

# Meccanica Razionale

prof.ssa Addolorata MARASCO

Ing. Edile-Architettura 2020/2021

Appunti di  
Riccardo Maria POLIDORO  
riccardo.polidoro.org

Lo studio della Meccanica è suddiviso in:

- Cinematica: Studio del moto a prescindere dalle cause.
- Statica: Studio dell'equilibrio per l'azione di determinati agenti.
- Dinamica: Studio del moto sotto l'azione di determinate cause.

I sistemi fisici di cui si occupa la Meccanica sono raggruppabili in modelli, che possono essere a loro volta divisi in:

## Modelli Discreti

- Punto materiale
- Sistemi di Punti Materiali

## Modelli Continui

- Corpi rigidi
- Corpi deformabili

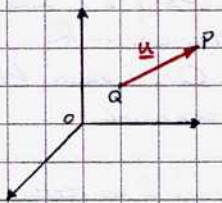
## Richiami di Algebra Vettoriale

Vettore: Un qualunque elemento di uno spazio vettoriale.

Principalmente, ci occuperemo di vettori numerici, definiti in base a:

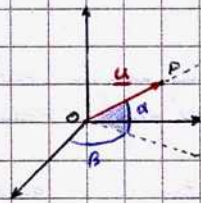
- modulo
  - direzione
  - verso
- direzione orientata

Ovviamente, nel caso di vettori liberi, tutti i vettori con stesso modulo, direzione e verso rappresentano uno stesso vettore libero.



In simboli

- $\underline{u} = P - Q$
- $\underline{u} = \underline{r}_{Q/P}$
- $\underline{u} = \overline{QP}$



In simboli

- $\underline{u} = P - O$
- $\underline{u} = \underline{r}_P$
- $\underline{u} = \overline{OP}$

⇒ Questo è molto simbolico: rende evidente che un vettore "trasla" un punto O in un punto P. Tale notazione è stata introdotta da W.R. Hamilton, è utile per

rendere evidente il diverso ruolo degli estremi del segmento orientato, ma in termini algebrici non ha senso parlare di "sottrazione di due punti".

modulo: Simboli:  $|\underline{u}|$ ,  $u$ ,  $|QP|$       versore:  $\underline{u}$ :  $|\underline{u}|=1$  (vettore di modulo 1)

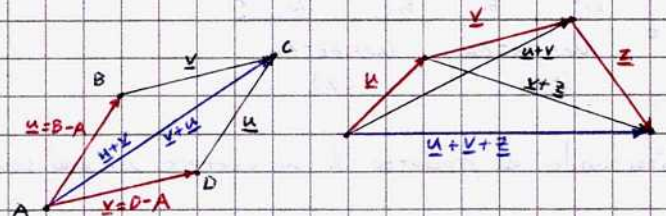
## Operazioni tra vettori

Nello spazio ordinario a 3 dimensioni si introducono quattro operazioni, di cui verranno richiamate le proprietà essenziali.

### Somma tra vettori:

- commutativa:  $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$
- associativa:  $\underline{u} + \underline{v} + \underline{z} = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{z} = \underline{u} + (\underline{v} + \underline{z})$

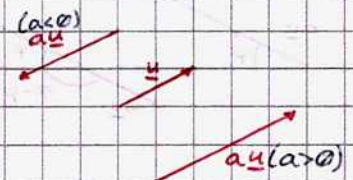
∃ l'elemento neutro:  $\underline{u} + \underline{0} = \underline{0} + \underline{u} = \underline{u}$



### Prodotto per uno scalare

$\forall a \in \mathbb{R}$ ,  $a\underline{u}$ :  $|a\underline{u}| = |a| |\underline{u}| = |a| u$

equivale se  $a > 0$   
ad  $\underline{u}$

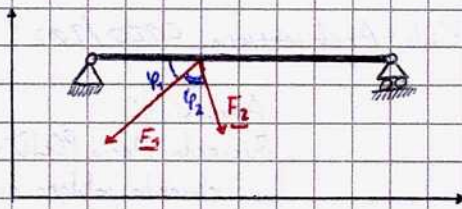


Da qui si determina l'esistenza di: Vettore opposto  $-\underline{u} = -1\underline{u}$ :  $\underline{u} - \underline{u} = \underline{0}$

Vettore differenza:  $\underline{u} - \underline{v} = \underline{u} + (-\underline{v})$

versore  $\underline{u} = \underline{u}/u$ ;  $\underline{u} = u \cdot \text{versore } \underline{u}$

Esempio: Si determini il vettore  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  sapendo che  $F_1 = 15\text{N}$ ,  $F_2 = 10\text{N}$ ,  $\varphi_1 = \pi/4$ ,  $\varphi_2 = \pi/3$



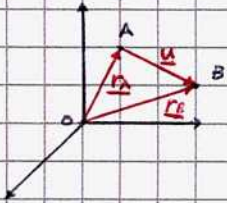
Il modulo può essere calcolato con il Teorema di Carnot:

$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad \alpha = \pi - \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}$$

dalla regola del parallelogramma

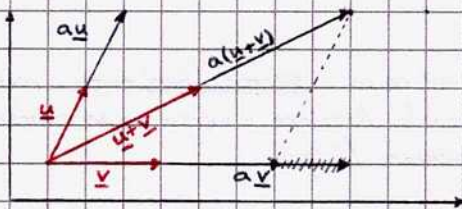
La direzione sarà invece identificata tramite il Teorema dei Seni:  $\frac{F}{\sin \alpha} = \frac{F_2}{\sin \varphi} \Leftrightarrow \sin \varphi = \frac{F_2 \sin \alpha}{F}$

Richiamiamo ora la notazione dei raggi vettoriali (nati dallo studio di Fisica Generale come vettori posizione), spesso usata nelle operazioni (soprattutto la somma di vettori).



Si osserva che:  $\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{u}$ ;  $\vec{u} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ ;  $B = A + u$  (contenuta nella notazione di Hamilton)

Ritornando al prodotto di un vettore per uno scalare, identifichiamo alcune proprietà:



$$a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}; \quad (a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$$

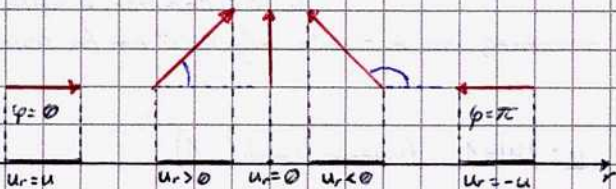
$$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$$

Si ricorda che lo spazio ordinario  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$  è uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ .

Ciò avviene perché esiste una corrispondenza biunivoca tra la stella di vettori uscenti da O e i punti dello spazio tridimensionale, formando uno spazio affine nel quale è possibile effettuare le operazioni.

Componente di un vettore secondo una retta orientata:

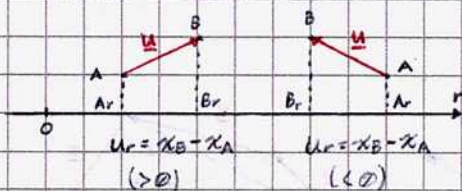
ovvero Componente Ortogonale di un vettore



Come intuibile dal grafico, la componente ortogonale è uno scalare del tipo

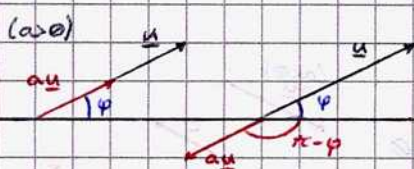
$$u_r = |u| \cos \varphi \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Se fa  $\Delta$  tizezi: Se il verso della retta orientata cambia, si invertono le relazioni:



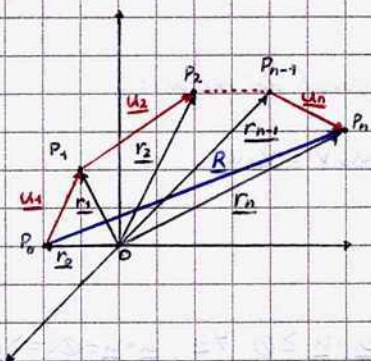
$$u_r = B_r - A_r$$

Ritornando al prodotto di un vettore per uno scalare, risulta dunque che:



$$(a\vec{u})_r = a u_r$$

Consideriamo ora un insieme di  $n$  vettori liberi, calcolando il risultante:



$$S = \{ \underline{u}_i, i = 1, \dots, n \}; \underline{u}_1 = \underline{r}_1 - \underline{r}_0, \dots, \underline{u}_n = \underline{r}_n - \underline{r}_{n-1}$$

Risultante:  $\underline{R} = \underline{u}_1 + \dots + \underline{u}_n = \sum_{i=1}^n \underline{u}_i = \underline{r}_n - \underline{r}_0$  (gli intermedi si elidono!)

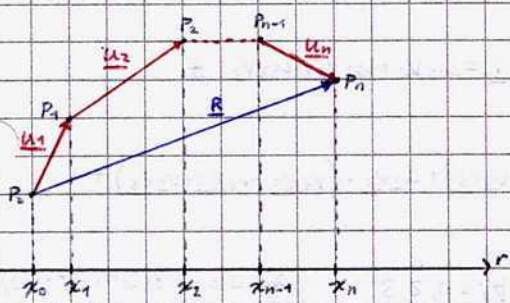
Analogamente, si osserva che:  $P_1 = P_0 + \underline{u}_1, \dots, P_n = P_{n-1} + \underline{u}_n \Rightarrow \underline{R} = P_n - P_0$

Se  $P_0 = O \Rightarrow \underline{R} = \underline{r}_n$ , Se  $P_0 = P_n \Rightarrow \underline{R} = O$

Ragionando sulle componenti ortogonali:

$$\underline{R}_r = \left( \sum_{i=1}^n \underline{u}_i \right)_r = \sum_{i=1}^n (\underline{u}_i)_r$$

Essendo  $(\underline{u}_i)_r = x_i - x_{i-1}$ ,  $\sum_{i=1}^n (\underline{u}_i)_r = x_n - x_0$



Uno dei principali modi di rappresentare un vettore è però attraverso le sue componenti cartesiane: introducendo nello spazio ordinario un sistema di coordinate cartesiane ortogonali ed indicando con  $\underline{e}_1, \underline{e}_2$  ed  $\underline{e}_3$  i versori dei tre assi coordinati, un vettore potrà essere espresso con la seguente notazione (nel grafico):

$$\underline{u} = \underline{r}_0 = \underline{r}_1 + \underline{r}_2 + \underline{r}_3, \text{ con } \underline{r}_i = x_i \underline{e}_i$$

$$u_i = x_i, i = 1, 2, 3; \underline{u} = x_1 \underline{e}_1 + x_2 \underline{e}_2 + x_3 \underline{e}_3$$

Dunque, le componenti cartesiane di  $\underline{u}$  nel riferimento cartesiano (non necessariamente ortogonale) sono:

$$x_1 \equiv u_1, x_2 \equiv u_2, x_3 \equiv u_3$$

Da ciò si ha la determinazione univoca del vettore.

Dimostriamo dunque che le componenti cartesiane di un vettore lo individuano univocamente:

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$$

$$\underline{u} = \underline{v} \iff (u_1 - v_1) \underline{e}_1 + (u_2 - v_2) \underline{e}_2 + (u_3 - v_3) \underline{e}_3 = \underline{0}$$

Essendo una combinazione lineare di versori linearmente indipendenti, ciò avviene se e soltanto se:

$$(u_1 - v_1) = 0; (u_2 - v_2) = 0; (u_3 - v_3) = 0 \text{ e, dunque:}$$

$$u_1 = v_1; u_2 = v_2; u_3 = v_3 \text{ QED}$$

In un sistema cartesiano:

$$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3; |\underline{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Definiamo ora i coseni direttori, ovvero i coseni degli angoli convessi che la retta su cui giace il vettore forma con gli assi cartesiani:

$$\text{vers}(\underline{u}) = \frac{u_1}{u} \underline{e}_1 + \frac{u_2}{u} \underline{e}_2 + \frac{u_3}{u} \underline{e}_3 \Rightarrow \cos d_i = \frac{u_i}{u}, i = 1, 2, 3 \text{ coseni direttori}$$

(versore con direzione di  $\underline{u}$ )

Ne segue che  $\sum_{i=1}^3 \cos^2 d_i = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{u_i}{u} \right)^2 = \frac{1}{u^2} \sum_{i=1}^3 u_i^2 = 1$

## Prodotto Scalare

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = uv \cos \varphi, \quad \varphi \in [0, \pi]$$

Osserviamo che, ragionando sulle componenti ortogonali dei vettori:

$$u_v = u \cos \varphi, \quad v_u = v \cos \varphi \Rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = u_v v = v_u u$$

Da ciò si ottiene che:  $u_r = \underline{u} \cdot \underline{r}$

Proprietà:  $\underline{u} \cdot \underline{u} = u^2$ ;  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0 \Leftrightarrow \textcircled{0} (\underline{u} \perp \underline{v}) \textcircled{0} (u=0 \vee v=0)$ ;  $\underline{u} \cdot \underline{u} \geq 0 \quad \forall \underline{u}$ ;  $\underline{u} \cdot \underline{u} = 0 \Leftrightarrow \underline{u} = \textcircled{0}$

•  $\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot \underline{u}$

•  $(a\underline{u}) \cdot \underline{v} = a(\underline{u} \cdot \underline{v}) = \underline{u} \cdot (a\underline{v}), \quad a \in \mathbb{R}$

•  $(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \cdot \underline{v} = \underline{u}_1 \cdot \underline{v} + \underline{u}_2 \cdot \underline{v} \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i \underline{u}_i \right) \cdot \left( \sum_{j=1}^m b_j \underline{v}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \underline{u}_i \cdot \underline{v}_j$

Inoltre,  $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ ;  $\begin{matrix} \underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3 \\ \underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3 \end{matrix} \rightarrow \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$  \*

\*:  $(u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3) \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3) = u_1 \underline{e}_1 \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3) + u_2 \underline{e}_2 \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3) + u_3 \underline{e}_3 \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

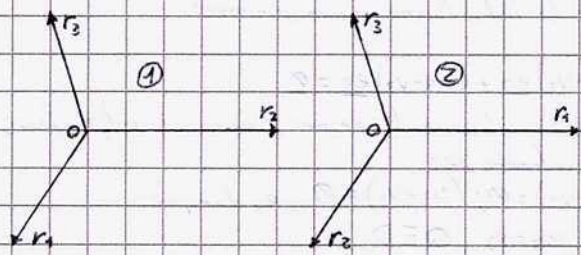
$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{v} \Leftrightarrow \underline{u} = \textcircled{0}$ ;  $\underline{u} \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall \underline{v} \Leftrightarrow \underline{u} \cdot \underline{e}_i = 0, \quad \forall i = 1, 2, 3$

$\textcircled{\text{Dim}} \underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + \dots$   
 $\Rightarrow$  banale

$\underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{u} \cdot (v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3) = v_1 \underline{u} \cdot \underline{e}_1 + v_2 \underline{u} \cdot \underline{e}_2 + v_3 \underline{u} \cdot \underline{e}_3 = 0$

## Prodotto Vettoriale

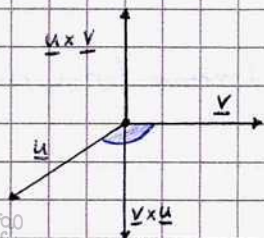
Per definire il prodotto vettoriale e poter dunque operare con esso, occorrerà definire le terne di assi orientati (non necessariamente ortogonali):



Una terna di assi orientati  $\textcircled{0} \textcircled{1} \textcircled{2} \textcircled{3} \textcircled{0}$   $\underline{r}_1, \underline{r}_2, \underline{r}_3$  si dice **levogira** se per sovrapporre l'asse  $\underline{r}_1$  all'asse  $\underline{r}_2$  descrivendo un angolo  $\varphi \leq \pi$  è necessaria una rotazione **levogira** attorno all'asse  $\underline{r}_3$ . Viceversa, si dice **destrogiro**.

Il prodotto vettoriale tra due vettori (che possono essere sempre considerati complanari) determina un "vettore", di cui identifichiamo di seguito modulo, direzione e verso:

Modulo:  $|\underline{u} \times \underline{v}| = uv \sin \varphi$ ; Direzione normale al piano individuato da  $\underline{u}, \underline{v}$ ; Verso: tale che  $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{u} \times \underline{v})$  sia **levogira**.



Proprietà: •  $\underline{v} \times \underline{u} = -\underline{u} \times \underline{v}$

•  $\underline{u} \times \underline{v} = \textcircled{0} \Leftrightarrow \underline{u} \parallel \underline{v} \text{ (con } \underline{u}, \underline{v} \neq \textcircled{0})$

•  $(a\underline{u}) \times \underline{v} = a(\underline{u} \times \underline{v}) = \underline{u} \times (a\underline{v}), \quad a \in \mathbb{R}$

•  $(\underline{u}_1 + \underline{u}_2) \times \underline{v} = \underline{u}_1 \times \underline{v} + \underline{u}_2 \times \underline{v} \Rightarrow \left( \sum_{i=1}^n a_i \underline{u}_i \right) \times \left( \sum_{j=1}^m b_j \underline{v}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i b_j \underline{u}_i \times \underline{v}_j$

Data la terna  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  levogira:  $\begin{cases} \underline{e}_i \times \underline{e}_i = \textcircled{0}, & i=1,2,3 \\ \underline{e}_1 \times \underline{e}_2 = \underline{e}_3; & \underline{e}_2 \times \underline{e}_3 = \underline{e}_1; & \underline{e}_3 \times \underline{e}_1 = \underline{e}_2 \end{cases}$

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$   
 $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$

$\underline{u} \times \underline{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2) \underline{e}_1 - (u_1 v_3 - u_3 v_1) \underline{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \underline{e}_3$  Infatti:

$\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \underline{e}_3$

Simbolo di Levi-Civita: del matematico Tullio Levi-Civita, importante matematico e modello per Albert Einstein:

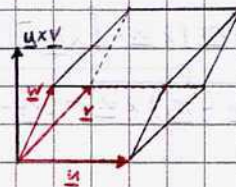
$$\epsilon_{i,j,k} = \begin{cases} 1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione pari, ad es. } (1,2,3), (2,3,1), (3,1,2) \\ -1, & \text{se } ijk \text{ è una permutazione dispari, ad es. } (3,2,1), (1,3,2), (2,1,3) \\ 0, & \text{se almeno due indici sono uguali} \end{cases}$$

rispetto alla "standard" (1,2,3)

Nel prodotto vettoriale,  $(\underline{u} \times \underline{v})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} u_j v_k$

Prodotto misto

$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{u} \times \underline{v}| |\underline{w}| \cos \theta = \pm \text{Volume del parallelepipedo di spigoli } \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$   
 ↳ - se la terna  $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$  è destrorsa



⚠ ovviamente si applica prima il prodotto vettoriale, se no l'operazione non ha senso.

proprietà ciclica:  $\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{v} \times \underline{w} \cdot \underline{u} = \underline{w} \times \underline{u} \cdot \underline{v}$

$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{u} = 0 \iff$  almeno uno è nullo oppure sono complanari.

$\underline{u} = u_1 \underline{e}_1 + u_2 \underline{e}_2 + u_3 \underline{e}_3$   
 $\underline{v} = v_1 \underline{e}_1 + v_2 \underline{e}_2 + v_3 \underline{e}_3$   
 $\underline{w} = w_1 \underline{e}_1 + w_2 \underline{e}_2 + w_3 \underline{e}_3$

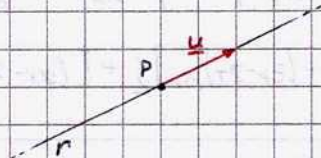
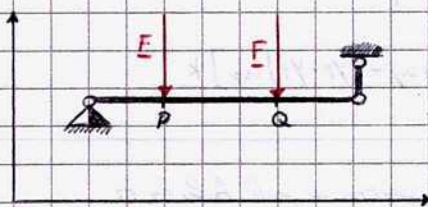
$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = (\underline{u} \times \underline{v})_1 w_1 + (\underline{u} \times \underline{v})_2 w_2 + (\underline{u} \times \underline{v})_3 w_3$

⇓  
 $\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = \sum_i \left[ \left( \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} u_j v_k \right) w_i \right]$

### Momento Polare

Nel parlare di momenti risulta fondamentale introdurre il concetto di vettori applicati. Un vettore applicato è una coppia  $(P, \underline{u})$ , dove P è un punto, detto punto di applicazione, e  $\underline{u}$  un vettore. Il concetto di vettore applicato ha in generale una grande importanza nello studio della Meccanica, poiché spesso bisogna tener conto del punto di applicazione delle forze, oltre al loro modulo, direzione, verso.



$(P, \underline{u})$  vettore applicato  
 P punto di applicazione  
 r retta di applicazione

Due vettori applicati, per essere uguali, devono avere lo stesso punto di applicazione:

$(P, \underline{u}) = (Q, \underline{v}) \iff P=Q, \underline{u}=\underline{v}$

Parliamo ora dei momenti. Il momento di un vettore applicato  $(P, \underline{u})$  rispetto a un polo T [polo O] è un vettore libero del tipo:

$\underline{M}_T = (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u} = (\underline{r}_P - \underline{r}_T) \times \underline{u}$  [rispetto ad O,  $\underline{M}_O = (\underline{P}-\underline{O}) \times \underline{u} = \underline{r}_P \times \underline{u}$ ]

• modulo pari all'area del parallelogramma tra i due vettori  $(\underline{P}-\underline{T})$  ed  $\underline{u}$ , coincidente con  $ab$ , dove b, detto braccio, è la distanza di T dalla retta di applicazione di  $\underline{u}$ .

• verso tale che i vettori  $(\underline{P}-\underline{T})$ ,  $\underline{u}$  e  $\underline{M}_T$  costituiscono una terna levogira.

• direzione normale al piano individuato da  $(\underline{P}-\underline{T})$  ed  $\underline{u}$

## Proprietà (utili nel calcolo!)

•  $\underline{M}_T = 0 \iff u = 0$  v Ter retta di applicazione di  $u$

• Legge di Variazione del momento al variare del polo:  $\underline{M}_T = \underline{M}_0 + u \times (T - O)$  In generale,  $\underline{M}_T = \underline{M}_S + u \times (T - S)$

Dim:  $\underline{M}_T = (r_P - r_T) \times u = \overbrace{r_P \times u} - \overbrace{r_T \times u} = \underline{M}_0 + u \times r_T$ ; [QED]

$$\begin{aligned} \underline{M}_T &= (r_P - r_T) \times u = [(r_P - r_S) - (r_T - r_S)] \times u = \\ &= \overbrace{(r_P - r_S) \times u} - \overbrace{(r_T - r_S) \times u} = \underline{M}_S + u \times (r_T - r_S) = \underline{M}_S + u \times (T - S) \quad \text{[QED]} \end{aligned}$$

• Il momento di  $(P, u)$  non varia se si sposta il polo lungo una retta parallela ad  $u$ :

$$\underline{M}_T = \underline{M}_S \quad \forall T, S \in s // u$$

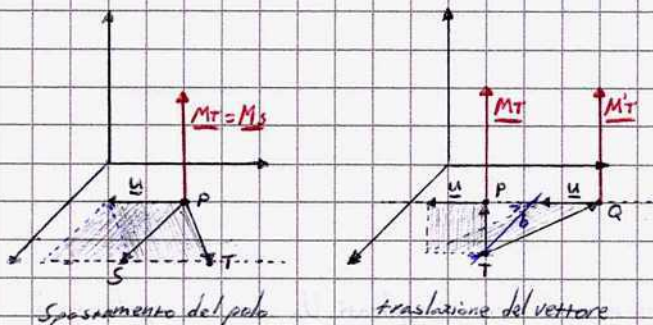
Dim:  $\underline{M}_T \stackrel{\text{def}}{=} (r_P - r_T) \times u \Rightarrow r_P \times u - r_T \times u \Rightarrow \underline{M}_0 + u \times r_T$  [..]

