Dunque ogni serie di pot. con $\rho > 0$ si può derivare termine a termine in $\mathring{I}_\rho$, e la somma f è derivabile, con:

$$f' = \sum_n n\, a_n (x-x_0)^{n-1}$$

Da ciò segue, procedendo iterativamente, che $f \in C^\infty(\mathring{I}_\rho)$ se $\rho > 0$

Sapendo che $f^{(n)}(x_0) = n!\, a_n, \ldots, f(x_0) = a_0$, allora si ha che, $\forall n$, $a_n = \frac{f^{n}(x_0)}{n!}$

Se una serie di potenze ammette somma, i suoi coefficienti sono necessariamente i valori di somma/derivate calcolati in x_0 e divise per il rispettivo indice fattoriale $\Longrightarrow$ una serie di pot. dotata di somma ha coeff. univoc. determinati.

Sviluppo in
Serie di Taylor di p.to. iniz. x_0

Sia $f \in C^\infty(I)$, $I \subseteq \mathbb{R}$; sia $x_0 \in \mathring{I}$. Si definisce serie di Taylor di p. iniz. x_0:

$$f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + \ldots$$

E la somma n-ma della serie coincide con il polinomio di Taylor di ordine $n-1$:

$S_n(x) = P_{n-1}(x)$ Poiché $f(x) = P_{n-1}(x) + \overbrace{o((x-x_0)^{n-1})}^{r_{n-1}(x)}$, f si dice sviluppabile in Serie di Taylor $\Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \forall x \in I$, $\longrightarrow$ $f(x) = \sum_n \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$

$\lim_n r_n(x) = 0$

EQUIVALENTI

$\exists$ una cond. suff:

Se $\exists k > 0 : |f^{(n)}(x)| \le k \; \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in I$, allora $\forall x \in \mathring{I}$ f è sviluppabile in serie di Taylor

Scaletta esercizi: Trova x_0

trova ρ; se $\rho > 0$ verifica cosa accade negli estremi di I_ρ

definisci I_ρ e dove converge la serie

Se x è in una funzione, si pone $[f(x)]^n = y^n$ e si lavora; ⚠ INS DEF.!