• Il momento non varia se "si trasla" il vettore  $u$  lungo la sua retta di applicazione:

$$\left. \begin{aligned} (P, u), (Q, u): P, Q \in r \text{ retta di appl. di } u \\ \underline{M}_T = (P - T) \times u, \underline{M}'_T = (Q - T) \times u \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{M}_T = \underline{M}'_T$$

Dim: È sufficiente dimostrare che  $\underline{M}_T - \underline{M}'_T = 0$ :

$$\underline{M}_T - \underline{M}'_T = (P - T) \times u - (Q - T) \times u = (P - Q) \times u = 0 \quad (PQ // u \text{ per Hr.})$$



Inoltre, dai grafici si può notare come

$$|\underline{M}_T| = |(P - T) \times u| = b|u| \quad b = \text{braccio}$$

Componenti cartesiane del momento del vettore applicato

$(P, u)$ ; T polo

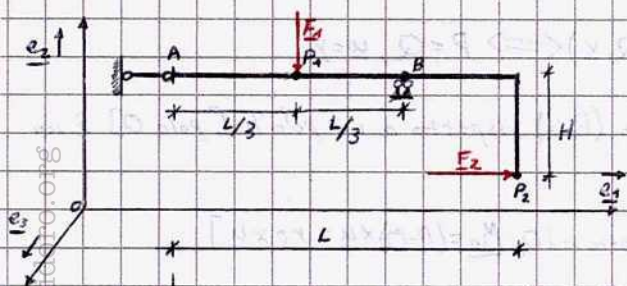
$$(P - T) = (x_P - x_T)\underline{i} + (y_P - y_T)\underline{j} + (z_P - z_T)\underline{k}; \quad (u = u_x\underline{i} + u_y\underline{j} + u_z\underline{k})$$

$$\underline{M}_T = (P - T) \times u = \begin{vmatrix} (y_P - y_T) & (z_P - z_T) \\ u_y & u_z \end{vmatrix} \underline{j} - \begin{vmatrix} (x_P - x_T) & (z_P - z_T) \\ u_x & u_z \end{vmatrix} \underline{j} + \begin{vmatrix} (x_P - x_T) & (y_P - y_T) \\ u_x & u_y \end{vmatrix} \underline{k} =$$

$$= [(y_P - y_T)u_z - (z_P - z_T)u_y] \underline{i} - [(x_P - x_T)u_z - (z_P - z_T)u_x] \underline{j} + [(x_P - x_T)u_y - (y_P - y_T)u_x] \underline{k}$$

## Esercizio

Determinare i momenti dei vettori applicati  $(P_1, F_1)$  e  $(P_2, F_2)$  rispetto ai poli A, B, P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>



$$(P_1, F_1): \underline{M}_A = (P_1 - A) \times F_1 = \frac{L}{3} \underline{e}_1 \times (-F_1 \underline{e}_2) = -\frac{L}{3} F_1 \underline{e}_3 \quad \underline{M}_{P_1} = 0$$

$$\underline{M}_B = (P_1 - B) \times F_1 = -\frac{L}{3} \underline{e}_1 \times (-F_1 \underline{e}_2) = \frac{L}{3} F_1 \underline{e}_3$$

$$\underline{M}_{P_2} = (P_1 - P_2) \times F_1 = \left(-\frac{2L}{3} \underline{e}_1 + H \underline{e}_3\right) \times (-F_1 \underline{e}_2) = \frac{2}{3} L F_1 \underline{e}_3$$

$$(P_2, F_2): \underline{M}_A = \underline{M}_{P_1} = \underline{M}_B = (P_2 - A) \times F_2 = (L \underline{e}_1 + H \underline{e}_3) \times (F_2 \underline{e}_1) = H F_2 \underline{e}_3$$

$$\underline{M}_{P_2} = 0$$

# Momento risultante di un sistema di $n$ vettori applicati rispetto a un determinato polo

$$S = \{(P_i, \underline{u}_i), i=1, \dots, n\} \quad (\text{sistema di } n \text{ vettori applicati in } n \text{ punti; possono anche essere applicati più vettori in uno stesso punto})$$

$$\underline{M}_T = \sum_{i=1}^n (P_i - T) \times \underline{u}_i = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i - \underline{r}_T) \times \underline{u}_i \quad \underline{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \underline{u}_i = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{u}_i$$

Per la legge di variazione del momento al variare del polo,  $\underline{M}_T = \underline{M}_O + \underline{R} \times (T - O)$ ;  $\underline{M}_T = \underline{M}_A + \underline{R} \times (T - Q)$

Dim:  $\underline{M}_T = \sum_{i=1}^n (\underline{r}_i \times \underline{u}_i - \underline{r}_T \times \underline{u}_i) = \sum_{i=1}^n \underline{r}_i \times \underline{u}_i + \left( \sum_{i=1}^n \underline{u}_i \right) \times \underline{r}_T = \underline{M}_O + \underline{R} \times \underline{r}_T = \underline{M}_O + \underline{R} \times (T - O)$  analoga per Q

## Proprietà

**Teorema del Varignon:** Il momento risultante di un sistema di vettori applicati in uno stesso punto coincide col momento del vettore risultante applicato in detto punto:

$$S = \{(P, \underline{u}_i), i=1, \dots, n\} \quad \underline{M}_T = \underline{R} \times (T - P) \quad \text{Dim. banale}$$

⚠ Il momento di un sistema di vettori applicati a risultante nulla non dipende dal polo e vale anche il viceversa:

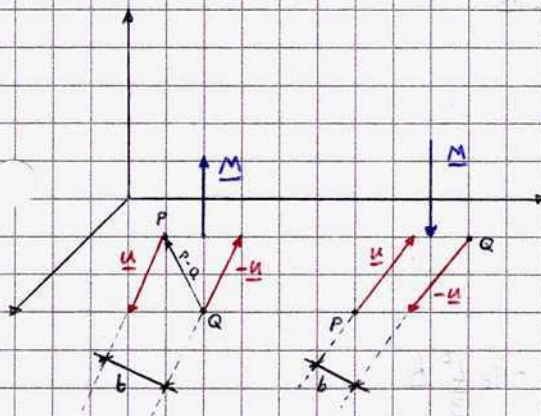
$$\underline{M}_T = \underline{M}_Q \quad \forall T, Q \Leftrightarrow \underline{R} = \underline{0}$$

## Dim

Se  $\underline{M}_T = \underline{M}_Q \quad \forall T, Q$ , allora (supponendo che  $\underline{M}_T = \underline{M}_Q + \underline{R} \times (T - Q)$ ) si osserva che  $\underline{R} \times (T - Q) = \underline{0} \quad \forall T, Q$  e quindi necessariamente  $\underline{R} = \underline{0}$ .

Viceversa, se  $\underline{R} = \underline{0}$  per la stessa legge ( $\underline{M}_T = \underline{M}_Q + \underline{R} \times (T - Q)$ ) si ha che  $\underline{M}_T = \underline{M}_Q \quad \forall T, Q$ .

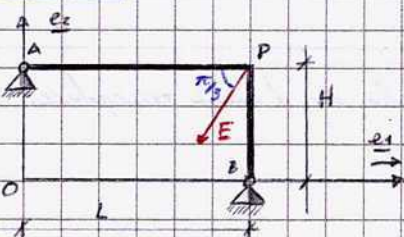
Quest'ultima proprietà risulta particolarmente utile in diversi casi come, ad esempio, le coppie:



$$S = \{(P, \underline{u}), (Q, -\underline{u})\} \quad \text{coppia}$$

$$\underline{M} = (\underline{r}_P - \underline{r}_Q) \times \underline{u}, \quad |\underline{M}| = b |\underline{u}|$$

## Esercizio



Calcolare il momento del vettore applicato  $(P, \underline{F})$  rispetto all'origine O.

L'unico vettore  $\underline{F}$  può essere considerato come il risultante di due vettori applicati in uno stesso punto  $\Rightarrow$  Applichiamo il **Teorema del Varignon**:

$$(P - O) = L \underline{e}_1 + H \underline{e}_2, \quad \underline{F} = -F \cos \frac{\pi}{3} \underline{e}_1 - F \sin \frac{\pi}{3} \underline{e}_2 = -\frac{F}{2} \underline{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \underline{e}_2$$

$$\underline{M}_O = (P - O) \times \underline{F} = (L \underline{e}_1 + H \underline{e}_2) \times \left( -\frac{F}{2} \underline{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \underline{e}_2 \right) = \left( \frac{FH}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} LF \right) \underline{e}_3$$

$$\bullet \{(P, \underline{F})\} \equiv \left\{ \left( P, -\frac{F}{2} \underline{e}_1 \right), \left( P, -\frac{\sqrt{3}}{2} F \underline{e}_2 \right) \right\}$$

$$\bullet \underline{M}_O = \underline{R} \times (O - P) = \left( -\frac{F}{2} \underline{e}_1 - \frac{\sqrt{3}}{2} F \underline{e}_2 \right) \times (-L \underline{e}_1 - H \underline{e}_2)$$

$\rightarrow$  relazioni  
 $\rightarrow$  leggi usate nella risoluzione dell'esercizio

# Campi Vettoriali

In questo caso, il sistema di vettori applicati è costituito da forze distribuite o continue, si instaura una corrispondenza biunivoca tra i punti dello spazio ordinario e i vettori applicati seguendo una legge funzionale per i vettori, dipendenti dalla posizione (ad es. il campo gravitazionale):

$$S = \{ (P, \underline{u}(P)), P \in \Omega \}$$

↳ dominio, solitamente  $\mathbb{R}^3$

Dunque, in sintesi, un campo vettoriale è composto da una applicazione che associa puntualmente un vettore.

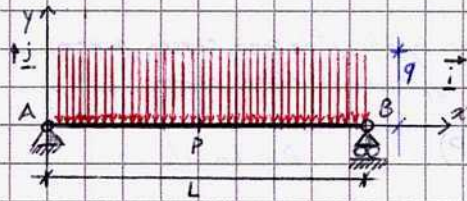
Nel caso in cui questo campo esprima un insieme di forze applicate a un oggetto, si parlerà di carichi distribuiti.

Per ogni carico distribuito,

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{u}(P) d\Omega$$

$$\underline{M}_T = \int_{\Omega} (P-T) \times \underline{u}(P) d\Omega = \int_{\Omega} (\underline{r}_P - \underline{r}_T) \times \underline{u}(P) d\Omega$$

Valgono sempre le leggi  $\underline{M}_T = \underline{M}_O + \underline{R} \times \underline{r}_{OT}$ ;  $\underline{M}_T = \underline{M}_C + \underline{R} \times (\underline{r}_T - \underline{r}_C)$

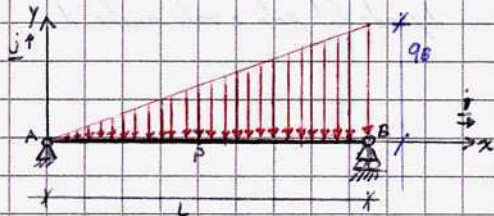


Carico uniforme

## Esempi

Carico Uniforme:  $\underline{u} = -q \underline{j}$ ,  $\Omega = AB$

$q =$  intensità della forza



Carico Triangolare

Carico Triangolare:  $\underline{u} = -\frac{q_B}{L} x \underline{j}$ ,  $\Omega = AB$

## Esercizio

Determiniamo il risultante e il momento risultante rispetto al polo A e al punto medio C del segmento AB dei carichi uniforme ① e triangolare ②.

$$\textcircled{1} \quad \underline{R} = \int_{\Omega} \underline{u}(P) d\Omega = -\int_0^L q \underline{j} dx = -qL \underline{j}$$

$$\underline{M}_A = \int_{\Omega} (P-A) \times \underline{u}(P) d\Omega = -\int_0^L x \underline{i} \times q \underline{j} dx = -q \underline{k} \int_0^L x dx = -q \frac{L^2}{2} \underline{k}$$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{R} \times (C-A) = -q \frac{L^2}{2} \underline{k} - qL \underline{j} \times \frac{L}{2} \underline{i} = -q \frac{L^2}{2} \underline{k} + q \frac{L^2}{2} \underline{k} = \underline{0}$$

cambio di Polo

$$\textcircled{2} \quad \underline{R} = \int_{\Omega} \underline{u}(P) d\Omega = -\int_0^L \frac{q_B}{L} x \underline{j} dx = -q_B \frac{L}{2} \underline{j}$$

$$\underline{M}_A = \int_{\Omega} (P-A) \times \underline{u}(P) d\Omega = -\int_0^L x \underline{i} \times \frac{q_B}{L} x \underline{j} dx = -\frac{q_B}{L} \underline{k} \int_0^L x^2 dx = -q_B \frac{L^2}{3} \underline{k}$$

$$\underline{M}_C = \underline{M}_A + \underline{R} \times (C-A) = -q_B \frac{L^2}{3} \underline{k} + q_B \frac{L}{2} \underline{j} \times \frac{L}{2} \underline{i} = -q_B \frac{L^2}{12} \underline{k}$$

## Esercizio

Determinare, se esiste, il luogo dei punti cui corrisponde momento nullo per il carico triangolare.

Dagli esercizi precedenti, sappiamo che:  $\underline{R} = -q_B \frac{L}{2} \underline{j}$   $\underline{M}_A = -q_B \frac{L^2}{3} \underline{k}$   $\underline{M}_C = -q_B \frac{L^2}{12} \underline{k}$

Imponiamo  $D = (x_D, y_D, z_D)$ :  $\underline{M}_D = \underline{0}$

$$\begin{aligned} \underline{M}_D &= \underline{M}_A + \underline{R} \times (D-A) = -q_B \frac{L^2}{3} \underline{k} + q_B \frac{L}{2} \underline{j} \times (x_D \underline{i} + y_D \underline{j} + z_D \underline{k}) = -q_B \frac{L^2}{3} \underline{k} + q_B \frac{x_D L}{2} \underline{k} - q_B \frac{z_D L}{2} \underline{i} \\ &= -q_B \frac{L}{2} z_D \underline{i} + q_B L \left( -\frac{L}{3} + x_D \frac{1}{2} \right) \underline{k} \end{aligned}$$

$$\underline{M}_D = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} z_D = 0 \\ x_D = \frac{2}{3} L \end{cases}$$

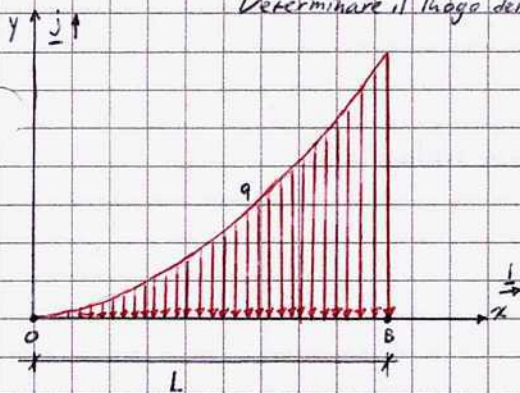
Nel carico uniforme,  $x = \frac{1}{2} L$

Dunque,  $\{ D \in \mathbb{R}^3 : \underline{M}_D = \underline{0} \} = \{ (\frac{2}{3} L, y, 0) : y \in \mathbb{R} \}$  retta parallela all'asse y passante per  $P(\frac{2}{3} L, 0, 0)$



## Esercizio

Determinare il luogo dei punti cui corrisponde momento nullo per il carico parabolico.



In un carico parabolico,  $\underline{u} = -kx^2\mathbf{j}$ ;  $\Omega = OB$

$$\underline{R} = -\int_0^L kx^2\mathbf{j} dx = -k\frac{L^3}{3}\mathbf{j}$$

$$\underline{M}_0 = -\int_0^L x\mathbf{i} \times kx^2\mathbf{j} dx = -k\frac{L^4}{4}\mathbf{k}$$

Imponiamo  $D = (x_0, y_0, z_0)$ :  $\underline{M}_D = \underline{0}$

$$\underline{M}_D = \underline{M}_0 + \underline{R} \times (D - O) = -k\frac{L^4}{4}\mathbf{k} - k\frac{L^3}{3}\mathbf{j} \times (x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}) = -k\frac{L^4}{4}\mathbf{k} + x_0k\frac{L^3}{3}\mathbf{k} - z_0k\frac{L^3}{3}\mathbf{i}$$

$$\underline{M}_D = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 = 0 \\ x_0 = \frac{3}{4}L \end{cases} \Rightarrow \{D \in \mathbb{R}^3 : \underline{M}_D = \underline{0}\} = \{(\frac{3}{4}L, y, 0) : y \in \mathbb{R}\}$$

## Momento Assiale

Sia  $S$  un sistema di vettori applicati di risultante  $\underline{R}$  ed  $r$  una retta orientata di versore  $\underline{e}$ , allora:

$$\underline{M}_T \cdot \underline{e} = \underline{M}_S \cdot \underline{e} \quad \forall T, S \in r \quad \text{componente ortogonale del momento rispetto all'asse } r$$

Dim

$$\underline{M}_T = \underline{M}_S + \underline{R} \times (T - S), \quad \forall T, S \Rightarrow \underline{M}_T \cdot \underline{e} = \underline{M}_S \cdot \underline{e} + \underline{R} \times (T - S) \cdot \underline{e} \quad \forall T, S \in r$$

$\rightarrow = 0$  perché  $\underline{R} \parallel \underline{e}$

Si definisce momento assiale la quantità SCALARE:

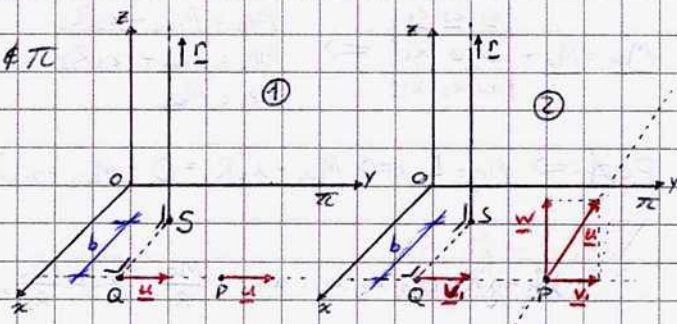
$$M_r = \underline{M}_T \cdot \underline{e} \quad \forall T \in r, \forall T \in s // r$$

È pari alla componente ortogonale del momento del sistema  $S$  rispetto ad  $r$  [ $s // r$ ], ed è invariante rispetto al polo su  $r$  [ $s // r$ ] per cui è valutato il momento.

Esempio: Sia  $S = \{(P, \underline{u})\}$  e si considerino i seguenti casi:

①  $r \perp \pi$ ,  $(P, \underline{u}) \in \pi$

②  $r \perp \pi$ ,  $(P, \underline{u}) \notin \pi$



① Sia  $S = r \cap \pi$ , la proiezione ortogonale di  $S$  sulla retta di applicazione di  $\underline{u}$  determina  $b = d(S, Q)$  (braccio).  
"Spostiamo"  $\underline{u}$  lungo la sua retta di applicazione, applicandolo in  $Q$ : il momento non cambia.

$$M_r = (Q - S) \times \underline{u} \cdot \underline{e} = \pm bu \quad [\pm] \text{ a seconda che } (Q, S), \underline{u}, \underline{e} \text{ sia una terna levogira [destragira] nell'esempio è +}$$

② Sia  $S = r \cap \pi$  e  $\underline{u} = \underline{v} + \underline{w}$ , con  $\underline{v} \perp \underline{e}$  e  $\underline{w} // \underline{e}$

$$M_r = \underline{M}_S \cdot \underline{e} = (P - S) \times \underline{u} \cdot \underline{e} = \underbrace{(P - S) \times \underline{v}}_{\neq 0} \cdot \underline{e} + \underbrace{(P - S) \times \underline{w}}_{=0} \cdot \underline{e} = (P - S) \times \underline{v} \cdot \underline{e} = \pm bv \quad [\pm] \dots \text{ levogira [destragira]}$$

In questo caso, il momento assiale di  $(P, \underline{u})$  coincide con quello di  $(P, \underline{v})$ , con  $\underline{v} \perp \underline{e}$ . Ciò accade per tutti i vettori che hanno come proiezione ortogonale sulla retta di applicazione di  $(P, \underline{v})$  il vettore  $\underline{v}$  stesso. La componente del vettore parallela all'asse non contribuisce al momento assiale.

# Invariante Scalare e Asse Centrale

Sia  $S$  un sistema di vettori applicati di risultante  $R$ .

$$\underline{M}_T = \underline{M}_S + R \times (T - S), \forall T, S \Rightarrow \underline{M}_T \cdot \underline{R} = \underline{M}_S \cdot \underline{R} \quad \forall T, S$$

→ invariante scalare ( $\in \mathbb{R}$ )

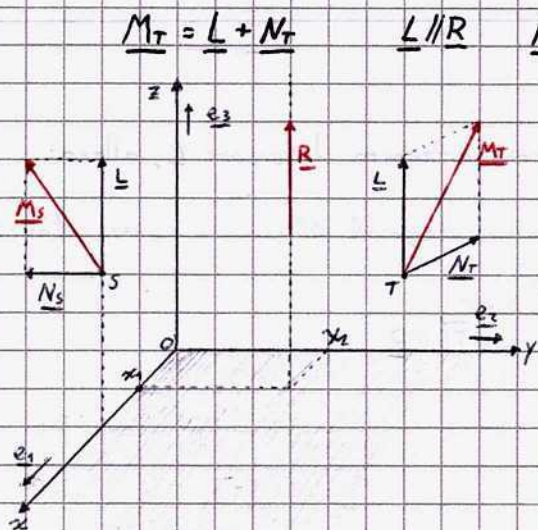
$I = \underline{M}_T \cdot \underline{R}$  è detto invariante scalare

Sia  $r$  una retta parallela ad  $\underline{R} \neq \mathbf{0}$

Ricordando che  $\underline{R} = R_r \underline{r}$ ,  $R_r = \pm R \neq 0$

$$\underline{M}_T \cdot \underline{R} = \underline{M}_S \cdot \underline{R}, \forall T, S \Leftrightarrow \underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r} \quad \forall T, S, \underline{r} \parallel \underline{R} \quad \left( \frac{\underline{R}}{R_r} = \underline{r} \right)$$

Osservazione: è costante la componente normale del momento lungo ogni retta parallela al risultante.



$\Delta$ :  $\underline{R}$  è parallelo a  $\underline{L}$ , non abbiamo altre informazioni

La componente  $\underline{L}$  del momento parallela al risultante non dipende dal polo.

La componente  $\underline{L}$  del momento, parallela al risultante, non dipende dunque dal polo: la variabilità del momento  $\underline{M}_T$  al variare del polo  $T$  è dovuta alla sua componente normale  $\underline{N}_T$ , inoltre  $\underline{M}_T$  cresce al crescere di  $\underline{N}_T$ , ovvero  $\underline{M}_T \nearrow \underline{N}_T$ .

Si definisce asse centrale  $\mathcal{A}$  il seguente insieme:

$$\mathcal{A} = \{P : |\underline{M}_P| = \min |\underline{M}_T|\} = \{P : \underline{N}_P = \mathbf{0}\} = \{P : \underline{M}_P = \underline{L}\}$$

L'asse centrale  $\mathcal{A}$  è una retta:

Dim

Siano  $r$  una retta parallela ad  $\underline{R}$  e  $Ox_1, Ox_2, Ox_3 : Ox_3 \parallel \underline{r}$  terna di assi ortogonali

$$\underline{M}_P = \underline{M}_O + R \times (P - O) \quad P = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\underline{M}_P = \underline{M}_O + \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 0 & 0 & R_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} M_{P_1} = M_{O_1} - x_2 R_3 \\ M_{P_2} = M_{O_2} + x_1 R_3 \\ M_{P_3} = M_{O_3} \end{cases}$$

$$P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \underline{M}_P = \underline{L} \Leftrightarrow M_{O_1} - x_2 R_3 = 0; M_{O_2} + x_1 R_3 = 0 \Leftrightarrow x_2 = \frac{M_{O_1}}{R_3}, x_1 = -\frac{M_{O_2}}{R_3}$$

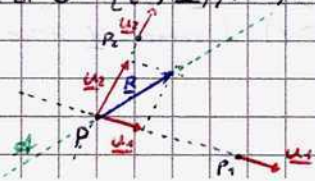
$$\mathcal{A} = \left\{ P = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{M_{O_2}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{O_1}}{R_3}, x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

L'asse centrale è una retta parallela  $Ox_3$  (e quindi ad  $\underline{R}$ ) che interseca il piano  $Ox_1, Ox_2$  nel punto  $\left(-\frac{M_{O_2}}{R_3}, \frac{M_{O_1}}{R_3}, 0\right)$

$\Delta$  Se  $\exists Q : \underline{M}_Q = \mathbf{0} \Rightarrow \mathcal{A} \equiv$  retta passante per  $Q$  e parallela ad  $\underline{R}$ , ciò perché  $|\underline{M}_Q| = 0$  è il modulo minimo possibile per il momento.

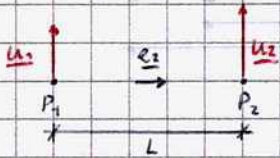
Esempi: L'asse centrale di  $S = \{(P, \underline{u})\}$  è la retta di applicazione di  $\underline{u}$

L'asse centrale di  $S = \{(P, \underline{u}_i), i=1, \dots, n\} : \underline{R} \neq \mathbf{0}$  è la retta per  $P$ , parallela ad  $\underline{R}$

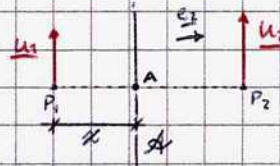


Esercizio

Determinare l'asse centrale del sistema  $S = \{(P_1, u_1), (P_2, u_2)\}$  con  $u_1$  e  $u_2$  paralleli e concordi:



$\bullet R = u_1 + u_2 = (u_1 + u_2) e_2$   
 $\bullet (P_1 - A) = -x e_2$        $\bullet (P_2 - A) = (L - x) e_2$

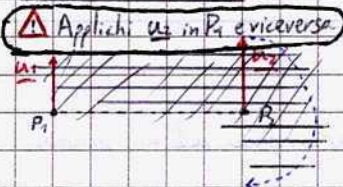


Imponiamo  $A \in \mathcal{A} : M_A = 0$ ; tale punto è detto centro del sistema

$A : M_A = 0 ; M_A = (P_1 - A) \times u_1 + (P_2 - A) \times u_2 = [-x u_1 + (L - x) u_2] e_3$  generico

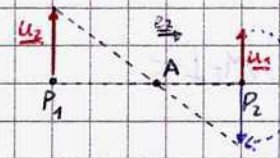
$M_A = 0 \iff -x u_1 + (L - x) u_2 = 0 \iff x u_1 = (L - x) u_2 \iff x_2 = L \frac{u_2}{u_1 + u_2}$

Metodo Grafico:

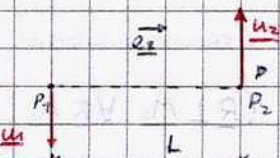


$\mathcal{A} = \{P = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, x_3 \in \mathbb{R}\}$      $\mathcal{A} \cap \pi = A = (0, L \frac{u_2}{u_1 + u_2}, 0)$

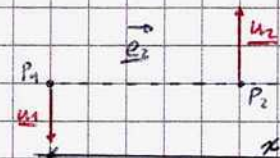
L'asse centrale è la retta parallela al risultante e passante per il punto A (centro) interno (in questo caso) al segmento  $P_1 P_2$ .



Determiniamo ora l'asse centrale del sistema  $S = \{(P_1, u_1), (P_2, u_2)\}$  nel caso in cui  $u_1$  e  $u_2$  siano paralleli e discordi:



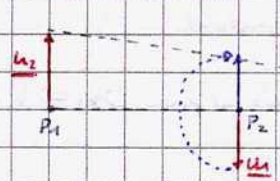
$\bullet R = u_1 + u_2 = (-u_1 + u_2) e_2$   
 $\bullet (P_1 - A) = -x e_2$        $\bullet (P_2 - A) = (L - x) e_2$



$A : M_A = 0 : M_A = (P_1 - A) \times u_1 + (P_2 - A) \times u_2 = [x u_1 + (L - x) u_2] e_3$

$M_A = 0 \iff x u_1 + (L - x) u_2 = 0 \iff x u_1 = (x - L) u_2 \iff x = L \frac{u_2}{u_2 - u_1}$

Metodo Grafico:



$\mathcal{A} = \{P = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, x_2 = L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, x_3 \in \mathbb{R}\}$

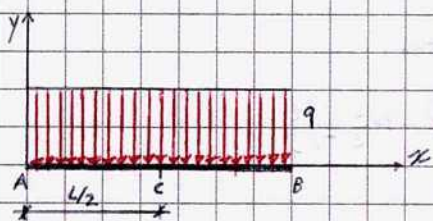
$\mathcal{A} \cap \pi = A = (0, L \frac{u_2}{u_2 - u_1}, 0)$

In questo caso, l'asse centrale è la retta parallela al risultante e passante per il punto A (centro), esterno al segmento  $P_1 P_2$ .

Determiniamo ora il centro e l'asse centrale di  $S = \{(P, u(P)), u(P) = -q j\}$

$\bullet R = \int_{\Omega} u(P) d\Omega = -qL j$        $\bullet M_A = \int_{\Omega} (P - A) \times u(P) d\Omega = -q \frac{L^2}{2} k$

$\bullet M_C = M_A + R \times (C - A)$        $\bullet (C - A) = x i$        $\bullet (B - C) = (L - x) i$

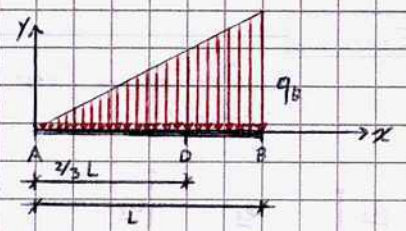


$C : M_C = 0 :$      $M_C = M_A + \begin{matrix} i & j & k \\ 0 & -qL & 0 \\ x & 0 & 0 \end{matrix} \iff \begin{matrix} M_{Cx} = 0 \\ M_{Cy} = 0 \\ M_{Cz} = -qL^2/2 + qLx \end{matrix} \iff M_C = 0 \iff x = \frac{L}{2}$

$\mathcal{A} = \{P = (x, y, z) : x = \frac{L}{2}, y \in \mathbb{R}, z = 0\}$

## Esercizi Assegnati

① Determinare il centro e l'asse centrale del carico triangolare in figura



Osservazione: l'invariante scalare può definirsi anche per sistemi a risultante nulla; esistono inoltre infiniti sistemi a risultante non nulla con invariante scalare nullo.

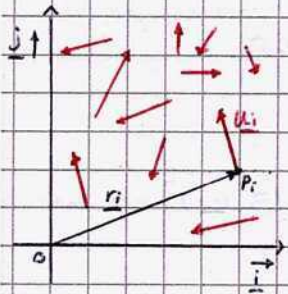
$$\mathcal{S} = \{(P, u), (P, -u)\}; R = \underline{0} \Rightarrow I = \underline{M_T} \cdot \underline{R} = 0$$

$$\mathcal{S} = \{(P, u)\}; M_P = \underline{0} \Rightarrow I = \underline{M_T} \cdot \underline{R} = 0$$

② Provare che l'invariante scalare dei carichi uniforme e triangolare è nullo.

## Sistemi piani e sistemi equilibrati

Un sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati si dice sistema piano se tutti i suoi vettori appartengono ad un piano.



$$\begin{aligned} \bullet \mathcal{S} &= \{(P_i, u_i) : P_i \in \pi, u_i \parallel \pi, i=1, \dots, n\} \\ \bullet \mathcal{S} &= \{(P, u(P)) : P \in \pi, u(P) \parallel \pi\} \end{aligned} \Rightarrow R \parallel \pi \Rightarrow \forall T \in \pi, \underline{M_T} \perp \pi$$

$$\bullet \underline{M_T} = \sum_{i=1}^n (P-T) \times u_i = \sum_{i=1}^n (r_i - r_T) \times u_i \quad \bullet \underline{M_T} = \int_{\Omega} (P-T) \times u(P) d\Omega \quad \text{carichi concentrati}$$

$$R = R_x i + R_y j \quad (\text{Sistema piano} \Rightarrow R_z = 0) \quad \underline{M}_0 = M_{0z} k \quad (M_{0x} = M_{0y} = 0), \quad I = 0 \quad (R \perp \underline{M}_0 \quad \forall R, \underline{M}_0)$$

⚠ In ogni sistema piano, l'invariante scalare è uguale a 0

Un sistema  $\mathcal{S}$  di vettori applicati si dice equilibrato o equivalente a 0 se:

$$R = \underline{0}, \quad \underline{M_T} = \underline{0} \quad \forall T$$

③D:  $R_x = R_y = R_z = 0; M_{0x} = M_{0y} = M_{0z} = 0 \Rightarrow 6$  incognite, occorrono 6 equazioni

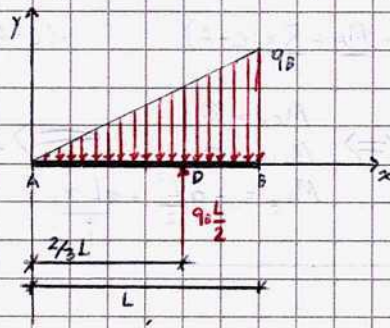
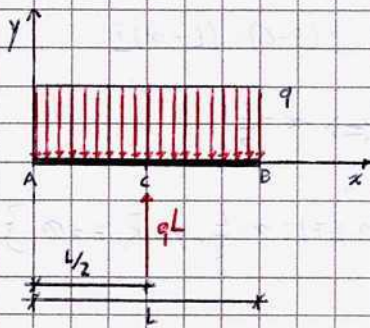
②D:  $R_x = R_y = 0; M_{0z} = 0$  Il momento ha necessariamente direzione ortogonale al piano  $Oxy \Rightarrow$  le incognite si riducono a 3.

Osservazione: Per un sistema  $\mathcal{S}$  a risultante nulla si ha  $\underline{M_T} = \underline{M}_0 \quad \forall T, Q$ , pertanto la condizione  $\underline{M_T} = \underline{0} \quad \forall T$  è verificata se  $\exists T: \underline{M_T} = \underline{0} \Rightarrow$  basta trovare un solo punto.

## Esempio

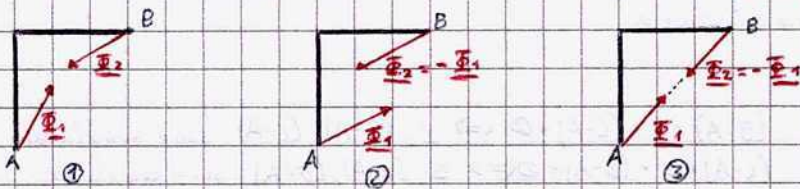
Il sistema  $\mathcal{S} = \{(P, u(P)), u(P) = -q_j\} \cup \{(C, qL j)\}$  è equilibrato.

Si può verificare che anche il sistema  $\mathcal{S} = \{(P, u(P)), u(P) = -\frac{q_0}{L} x j\} \cup \{(D, \frac{q_0 L}{2} j)\}$



Esercizi

Provare sotto quali condizioni il sistema  $S = \{(A, \underline{F}_1), (B, \underline{F}_2)\}$  è equilibrato.  
(di direzione e qualunque)

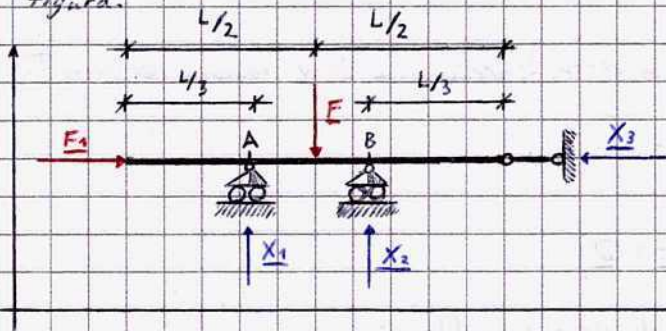


Sistema equilibrato  $\Rightarrow R = 0 \Leftrightarrow \underline{F}_1 + \underline{F}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{F}_1 = -\underline{F}_2$  (2)

$\Rightarrow M_A = 0 \Leftrightarrow (B-A) \times \underline{F}_2 = 0 \Leftrightarrow \underline{F}_2 \parallel (B-A)$  (3)

Da qui, il sistema è equilibrato se i due vettori  $(A, \underline{F}_1), (B, \underline{F}_2)$  formano una coppia di braccia nulle.

Determinare le reazioni dei vincoli  $X_1, X_2, X_3$  che rendano equilibrato il sistema di forze applicato alla trave in figura.



Nello studio della statica, come vedremo, le varie analisi avranno sempre a che fare con le forze attive e le forze vincolari.

Imponiamo la definizione di sistema equilibrato

$$\begin{cases} R_x = 0 \\ R_y = 0 \\ M_{A_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 - X_3 = 0 \\ -F + X_1 + X_2 = 0 \\ M_{A_2} = X_2 \cdot \frac{L}{3} - F \cdot \frac{L}{6} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow X_1 = X_2 = \frac{F}{2}, X_3 = F_1$

Ricapitolando: Sia  $S$  un sistema di vettori applicati di risultante  $\underline{R}$  ed  $r$  una retta orientata di versore  $\underline{r}$ :

$\underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r} \quad \forall T, S \in r$

momento assiale:  $\underline{M}_T = \underline{M}_T \cdot \underline{r} \quad \forall T \in r$   
( $\forall T \in s/r$ )

$\underline{M}_T = \underline{M}_S + \underline{R} \times (T-S), \forall T, S \Rightarrow \underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r} \quad \forall T, S$

invariante scalare:  $I = \underline{M}_T \cdot \underline{r}$

Sia  $r$  una retta parallela ad  $\underline{R} \neq 0$ :

$\underline{R} = R_r \underline{r}, R_r = \pm |\underline{R}| \neq 0$

$\underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r}, \forall T, S \Leftrightarrow \underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r}, \forall T, S \in \underline{R}$

È costante la componente normale del momento lungo ogni retta parallela al risultante; la componente  $\underline{L}$  del momento parallela al risultante non dipende dal polo.

$\underline{M}_T = \underline{L} + \underline{N}_T \quad \underline{L} \parallel \underline{R}, \underline{N}_T \perp \underline{R} \Rightarrow \underline{I} = \underline{M}_T \cdot \underline{r} = (\underline{L} + \underline{N}_T) \cdot \underline{r} = \underline{L} \cdot \underline{r}$

$\underline{M}_T \perp \underline{N}_T$

La componente ortogonale del <sup>momento del</sup> sistema  $S$  rispetto ad  $r$  ( $s/r$ ) è invariante rispetto al polo su  $r$  ( $s/r$ ) per cui è valutato il momento

asse centrale  $\mathcal{A} = \{P: |\underline{M}_P| = \min |\underline{M}_P|\} = \{P: \underline{M}_P = 0\} = \{P: \underline{M}_P = \underline{L}\}$   
è una retta.

Se  $\exists Q: \underline{M}_Q = 0, \mathcal{A} =$  retta  $\parallel \underline{R}$  passante per  $Q$ .

sistema piano: sistema di vettori applicati in cui tutti i vettori appartengono a un piano  $\Pi$ .

sistema equilibrato:  $\underline{R} = 0, \underline{M}_T = 0 \quad \forall T$

Un generico sistema di tre vettori è equilibrato se i tre vettori sono complanari e concorrenti in uno stesso punto, proprio o improprio.

$S = \{(A, \underline{u}), (B, \underline{v}), (C, \underline{w})\} \quad \underline{R} = 0, \underline{M}_T = 0 \quad \forall T$

Dim

$\underline{M}_A = (B-A) \times \underline{v} + (C-A) \times \underline{w} = 0 \Rightarrow (B-A) \times \underline{v} + (C-A) \times \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \underline{v}, (B-A), (C-A)$   
complanari

$(C-A) \times \underline{w} \cdot (B-A) = 0 \Leftrightarrow \underline{w}, (C-A), (B-A)$   
complanari

$\underline{M}_B = (A-B) \times \underline{u} + (C-B) \times \underline{w} = 0 \Rightarrow (A-B) \times \underline{u} + (C-B) \times \underline{w} = 0 \Leftrightarrow \underline{u}, (A-B), (C-B)$   
complanari

$\Rightarrow \underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in$  piano formato da  $A, B, C$ .

Se  $\underline{u} \parallel \underline{v} \parallel \underline{w}$ , punto improprio, se no

$\exists T$ : retta di applicazione di  $\underline{u} \cap$  retta di applicazione di  $\underline{v} = T$

Caratterizzazione di un generico sistema equilibrato di 3 vettori:

Il sistema  $S = \{A, u\}, \{B, v\}, \{C, w\}$  ( $R = 0, M_T = 0 \forall T$ ) è equilibrato se e soltanto se i tre vettori sono complanari e concorrenti in uno stesso punto, proprio o improprio.

Dim

$$M_A = (B-A) \times v + (C-A) \times w = 0$$

$(B-A) \times v \cdot (C-A) = 0 \Leftrightarrow v, (B-A), (C-A)$  sono complanari  
 $(C-A) \times w \cdot (B-A) = 0 \Leftrightarrow w, (C-A), (B-A)$  sono complanari  
 prodotto scalare per  $(B-A) \cdot (C-A)$  ad ambo i membri dell'equazione

$$M_B = (A-B) \times u + (C-B) \times w = 0$$

$(A-B) \times u \cdot (C-B) = 0 \Leftrightarrow u, (A-B), (C-B)$  sono complanari

Dunque,  $v, w, u$  appartengono tutti al piano individuato dai punti  $A, B, C$ .

Se i tre vettori sono paralleli tra loro, si incontrano in un punto improprio. Altrimenti, almeno due (ad esempio  $u, v$ ) concorrono in un punto  $T$ :

$$\exists T: \text{retta di appl. } u \cap \text{retta di appl. } v = T$$

$$M_T = (C-T) \times w = 0 \Leftrightarrow (C-T) \parallel w \Rightarrow \text{la retta di applicazione di } w \text{ concorre nel punto } T.$$

Osservazione: Dalla definizione di sistema equilibrato:

$$(R = 0, M_T = 0 \forall T) \Leftrightarrow (R = 0, \exists T: M_T = 0)$$

Cercheremo ora di definire altri criteri di individuazione di sistemi equilibrati.

Criterio 1 Un sistema  $S$  è equivalente a zero se esistono tre punti non allineati tali che i momenti polari siano nulli.

$$R = 0, M_T = 0 \forall T \Leftrightarrow \exists A, B, C \text{ non allineati: } M_A = M_B = M_C = 0$$

Dim

$$\Rightarrow \text{EVIDENTE: } S \text{ equilibrato per } H_p, M_T = 0 \forall T$$

$$\Leftarrow \begin{cases} M_A = M_B + R \times (A-B); M_A = M_B \Rightarrow R \times (A-B) = 0 \\ M_A = M_C + R \times (A-C); M_A = M_C \Rightarrow R \times (A-C) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R \parallel (A-B) \\ R \parallel (A-C) \end{cases} \xrightarrow{A, B, C \text{ non allineati}} R = 0$$

$$R = 0 \Rightarrow M_T = M_A = 0 \forall T$$

Criterio 2 Un sistema  $S$  è equivalente a zero se esistono due punti tali che i momenti polari siano nulli e sia nulla anche la componente del risultante rispetto alla retta per i due punti.

$$R = 0, M_T = 0 \forall T \Leftrightarrow \exists A, B: M_A = M_B = 0, R_s = 0 \text{ con } s \text{ retta per } AB$$

Dim

$$\Rightarrow \text{EVIDENTE: } R_s = 0 \Rightarrow R_s = 0 \forall s, M_T = 0 \forall T$$

$\Leftarrow$ : Sia  $s$  la retta per  $AB$  di versore  $\underline{s}$ :

$$R \cdot \underline{s} : R_s = 0 \Leftrightarrow R \perp \underline{s}$$

$$M_A = M_B + R \times (A-B), M_A = M_B \Leftrightarrow R \parallel (A-B) \Leftrightarrow R \parallel \underline{s} \quad \left. \begin{array}{l} R \perp \underline{s} \\ R \parallel \underline{s} \end{array} \right\} \Leftrightarrow R = 0$$

## Sistemi Equivalenti

Si considerino due sistemi  $S$  e  $S'$  di vettori applicati:

$$S = \{(P_i, u_i), i=1, \dots, n\} \quad [S = \{(P, u(P)) : P \in \Omega\}] \quad \underline{R}, \underline{M}_T \quad \forall T$$

$$S' = \{(Q_j, v_j), j=1, \dots, m\} \quad [S' = \{(Q, v(Q)) : Q \in \Omega'\}] \quad \underline{R}', \underline{M}'_T \quad \forall T$$

Utili per lo studio della STATICA:  
non importa il dettaglio delle forze,  
ma il risultante e il momento risultante

Cercheremo dunque di semplificare i  
sistemi di vettori degli esercizi trovando  
sistemi equivalenti di massimo 3 vettori

$$S \text{ e } S' \text{ si dicono equivalenti} \iff \underline{R} = \underline{R}', \underline{M}_T = \underline{M}'_T \quad \forall T$$

Analogamente ai sistemi equivalenti a  $\mathcal{O}$  si ha:

$$S \text{ e } S' \text{ equivalenti} \iff \underline{R} = \underline{R}', \exists \mathcal{O} : \underline{M}_\mathcal{O} = \underline{M}'_\mathcal{O}$$

Dim  
⊆ EVIDENTE

$$\begin{aligned} \supseteq: \begin{cases} \underline{M}_T = \underline{M}_\mathcal{O} + \underline{R} \times (T - \mathcal{O}) \\ \underline{M}'_T = \underline{M}'_\mathcal{O} + \underline{R}' \times (T - \mathcal{O}) \end{cases} &\Rightarrow \underline{M}_T - \underline{M}'_T = \underline{M}_\mathcal{O} - \underline{M}'_\mathcal{O} + (\underline{R} - \underline{R}') \times (T - \mathcal{O}), \quad \forall T \iff \\ &\stackrel{\underline{R} = \underline{R}'}{\iff} \underline{M}_T - \underline{M}'_T = \underline{M}_\mathcal{O} - \underline{M}'_\mathcal{O} = \mathcal{O}, \quad \forall T \end{aligned}$$

Osservazione: Se  $S$  ed  $S'$  sono equivalenti, allora il sistema  $S^* = \{(P_i, u_i), i=1, \dots, n\} \cup \{(Q_j, -v_j), j=1, \dots, m\}$  o, rispettivamente,  $S^* = \{(P, u(P)) : P \in \Omega\} \cup \{(P, -v(P)) : P \in \Omega'\}$ , è equivalente a zero.

Strutturando l'osservazione, si possono provare (analogamente a quanto fatto per i sistemi di vettori equivalenti a zero) i seguenti criteri di individuazione di sistemi equivalenti:

### Criterio 1

$$\underline{R} = \underline{R}', \underline{M}_T = \underline{M}'_T \quad \forall T \iff \exists A, B, C \text{ non allineati} : \underline{M}_A = \underline{M}'_A, \underline{M}_B = \underline{M}'_B, \underline{M}_C = \underline{M}'_C$$

### Criterio 2

$$\underline{R} = \underline{R}', \underline{M}_T = \underline{M}'_T \quad \forall T \iff \begin{aligned} &\exists A, B : \underline{M}_A = \underline{M}'_A, \underline{M}_B = \underline{M}'_B \\ &\underline{R}_S = \underline{R}'_S \text{ con } S \text{ retta per } A \text{ e } B \end{aligned}$$

⚠ Ogni sistema  $S$  di vettori applicati è equivalente a un sistema  $S'$  costituito da un vettore applicato ed una coppia.

$$[ \underline{R}' = \underline{R} + u - u = \underline{R}, \quad \underline{M}'_\mathcal{O} = (A - \mathcal{O}) \times u - (B - \mathcal{O}) \times u = \underline{M}_\mathcal{O} ]$$

Può sempre ridursi a 3 vettori

$$S : \underline{R}, \underline{M}_\mathcal{O}$$

$S$  ed  $S'$  equivalenti

$$S' = \{(\mathcal{O}, \underline{R}), (A, u), (B, -u)\} : (A, u), (B, -u) \text{ di momento } \underline{M}_\mathcal{O}$$

⚠ Un sistema  $S$  di vettori applicati di risultante  $\underline{R}$  e momento  $\underline{M}_\mathcal{O}$  è equivalente al proprio risultante (se  $\underline{R} \neq \mathcal{O}$ ) applicato in un punto  $P$  dell'asse centrale  $\mathcal{A}$  oppure (se  $\underline{R} = \mathcal{O}$ ) ad una coppia di momento  $\underline{M}_\mathcal{O}$  se e solo se  $\underline{I} = \mathcal{O}$

$$S \text{ è equivalente a } \begin{cases} \{(P, \underline{R})\} : P \in \mathcal{A} & (\underline{R} \neq \mathcal{O}) \\ \{(A, u), (B, -u)\} \text{ di momento } \underline{M}_\mathcal{O} & (\underline{R} = \mathcal{O}) \end{cases} \iff \underline{I} = \mathcal{O}$$

$S$  è equivalente a  $\begin{cases} \{(P, R)\} : P \in \mathcal{A} & (R \neq 0) \\ \{(A, u), (B, -u)\} \text{ di momento } M_0 & (R = 0) \end{cases} \iff I = 0$

Dim

$\Rightarrow$  EVIDENTE:  $I = M_P \cdot R = M_0 \cdot R \quad \forall O, P \Rightarrow I = 0$    
 (quindi)  $\begin{cases} 1: M_P = 0 \\ 2: R = 0 \end{cases}$

$\Leftarrow$   $R \neq 0 \Rightarrow \exists \mathcal{A} \Rightarrow \forall P \in \mathcal{A}, M_P \parallel R$    
 Esiste l'asse centrale e il momento di ogni suo punto è parallelo al risultante.

Inoltre,  $0 \neq I = M_P \cdot R = \pm M_P R \stackrel{R \neq 0}{\implies} M_P = 0 \Rightarrow S$  è equivalente a  $\{(P, R)\}$

[ $\pm$ ] se  $M_P$  ed  $R$  sono concordi [discordi]

$R = 0 \Rightarrow$  Una qualunque coppia di momento  $M_0$  è equivalente ad  $S$ .

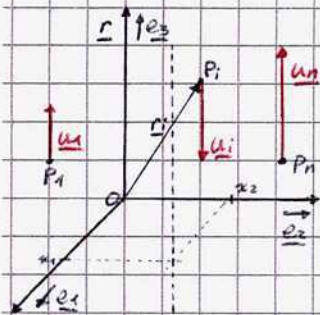
Esempio

$S = \{(P, u_i), i=1, \dots, n\}$ :   
 $\begin{cases} R = 0, M_P = 0 \Rightarrow S \text{ è equilibrato} \\ R \neq 0 \Rightarrow P \in \mathcal{A} \parallel R \Rightarrow S \text{ è equivalente a } (A, R) \quad A \in \mathcal{A} \end{cases}$

### Sistemi di Vettori Paralleli

Fondamentali! Molti campi vettoriali, come quello gravitazionale, sono assimilati a sistemi di vettori paralleli.

Un sistema di vettori paralleli è un sistema  $S$  di vettori applicati aventi tutti la stessa direzione (equiversi o no).  
 Come negli altri casi, valuteremo sistemi discreti, ma lo stesso ragionamento può essere fatto a sistemi di vettori distribuiti.



$S = \{(P_i, u_i) : u_i = f_i r, i=1, \dots, n\}$  ( $f_i = u_i, = \pm u_i$ )

$$R = \sum_{i=1}^n f_i r = f r, \quad f = \sum_{i=1}^n f_i = \sum_{i=1}^n u_i = R, = \pm R$$

$$M_0 = \sum_{i=1}^n r_i \times u_i = \sum_{i=1}^n r_i \times f_i r \Rightarrow M_{0i} \perp u_i \quad \forall i \Rightarrow I = 0$$

Essendo  $I = M_0 \cdot R = 0$ , si ha che un sistema di vettori paralleli è equivalente ad una coppia se  $R = 0$  oppure al proprio risultante applicato in un punto  $P$  dell'asse centrale se  $R \neq 0$ .

Supponiamo  $R \neq 0$ , in una terna  $Ox_1x_2x_3$  sia  $r = e_3$  e  $(P_i - O) = x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3$ . Allora,

$$M_0 = \sum_{i=1}^n (x_{i1}e_1 + x_{i2}e_2 + x_{i3}e_3) \times f_i e_3 = \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i e_1 - \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i e_2$$

$$R = \sum_{i=1}^n f_i e_3 = f e_3$$

Ricordando che  $\mathcal{A} = \{P = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = -\frac{M_{02}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{01}}{R_3}, x_3 \in \mathbb{R}\}$ , si ha:

$$\mathcal{A} = \{P = (x_1, x_2, x_3) : x_1 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i, x_2 = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Assegnato  $R$ , puoi sempre fissare una terna  $Ox_1x_2x_3$  tale che  $Ox_3 \parallel R$ , fissando successivamente il piano  $Ox_1, Ox_2$  tale che la terna sia levogira.

Possiamo dare ora una definizione più rigorosa del centro del sistema di vettori paralleli: esso è il punto  $C \in \mathcal{A}$  tale che la sua terza coordinata si ottenga analogamente alla scelta usuale delle prime due.

$$C = (x_{1c}, x_{2c}, x_{3c}) : x_{1c} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i1} f_i, x_{2c} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i2} f_i, x_{3c} = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n x_{i3} f_i$$

$$r_c = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i r_i = (C - O) = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i (P_i - O)$$



Nel caso di sistemi di vettori distribuiti:

$$S = \{(P, \underline{u}(P)) : \underline{u}(P) = f(P) \underline{r}, P \in \Omega\}$$

$$\underline{R} = \int_{\Omega} f(P) \underline{r} d\Omega = \underline{f}_R \underline{r} ; \underline{r}_c = \frac{1}{\underline{f}_R} \int_{\Omega} f(P) \underline{r} P d\Omega$$

$$(*) : S = \{(P_i, \underline{u}_i) : P_i \in \pi, \underline{u}_i // \pi, i=1, \dots, n\}, \pi = \{0 \times x_1 \times x_2 \Rightarrow x_3 = 0 \forall i \Rightarrow x_3_c = 0\}$$

$$S = \{(P_i, \underline{u}_i) : P_i \in \pi, \underline{u}_i // \pi, i=1, \dots, n\}, P_i \in s \forall i \Rightarrow C \in s$$

\* Vale ancora quanto visto per il centro nelle due dimensioni: se tutti i punti di applicazione dei vettori di un sistema giacciono su una stessa retta, anche il centro del sistema apparterrà a detta retta; lo stesso vale per un piano (punti di applicazione complanari) centro appartenente al piano da essi formato.

Osservazione: I due sistemi di vettori paralleli  $S$  ed  $S'$  di seguito hanno lo stesso centro:

$$S = \{(P_i, \underline{u}_i) : \underline{u}_i = f_i \underline{r}, i=1, \dots, n\}, \underline{r}_c = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i \underline{r}_i$$

$$S' = \{(P_i, \underline{u}_i') : \underline{u}_i' = a_i \underline{u}_i, i=1, \dots, n\}, \underline{r}_c' = \frac{1}{f'} \sum_{i=1}^n f_i' \underline{r}_i, (f' = \sum_{i=1}^n f_i')$$

$$\Rightarrow \underline{u}_i' = a_i \underline{u}_i = a_i f_i \underline{r} \equiv f_i' \underline{r} \Rightarrow f_i' = a_i f_i \Rightarrow f' = \sum_{i=1}^n a_i f_i = a f \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{r}_c' = \frac{1}{f'} \sum_{i=1}^n f_i' \underline{r}_i = \frac{1}{a f} \sum_{i=1}^n a_i f_i \underline{r}_i = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^n f_i \underline{r}_i = \underline{r}_c \quad \square$$

Dunque, se due sistemi di vettori paralleli si differenziano per un insieme di scalari, essi hanno lo stesso centro.

## Cinematica del Punto Materiale

Dopo aver definito tutti gli enti di base con cui lavoreremo, iniziamo ad entrare "nel vivo" della materia studiando la **cinematica**: essa si occupa in generale dei moti, indipendentemente dalle cause che li determinano; si parla di **geometria del moto**; si descrivono i possibili moti (sono moti effettivi solo se le forze agenti e le condizioni iniziali sono opportune), non c'è riferimento alle cause che determinano l'evoluzione (sia in condizioni dinamiche, ovvero di movimento, che in condizioni statiche, cioè di equilibrio) del sistema in esame; si ricorda che a parità di forze esistono infinite possibili evoluzioni, che sono identificate dalle condizioni iniziali, all'origine del moto (più avanti porremo un Problema di Cauchy, risolvendo l'equazione differenziale associata).

Cominceremo lo studio della cinematica partendo dal **punto materiale**: esso è un qualunque corpo le cui dimensioni si possono ritenere trascurabili rispetto all'ambiente in cui si evolve il sistema considerato. Associeremo a questo punto soltanto la massa, sarà dunque identificato da una coppia di tipo  $(P, m)$ . *punto-massa*

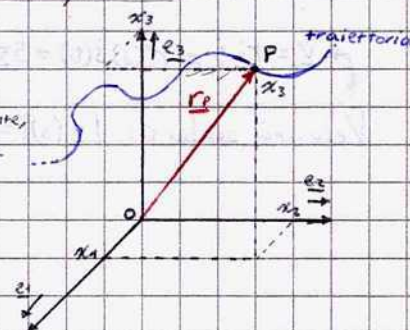
Per occuparci di cinematica, sarà necessario definire alcune grandezze; prima di poter parlare di posizione, velocità, accelerazione risulta fondamentale fissare un riferimento cartesiano (spesso ortonormale).

La **posizione** di un punto  $P$  è, ad ogni istante, individuata dal suo **raggio vettore**  $\underline{r}_P$  (vettore posizione). Risultati:

$$P = (x_1, x_2, x_3) : x_i = x_i(t) ; i=1, 2, 3 ; t \in \mathbb{R}$$

→ Equazioni della Traiettoria, ovvero del luogo dei punti descritto dal punto materiale nella sua evoluzione

→ Equazioni finite del moto del punto  $P$ : ad ogni istante, nota l'equazione  $x_i(t) \forall i=1, 2, 3$ , possiamo individuare la posizione di  $P$



$$\underline{r}_P = P - O \quad \underline{r}_P = \underline{r}_P(t) \quad \underline{r}_P = x_1(t) \underline{e}_1 + x_2(t) \underline{e}_2 + x_3(t) \underline{e}_3 \quad t \in \mathbb{R}$$

Dunque, risultano definite le equazioni finite del moto  $\underline{r}_P = \underline{r}_P(t)$   $x_i = \dot{x}_i(t)$   $i=1,2,3$   $t \in \mathbb{R}$

Non è superfluo premettere che nel prosieguo, a meno di diverso preavviso, le funzioni che utilizzeremo per modellizzare i fenomeni fisici di nostro interesse vanno considerate almeno biregolari e, dunque, derivabili almeno due volte.

Decidiamo dunque le equazioni finite del moto, ottenendo:

Velocità Vettoriale

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}}_P(t) = \dot{x}_1(t)\underline{e}_1 + \dot{x}_2(t)\underline{e}_2 + \dot{x}_3(t)\underline{e}_3$$

$$|\underline{v}_i| = \dot{x}_i, i=1,2,3$$

Segue le stesse regole di derivazione di funzioni scalari! (Per componenti)

Accelerazione Vettoriale

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}}_P(t) = \ddot{x}_1(t)\underline{e}_1 + \ddot{x}_2(t)\underline{e}_2 + \ddot{x}_3(t)\underline{e}_3$$

$$|a_i| = \ddot{x}_i, i=1,2,3$$

Il simbolo "•" indica una derivazione rispetto al tempo

Il vettore è derivabile  $\Rightarrow$  le sue componenti cartesiane sono derivabili

Traiettoria - parametro "ascissa curvilinea"

Tenteremo sempre di considerare le traiettorie, ovvero i luoghi dei punti occupati

dal punto P nel tempo, come curve biregolari, cioè derivabili due volte e, dunque, definire velocità e accelerazione.

È possibile parametrizzare la traiettoria del punto anche con parametri diversi dal tempo; in particolare viene molto utilizzata l'ascissa curvilinea, che consente di valutare gli aspetti intrinseci del moto; essa viene fissata da un punto di "origine"

$P_0$  e un verso dato alla traiettoria, e il suo valore assoluto esprime la lunghezza dell'arco di curva definito dal punto P e dal suddetto punto  $P_0$ .

In questo modo un punto della curva può essere determinato univocamente da  $s$

( $s$  = ascissa curvilinea); se il punto si muove  $s$  dipende da  $t$ . Quindi, il moto di

P risulta completamente descritto se si conosce la legge funzionale di P al

variare di  $s$  (traiettoria) e la legge oraria, che esprime  $s$  in funzione di

$t$ . La dipendenza di P da  $s$  equivale a quella del raggio vettore da  $s$ , poiché

$$\underline{r}_P = (P-O) = x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + x_3\underline{e}_3$$

$$\text{Equazione della Traiettoria: } \underline{r}(s) = x_1(s)\underline{e}_1 + x_2(s)\underline{e}_2 + x_3(s)\underline{e}_3$$

Osservando che  $s=s(t)$ , componendo ciò con l'equazione della traiettoria si ottiene la funzione del tempo:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(s(t))$$

$$\text{in termini scalari, } x_i(t) = x_i(s(t)) \quad i=1,2,3$$

$$\underline{r}_P = x_1(s(t))\underline{e}_1 + x_2(s(t))\underline{e}_2 + x_3(s(t))\underline{e}_3$$

È possibile dunque parametrizzare la curva come si preferisce, dandoci la possibilità di individuare le posizioni del punto in considerazione ma, per collegarci al moto in sé, è necessario sapere quando, in quale istante ogni posizione è occupata dal punto: è dunque necessario conoscere la legge oraria.

Consideriamo la derivata di  $\underline{r}$  rispetto ad  $s$ . Per definizione, risulta:

$$\underline{t}(s) = \underline{r}'(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(s+\Delta s) - \underline{r}(s)}{\Delta s}$$

Dalla figura in questa pagina, si osserva che  $\underline{r}'(s)$  è tangente alla traiettoria, con verso delle  $s$  crescenti.

Si può dimostrare che  $|\underline{t}(s)| = 1 \Rightarrow$  Il vettore  $\underline{t}$  (essendo un versore viene indicato senza  $(s)$ ) è detto versore della tangente principale.

Questo versore è molto importante, è impiegata ad esempio in una notevole espressione della velocità:

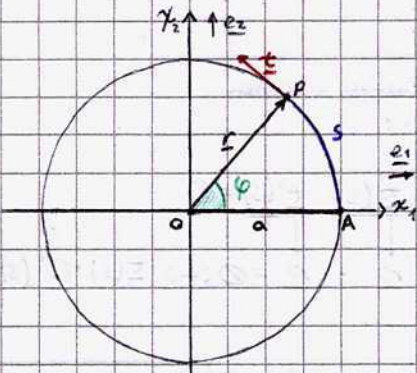
$$\underline{v} = \dot{\underline{r}}_P = \underline{r}'(s)\dot{s}(t) = \dot{s}\underline{t}^*$$

(Derivazione di  $\underline{r}(t) = \underline{r}(s(t))$  rispetto al tempo)

Velocità scalare:  $|\underline{v}(s)| = \dot{s}$ ,  $\dot{s}(t)$  vel. scalare

(rappresenta con  $\underline{v}$  vettoriale in  $*$ ), da qui si nota anche che la velocità vettoriale è sempre tangente alla traiettoria, inoltre sono separati direzione e intensità e, dunque, è possibile rappresentare con facilità analiticamente moti con direzione/modulo della velocità costante.

Esempio: Consideriamo un punto  $P$  che percorre la circonferenza posizionata nel piano  $Ox_1x_2$  di raggio  $a$  e centro nell'origine delle coordinate.



La circonferenza (traiettoria) ha equazioni parametriche:

$$x_1 = a \cos \varphi; \quad x_2 = a \sin \varphi; \quad x_3 = 0 \quad \text{traiettoria assegnata}$$

Poiché  $P$  è supposto in movimento, le sue coordinate saranno funzioni del tempo: dalle equazioni finite del moto si osserva che solo l'angolo  $\varphi$  può essere in funzione del tempo  $\Rightarrow$  la conoscenza di come varia l'angolo  $\varphi$  determina la variazione della posizione del punto  $P$  nel tempo sulla circonferenza.

Per fissare un'ascissa curvilinea, consideriamo come sua origine il punto  $A$ : in questo modo,  $s=0 \Leftrightarrow \varphi=0$ , e risulta:

$$s = a\varphi \Rightarrow x_1 = a \cos \frac{s}{a}; \quad x_2 = a \sin \frac{s}{a}; \quad x_3 = 0$$

In notazione vettoriale,  $\underline{r}_P(s) = a \cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 + a \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2$  che esprime, in particolare, l'equazione della traiettoria

Derivando rispetto ad  $s$ , si ottiene il vettore della tangente principale:

$$\underline{t}(s) = \underline{r}'_P(s) = -\sin \frac{s}{a} \underline{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \underline{e}_2$$

Osservazione:  $|\underline{t}(s)| = \sqrt{\sin^2 \frac{s}{a} + \cos^2 \frac{s}{a}} = 1$ ;  $\underline{t}(s) \cdot \underline{r}_P(s) = -a \sin \frac{s}{a} \cos \frac{s}{a} + a \sin \frac{s}{a} \cos \frac{s}{a} = 0$

Si osserva, dunque, che il vettore della tangente principale ha modulo unitario ed è tangente alla traiettoria, poiché è ortogonale al raggio vettore

Dunque, i metri di  $P$  sulla circonferenza si ottengono assegnando  $s$  in funzione del tempo; ciò equivale però ad assegnare la funzione  $\varphi(t)$ .

### Curvatura e Raggio di Curvatura

Consideriamo una curva qualsiasi, e indichiamo con  $\underline{t}(s)$  e  $\underline{t}(s+\Delta s)$  i vettori della tangente principale relativi a due punti della curva individuati rispettivamente da  $s(s)$  ed  $s(s+\Delta s)$ .

Denotiamo con  $\Delta\varphi$  l'angolo formato dalle rette di applicazione dei due vettori della tangente principale: tale angolo viene detto angolo di contingenza.

Si definisce curvatura, denotata con  $c(s)$ , la seguente quantità:

$$c(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \quad \text{Definiamo anche il raggio di curvatura: } R(s) = \frac{1}{c(s)}$$

### Esempi

• In una circonferenza di raggio  $a$ , risulta:

$$\Delta s = a\Delta\varphi \Rightarrow c(s) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{a} \Rightarrow R(s) = a$$

curvatura costante:  $\Delta\varphi/\Delta s$  costante perché legati da relazioni trigonometriche

• In una retta,  $\Delta\varphi=0 \Rightarrow c(s)=0, R(s)=\infty$

Queste grandezze sono utili per la definizione del triedro di Frénet, che ci permetterà di caratterizzare il moto di un punto in maniera efficace.

La curvatura interviene nell'accelerazione. Infatti, derivando rispetto al tempo la velocità espressa dalla formula  $v = r(s)\dot{s}(t) = \dot{s}t$ , e ricordando che il versore  $\underline{t}$  dipende dal tempo tramite  $s$ , si ottiene:

$$\underline{a}(s) = \ddot{s}(t)\underline{t} + \dot{s}^2 \underline{t}' = \ddot{s} \cdot \underline{t} + \dot{s}^2 \underline{t}'$$

Essendo  $\underline{t}$  un versore, si ha la relazione  $\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = 1$ ; derivando <sup>rispetto all'ascissa curvilinea</sup> otteniamo:

$$\underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = 1 \Rightarrow \underline{t}(s) \cdot \underline{t}'(s) + \underline{t}'(s) \cdot \underline{t}(s) = 2 \underline{t}(s) \cdot \underline{t}'(s) = 0 \Rightarrow \underline{t}(s) \cdot \underline{t}'(s) = 0$$

Ne segue che  $\underline{t}' = \underline{r}''$  è perpendicolare a  $\underline{t}$  ed orientato verso la concavità della curva; indicato con  $\underline{n}(s)$  il suo versore, detto **normale principale**, si può scrivere:

$$\underline{t}'(s) = \underline{r}''(s) = \frac{|\underline{r}''(s)|}{R(s)} \underline{n}(s)$$

Si dimostra che  $|\underline{r}''(s)| = c(s) = \frac{1}{R(s)}$

ciò perché la derivata del versore  $\underline{t}$  rappresenta una misura della sua variazione curvilinearmente in direzione e dunque, nella curvatura.

Tenendo conto della relazione a lato, si ottiene:

$$\underline{t}'(s) = \frac{\underline{n}(s)}{R(s)} \quad \text{I Formula di Frénet}$$

Adesso abbiamo gli strumenti necessari per definire con completezza l'accelerazione:

$$\underline{a}(s) = \ddot{s}\underline{t} + \dot{s}^2 \underline{t}' \Rightarrow \underline{a}(s) = \ddot{s}\underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)} \underline{n}(s)$$

Osservazione: l'accelerazione si compone di due termini: l'accelerazione tangenziale  $\ddot{s}$  e l'accelerazione normale  $\dot{s}^2/R$ ; questa ultima si annulla solo se la traiettoria è rettilinea ( $1/R = c(s) = 0$ ), o se il punto è in quiete.

Introduciamo un terzo versore, detto **binormale principale** e indicato con  $\underline{b}(s)$ , ottenuto da:

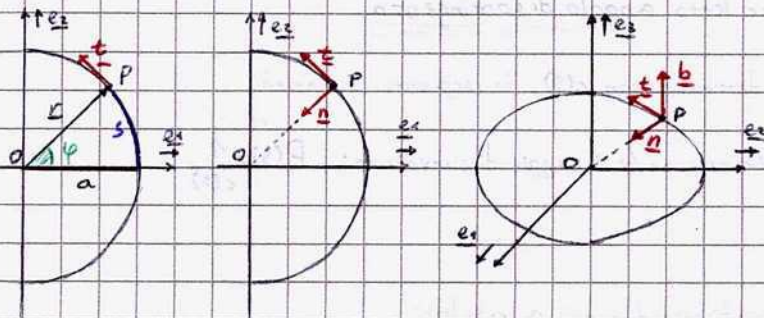
$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s)$$

Otteniamo così in ogni punto della curva una terna di riferimento locale, detta **Triedro Principale di Frénet**

$$\{\underline{t}(s), \underline{n}(s), \underline{b}(s)\} \quad \underline{t}(s) \cdot \underline{n}(s) = \underline{n}(s) \cdot \underline{b}(s) = \underline{t}(s) \cdot \underline{b}(s) = 0 \quad \underline{t} \times \underline{n} = \underline{b}, \underline{n} \times \underline{b} = \underline{t}, \underline{b} \times \underline{t} = \underline{n}$$

### Esempio

Consideriamo un punto  $P$  che percorre la circonferenza posizionata nel piano  $Ox_1x_2$ , di raggio  $a$  e centro  $O$ :



Ricordiamo l'equazione della <sup>traiettoria:</sup> ~~traiettoria:~~

$$\underline{r}(s) = a \cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 + a \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2 \Rightarrow$$

$$c(s) = 1/a, R = a$$

$$\Rightarrow \underline{t}(s) = \underline{r}'(s) = -\sin \frac{s}{a} \underline{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \underline{e}_2$$

Perché  $\underline{n}(s) = R(s) \underline{t}'(s) = -\cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 - \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2$ , otteniamo:

$$\underline{t}'(s) = \underline{r}''(s) = -\frac{1}{a} \cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 - \frac{1}{a} \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{t}'(s) = \frac{\underline{n}(s)}{R(s)} = \frac{\underline{n}(s)}{a} = c \underline{n}(s), |\underline{n}(s)| = 1$$

Inoltre, sapendo che  $\underline{t}(s) = \underline{r}'(s) = -\sin \frac{s}{a} \underline{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \underline{e}_2$  e che  $\underline{n} = -\cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 - \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2$ :

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s) = \left( -\sin \frac{s}{a} \underline{e}_1 + \cos \frac{s}{a} \underline{e}_2 \right) \times \left( -\cos \frac{s}{a} \underline{e}_1 - \sin \frac{s}{a} \underline{e}_2 \right) = \left( \sin^2 \frac{s}{a} + \cos^2 \frac{s}{a} \right) \underline{e}_3 = \underline{e}_3$$

coerente con quanto sappiamo.

## Moto Uniforme

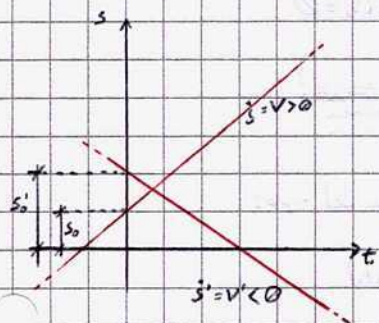
Ricordiamo che un moto si dice progressivo [retrogrado] se la velocità scalare  $\dot{s}(t) > 0$  [ $\dot{s}(t) < 0$ ] nell'istante considerato o  $\forall t \in I$  (moto progressivo in un intervallo).

Si definisce moto uniforme un moto in cui l'accelerazione scalare  $\ddot{s}(t) = 0 \forall t \Rightarrow \dot{s}(t) = \text{cost.} \forall t$

Se sono note le condizioni iniziali, e in Meccanica si assume che lo siano, si assume che  $s(0) = s_0, \dot{s}(0) = \dot{s}_0$ .

Integrando alla condizione imposta dall'uniformità del moto, si ottiene la legge oraria:  $\dot{s}(t) = \text{cost.} = \dot{s}_0$ , integrandola nuovamente, restituisce la suddetta legge oraria:

$$s(t) = \dot{s}_0 t + c \quad \text{ma } s_0 = s(0) = c \Rightarrow s(t) = \dot{s}_0(t) + s_0 \quad \forall t \quad \text{Legge oraria}$$



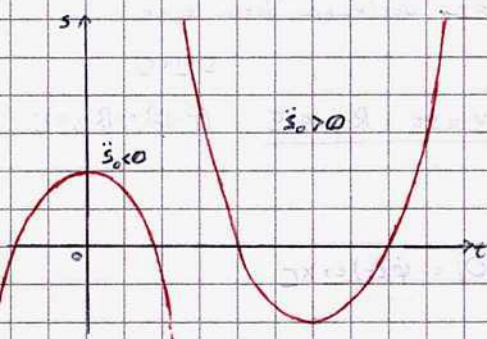
Nel diagramma ascissa curvilinea-tempo, si osserva che l'ascissa curvilinea varia linearmente nel tempo  $\Rightarrow$  la legge oraria varia linearmente, la traiettoria è qualunque!

## Moto Uniformemente Vario

Un moto si dice uniformemente vario se l'accelerazione scalare  $\ddot{s}(t) = \text{cost.} = \ddot{s}_0 \forall t$ .

Integrando, otteniamo  $\dot{s}(t) = \ddot{s}_0 t + c_1$  (che, valutata in  $t=0$  restituisce  $\dot{s}(0) = \dot{s}_0$ ) e, dunque,  $s(t) = \frac{1}{2} \ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0$ ; e integrando nuovamente troviamo la legge oraria:

$$s(t) = \frac{1}{2} \ddot{s}_0 t^2 + \dot{s}_0 t + s_0 \quad \forall t \quad \text{Legge oraria}$$



Nel piano  $t-s$  tale legge oraria è rappresentata da una parabola, la cui concavità dipende dal segno di  $\ddot{s}_0$ .

I vertici della parabola nel piano  $t-s$  corrispondono agli istanti di arresto, indicati con  $t^*$ , per i quali  $\dot{s}(t^*) = 0$ .

Definiamo, infine, un moto accelerato [ritardato] in un istante  $\bar{t}$  un moto in cui  $|\dot{s}(t)|$  è crescente [decrescente] in  $\bar{t}$  (ciò vale anche negli intervalli). Ciò implica che:

$$\frac{d\dot{s}}{dt} = 2\dot{s}\ddot{s} \Rightarrow \text{moto accelerato [ritardato]} \Leftrightarrow \dot{s}\ddot{s} > 0 \quad [\dot{s}\ddot{s} < 0]$$

## Moto Circolare

Si definisce moto circolare un moto che, a prescindere dalla legge oraria, ha una traiettoria circolare [ampliata più avanti!]

Esempio: Determinare istanti di arresto e gli intervalli in cui il moto uniformemente vario è accelerato o ritardato.

$$\bullet t^* : \dot{s}(t^*) = 0 \Leftrightarrow t^* : \dot{s}_0 t^* + \dot{s}_0 = 0 \Leftrightarrow t^* = -\frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0}$$

$$\bullet \dot{s}\ddot{s} = (\dot{s}_0 t + \dot{s}_0) \ddot{s}_0 = \dot{s}_0^2 t + \dot{s}_0 \ddot{s}_0 = \dot{s}_0^2 \left( t + \frac{\dot{s}_0}{\ddot{s}_0} \right) \Rightarrow \dot{s}\ddot{s} = \dot{s}_0^2 (t - t^*)$$

$$\ddot{s}_0 > 0 \Rightarrow [\dot{s}\ddot{s} = \dot{s}_0^2 (t - t^*) \Leftrightarrow \dot{s} = \dot{s}_0 (t - t^*)] \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{progressivo accelerato } \forall t > t^* \\ \text{retrogrado ritardato } \forall t < t^* \end{array}$$

$$\ddot{s}_0 < 0 \Rightarrow [\dot{s}\ddot{s} = \dot{s}_0^2 (t - t^*), \quad \dot{s} = \dot{s}_0 (t - t^*)] \Leftrightarrow \begin{array}{l} \text{retrogrado accelerato } \forall t > t^* \\ \text{progressivo ritardato } \forall t < t^* \end{array}$$

Consideriamo la formula completa dell'accelerazione di un punto materiale:

$$\underline{a}(s) = \ddot{s} \underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)} \underline{n}(s)$$

Osservazioni:

- È nulla la componente lungo la binormale  $\underline{b}$ .
- I moti con accelerazione puramente normale in ogni istante sono moti uniformi:  $\underline{a} = \frac{v^2}{R} \underline{n} \Leftrightarrow \ddot{s} = 0 \Leftrightarrow \dot{s} = \text{cost.} \Leftrightarrow \ddot{s} = 0$   
 $\Delta$  Non è imposta alcuna condizione sulla traiettoria, solo sulla legge oraria! <sup>moto uniforme</sup>
- I moti con accelerazione puramente tangenziale in ogni istante sono moti rettilinei:

$$\underline{a} = \ddot{s} \underline{t} \Leftrightarrow \frac{\dot{s}^2}{R(s)} \underline{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{R} = 0 \vee |\underline{v}| = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{R} = 0 \Rightarrow \kappa(s) = 0$$

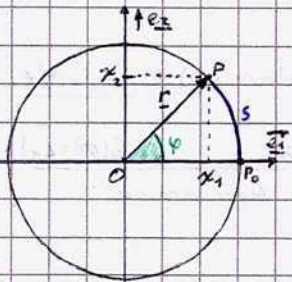
quieta

$\Delta$  Non è imposta alcuna restrizione alla legge oraria, solo alla traiettoria! <sub>rettilinea</sub>

### Moto Circolare

È un moto in cui il punto materiale percorre una circonferenza secondo una legge oraria del tipo:

$$s = s(t) \quad \underline{s}(t) = R \varphi(t) \quad (R = \text{cost.})$$

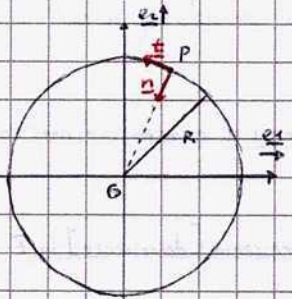


Ricordiamo inoltre che  $\underline{r}(t) = R \cos \varphi(t) \underline{e}_1 + R \sin \varphi(t) \underline{e}_2$ ; derivando detta legge otteniamo l'espressione della velocità:

$$\underline{v}(t) = -R \dot{\varphi} \sin \varphi(t) \underline{e}_1 + R \dot{\varphi} \cos \varphi(t) \underline{e}_2, \Rightarrow \underline{v} = \dot{s} \underline{t} = R \dot{\varphi}(t) \underline{t} \quad (\underline{P-O}) = -R \underline{n} = \underline{v}$$

Poiché  $\underline{t} = \underline{n} \times \underline{e}_3$ , possiamo riscrivere  $\underline{v}$ :

$$\underline{v} = R \dot{\varphi}(t) \underline{n} \times \underline{e}_3 = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3 \times (-R \underline{n}) = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3 \times (\underline{P-O}) = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3 \times \underline{r}$$



Consideriamo ora l'espressione dell'accelerazione:

$$\underline{a} = \ddot{s} \underline{t} + \frac{v^2}{R} \underline{n} = R \ddot{\varphi}(t) \underline{t} + \frac{(R \dot{\varphi}(t))^2}{R} \underline{n} = R \ddot{\varphi}(t) \underline{t} + R \dot{\varphi}^2(t) \underline{n}$$

Si introduce una nuova grandezza: la velocità angolare  $\underline{\omega} = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3$   $|\underline{\omega}| = \dot{\varphi}(t)$   
 E quindi:

$$\underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r} \quad \underline{a} = R \ddot{\varphi}(t) \underline{t} + R \omega^2 \underline{n}$$

In un moto circolare uniforme ( $\ddot{s}(t) = 0 \forall t$ ) si ha:

$$\ddot{s}(t) = 0 \forall t \Leftrightarrow \ddot{\varphi}(t) = 0 \forall t \Leftrightarrow \varphi(t) = \dot{\varphi}_0 t + \varphi_0 \forall t \quad (\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}(t_0), \varphi_0 = \varphi(t_0)) \quad \text{angolo varia linearmente col tempo}$$

$$\text{Dunque, } x_1(t) = R \cos(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \quad x_2(t) = R \sin(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \quad \text{equazioni del moto circolare uniforme}$$

≠ vel. ang.

Si osserva che  $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0 \forall t$  e che  $\omega = |\dot{\varphi}_0|$ : questo valore assoluto è detta frequenza; possiamo riscrivere le equazioni di velocità e accelerazione come segue:

$$\underline{v}(t) = \underline{\omega}(t) \times \underline{r}, \quad \underline{a} = R \omega^2 \underline{n} = \omega^2 (O-P)$$

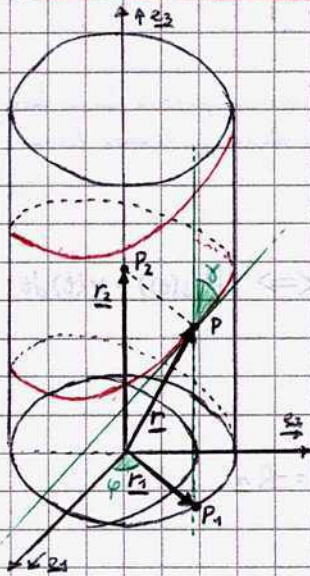
Sapendo che il moto circolare è un moto periodico (nota a lato):

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad \varphi(t+T) = \dot{\varphi}_0 t + \dot{\varphi}_0 T + \varphi_0 = \varphi(t) + \dot{\varphi}_0 T \Rightarrow |\varphi(t+T) - \varphi(t)| = |\dot{\varphi}_0| T = 2\pi$$

poiché  $\underline{r}(t+T) = \underline{r}(t) \Rightarrow \Delta\varphi = 2\pi$

Il moto circolare uniforme è periodico di periodo  $T = 2\pi/\omega$ , ovvero  $\underline{r}(t+T) = \underline{r}(t) \forall t$

## Moto Elicoidale (Uniforme)



È un moto tridimensionale definibile come la composizione di due moti piani: un moto circolare (uniforme) di centro  $O$  su un piano  $\mathcal{T}$  e un moto rettilineo (uniforme) lungo una retta per  $O$  ortogonale a  $\mathcal{T}$ .

La traiettoria che il punto  $P$  percorre sul cilindro di equazione  $x_1^2 + x_2^2 = R^2$  è un'elica cilindrica, ovvero una curva che forma un angolo costante  $\varphi$  con le generatrici del cilindro.

Anche la velocità di  $P$ , tangente alla traiettoria in ogni istante, forma ad ogni istante un angolo costante  $\chi$  con l'asse  $Ox_3$ .

Valutiamo ora le varie equazioni del moto, sia nella loro composizione che prese singolarmente:

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_2 \Rightarrow \underline{r}_1(t) + \underline{r}_2(t) = \underline{r}(t)$$

$$\underline{r}_1(t) = R \cos(\varphi_0 t + \varphi_0) \underline{e}_1 + R \sin(\varphi_0 t + \varphi_0) \underline{e}_2$$

$$\underline{r}_2(t) = (\dot{x}_{3,0} t + x_{3,0}) \underline{e}_3$$

$$\underline{v}(t) = -R \dot{\varphi}_0 \sin(\varphi(t)) \underline{e}_1 + R \dot{\varphi}_0 \cos(\varphi(t)) \underline{e}_2 + \dot{x}_{3,0} \underline{e}_3$$

$$|\underline{v}(t)| = \sqrt{R^2 \dot{\varphi}_0^2 + \dot{x}_{3,0}^2} = \text{cost.}$$

Si definisce moto composto dei moti cui sono soggetti  $n$  punti  $P_i \equiv (x_i, y_i, z_i)$  il moto del punto  $P$  di coordinate:

$$\underline{x} = \sum_{i=1}^n \underline{x}_i, \underline{y} = \sum_{i=1}^n \underline{y}_i, \underline{z} = \sum_{i=1}^n \underline{z}_i \quad (OP = \sum_{i=1}^n OP_i)$$

Da cui segue che la velocità e l'accelerazione del moto composto sono uguali alle somme vettoriali della velocità e accelerazione dei moti componenti:

$$\underline{v} = \sum_{i=1}^n \underline{v}_i \quad \underline{a} = \sum_{i=1}^n \underline{a}_i$$

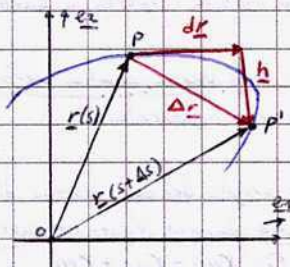
Come sappiamo, il moto di  $P_1$  è circolare uniforme e quindi periodico di periodo  $T = 2\pi/\omega$ ; definiamo il passo dell'elica, indicato con  $p$ :

$$p = |x_3(t+T) - x_3(t)|$$

Osservazioni:

$$p = \frac{2\pi}{\omega} |\dot{x}_3(t)| \Rightarrow \text{nell'intervallo } [t, t+T]: \begin{array}{l} \bullet P_1 \text{ percorre una intera } \overset{\text{(circonferenza)}}{\text{traiettoria}} \\ \bullet P_2 \text{ percorre uno spazio } p = \frac{2\pi}{\omega} |\dot{x}_3(t)| \end{array} \Leftrightarrow P \text{ percorre una intera spirale dell'elica}$$

## Spostamento Infinitesimo o Elementare



Inanzitutto definiamo lo spostamento finito di un punto: indipendentemente dal moto compiuto, nel passaggio dall'una all'altra posizione, lo spostamento finito risulta analiticamente definito dal vettore  $P' - P$ , ovvero:

$$\Delta P(s) = P' - P = \underline{r}(s + \Delta s) - \underline{r}(s) = \Delta \underline{r}$$

Poiché per ogni valore dell'ascissa curvilinea risulta individuabile un raggio vettore, ne valgono le componenti cartesiane:

$$\underline{r}(s) = x_1(s) \underline{e}_1 + x_2(s) \underline{e}_2 + x_3(s) \underline{e}_3, \quad s = s(t)$$

Applicando uno sviluppo in serie di Taylor a  $\underline{r}(s)$  otteniamo:

$$\underline{r}(s + \Delta s) = \underline{r}(s) + \underline{r}'(s) \Delta s + \frac{1}{2} \underline{r}''(s) (\Delta s)^2 + \dots = \underline{r}(s) + \underline{r}'(s) \Delta s + \underline{h}(s), \quad \text{coefficiente d'ordine maggiore al primo su } s$$

Per il Teorema sul differenziale, otteniamo:

$$\Delta \underline{r} = \underline{r}(s + \Delta s) - \underline{r}(s) = \underline{r}'(s) \Delta s + \underline{h}(s) = d\underline{r}(s) + \underline{h}(s)$$

ha significato come  $\underline{h}$  vett anche senza definire traiettorie e moti!

Si definisce Spostamento infinitesimo o elementare la quantità  $dP(s) = d\underline{r}(s) = \underline{v}(s) ds$

In definitiva, si ha  $\Delta \underline{r}(s) = d\underline{r}(s) + \underline{h}(s) \Rightarrow$  spostamento finito e infinitesimo differiscono di un vettore  $\underline{h}(s)$ ; ciò rende possibile la modellazione matematica di un fenomeno fisico.

Dal grafico alla pagina precedente si osserva che  $\Delta r(s)$  ha la direzione della corda  $P(s)P(s+\Delta s)$  e il vettore  $dP(s)$  ha invece direzione tangente alla traiettoria in  $P(s)$ .

Osservazione: In un moto tutto è in funzione del tempo  $t$ ; occorre dunque definire spostamenti a partire da un determinato istante  $t^*$ , per un assegnato incremento  $dt$ , non avendo altri tipi di spostamento alcun significato fisico. Osserviamo, in particolare, che esiste un legame tra  $v$  e  $dP$  nel moto:

$$\left. \begin{aligned} r &= r(s); s = s(t) \\ v(t) &= \dot{r}(s(t)) = r'(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow v(t) dt = r'(s(t)) ds(t) = dr(s(t)) \Leftrightarrow dP(s(t)) = v(t) dt$$

### Esempio

Nel moto circolare nel piano  $Ox_1x_2$  si ha:  $b = e_3$ ;  $\underline{t} = n \times e_3$ ;  $s = R\varphi$ ;  $n = -Rn$

Da cui otteniamo:

$$d\underline{r} = \underline{t} ds = n \times e_3 R d\varphi = d\varphi e_3 \times r = d\varphi \times r \quad \varphi = \varphi e_3 \quad \text{vettore rotazione}$$

Nel moto elicoidale, si ha:

$$d\underline{r} = d\underline{r}_1 + d\underline{r}_2 = d\varphi \times r_1 + dx_3 e_3 = d\varphi \times r_1 + d\underline{z} \quad \underline{z} = z e_3 \quad \text{vettore traslazione}$$

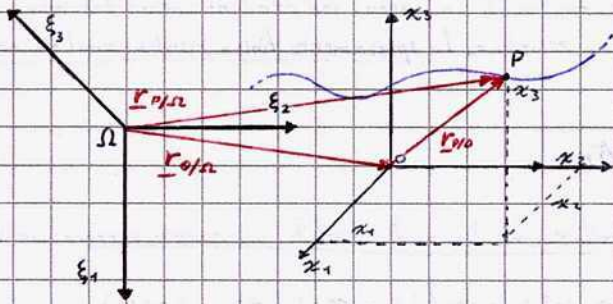
### Moti Relativi

↳ Espressione generale di  $d\underline{r}$

Come è noto dalla studio della fisica, la caratterizzazione del moto di una particella è relativa: dipende dall'osservatore, schematizzato tramite il sistema di riferimento.

Il principio di relatività riguarda il legame tra il moto di una stessa particella rispetto a due osservatori e, dunque, in due riferimenti, che si spostano l'uno rispetto all'altro; indicheremo con  $\Omega, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3$  il riferimento fisso o assoluto, e con la terna  $Ox_1x_2x_3$  il riferimento mobile o relativo, senza però alcuna implicazione prettamente fisica: il riferimento assoluto potrebbe essere anch'esso in moto, ma viene considerato immobile.

Analogamente, il moto della particella o, più formalmente, del punto  $P$  occupato dalla particella, si distinguerà tra moto assoluto nella terna fissa e moto relativo nella terna mobile, cui si aggiunge un terzo moto: il moto di trascinamento, ovvero il moto rigido della terna mobile rispetto a quella fissa, ovvero il moto di un punto solidale al riferimento mobile rispetto a quello fisso.



Logicamente, la traiettoria del punto non varia, cambia però la posizione (il raggio vettore) e, dunque, il moto in generale.

I raggi vettori del punto rispetto alle origini dei due sistemi di riferimento, indicati con  $r_{P/\Omega}$  e  $r_{P/O}$ , sono dunque legati attraverso il raggio vettore  $r_{O/\Omega}$  di  $O$  rispetto ad  $\Omega$ :  $r_{P/\Omega} = r_{O/\Omega} + r_{P/O}$

Nel moto, rispetto al riferimento assoluto variano le coordinate di  $P$ , ma anche origine e versori della terna relativa, in quanto supposti in moto rispetto a quella assoluta; rispetto al riferimento relativo invece variano col tempo le coordinate di  $P$ , ma non i versori  $e_i$ . Dunque:

$$r_{P/O} = x_1^{(r)} e_1 + x_2^{(r)} e_2 + x_3^{(r)} e_3; \quad r_{P/\Omega}(t) = x_1(t) e_1(t) + x_2(t) e_2(t) + x_3(t) e_3(t) + r_{O/\Omega}(t)$$

Derivando la seconda relazione, possiamo calcolare la velocità assoluta del punto  $P$ :

$$\begin{aligned} v_a &\equiv \dot{r}_{P/\Omega}(t) = \dot{r}_{O/\Omega}(t) + \dot{x}_1 e_1 + x_1 \dot{e}_1 + \dot{x}_2 e_2 + x_2 \dot{e}_2 + \dot{x}_3 e_3 + x_3 \dot{e}_3 = \\ &= \dot{r}_{O/\Omega}(t) + v_r + x_1 \dot{e}_1 + x_2 \dot{e}_2 + x_3 \dot{e}_3 = \\ &= v_r + \dot{r}_{O/\Omega}(t) + x_1 \dot{e}_1 + x_2 \dot{e}_2 + x_3 \dot{e}_3 = v_r + v_t \end{aligned}$$

$v_a$  = Velocità Assoluta  
 $v_r$  = Velocità Relativa  
 $v_t$  = Velocità di Trascinamento

$$v_a = v_r + v_t \quad \text{"principio" di rel. di Galilei}$$

⚠ La velocità di trascinamento è la velocità di un punto della spazio solidale a  $Ox_1x_2x_3$  e qui è sovrapposto nell'istante considerato il punto mobile  $P$

⚠  $t_p$  è tempo rel.  $\equiv$  tempo assoluto

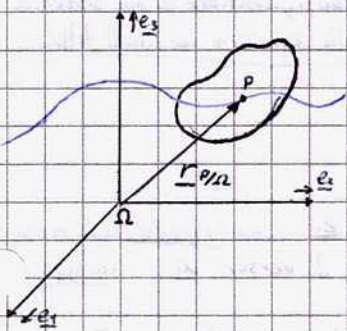


# Moti Rigidi

La cinematica dei sistemi discreti, ovvero formati da un numero finito  $n$  di particelle, si tratta come nel caso di un sistema di un solo punto. Nel caso in cui, invece, si tratti di sistemi continui (schematizzazioni molto usate in Fisica), ogni particella avrà la sua posizione; per poter caratterizzare un qualunque sistema meccanico  $S$  occorre determinare la posizione di ogni suo punto in ogni istante, ma in questo caso una determinazione del genere sarebbe lunga e complessa: si introduce dunque un osservatore, rappresentato mediante una terna, solidale al corpo; ne studieremo successivamente il moto rispetto alla terna di laboratorio (terna fissa).

Sebbene anche sistemi meccanici non rigidi possano essere soggetti a moti rigidi, per semplicità considereremo principalmente sistemi meccanici rigidi: poiché la distanza tra due loro punti qualunque resta costante in ogni istante, essi possono essere soggetti esclusivamente a moti rigidi.

Dallo studio della Fisica sappiamo che, per un qualunque corpo, saranno necessarie al più 6 equazioni scalari (e, dunque, 2 equazioni vettoriali) per determinarne la configurazione. Se soggetto a qualche vincolo, le equazioni si ridurranno.



$$\underline{r}_{P/O} = \underline{r}_{P/O}(t) \quad \forall P \in S \quad \text{oss. Se } S \text{ rigido, } |PQ| = \text{cost. } \forall P, Q \in S, \forall t$$

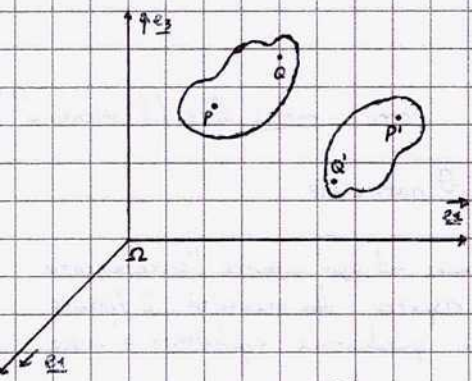
Consideriamo una generica coppia di particelle, ed indichiamo con  $P$  e  $Q$  le posizioni da esse occupate nel sistema  $S$ , e con  $P'$  e  $Q'$  quelle in  $S'$  (due generiche posizioni del medesimo sistema).

Si definisce spostamento rigido uno spostamento finito del sistema  $S$  in cui si verifica la seguente condizione:

$$|PQ| = |P'Q'| \quad \forall P, Q \in S \quad (\text{rigido o non rigido})$$

Analogamente, si può parlare di moto rigido se:

$$\forall t: |PQ| = \text{cost.} \quad \forall P, Q \in S \quad (\text{rigido o non rigido})$$



Come detto in precedenza, per determinare la configurazione dei sistemi meccanici in generale, occorrerà fissare una ulteriore terna di riferimento:

→  $Ox_1x_2x_3$  terna fissa (o di laboratorio) di versori  $\underline{e}_i$ ;  $P \equiv (x_1, x_2, x_3)$

→  $Oy_1y_2y_3$  terna mobile solidale ad  $S$  di versori  $\underline{u}_i$ ;  $O \in S$ ;  $P \equiv (y_1, y_2, y_3)$

La terna solidale, anche detta di quiete, determina inoltre uno spazio solidale composto da punti che mantengono posizione invariata rispetto a detta terna; i punti occupati dal sistema ne sono un sottoinsieme.

Possiamo dunque considerare l'equazione dei moti rigidi:

$$O \in S, \quad \underline{r}_{P/O}(t) = \underline{r}_{Q/O}(t) + \underline{r}_{P/Q}(t) \quad \forall P \in S$$

Osservazione:  $\underline{r}_{O/O}(t) = x_{01}(t)\underline{e}_1 + x_{02}(t)\underline{e}_2 + x_{03}(t)\underline{e}_3$

$\underline{r}_{P/O}(t) = y_1\underline{u}_1(t) + y_2\underline{u}_2(t) + y_3\underline{u}_3(t)$   
COSTANTI (corpo rigido)  $O \in S$

$\underline{u}_i(t) = A_{i1}(t)\underline{e}_1 + A_{i2}(t)\underline{e}_2 + A_{i3}(t)\underline{e}_3$ ;  $i=1,2,3$   $A_{ij}$  coseni direttori

Dunque, si ha che:

$$\underline{r}_{P/O}(t) = x_{01}(t)\underline{e}_1 + x_{02}(t)\underline{e}_2 + x_{03}(t)\underline{e}_3 + y_1(A_{11}(t)\underline{e}_1 + A_{12}(t)\underline{e}_2 + A_{13}(t)\underline{e}_3) + y_2(A_{21}(t)\underline{e}_1 + A_{22}(t)\underline{e}_2 + A_{23}(t)\underline{e}_3) + y_3(A_{31}(t)\underline{e}_1 + A_{32}(t)\underline{e}_2 + A_{33}(t)\underline{e}_3)$$

Ovvero: 
$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) + y_1 A_{11}(t) + y_2 A_{21}(t) + y_3 A_{31}(t) \\ x_2(t) = x_{02}(t) + y_1 A_{12}(t) + y_2 A_{22}(t) + y_3 A_{32}(t) \\ x_3(t) = x_{03}(t) + y_1 A_{13}(t) + y_2 A_{23}(t) + y_3 A_{33}(t) \end{cases}$$

Sono 3 funzioni scalari + 9 coseni direttori, tutti in funzione di  $t \Rightarrow 12$  variabili! Occorrono delle relazioni di dipendenza per ridurne il numero

Osserviamo però che, avendo imposto la terna solidale come ortonormale, 6 delle relazioni dei coseni direttori sono dipendenti:

$$\underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = \delta_{ij} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = 1 & \forall i=j \\ \underline{u}_i \cdot \underline{u}_j = 0 & \forall i \neq j \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 = 1, & \forall i \\ A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3} = 0 & \forall i \neq j \end{cases}$$

Dunque, come predetto, le configurazioni di un sistema rigido  $S$  dipendono da 6 funzioni del tempo:

- $x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t)$  definiscono la posizione di  $O$  nel riferimento fisso
- 3 coseni direttori indipendenti  $A_{ij}$  definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa

Esistono però altre possibili scelte di 6 funzioni del tempo che permettono di determinare la configurazione di un sistema meccanico; particolarmente efficace fu quella di **Eulero**, che permise una formulazione semplice delle equazioni cardinali della dinamica.

In questo caso, fissiamo 3 terne di riferimento:

- $Ox_1x_2x_3$  terna fissa (o di laboratorio) di versori  $e_i$
- $Ox_1x_2x_3$  terna con centro in  $O \in S$  e assi di versori  $e_i$  assi paralleli alla terna fissa
- $Oy_1y_2y_3$  terna mobile con centro in  $O \in S$  solidale al  $S$ , di versori  $\underline{u}_i$  variabili

In sintesi, basta individuare come si muove  $O$  e valutare i coseni direttori della terna  $Oy_1y_2y_3$  rispetto alla terna  $Ox_1x_2x_3$ .

Si definiscono:

• linea dei nodi:  $n = \overbrace{Ox_1x_2x_3}^{\text{se sovrapposti, } \#} \cap Oy_1y_2y_3$ ;  $n = \text{vers } n$  retta orientata data dall'intersezione  $Ox_1x_2x_3$  e  $Oy_1y_2y_3$

• **Angoli di Eulero**:  $\psi$  precessione,  $\varphi$  rotazione propria,  $\vartheta$  nutazione

Gli angoli di Eulero costituiscono una terna di funzioni indipendenti atte ad individuare ad ogni istante l'orientamento della terna solidale rispetto a quella fissa; si ottiene una notevole semplificazione rispetto alla necessità di fissare tre coseni direttori ed esprimere gli altri sei in funzione di questi tramite le relazioni quadratiche esplicitate a inizio pagina.

La terna solidale  $Oy_1y_2y_3$  si sovrappone alla terna  $Ox_1x_2x_3$  mediante tre rotazioni indipendenti:

- rotazione di  $\psi$  attorno all'asse  $Ox_3$ , che porta alla sovrapposizione di  $Ox_1$  ed  $n$
- rotazione di  $\varphi$  attorno all'asse  $Oy_3$ , che porta alla sovrapposizione di  $Ox_1$  ed  $Oy_1$
- rotazione di  $\vartheta$  attorno all'asse dato dalla linea dei nodi, che porta alla sovrapposizione di  $Ox_3$  ed  $Oy_3$

⚠ Negli istanti in cui i piani  $Ox_1x_2$  e  $Oy_1y_2$  sono sovrapposti la linea dei nodi è indeterminata, così come gli angoli  $\psi$  e  $\varphi$  ( $\vartheta = 0, \pi$ ). È però possibile definire l'angolo  $\varphi + \psi$  tra gli assi  $Oy_1$  ed  $Ox_1$ , che assieme a  $\vartheta$  è sufficiente ad individuare l'orientazione della terna  $Oy_1y_2y_3$  rispetto alla terna  $Ox_1x_2x_3$ .

Anche in questo caso, le configurazioni di un sistema rigido  $S$  dipendono da 6 funzioni del tempo:

- $x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t)$  definiscono la posizione di  $O$  nel riferimento fisso
- 3 angoli di Eulero definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa

Configurazione di un corpo rigido libero  $\Rightarrow$   
 $\Rightarrow$  6 EQUAZIONI DEL TEMPO INDIPENDENTI  
 la scelta delle equazioni però è libera.

## Teorema di Poisson

Se  $S$  è un corpo rigido in moto nel riferimento  $\Omega x_1 x_2 x_3$  e  $\underline{u}(t)$  è un vettore costante in  $S$ , allora si ha:  
 Con  $\underline{\omega}(t)$ , velocità angolare, vettore indipendente da  $\underline{u}(t)$  non parallelo!

$$\frac{d\underline{u}(t)}{dt} = \underline{\omega}(t) \times \underline{u}(t)$$

In particolare, se  $(\underline{u}_i)$  sono i versori degli assi di un riferimento  $Oy_1 y_2 y_3$  solidale ad  $S$ :

$$\frac{d\underline{u}_i(t)}{dt} = \underline{\omega}(t) \times \underline{u}_i(t) \quad \forall i$$

Derivando rispetto al tempo l'equazione dei moti rigidi  $\underline{r}_{P/O}(t) = \underline{r}_{O/A}(t) + \underline{r}_{P/O}(t)$  si ha:

$$\begin{aligned} \underline{v}_P(t) &= \dot{\underline{r}}_{P/O}(t) = \dot{\underline{r}}_{O/A}(t) + \dot{y}_1 \underline{u}_1(t) + \dot{y}_2 \underline{u}_2(t) + \dot{y}_3 \underline{u}_3(t) = \\ &= \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times y_1 \underline{u}_1(t) + \underline{\omega}(t) \times y_2 \underline{u}_2(t) + \underline{\omega}(t) \times y_3 \underline{u}_3(t) = \\ &= \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times [y_1 \underline{u}_1(t) + y_2 \underline{u}_2(t) + y_3 \underline{u}_3(t)] = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_{P/O}(t) \end{aligned}$$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times \underline{r}_{P/O}(t) \iff \forall P \in S \quad \underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad \forall t$$

Poiché non ha senso parlare di velocità di un sistema continuo ( $\underline{v}_P(t)$  dipende dal singolo punto  $P$  del sistema), si introduce il concetto di atto di moto, anche noto come campo cinetico o campo di velocità: è un campo vettoriale che definisce puntualmente la velocità:

$$\text{atto di moto rigido: } \{(P, \underline{v}_P(t)) : P \in S, \underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O)\}$$

Si definiscono similmente lo spostamento elementare  $dP = dO + d\varphi \times (P-O)$   $d\varphi = \underline{\omega} dt$  vettore di rotazione elementare

## Moti Rigidi

Ricapitolando, fissando una terna fissa ed (almeno) una solidale al corpo, abbiamo osservato che:

•  $\Omega x_1 x_2 x_3$  fissa ( $\underline{e}_i$ ),  $Oy_1 y_2 y_3$  solidale ( $\underline{u}_i$ )

	$\underline{e}_1$	$\underline{e}_2$	$\underline{e}_3$
$A_{11}$	$A_{11}$	$A_{12}$	$A_{13}$
$A_{21}$	$A_{21}$	$A_{22}$	$A_{23}$
$A_{31}$	$A_{31}$	$A_{32}$	$A_{33}$

$$\begin{cases} A_{i1}^2 + A_{i2}^2 + A_{i3}^2 = 1, \quad \forall i \\ A_{i1} A_{j1} + A_{i2} A_{j2} + A_{i3} A_{j3} = 0 \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

Condizioni sui coseni direttori  $A_{ij}$

•  $x_i(t) = x_{0i}(t) + y_1 A_{1i}(t) + y_2 A_{2i}(t) + y_3 A_{3i}(t)$

equazione cartesiana dei moti rigidi

•  $\{(P, \underline{v}_P(t)) : P \in S, \underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O)\}$

atto di moto rigido

•  $dP = dO + d\varphi \times (P-O) \quad d\varphi = \underline{\omega} dt \quad \forall P$

spostamento elementare

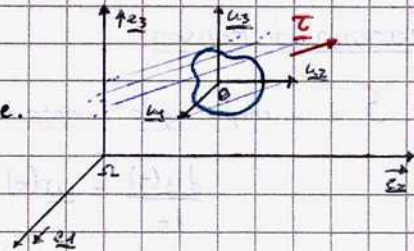
•  $d\varphi = \underline{\omega} dt$

vettore di rotazione elementare

Inoltre, a meno di vincoli o particolari condizioni, fissata una posizione di  $S$  gli spostamenti elementari rigidi che il sistema può compiere sono  $\infty^6$ : ciò implica che, per determinarne la configurazione istante per istante, occorre definire 6 funzioni del tempo del sistema tra loro indipendenti come, ad esempio, le tre componenti dello spostamento di  $O$  e tre componenti del vettore  $d\varphi$ .

## Moto Traslatorio

È un moto in cui tutti i punti di  $S$  hanno la stessa velocità istante per istante.



Moto rigido traslatorio:  $\forall P_1, P_2 \in S, P_2 - P_1 = c$  vettore costante (in ogni istante)

Atto di moto traslatorio:  $\forall P_1, P_2 \in S, \underline{v}_{P_1}(t) = \underline{v}_{P_2}(t) = \underline{v}(t)$  vettore traslazione

Dunque, si ha che moto traslatorio  $\Leftrightarrow \underline{\omega}(t) = \underline{0} \quad \forall t$

Dim

$$\forall P_1, P_2 \quad \underline{v}_{P_1}(t) = \underline{v}_{P_2}(t) \Leftrightarrow \forall P_1, P_2 \quad \underline{\omega}(t) \times (P_2 - P_1) = \underline{0} \Leftrightarrow \underline{\omega}(t) = \underline{0}$$

Osservazione In un moto traslatorio i versori di una terna solida restano costanti nel tempo;

$\Omega \quad x_1 x_2 x_3$  fissa ( $e_i$ )       $Oy_1 y_2 y_3$  mobile ( $u_i$ )  
solidale

$$\underline{u}_i = e_i \quad \begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & 1 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 1 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} A_{11} = A_{22} = A_{33} = 1 \\ A_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j \end{cases}$$

Equazioni cartesiane dei moti traslatori:  $x_i(t) = x_{0i}(t) + y_i \quad i=1,2,3$

Spostamento elementare:  $dP = dO + VP$

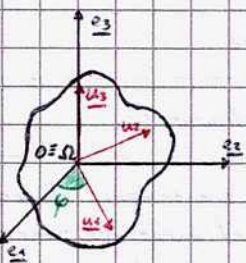
- Se  $\underline{v}(t)$ :
- ha direzione costante, si parla di moto traslatorio rettilineo; le traiettorie dei punti di  $S$  sono rette parallele a  $\underline{v}(t)$
  - è un vettore costante, le rette parallele (traiettorie dei punti del sistema) sono percorse con moto uniforme e, dunque, si parla di moto traslatorio uniforme

In generale, fissata una posizione di  $S$ , gli spostamenti elementari rigidi traslatori che il sistema può compiere sono  $\infty^3$  (3 componenti dello spostamento di  $O$ )

## Moto Rotatorio attorno ad un Asse Fisso 2

È un moto in cui restano fissi tutti i punti di una retta  $a$  di  $S$ , detta asse di rotazione.

$\Omega \quad x_1 x_2 x_3$  fissa,  $Oy_1 y_2 y_3$  solidale:  $\underline{\omega} = \underline{0}$ ;  $x_3 = y_3 = a$



$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \\ e_1 & \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ e_2 & \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \quad \left[ \begin{array}{l} A_{11} = A_{22} = \cos \varphi, \quad A_{21} = -A_{12} = \sin \varphi, \quad A_{33} = 1 \\ A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0 \end{array} \right]$$

Equazioni cartesiane dei moti rotatori:

$$\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t) \\ x_2(t) = y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t) \\ x_3(t) = y_3 \end{cases}$$

Osservazione: Il moto di qualsiasi punto di  $S$  è circolare:

Dim:  $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = \text{costante}$ ,  $x_3 = y_3 = \text{costante}$

Atto di moto rotatorio  $v_P(t) = \omega(t) \times (P-O)$   $O \in a$   $\omega(t) = \dot{\varphi} e_3$   $\omega$  è un vettore variabile, ma NON in direzione

Dim  $\omega$  cost. in direz:

$v_P(t) = 0$   
 $\forall P \in a, v_P(t) = 0$   
 $* \omega(t) = p u_1 + q u_2 + r u_3$   
 $u_3 = e_3$

$$\Rightarrow * \omega(t) \times (P-O) = 0 \quad \forall P, O \in a \Rightarrow \omega(t) \parallel a \Leftrightarrow \omega(t) = r e_3$$

Applicando la Formula di Poisson abbiamo:

$u_1 = \cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2$   
 $\omega(t) = r e_3$   
 $* \dot{u}_1 = \omega(t) \times u_1$

$$\Rightarrow * \dot{u}_1 = \omega(t) \times u_1 \Rightarrow -\dot{\varphi} \sin \varphi e_1 + \dot{\varphi} \cos \varphi e_2 = r e_3 \times (\cos \varphi e_1 + \sin \varphi e_2) = r \cos \varphi e_2 - r \sin \varphi e_1$$

$\Rightarrow \dot{\varphi} = r$

Osservazione: L'atto di moto rotatorio vale per ogni  $A \in a$  asse fisso di rotazione, non occorre fissare il punto  $O$ ;  $\omega$  non varia in direzione.

$v_P(t) = \omega(t) \times (P-A)$   $A \in a, \omega(t) = \dot{\varphi} e_3$

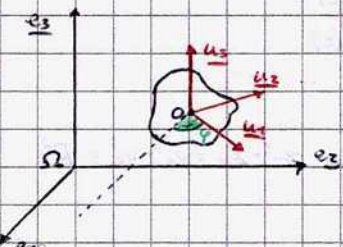
Spostamento Elementare  $\cdot dP = d\varphi \times (P-A)$   $A \in a \quad \forall P$   
 $\cdot dP = d\varphi \times (P-P')$   $\varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$

In generale, fissata una posizione di  $S$ , gli spostamenti elementari rigidi rotatori che il sistema può compiere sono  $\infty^1$  (1 componente di  $d\varphi$ )

### Moto Rototraslatorio

È un moto rigido in cui il sistema  $S$  ruota attorno ad un asse  $a^*$ , ad esso solidale, il quale si muove di moto traslatorio.

$\Omega x_1 x_2 x_3$  fissa  $O x_1 x_2 x_3$  solidale:  $O \in a^*, y_3 = a^*, x_3 \parallel a^*$  O si muove!



	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	$0$
$e_2$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$0$
$e_3$	$0$	$0$	$1$

$$\begin{cases} A_{11} = A_{22} = \cos \varphi, A_{21} = -A_{12} = \sin \varphi, A_{33} = 1 \\ A_{13} = A_{23} = A_{31} = A_{32} = 0 \end{cases}$$

Equazioni cartesiane dei moti rototraslatori

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t) \\ x_2(t) = x_{02}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t) \\ x_3(t) = x_{03}(t) + y_3 \end{cases}$$

traslazione

Applicando il principio dei moti relativi si ha:

- moto rototraslatorio  $\Leftrightarrow$  moto assoluto
- moto rotatorio di  $S$  nella terna  $O x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow$  moto relativo
- moto traslatorio della terna  $O x_1 x_2 x_3$  rispetto alla terna  $\Omega x_1 x_2 x_3 \Leftrightarrow$  moto di trascinamento

Atto di moto rototraslatorio:  $\underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O)$   $O \in a^*$   $\underline{\omega}(t) = \dot{\varphi} e_3$

$$\underline{v}_P(t) = \underline{v}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad O \in a^* \quad \underline{v}(t) = \underline{v}_O(t), \quad \underline{\omega}(t) = \dot{\varphi} e_3$$

Spostamento elementare:  $dP = dO + d\varphi \times (P-O)$   $\varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$

Fissata una posizione di  $\mathcal{S}$  gli spostamenti elementari rototraslatori che il sistema può compiere sono  $\infty^4$  (3 componenti dello spostamento di  $O$  e 1 componente di  $d\varphi$  lungo  $e_3$ ).

## Moto Rigido Sferico

È un moto rigido in cui rimane fisso un solo punto  $O \in \mathcal{S}$

$\Omega x_1 x_2 x_3$  fissa,  $O y_1 y_2 y_3$  solidale:  $\Omega \equiv O$  fisso

Atto di moto rigido sferico:  $\underline{v}_P(t) = \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad \forall P$

Differisce dalla formula dei moti rotatori attorno ad un asse fisso per il fatto che  $\underline{\omega}(t)$  varia in direzione istante per istante.

Equazioni cartesiane dei moti rigidi sferici:  $\begin{cases} x_1(t) = y_1 A_{11}(t) + y_2 A_{21}(t) + y_3 A_{31}(t) \\ x_2(t) = y_1 A_{12}(t) + y_2 A_{22}(t) + y_3 A_{32}(t) \\ x_3(t) = y_1 A_{13}(t) + y_2 A_{23}(t) + y_3 A_{33}(t) \end{cases}$   $\begin{cases} A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{13}^2 = 1 \\ A_{i1} A_{j1} + A_{i2} A_{j2} + A_{i3} A_{j3} = 0 \quad \forall i \neq j \end{cases}$

Spostamento elementare:  $dP = d\omega \times (P-O)$  ( $O$  fisso)  $\forall P$

Fissata una posizione di  $\mathcal{S}$  gli spostamenti elementari rigido-sferici che il sistema può compiere sono  $\infty^3$  (3 componenti di  $d\omega$ )

## Moto con asse scorrevole su sé stesso - Moto Elicoidale

Un moto con asse scorrevole su sé stesso è un moto rigido in cui  $\mathcal{S}$  ruota attorno ad un asse  $a^*$  ad esso solidale, che a sua volta scorre su un asse fisso  $a$ .

$\Omega x_1 x_2 x_3$  fissa,  $O y_1 y_2 y_3$  solidale:  $\Omega, O \in a^* \equiv a \equiv y_3 \equiv x_3$

Osservazione: è un particolare moto rototraslatorio in cui il moto componente traslatorio è rettilineo e parallelo all'asse di quello rotatorio.

Equazioni cartesiane dei moti con asse scorrevole su sé stesso:  $\begin{cases} x_1(t) = y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t) \\ x_2(t) = y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t) \\ x_3(t) = x_{03}(t) + y_3 \end{cases}$

Osservazione: Ogni punto  $P \in \mathcal{S}$  si muove su una superficie cilindrica di equazione  $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = R^2$

Atto di moto:  $\underline{v}_P(t) = \underline{v}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-A)$   $A \in a^*$ ,  $\underline{v}(t) = \underline{v}_A(t)$ ,  $\underline{\omega}(t) \parallel a^*$  vale  $\forall A \in a^*$

In particolare,  $\underline{v}_P(t) = \underline{v}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O)$   $O \in a^*$ ,  $\underline{v}(t) = \underline{v}_O(t)$ ,  $\underline{\omega}(t) = \dot{\varphi} e_3 \quad \forall P$

Spostamento elementare:  $dP = d\underline{v} + d\varphi \times (P-A)$   $A \in a^*$ ,  $\varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$

Fissata una posizione di  $\mathcal{S}$  gli spostamenti elementari dei moti con asse scorrevole su sé stesso che il sistema può compiere sono  $\infty^2$  (1 componente di  $d\underline{v}$  e di  $d\varphi$  lungo  $e_3$ )

In particolare, si ha un moto elicoidale se, oltre ad essere un moto con asse scorrente su sé stesso, si ha:

$$\frac{|\underline{\tau}(t)|}{|\underline{\omega}(t)|} = \text{costante}$$

Inoltre, se  $\underline{\tau}$  e  $\underline{\omega}$  sono vettori costanti, il moto si dice elicoidale uniforme: sono uniformi entrambi i moti componenti (traslatorio e rotatorio).

## Teorema di Mozzi

Afferma che l'atto di moto più generale di un corpo rigido è elicoidale. Non sarà prodotta alcuna dimostrazione, ma è particolarmente importante nello studio dei moti piani.

In ogni istante in cui  $\underline{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ , tutti i punti per cui la velocità è nulla o parallela ad  $\underline{\omega}(t)$  appartengono ad una retta  $a(t)$ , parallela ad  $\underline{\omega}(t)$ , detta Asse di Mozzi o Asse di moto o Asse di istantanea rotazione. Inoltre, tutti i punti di  $a(t)$  hanno la stessa velocità  $\underline{\tau}(t)$ , velocità istantanea di rotazione, nulla o parallela a  $\underline{\omega}(t)$ .

$$\underline{v}_P(t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-A) \quad A \in a(t), \quad \underline{\tau}(t) \parallel \underline{\omega}(t) \parallel a(t)$$

Vale in ogni moto, bisogna valutare come varia l'asse di Mozzi.

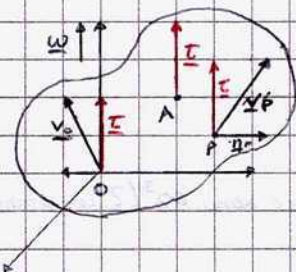
Osservazione: Poiché, in ogni moto rigido,  $\underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O)$ , si ha:

$$I_C = \underline{v}_P(t) \cdot \underline{\omega}(t) = \underline{v}_O(t) \cdot \underline{\omega}(t) \quad \forall P, O \quad (\text{il prodotto è invariante}) \quad \text{Invariante cinematico}$$

• Negli istanti  $t$  in cui  $\underline{\omega}(t) \neq \mathbf{0}$ , si ha:

$$\frac{\underline{v}_P(t) \cdot \underline{\omega}(t)}{|\underline{\omega}(t)|} = \frac{\underline{v}_O(t) \cdot \underline{\omega}(t)}{|\underline{\omega}(t)|} \quad \forall P, O$$

Dunque, è costante la componente normale della velocità di ogni punto nella direzione di  $\underline{\omega}(t)$ .



Fissato  $t: \underline{\omega}(t) \neq \mathbf{0} : \underline{v}_P(t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\eta}_P(t) ; \underline{\tau}(t) \parallel \underline{\omega}(t) \forall P, \underline{v}_P(t) \uparrow \underline{\eta}_P(t)$   
"cresce al crescere di"

$$\text{Asse di Mozzi: } a(t) = \left\{ P \in S : |\underline{v}_P| = \min_{P \in S} |\underline{v}_P| \right\} = \left\{ P \in S : \underline{\eta}_P = \mathbf{0} \right\} = \left\{ P \in S : \underline{v}_P(t) = \underline{\tau}(t) \right\}$$

Ricordando che  $\underline{v}_P(t) = \underline{\tau}(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-A) ; A \in a(t), \underline{\tau}(t) \parallel \underline{\omega}(t) \parallel a(t)$ , osserviamo che le leggi di variazione dello asse di Mozzi e dei vettori  $\underline{\tau}(t), \underline{\omega}(t)$  caratterizzano i moti:

- Moti Traslatori  $\Leftrightarrow \underline{\omega}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$
- Moti rotatori attorno ad un asse fisso  $a \Leftrightarrow a(t) \equiv a, \underline{\tau}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$
- Moti rigidi sterici di centro  $O \Leftrightarrow O \in a(t), \underline{\tau}(t) = \mathbf{0} \quad \forall t$  \*
- Moti rototraslatori/elicoidali: condizione più generica

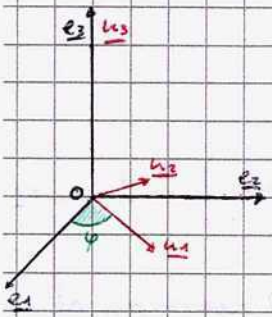
La direzione dell'asse varia istante per istante!

$$\# \underline{v}_P(t) = \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad O \in a(t) \quad \text{con } \underline{\omega} \text{ variabile anche in direzione, oltre che in modulo}$$

# Moti Rigidi Piani

Sono moti particolari in cui ogni piano  $\pi_s$  solidale ad  $\mathcal{S}$  e parallelo a un piano  $\pi_c$  fisso (piano direttore) si muove restando sovrapposto a sé stesso.

$\Omega$   $x_1 x_2 x_3$  fissa ( $e_i$ ),  $O y_1 y_2 y_3$  solidale ( $u_i$ )



Tra tutti i piani  $\pi_s$ , scegliamo quello sovrapposto a  $\pi_c$ :

Otteniamo in questo modo una schematizzazione più semplice:

$O x_1 x_2 x_3$  fissa ( $e_i$ ):  $\pi_c \equiv O x_1 x_2$

$O y_1 y_2 y_3$  solidale ( $u_i$ ):  $\pi_s \equiv O y_1 y_2$

$\pi_c \parallel \pi_s$ ,  $O x_3 \parallel O y_3$  ( $e_3 = u_3$ )

$\varphi \in (\pi_c, \pi_s) = \widehat{x_1 y_1}$ ,  $x_{0,3}(t) = 0 \quad \forall P, \forall t$

Equazioni Cartesiani dei Moti Piani

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{0,1}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t) \\ x_2(t) = x_{0,2}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t) \\ x_3(t) = y_3 \end{cases} \quad \forall P \in \mathcal{S}$$

	$u_1$	$u_2$	$u_3$
$e_1$	$\cos \varphi$	$-\sin \varphi$	0
$e_2$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	0
$e_3$	0	0	1

osservazione: Ogni punto  $P \in \mathcal{S}$  descrive su un qualunque piano  $\pi_s \parallel \pi_c$  una traiettoria congruente e parallela a quella descritta dalla sua proiezione ortogonale su  $\pi_c$  e con la medesima legge oraria. Allora, ci si può limitare allo studio del moto sul piano fisso  $\pi_c$  del piano  $\pi_s$  al quale resta sovrapposto.

Equazioni cartesiane dei Moti Piani:

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{0,1}(t) + y_1 \cos \varphi(t) - y_2 \sin \varphi(t) \\ x_2(t) = x_{0,2}(t) + y_1 \sin \varphi(t) + y_2 \cos \varphi(t) \\ x_3(t) = 0 \end{cases} \quad \forall P \in \mathcal{S} \cap \pi_c \quad (\text{sovrapposto nei prossimi})$$

$\uparrow \Rightarrow \dot{x}_3(t) = 0 \Rightarrow v_P \perp \omega \Rightarrow I_c = 0$

Atto di Moto:  $(v_P(t) \parallel \pi_c)$   $v_P(t) = v_0(t) + \omega(t) \times (P - O)$   $v_0(t) \parallel \pi_c$ ,  $\omega(t) = \dot{\varphi} e_3$

Spostamento elementare piano:  $dP = dO + d\varphi \times (P - O)$   $dO \parallel \pi_c$ ,  $\varphi = \varphi e_3$   $\forall P$

Fissata una <sup>configurazione</sup> posizione di  $\mathcal{S}$ , gli spostamenti elementari rigidi piani che il sistema può compiere sono  $\infty^3$  (2 componenti dello spostamento di  $O$  e 1 componente di  $d\varphi$ )

Osservazione: Ogni atto di moto rigido piano è o traslatorio parallelamente a  $\pi_c$  o rotatorio attorno a un asse ortogonale a  $\pi_c$ .

• Se  $d\varphi \neq 0$ , si hanno spostamenti elementari rotatori attorno ad un asse  $a \perp \pi_c$ :

$$\exists C \in \pi_s: dC = 0 \Leftrightarrow \exists C \in \pi_s: \begin{cases} dx_{C1} = dx_{01} - d\varphi(x_{C2} - x_{02}) = 0 \\ dx_{C2} = dx_{02} + d\varphi(x_{C1} - x_{01}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \exists C \in \pi_s: \begin{cases} x_{C1} = x_{01} - \frac{dx_{02}}{d\varphi} \\ x_{C2} = x_{02} + \frac{dx_{01}}{d\varphi} \\ x_{C3} = 0 \end{cases} \quad \left( \begin{array}{l} \text{ottenuti dai prodotti} \\ \text{vettoriali (da cui i segni } \pm \end{array} \right)$$

Definiamo centro istantaneo di rotazione il punto  $C \equiv \left( x_{01} - \frac{dx_{02}}{d\varphi}, x_{02} + \frac{dx_{01}}{d\varphi}, 0 \right)$ , evento  $dC = 0$ ,  $C \in \mathcal{S} \cap \pi_c$

Se  $\exists C$ , allora:  $d\varphi \neq 0 \Rightarrow dP = d\varphi \times (P - C)$   $dC = 0$ ,  $\varphi = \varphi e_3$   $\forall P$

Consideriamo una retta  $a$  dello spazio solidale passante per  $C$  (istante per istante) e ortogonale a  $\pi_c$ ; allora:

$\forall A \in a$ ,  $dA = d\varphi \times (A - C) \Rightarrow \forall A \in a$ ,  $dA = 0$   $a$  = asse istantaneo di rotazione



Dunque, è possibile considerare un qualunque punto dell'asse di rotazione per la definizione dello spostamento elementare:

$$dP = d\varphi \times (P-A) \quad A \in a, \varphi = \varphi \mathbf{z} \quad \forall P \quad \Rightarrow \text{moto rotatorio attorno all'asse istantaneo di rotazione (se } \omega \neq 0)$$

Se  $d\varphi = 0$ , si hanno banalmente spostamenti elementari traslatori paralleli a  $\pi$ :

$$d\varphi = 0 \Rightarrow dP = dO \forall P$$

Al medesimo risultato si può giungere imponendo l'annullarsi dell'invariante cinematico ( $v_P(t) \parallel \pi, \omega(t) \perp \pi$ )

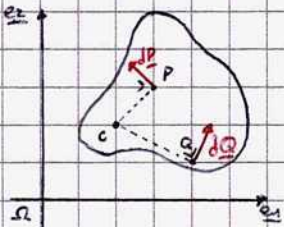
$$I_c = v_P(t) \cdot \omega(t) = 0 \quad \forall P \Rightarrow \begin{cases} \text{se } \omega(t) = 0, & v_P(t) = \underline{v}(t) \\ \text{se } \omega(t) \neq 0, & v_P(t) = \omega \times (P-A), A \in a \end{cases} \quad \forall P$$

Da cui si evince:

$$dP \cdot d\varphi = 0 \quad \forall P \Leftrightarrow \begin{cases} \text{se } d\varphi = 0 & dP = dO \\ \text{se } d\varphi \neq 0 & dP = d\varphi \times (P-A) \quad A \in a \end{cases} \quad \forall P \quad \text{da cui l'asserto.}$$

### Teorema di Chasles

In un moto rigido piano le perpendicolari agli spostamenti elementari passano per il centro istantaneo di rotazione  $C$ , che è un punto proprio se  $d\varphi \neq 0$  e un punto improprio se  $d\varphi = 0$ .



$$\text{Se } d\varphi \neq 0, \quad dP = d\varphi \times (P-C) \Rightarrow dP \cdot (P-C) = 0 \Leftrightarrow dP \perp (P-C)$$

Se  $d\varphi = 0, \quad dP = dO \forall P \Rightarrow$  le rette ortogonali alle traiettorie formano un fascio di rette parallele.

Proprietà dei Centri Istantanei di Rotazione:

① Se  $\exists O: dO = 0 \Rightarrow O \equiv C$

"Dim":  $0 = dO = d\varphi \times (O-C)$   
 $d\varphi \neq 0, (O-C) \parallel \pi; (O-C) \parallel d\varphi \perp \pi \Rightarrow (O-C) = 0 \Leftrightarrow O \equiv C$

② Se  $\exists P_1, P_2: dP_1 = dP_2 = 0 \Rightarrow dP = 0 \forall P$

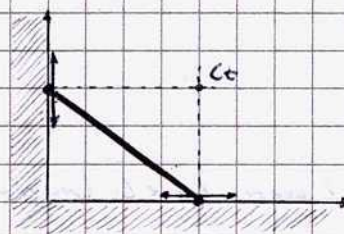
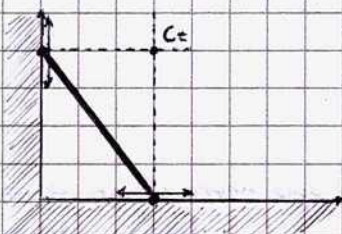
"Dim": Dalla ①  $\Rightarrow P_1 \equiv C \Rightarrow 0 = dP_2 = d\varphi \times (P_2 - P_1) \Rightarrow d\varphi \parallel (P_2 - P_1)$   
 MA  $(P_2 - P_1) \parallel \pi, d\varphi \perp \pi \Rightarrow d\varphi = 0 \Rightarrow dP = 0$

③ Se  $\forall P_1, P_2: dP_1 = dP_2, \exists P_3: dP_3 = 0 \Rightarrow dP = 0 \forall P$

"Dim": Dalla ①  $\Rightarrow P_3 \equiv C \Rightarrow dP_1 = d\varphi \times (P_1 - P_3), dP_2 = d\varphi \times (P_2 - P_3)$   
 $dP_1 = dP_2 \Rightarrow 0 = d\varphi \times [(P_1 - P_3) - (P_2 - P_3)] = d\varphi \times (P_1 - P_2) \Rightarrow d\varphi = 0$   
 $d\varphi \times (P_1 - P_2) = 0 \Rightarrow d\varphi \parallel (P_1 - P_2), (P_1 - P_2) \parallel \pi, d\varphi \perp \pi \Rightarrow dP = 0 \forall P$

### Esempio

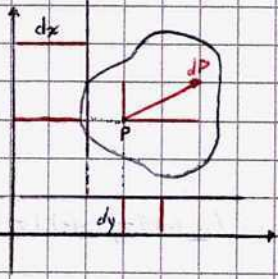
Si consideri un'asta AB vincolata a muoversi lungo due guide  $Ox$  e  $Oy$  tra loro ortogonali. Ad ogni istante il centro istantaneo di rotazione  $C_i$  è dato dall'intersezione delle normali alle traiettorie nei punti A e B.



VARIA NEL TEMPO!

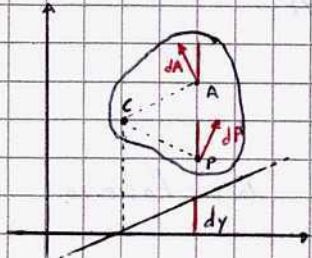
Dopo aver definito i moti piani generici, caratterizzeremo moti piani particolari:

## Diagrammi di Spostamento



In un moto piano traslatorio, i diagrammi delle componenti di  $dP$  sono rappresentate da rette parallele agli assi:

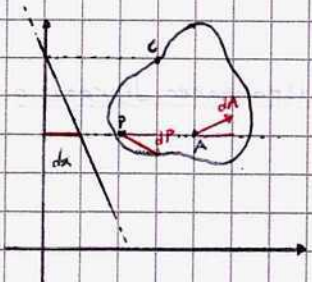
$$dP = \text{costante} \forall P \Leftrightarrow \begin{cases} dx = c_x \forall P \\ dy = c_y \end{cases} \rightarrow \text{costanti}$$



In un moto rotatorio i diagrammi delle componenti di  $dP$  sono rappresentati da rette perpendicolari fra loro:

$$dP = d\varphi \times (P-C) \forall P \quad C \text{ centro, } \varphi = \varphi k$$

$$d\varphi \times (P-C) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & d\varphi \\ x-x_c & y-y_c & 0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} dx = -d\varphi(y-y_c) \\ dy = d\varphi(x-x_c) \end{cases} \forall P$$



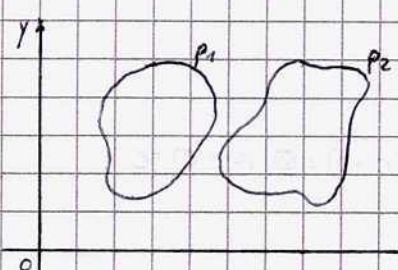
Le componenti  $dx$  dipendono solo da  $y$  e, quindi, tutti i punti che hanno la stessa ordinata  $y$  (cioè che appartengono alla stessa retta  $y = \text{costante}$ ) hanno lo stesso spostamento  $dx$ :

$$dx_P = dx_Q \forall P, Q \in r: y = \text{cost.}$$

(Analogamente,  $dy_P = dy_Q \forall P, Q \in s: y = \text{cost.}$ )

## Centri Assoluti e Centri Relativi

Consideriamo un sistema di due corpi rigidi  $S = \{S_1, S_2\}$  in moto piano rispetto al piano  $\mathcal{T}$



Consideriamo i due sistemi:

- $M_1$  moto rigido piano di  $S_1$  rispetto a  $\mathcal{T}$     •  $M_2$  moto rigido piano di  $S_2$  rispetto a  $\mathcal{T}$
- $\mathcal{T}_{S_1}$  piano solidale ad  $S_1$ , sovrapposto a  $\mathcal{T}$     •  $\mathcal{T}_{S_2}$  piano solidale ad  $S_2$ , sovrapposto a  $\mathcal{T}$
- $C_1$  centro assoluto di rotazione    •  $C_2$  centro assoluto di rotazione
- $\omega_1 = \dot{\varphi}_1 k$  velocità di rotazione di  $S_1$     •  $\omega_2 = \dot{\varphi}_2 k$  velocità di rotazione di  $S_2$

Consideriamo inoltre:  $M_{12}$  moto relativo di  $S_1$  rispetto ad  $S_2$  (moto rigido piano di  $\mathcal{T}_{S_1}$  rispetto al piano (fisso)  $\mathcal{T}_{S_2}$ )

Logicamente, vale l'analogia per  $M_{21}$

$C_{12}$  centro relativo del moto  $M_{12}$  (sia proprio che improprio)

$\omega_{12} = \dot{\varphi}_{12} k$  velocità di rotazione di  $S_1$  rispetto ad  $S_2$

Il centro relativo  $C_{ij}$  del moto  $M_{ij}$  può essere:

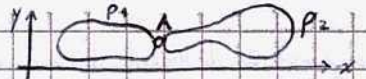
- Proprio: punto del piano solidale  $\mathcal{T}_{S_i}$  che ha spostamento nullo rispetto a  $\mathcal{T}_{S_j}$
- Improprio: direzione del fascio di rette parallele di direzione normale a quella di  $dP$ .

Proprietà dei centri assoluti e relativi:

•  $C_{12} = C_{21} \Leftrightarrow \omega_{12} = -\omega_{21}$

• Teorema di Allineamento dei centri: i centri  $C_{11}$  e  $C_{22}$  (propri o impropri) sono sempre allineati col centro relativo  $C_{12}$

In particolare, se due corpi sono vincolati in un punto A, allora  $C_{12} = A = C_{21}$   
 I centri relativi coincidono con A, che ha spostamento relativo sempre nullo.

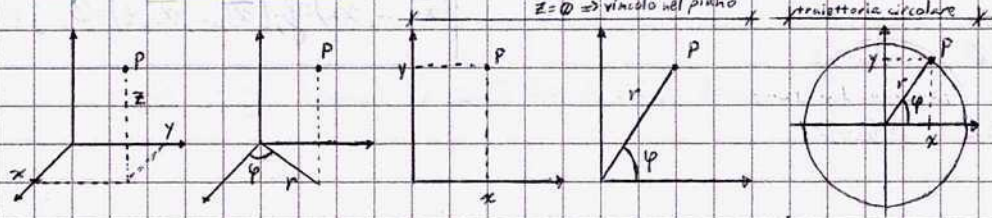


## Grado di Libertà e Coordinate Lagrangiane

Per parlare di grado di libertà occorre innanzitutto definire i vincoli: un vincolo è una qualunque limitazione imposta a priori alle posizioni (vincolo olonomo) o alle velocità (vincolo anolonomo) di un sistema meccanico S.

La presenza di vincoli riduce il numero (grado di libertà) di funzioni (coordinate lagrangiane) atte ad individuare in ogni istante la configurazione del sistema.

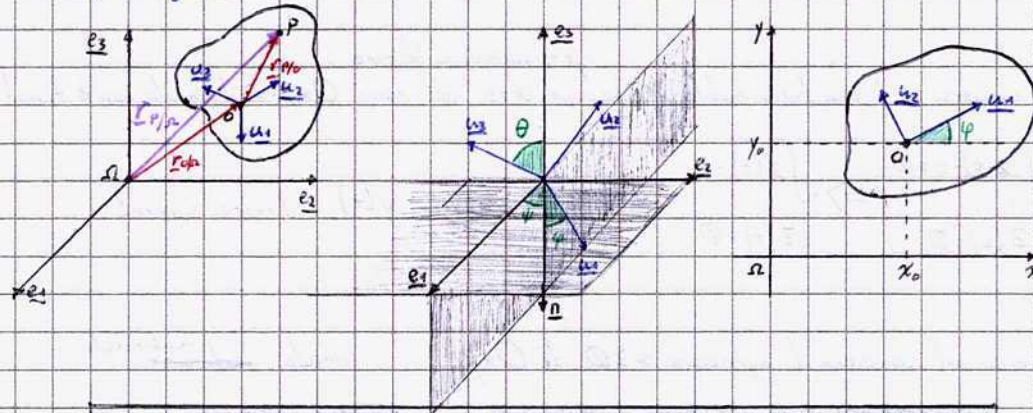
### Esempi: Punto Materiale



Possibili gradi di libertà di un punto materiale	
$n=3$	$(x(t), y(t), z(t)) ; (r(t), \varphi(t), \theta(t))$
$n=2$	$(x(t), y(t)) ; (r(t), \varphi(t))$
$n=1$	$\varphi(t) \quad [x(t)=r \cos \varphi(t), y(t)=r \sin \varphi(t)]$

Dall'esempio riportato si osserva che è possibile scegliere coordinate lagrangiane diverse; la trasformazione di coordinate lagrangiane non altera il grado di libertà.

### Corpo rigido



### Possibili gradi di libertà di un corpo rigido

Sistema libero	$n=6$	$(x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t), A_{h1k1}(t), A_{h2k2}(t), A_{h3k3}(t))$
		$(x_{01}(t), x_{02}(t), x_{03}(t), \varphi(t), \psi(t), \theta(t))$
Punto fisso	$n=3$	$(A_{h1k1}(t), A_{h2k2}(t), A_{h3k3}(t)) ; (\varphi(t), \psi(t), \theta(t))$
Moto Piano	$n=3$	$(x_0(t), y_0(t), \varphi(t))$

### Sistema meccanico libero di M corpi rigidi ed N punti materiali

$$S = \{ S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N \}$$

$$n = 6M + 3N : \{ (x_{0ih}, \varphi_i, \psi_i, \theta_i)_{i=1, \dots, M, h=1, 2, 3} \} \cup \{ x_{Pjh}, j=1, \dots, N, h=1, 2, 3 \}$$

È il caso più generico, con un sistema di più corpi rigidi e punti materiali, tutti liberi di muoversi!

La presenza di vincoli si traduce analiticamente in sistemi: se il sistema è composto da sole equazioni, si parlerà di vincolo bilaterale, altrimenti se sono anche presenti disequazioni si dirà vincolo unilaterale.

§ sistema libero:  $n$  (grado di libertà),  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  (coordinate lagrangiane)

"eq. del vincolo": 
$$\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) = 0 & i=1, \dots, s & \text{bilaterale} \\ f_j(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n, t) \leq 0 & j=1, \dots, r & \text{unilaterale} \end{cases}$$

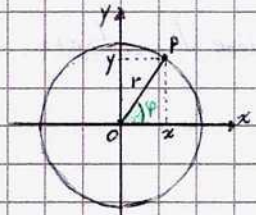
Se vincoli fissi: 
$$\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) = 0 & i=1, \dots, s \\ f_j(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n) \leq 0 & j=1, \dots, r \end{cases} \leftarrow \nexists t \text{ (fissi)}$$

Posizioni di Confine algebrici e ordinaria  
 $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n): f_j(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, t) = 0, j=1, \dots, r$

Se vincoli elementari: 
$$\begin{cases} g_i(x_1, \dots, x_n, t) = 0 & i=1, \dots, s \\ f_j(x_1, \dots, x_n, t) \leq 0 & j=1, \dots, r \end{cases}$$

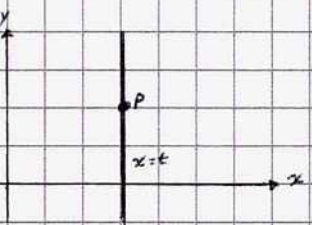
dipendono dal tempo  $\Rightarrow$  NON SONO FISSI (in generale)  $\nexists \dot{x}$  (non condiz.)

Esempi



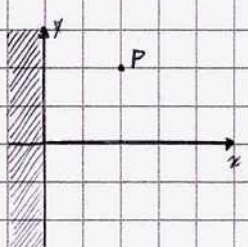
Punto vincolato a muoversi su di una circonferenza di raggio  $r$  nel piano  $Oxy$

equazioni di vincolo: 
$$\begin{cases} x^2(t) + y^2(t) = r^2 \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = r \cos(\phi(t)) \\ y(t) = r \sin(\phi(t)) \end{cases} \quad n=1, \text{ ovvero } \phi(t)$$



Punto vincolato a muoversi su di una barra mobile di equazione  $x=t$  nel piano  $Oxy \Rightarrow$  il vincolo non è fisso! eq. cartesiana del moto

equazioni di vincolo: 
$$\begin{cases} x(t) - t = 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = t \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad n=1, \text{ ovvero } y(t) \text{ il resto è zero!}$$



Punto vincolato a muoversi nel semipiano di equazione  $x \geq 0$  di  $Oxy$

vincolo ~~unilaterale~~ unilaterale

equazione e disegnazione del vincolo: 
$$\begin{cases} x(t) \geq 0 \\ z(t) = 0 \end{cases} \quad n=2, \text{ ovvero } (x(t), y(t))$$

Si definiscono dunque le posizioni di confine per  $x(t)=0$  e le posizioni ordinarie se  $x(t) > 0$

⚠ Un vincolo unilaterale comporta solo una restrizione alla regione che il sistema può occupare, ma non influisce sul grado di libertà del sistema.

Abbiamo visto di recente grado di libertà e coordinate lagrangiane di un Sistema rigido di  $M$  corpi rigidi ed  $N$  punti materiali:

$$\mathcal{S} = \{ \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M, P_1, \dots, P_N \}$$

grado di libertà  $6M+3N$   
coordinate lagrangiane  $x_1(t), \dots, x_m(t)$

eq. del vincolo

Supponiamo ora che il sistema  $\mathcal{S} = \{ \mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M, P_1, \dots, P_N \}$  sia vincolato con  $s$  vincoli olonomi, fissi e bilaterali  $g_i = (x_1, \dots, x_m)$ ; si presentano due possibili distinzioni: le equazioni del vincolo sono tutte lineari (ad esempio, il vincolo si muove lungo una linea retta) oppure fra le equazioni del vincolo ve n'è almeno una non lineare.

In entrambi i casi, bisogna ricordare/imporre che  $s \leq m$ , in modo tale da garantire una certa mobilità al sistema.

• Equazioni di vincolo lineari (s ≤ m)

→ sistema di s eq. in m incognite

$$g_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + b_i \quad i=1, \dots, s$$

$$s' = \text{rank}(A_{ij})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \infty^{m-s'} \text{ soluzioni; grado di libert\`a } n=m-s' \\ \text{coordinate lagrangiane } x_1(t), \dots, x_n(t) \\ x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h=1, \dots, s' \end{cases}$$

• Equazioni di vincolo lineari o non lineari (s ≤ m)

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i=1, \dots, s$$

$$s' = \text{rank} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \end{pmatrix} \forall t$$

→ matrice Jacobiana

$$\Rightarrow \begin{cases} \infty^{m-s'} \text{ soluzioni; grado di libert\`a } n=m-s' \\ \text{coordinate lagrangiane } x_1(t), \dots, x_n(t) \\ x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h=1, \dots, s' \end{cases}$$

### Teorema di Jacobi

Siano le funzioni  $g_i$  continue, con le loro derivate parziali prime in un dominio  $D \subseteq \mathbb{R}^m$  e sia  $J$  la matrice jacobiana

$$J = \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \quad i=1, \dots, s, \quad j=1, \dots, m \quad \text{tale che } \forall t, \quad s' = \text{rank} \left( \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right) \Big|_{x_0} \quad \forall x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0) \in D$$

Allora,  $s'$  tra le  $s$  equazioni sono indipendenti e  $\forall (x_1^0, \dots, x_m^0) \in D$  esiste un intorno  $I_0$  nel quale il sistema pu\`o ricondursi alla forma:

(restanti coordinate lagrangiane)

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_{n+1}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \\ \dots \\ x_m = x_m(x_1(t), \dots, x_n(t)) \end{cases} \quad \text{con } n=m-s' \quad [x_h(t) = x_h(x_1(t), \dots, x_n(t)), \quad h=1, \dots, s']$$

In altre parole, la matrice jacobiana verifica analiticamente l'indipendenza di sistemi d'equazioni non lineari: se le equazioni sono lineari infatti le derivate parziali compongono esattamente la matrice  $a_{ij}$ .

Come sappiamo, come fatto per il punto materiale, si possono scegliere tra le varie coordinate una qualsiasi n-pla di funzioni in corrispondenza biunivoca con  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ . Ad esempio, storicamente si usa la n-pla  $q_1, \dots, q_n$ :

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_n) \quad i=1, \dots, n$$

Questi nuovi ed arbitrari parametri prendono il nome di coordinate lagrangiane del sistema S. Ad ogni scelta delle  $q_1, \dots, q_n$  corrisponde una configurazione possibile del sistema, ovvero compatibile con i vincoli. Tuttavia, le configurazioni effettivamente assunte dal sistema dipenderanno dalle forze agenti su di esso e dalle condizioni iniziali.

### Spostamenti Virtuali (ed elementari)

Sia  $S$  un sistema libero,  $S = \{S_1, \dots, S_M, P_1, \dots, P_N\}$ ;  $m = 6M + 3N$  e  $(q_1(t), \dots, q_m(t))$  una m-pla di coordinate lagrangiane;  $r(t) = r(q_1(t), \dots, q_m(t)) \forall P \in S$

Definita  $S_0$  una posizione del sistema individuata dalla m-pla di coordinate  $q_i$ , possiamo definire:

Spostamento Elementare:  $dP = dr(q_1(t), \dots, q_m(t)) = \sum_{j=1}^m \frac{\partial r}{\partial q_j} \Big|_{S_0} dq_j \quad \forall P \in S$

In particolare, si ha:

$$\begin{cases} dP = dO_i + dq_i x(P-O_i) \quad \forall P \in S_i \quad i=1, \dots, M \\ dP_j = dx_{j1} e_1 + dx_{j2} e_2 + dx_{j3} e_3 \quad j=1, \dots, N \end{cases}$$

gli spostamenti elementari possibili di  $S_0$  a partire dalla configurazione  $S_0$  sono  $\infty^{6M+3N}$

logicamente, detti spostamenti devono essere compatibili coi gradi di libertà e, dunque, coi vincoli: si soddisfa il sistema ottenuta differenziando le equazioni di vincolo, ottenendo gli spostamenti possibili.

Esempio: Per un punto  $P$  libero di muoversi si ha:

$$\underline{r} = x_i \underline{i} + y_j \underline{j} + z_k \underline{k} \Rightarrow dP = dx_i \underline{i} + dy_j \underline{j} + dz_k \underline{k}$$

Gli spostamenti elementari di  $S$  a partire da una configurazione  $S_0$  devono essere compatibili coi vincoli (spostamenti possibili); supponendo che al sistema siano imposti  $s$  vincoli bilaterali:

$$g_i(x_1, \dots, x_m) = 0, \quad i = 1, \dots, s$$

$$[g_i(x_1, \dots, x_m, t) = 0]$$

$$dg_i = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{S_0} dx_j$$

$$\left[ dg_i = \sum_{j=1}^m \left. \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \right|_{S_0} dx_j + \left. \frac{\partial g_i}{\partial t} \right|_{S_0} dt \right]$$

• Per un punto  $P$  vincolato a muoversi sul piano  $z=0$ , gli spostamenti elementari possibili sono:

$$dP = dx_i \underline{i} + dy_j \underline{j}$$

• Per un punto  $P$  vincolato a muoversi sulla barra mobile di equazione  $x=t$  nel piano  $Oxy$  si ha:

$$\begin{cases} g_1 \equiv x-t=0 \\ g_2 \equiv z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dg_1 \equiv dx-dt=0 \\ dg_2 \equiv dz=0 \end{cases} \Rightarrow dP = dt \underline{i} + dy_j \underline{j}$$

La velocità di ogni punto  $P$  del sistema  $S$  ad  $n$  gradi di libertà è data dalla relazione:

$$\underline{\dot{r}} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \quad \text{dove le } (q_1, \dots, q_n) \text{ sono le velocità lagrangiane, e dunque si ha che:}$$

$$dP = \underline{\dot{r}} dt = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_j} \right|_{S_0} dq_j + \left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial t} \right|_{S_0} dt \quad \forall P \in S$$

## Spostamento Virtuale

Sia  $S$  un sistema vincolato ad  $n$  gradi di libertà, si definisce spostamento virtuale ogni spostamento  $dS$  di  $S$  a partire da una configurazione  $S_0$  che sia compatibile con i vincoli quali essi sono in quell'istante ( $t=t^*$  fissato).

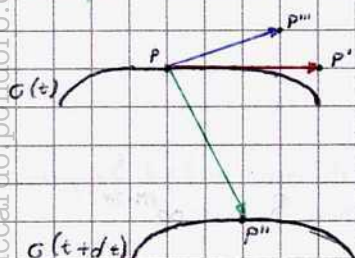
In altre parole, sono spostamenti compatibili con i vincoli supposti fissi nell'istante considerato.

Ne segue che, se un sistema è soggetto ai soli vincoli fissi, gli spostamenti virtuali coincidono con quelli possibili.

Inoltre, si osserva che viene adottato il simbolo  $\delta$ : a differenza degli spostamenti possibili, non si deriva il tempo:

$$\delta P = \delta \underline{r} = \sum_{j=1}^n \left. \frac{\partial \underline{r}}{\partial q_j} \right|_{S_0, t=t^*} \delta q_j \quad \forall P \in S \quad [r = r(q_1, \dots, q_n, t)]$$

Esempio: Consideriamo un punto  $P$  vincolato a muoversi su di una superficie  $G(t)$  in moto:



$PP'$  spostamento virtuale ma non possibile  
→ tangente alla superficie

$PP''$  spostamento possibile ma non virtuale  
→ vincoli fissi, sarebbe impossibile

$PP'''$  spostamento né possibile né virtuale

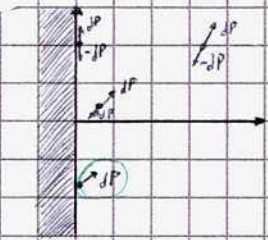
$G(t+dt)$  DEVE essere assegnato per definire gli spostamenti virtuali/possibili.

⚠ Se le condizioni iniziali e le forze applicate non sono date, si possono solo determinare le posizioni possibili.

Uno spostamento virtuale  $\delta S$  si dice reversibile se è virtuale anche lo spostamento opposto  $-\delta S$ .  
In presenza di vincoli bilaterali, tutti gli spostamenti virtuali sono reversibili.

### Esempio

Un punto  $P$  è vincolato a muoversi nel semipiano  $x \geq 0$  del piano  $Oxy$ .



Il punto è soggetto ai seguenti vincoli:

$z = 0$  vincolo bilaterale;  $x \geq 0$  vincolo unilaterale entrambi fissi!

Poiché i vincoli sono fissi, gli spostamenti virtuali coincidono con quelli ~~non~~ possibili:

$$dP = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}; \quad dx \geq 0$$

Se il punto  $P$  occupa una posizione di confine ( $x = 0$ ) allora esistono infiniti spostamenti reversibili e non reversibili; al contrario, se il punto occupa una posizione ordinaria ( $x > 0$ ), tutti gli spostamenti sono reversibili.

### Lavoro Elementare

Sarà molto utilizzato nell'indagine sull'equilibrio del sistema e nella valutazione delle reazioni vincolari.

Il lavoro elementare della forza  $\underline{F}$  applicata in un punto  $P$  corrispondente allo spostamento infinitesimo  $dP$  del suo punto di applicazione è:

Lavoro Elementare  $dL = \underline{F} \cdot dP$

Logicamente, esso sarà positivo, negativo o nullo a seconda dell'angolo formato da  $\underline{F}$  e  $dP$ .

Per un sistema (discreto, ma per estensione vale anche in un sistema continuo) di forze applicate  $\mathcal{S} = \{(P_i, F_i), i=1, \dots, n\}$  nei punti  $P_i$  di un sistema meccanico  $\mathcal{S}$  il lavoro elementare è:

$$dL = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot dP_i$$

Se il sistema meccanico è sottoposto ad uno spostamento rigido  $dP = dO + d\varphi \times (P-O)$  si ha:

$$dL = \underline{R} \cdot dO + \underline{M}_O \cdot d\varphi$$

$$\underline{R} = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i; \quad \underline{M}_O = \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \underline{F}_i$$

il lavoro di un sistema sottoposto a uno spostamento rigido non dipende dal dettaglio delle forze, ma dai risultanti <sup>forze</sup> e momenti risultanti.

Ne segue che se si sostituisce ad  $\mathcal{S}$  un sistema ad esso equivalente,  $dL$  non cambia.

Dim ricordando che  $dP = dO + d\varphi \times (P-O)$ :

$$dL = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot [dO + d\varphi \times (P_i - O)] = \sum_{i=1}^n (\underline{F}_i \cdot dO + \underline{F}_i \cdot d\varphi \times (P_i - O)) =$$

↳ Applico la proprietà ciclica del prodotto misto

$$= \left( \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \right) \cdot dO + \sum_{i=1}^n (d\varphi \cdot (P_i - O) \times \underline{F}_i) =$$

$$= \left( \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \right) \cdot dO + \left( \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \underline{F}_i \right) \cdot d\varphi$$

$\underline{R}$                                    $\underline{M}_O$

Se il sistema di forze è equivalente a zero,  $dL = 0$

Nel caso in cui al sistema meccanico sottoposto a uno spostamento rigido sia applicato un sistema continuo di forze:

$$\mathcal{S} = \{(P, \underline{F}(P)) : P \in \Omega\}$$

$$dL = \int_{\Omega} (\underline{F}(P) \cdot dP) d\Omega = \underline{R} \cdot dO + \underline{M}_O \cdot d\varphi$$

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{F}(P) d\Omega$$

$$\underline{M}_O = \int_{\Omega} (P-O) \times \underline{F}(P) d\Omega$$

In un sistema di forze parallele,  $\mathcal{D} = \{ (P_i, F_i) : F_i = f_i \cdot \underline{u}, i=1, \dots, r \}$  a risultante  $\underline{K} = \sum_{i=1}^r f_i \underline{u} = f \underline{u}$  non nullo coincide a prescindere dallo spostamento infinitesimo  $dP_i$  dell'insieme dei punti di applicazione, con il lavoro del risultante del sistema applicato nel centro  $C$ :

$$dL = \underline{R} \cdot dC$$

Se  $\underline{R} \neq \underline{0}$ , allora il sistema meccanico ammette il centro  $C$ :

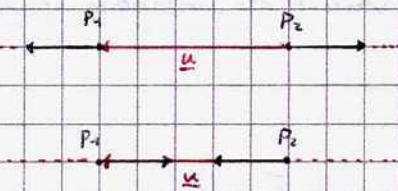
$$(C-O) = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^r f_i (P_i - O) \quad \text{con } O \text{ punto fissato}$$

$$dC = \frac{1}{f} \sum_{i=1}^r f_i dP_i \quad \left[ dL = \sum_{i=1}^r \underline{F}_i \cdot dP_i = \underline{u} \cdot \sum_{i=1}^r f_i dP_i = \underline{u} \cdot f dC = f \underline{u} \cdot dC \right]$$

↑ DIM

Nel caso di un sistema di due forze direttamente opposte:  $\mathcal{D} = \{ (P_1, \underline{F}), (P_2, -\underline{F}) : \underline{F} = f \underline{u}, i=1, 2 \}$

$$\mathcal{D} = \{ (P_1, \underline{F}), (P_2, -\underline{F}) \} : \underline{F} = f \underline{u} \quad \underline{u} = \text{vers.}(P_1 - P_2)$$



La grandezza  $f$ , comune alle due forze, va presa col segno  $\pm$  a seconda che esse siano rivolte entrambe verso l'esterno (repulsive) [l'interno (attrattive)] del segmento  $P_1 P_2$

Il lavoro di due forze direttamente opposte, corrispondente ad uno spostamento infinitesimo qualsiasi dei due punti di applicazione  $P_1$  e  $P_2$  è uguale al prodotto della variazione di distanza  $dr$  tra questi per la grandezza  $f$  comune alle due forze (presa con il segno  $\pm$  a seconda che esse abbiano carattere repulsivo o attrattivo).

$$dL = f dr \quad r = |P_1 P_2|$$

$$r^2 = (P_1 - P_2)^2 \Rightarrow 2r dr = 2(P_1 - P_2) \cdot d(P_1 - P_2) \Rightarrow dr = \underline{u} \cdot (dP_1 - dP_2)$$

$$dL = \underline{F} \cdot dP_1 - \underline{F} \cdot dP_2 = f \underline{u} \cdot (dP_1 - dP_2) = f \underline{u} \cdot dr$$

### Sistemi Isostatici, Iperstatici, Labili

Labili  $\Rightarrow$  equilibrio non assicurato, dipende dalle sollecitazioni esterne

Anche in questo caso, inizieremo a descrivere il fenomeno partendo dal caso più generico, per poi studiare casi più specifici attraverso la definizione dei vincoli nel piano.

Consideriamo dunque un sistema libero  $\mathcal{S} = \{ S_1, \dots, S_m, P_1, \dots, P_N \}$  con grado di libertà  $m = 6M + 3N$  e  $x_1(t), \dots, x_m(t)$  una m-pla di coordinate lagrangiane:

$$\underline{r}(t) = \underline{r}(x_1(t), \dots, x_m(t)) \quad \forall P \in \mathcal{S}$$

Sia  $S_0$  una configurazione del sistema; gli spostamenti virtuali del sistema a partire da  $S_0$  si scrivono:

$$\delta P = \sum_{j=1}^m \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_j} \Big|_{S_0} \delta x_j \quad \forall P \in \mathcal{S}$$

Che, al variare delle  $x_j$ , forniscono gli  $\infty^m$  spostamenti che il sistema  $\mathcal{S}$  può compiere a partire da  $S_0$ .

Supponendo ora che al sistema siano imposti  $s$  vincoli bilaterali  $[g_i = (x_1, \dots, x_m, t), i=1, \dots, s]$ , si osserva che gli spostamenti possibili, ovvero quelli compatibili con i vincoli, sono tutti e soli quelli per cui i differenziali  $\delta x_j$  verificano le equazioni ottenute differenziando a  $t$  costante le equazioni di vincolo  $g_i$  appena scritte, ovvero: soddisfanno la relazione alla prossima pagina.



Come sappiamo, la presenza di vincoli bilaterali limita gli spostamenti che il sistema  $S$  avrebbe potuto compiere se fosse stato un sistema libero; tali limitazioni sono individuate osservando quante equazioni di vincolo sono indipendenti. L'ovvero determinando un'analisi delle posizioni che il sistema può assumere durante il moto. Abbiamo osservato in precedenza che il numero di vincoli bilaterali indipendenti abbassa il grado di libertà  $[ \infty^{m-s} ]$ , occorrono  $m-s$  funzioni del tempo perché le restanti siano scrivibili in funzione delle prime. Lo stesso discorso sarà applicato anche in dinamica: la definizione del grado di libertà attraverso il rango della matrice Jacobiana e il Teorema di Jacobi può essere effettuata nell'intera regione di moto.

In questo caso, partendo da una configurazione, vedremo se essa consente degli spostamenti o se sono completamente interdetti.

Nell'analisi seguente, potrebbero essere presenti delle  $\delta x_j$  cui corrisponderebbero spostamenti non consentiti dai vincoli; per tradurre ciò analiticamente occorre considerare i  $dg_i$ , da cui ricaviamo le relazioni in  $\delta x_j$  da verificare in ogni possibile spostamento.

$$\sum_{j=1}^m \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \Big|_{S_0} \delta x_j = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \Big|_{S_0} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \Big|_{S_0} \delta x_m = 0 \\ \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} \Big|_{S_0} \delta x_1 + \dots + \frac{\partial g_s}{\partial x_m} \Big|_{S_0} \delta x_m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_c \delta x = 0$$

*note:* tutti valutati in  $S_0$ ,  $a, t$  fissato  $\Rightarrow$  coefficienti numerici  
 $S_0 \Rightarrow a, t$  costante, vincoli fissi; non calcolare  $g_i$ .  
 $\rightarrow$  noti perché in  $S_0$   
 $\rightarrow$   $M_c$  ha rango massimo  
 $\rightarrow$  è sempre compatibile

Dove la matrice  $s \times m$   $M_c$  è la matrice cinematica:

$$M_c = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_s}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_s}{\partial x_m} \end{pmatrix} \Big|_{S_0} ; \quad \delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \dots \\ \delta x_m \end{pmatrix} \Rightarrow M_c \delta x = 0 \text{ con prodotto righe-colonne}$$

Osservazione: Con abuso di linguaggio, è possibile dire che il sistema lineare sia composto da equazioni di vincolo: esse informano di come sono limitati i moti, che devono verificare il sistema.

La matrice cinematica caratterizza, attraverso il suo rango  $s' = \text{rank } M_c$  e in relazione ai gradi di libertà  $m$  ( $mz$ ) del sistema libero  $S$ , la statica e, dunque, l'equilibrio del sistema a partire dalla configurazione  $S_0$  (es. se ammette solo soluzioni tale che  $\delta x_j = 0 \forall j$ , il sistema è equilibrato; ciò dipende da  $M_c$  e, dunque, dalla natura dei vincoli).

La dimensione e il rango di  $M_c$  sono riferiti anche in relazione ad  $m$  (colonne): limitatamente all'equilibrio, definiamo:

Grado di Labilità  $l = m - s' \geq 0$  Grado di iperstaticità  $i = s - s' \geq 0$

$\text{rank}(M_c)$   $\rightarrow$  vincoli indipendenti  
 $\rightarrow$  numero di vincoli

sottolinea il numero di spostamenti virtuali possibili in presenza di vincoli ( $l=0 \Rightarrow$  equilibrato) evidenzia quanti vincoli sono dipendenti

Perché il rango di  $M_c(s)$  rappresenta il numero di equazioni indipendenti tra le  $s$  equazioni di vincolo nelle  $m$  incognite  $\delta x_j$  si ha che:

$l=0$ ( $m=s'$ ) $\Rightarrow \delta x = 0 \Leftrightarrow S P = 0 \forall P \in S$	$l=0, i=0$	sistema isostatico
$l>0$ ( $m>s'$ ) $\Rightarrow \exists \infty^l$ soluzioni; $\delta x = 0 \vee \delta x \neq 0$	$l=0, i>0$	sistema iperstatico $i$ -volte
	$l>0, i \geq 0$	sistema $l$ -volte labile con $i$ -vincoli dipendenti

$l=0$  isostatico o  $i$ -volte iperstatico  $\leftrightarrow S$  è in equilibrio in  $S_0 \forall \Sigma a$  sollecitazione attiva  $\Rightarrow$  assegnata  $\Sigma a$  determinare le reazioni vincolari ( $0i$ )

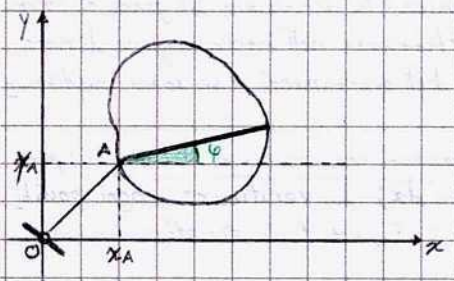
$l>0$   $l$ -volte labile  $\Leftrightarrow$   $\left[ \begin{array}{l} \text{assegnata } S_0 \text{ determinare le } \Sigma a \text{ per cui } S_0 \text{ è di equilibrio} \\ \text{assegnate } \Sigma a \text{ determinare, se esistono configurazioni di equilibrio} \end{array} \right] \Rightarrow$  Se  $S_0$  è di equilibrio, determinare le reazioni vincolari ( $0i$  soluzioni)

Pendolo esterno

molto esterno!

coordinate lagrangiane del sistema libero:  $x_A, y_A, \varphi$   $m=3$   $S_0 = (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$

angolo formato con l'asse x = una retta  
secondo S



equazioni di vincolo:  $g(x_A, y_A, \varphi) = x_A^2 + y_A^2 - r^2 = 0$   $s=1$

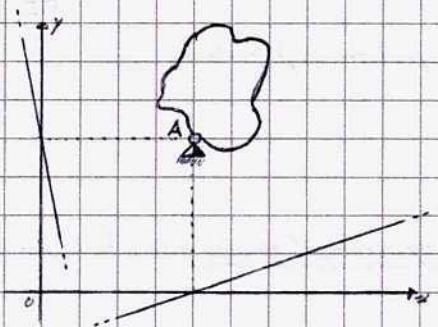
$\frac{\partial g}{\partial x_A} \Big|_{S_0} \delta x_A + \frac{\partial g}{\partial y_A} \Big|_{S_0} \delta y_A + \frac{\partial g}{\partial \varphi} \Big|_{S_0} \delta \varphi = 0 \Leftrightarrow \bar{x}_A \delta x_A + \bar{y}_A \delta y_A = 0$

Dunque,  $l = m - s' = 2$ ;  $i = s - s' = 0 \Rightarrow$  il sistema è 2 volte labile:

$\bar{x}_A \delta x_A + \bar{y}_A \delta y_A = 0 \Leftrightarrow SA \cdot e = 0$ ,  $e = \text{vers}(A-O)$

Cerniera Esterna

Impone che sia nulla lo spostamento del punto su cui agisce  $\Rightarrow dA = 0$



coordinate lagrangiane del sistema libero:  $x_A, y_A, \varphi \Rightarrow m=3$ ;  $S_0 = (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$

equazioni di vincolo:  $dA = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases} \quad \left\{ \begin{array}{l} g_1(x_A, y_A, \varphi) = x_A - \bar{x}_A = 0 \\ g_2(x_A, y_A, \varphi) = y_A - \bar{y}_A = 0 \end{array} \right. \quad s=2$

Diagrammi di spostamento

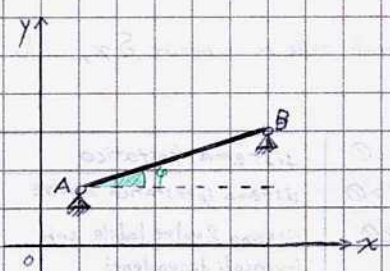
$dA = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s' = 2 \Rightarrow l = 1 \quad i = 0$   $S$  è 1 volta labile

$dP = dA + d\varphi \times (P-A) \Rightarrow dP = d\varphi \times (P-A) \Leftrightarrow A$  è centro istantaneo di rotazione

$\begin{cases} dx_P = -d\varphi (y_P - \bar{y}_A) \\ dy_P = d\varphi (x_P - \bar{x}_A) \end{cases} \quad \forall P \in S$

Esempio

Consideriamo un'asta AB di lunghezza L, e sia  $\varphi$  l'angolo che B-A forma con l'asse delle x.



Il sistema libero ha coordinate lagrangiane  $x_A, y_A, \varphi \Rightarrow m=3$ ,  $S_0 = (\bar{x}_A, \bar{y}_A, \bar{\varphi})$   
Obiettivo è scrivere le eq. di vincolo in funzione delle coordinate lagrangiane.

$A = (x_A, y_A)$ ;  $B = (x_A + L \cos \varphi, y_A + L \sin \varphi)$

eq. di vincolo:  $\begin{cases} dA = 0 \\ dB = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0 \\ dx_B = 0, dy_B = 0 \end{cases} \Rightarrow s=4$

$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_A = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \approx \begin{cases} g_1 = x_A - \bar{x}_A = 0 \\ g_2 = y_A - \bar{y}_A = 0 \\ g_3 = x_B - \bar{x}_B = 0 \\ g_4 = y_B - \bar{y}_B = 0 \end{cases}$   
 $\rightarrow \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{x}_A + L \cos \varphi \\ \bar{y}_A + L \sin \varphi \end{pmatrix}$

ma le equazioni di vincolo così scritte non determinano un immediato riferimento a spostamenti rigidi e/o elementari.

Per scrivere le equazioni di vincolo in funzione delle coordinate lagrangiane, ricordiamo l'equazione generica degli spostamenti elementari:  $dB = dA + d\varphi \times (B-A)$

$$dB \cdot \underline{j}_A + d\varphi \times (B-A) \Rightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_A - d\varphi(y_B - y_A) = 0 \\ dy_A + d\varphi(x_B - x_A) = 0 \end{cases} \quad s=4$$

Da cui si ottiene la matrice cinematica:

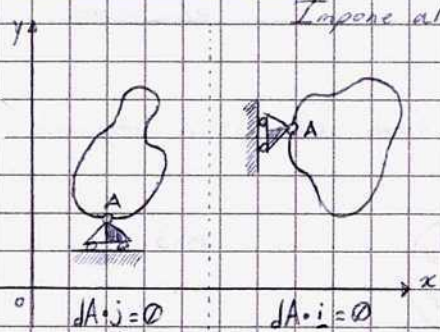
$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -(y_B - y_A) \\ 0 & 1 & (x_B - x_A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & \varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -L \sin \varphi \\ 0 & 1 & L \cos \varphi \end{pmatrix} \quad s'=3$$

La matrice cinematica ha 3 colonne, 4 righe  $\Rightarrow$  il rango massimo è 3; le prime tre righe formano un minore di ordine tre diverso da 0

$$l = m - s' = 0 \\ i = s - s' = 1$$

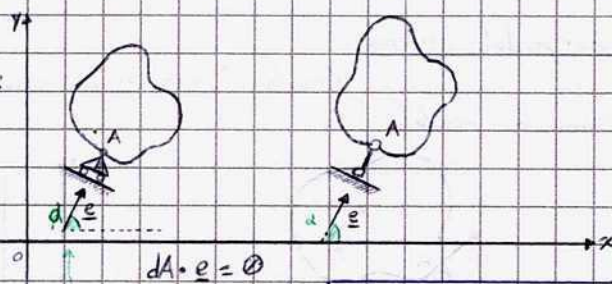
il sistema è una volta iperstatico.

### Carrello bilaterale esterno



avere l'asse carrello...  
Impone al punto su cui agisce una spintina parallela alla retta di scorrimento.

in (direzione) generale:



$$dA \cdot \underline{j} = 0 \Leftrightarrow dy_A = 0$$

$$dA \cdot \underline{i} = 0 \Leftrightarrow dx_A = 0$$

$$dA \cdot \underline{e} = 0 \Leftrightarrow dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

logicamente non sarà mai tutto nullo

dal punto di vista cinematico, il carrello bilaterale impone le stesse limitazioni del pendolo semplice.

Osservazione: L'equazione  $dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0$ , che riduce il vincolo carrello, è la stessa di quella del vincolo pendolo.

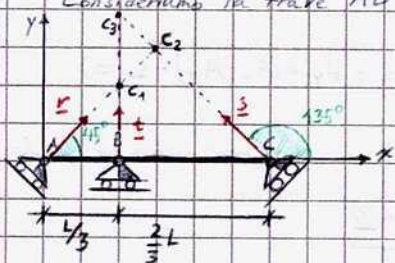
In tutti i casi (ovvero, per qualunque direzione) si ha:

$$\left. \begin{matrix} m=3 \\ s=s'=1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} l=2 \\ i=0 \end{matrix}$$

$S$  è 2 volte labile

### Esempio

Consideriamo la trave AB vincolata con carrelli bilaterali in A, B, C.



$$\hat{A} = 45^\circ \Rightarrow \underline{r} = \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}$$

$$\hat{C} = 135^\circ \Rightarrow \underline{s} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}$$

$\Delta$ : Si ricorda che gli angoli sono SEMPRE ORIENTATI (per questo  $\hat{C} = 135^\circ$ )

$$\text{eq. vincoli: } \begin{cases} dA \cdot \underline{r} = 0 \\ dB \cdot \underline{j} = 0 \\ dC \cdot \underline{s} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} dx_A + \frac{\sqrt{2}}{2} dy_A = 0 \\ dy_B = 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} dx_C + \frac{\sqrt{2}}{2} dy_C = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A + dy_A = 0 \\ dy_B = 0 \\ -dx_C + dy_C = 0 \end{cases} \quad s=3$$

Desidero esprimere tutte le equazioni in funzione delle tre ( $m=3$ ) coordinate lagrangiane scelte; in questo caso scegliamo come coordinate normali (=lagrangiane)  $x_A, y_A, \varphi$ .

Ricordando che  $dP = dA + d\varphi \times (P-A)$ , otteniamo:

$$\begin{cases} dx_A + dy_A = 0 \\ dy_A + d\varphi(x_C - x_A) = 0 \\ [dx_A - d\varphi(y_C - y_A)] - [dy_A + d\varphi(x_C - x_A)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A + dy_A = 0 \\ dy_A + \frac{L}{3} d\varphi = 0 \\ dx_A - dy_A - L d\varphi = 0 \end{cases}$$

Dunque,  $M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & \varphi \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & L/3 \\ 1 & -1 & L \end{pmatrix}$

$s' = 3$

$l = m - s' = 0$   
 $i = s - s' = 0$

la trave è isostatica

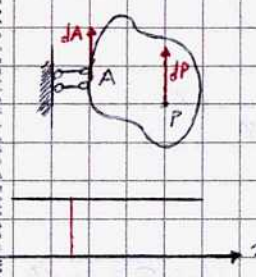
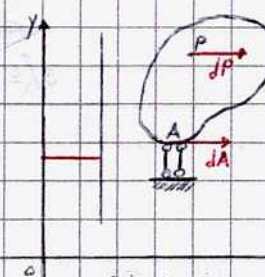
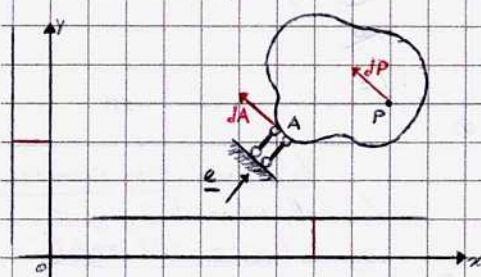
Malgrado la possibilità di usare il teorema di Chasles, sarà utile studiare la matrice cinematica, poiché la sua trasposta è una matrice utile per lo studio delle reazioni vincolari.

L'equilibrio della trave potrà essere verificato anche tramite la teoria dei centri (teorema di Chasles, i centri sono la  $\Pi$  delle rette  $L$  alla spost.);  
 $\exists C_1, C_2 : dC_1 = dC_2 = 0 \Rightarrow dP = 0 \forall P$  ovvero il sistema non è suscettibile di alcun moto.

Doppio pendolo esterno

Vincola il punto su cui agisce ad avere spostamenti traslatori nella direzione ortogonale

a quella dei pendoli:



$m=3$

$dA \cdot e = 0, d\varphi = 0$

individua la direzione dello spostamento (e alla dir. del pendolo)  
↳ impone spostamenti traslatori

$\begin{cases} dA \cdot j = 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} dA \cdot i = 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} dA \cdot e = 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A \cos \alpha + dy_A \sin \alpha = 0 \\ d\varphi = 0 \end{cases} \quad s=2$

$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$s'=2$

$\Rightarrow l=1$   
 $i=0$

1 volta labile

Osservazione: Il vincolo doppio pendolo equivale al vincolo pendolo agente su due punti distinti  $A_1$  e  $A_2$  (contigui)

Dim.

$\begin{cases} dA_1 \cdot e = 0 \\ dA_2 \cdot e = 0 \end{cases} \Rightarrow dA_2 = dA_1 + d\varphi \times (A_2 - A_1) \Rightarrow dA_2 \cdot e = dA_1 \cdot e + d\varphi \times (A_2 - A_1) \cdot e = 0$

$\Rightarrow d\varphi \times (A_2 - A_1) \cdot e = 0 \Leftrightarrow$

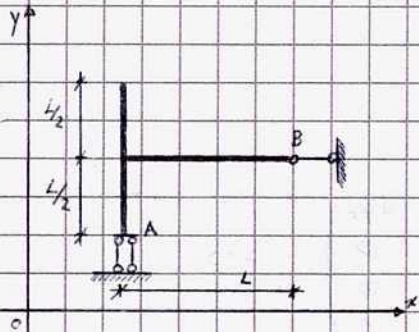
<prop. ciclica del prodotto misto>

$\Leftrightarrow (A_2 - A_1) \times e \cdot d\varphi = 0 \Rightarrow d\varphi = 0$

stesso  $\varphi$  e len. +  $dP = dA_1 \cdot VP \Rightarrow dP \cdot e = 0 \forall P$   
direzione  $\leftarrow dA_2 \cdot e = 0$

### Esempio

Si consideri la trave a T vincolata con un pendolo in B e un doppio pendolo in A



coordinate lagrangiane:  $x_A, y_A, \varphi_z$

$m=3$

eq. di vincolo:

$$\begin{cases} dA \cdot j = 0 \\ d\varphi = 0 \\ dB \cdot i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0 \\ d\varphi = 0 \\ dx_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0 \\ d\varphi = 0 \\ dx_A - d\varphi_z(y_B - y_A) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dy_A = 0 \\ d\varphi = 0 \\ dx_A = 0 \end{cases}$$

coord. lagr

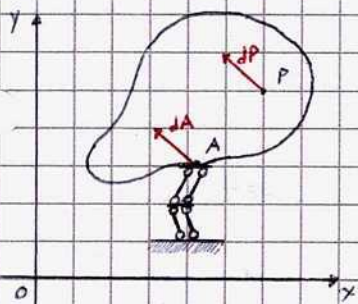
$S=3$

$$M_G = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$s'=s=3 \Rightarrow l=0, i=0$   $S$  è isostatico

### Doppio-doppio pendolo esterna

Vincola il corpo rigido ad avere solo spostamenti traslatori



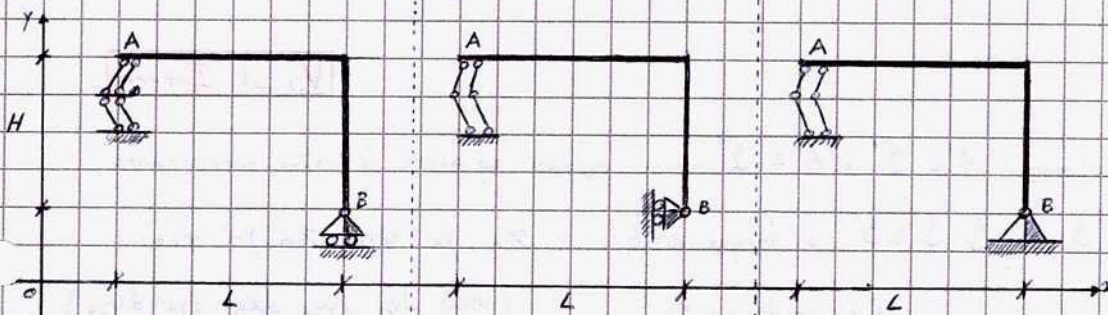
$dP = dA \quad VP; \quad d\varphi = 0 \quad m=3, s=1$

$$M_G = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$s'=1 \Rightarrow l=2, i=0$   $S$  è due volte labile (2)

### Esempio

Analisi cinematica di più travi:



coordinate lagrangiane:  $x_A, y_A, \varphi_z$

$m=3$

eq. vinc.  $\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases}$  ①

$\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \end{cases}$  ②

$\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases}$  ③

①  $\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \quad M_G = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s=2 \\ s'=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l=1 \\ i=0 \end{matrix} \quad S \text{ è 1 volta labile}$

Poiché  $dP = dA \quad VP$  e  $dy_B = 0$  si ha che  $dyp = 0 \quad VP$  e gli spostamenti virtuali dipendono da  $dx_B$  e il centro è improprio nella direzione dell'asse  $y$ .

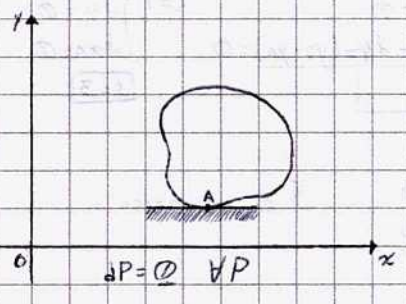
②  $\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \end{cases} \quad M_G = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s=2 \\ s'=2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l=1 \\ i=0 \end{matrix} \quad S \text{ è 1 volta labile}$

Analogamente in questo caso si ha che  $dx_B = 0 \quad VP$  e gli spostamenti virtuali dipendono da  $dy_B$  e il centro è improprio nella direzione dell'asse  $x$ .

③  $\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases}$   $M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$   $s=3 \Rightarrow r=0$   $S$  è isostatica  
 $s'=3 \Rightarrow i=0$

Incastro (esterno)

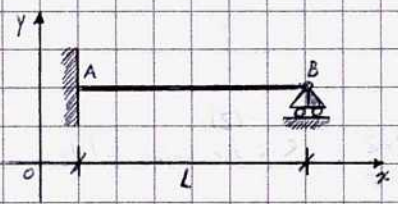
Vincola il corpo rigido ad avere spostamento nullo



$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ d\varphi_z = 0 \end{cases}$   $m=3$   $s=3$   $M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$   $s'=3$

$\Rightarrow r=0$   $S$  è isostatica  
 $i=0$

Esempio: Analisi cinematica della trave vincolata con un incastro in A e un carrello in B.



coordinate lagrangiane  $x_A, y_A, \varphi_z$   $m=3$

equazioni di vincolo

$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ d\varphi_z = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ d\varphi_z = 0 \\ dy_A + d\varphi_z(x_B - x_A) = 0 \end{cases}$   $s=4$

$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix}$   $s=4$   $s'=3$

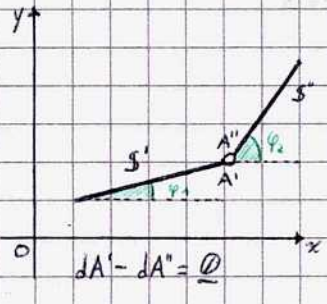
$l = m - s' = 0$   
 $i = s - s' = 1$

$S$  è 1 volta iperstatico

**Vincoli Interni**

Cerniera interna

Vincola i punti  $A' \in S'$  e  $A'' \in S''$  su cui agisce ad avere lo stesso spostamento



Si ha  $S = S' \cup S''$  e dunque  $m=6$

$x_{A'}, y_{A'}, \varphi_{z1}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{z2}$

$dA' - dA'' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} dx_{A'} - dx_{A''} = 0 \\ dy_{A'} - dy_{A''} = 0 \end{cases}$

$M_c = \begin{pmatrix} dx_{A'} & dy_{A'} & d\varphi_{z1} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{z2} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

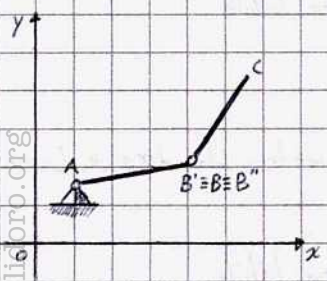
$s=2$   
 $s'=2$

$l = m - s' = 4$   
 $i = s - s' = 0$

$S$  è 4 volte labile

Esempio

Analisi cinematica della struttura vincolata con una cerniera esterna in A e una cerniera interna in B



$S = S' \cup S''$   $m=6$

$x_A, y_A, \varphi_{z1}, x_B, y_B, \varphi_{z2}$

eq. di vincolo

$\begin{cases} dA = 0 \\ dB' - dB'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \end{cases}$

$s=4$

$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{z1} & dx_B & dy_B & d\varphi_{z2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_B - y_A & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$   $s'=4$

$l=2$   
 $i=0$

$S$  è 2 volte labile

Come abbiamo visto, è possibile utilizzare la teoria dei centri per determinare il grado di labilità e quello di iperstaticità di una struttura; entriamo nel dettaglio:

In ogni spostamento rigido piano rotatorio ( $d\varphi \neq 0$ ) si ha:

$\forall P \in S, dP = d\varphi \times (P-C)$ , con  $C$  centro  $\Rightarrow (dx_c, dy_c, d\varphi)$  spostamenti elementari

- Se  $\exists C_1, C_2: C_1 \neq C_2, dC_1 = dC_2 = 0 \Rightarrow dP = 0 \forall P$   $\underline{L=0}$  (spostamento rotatorio, nullo  $dP \Rightarrow$  il sistema non può avere spostamenti elementari e dunque non è labile)
- Se  $\exists! C_1: dC_1 = 0, \underline{L=1}$  ( $d\varphi$ ) (non è noto  $C$ , come nel esempio) con i carrelli
- Se è nota la retta  $r: C \in r \Rightarrow \underline{L=2}: (x_c, d\varphi)$  oppure  $(y_c, d\varphi)$  (non è noto  $C$ , come nel esempio) con i carrelli
- Negli altri casi in cui non si hanno informazioni su  $C, \underline{L=3}$  ( $dx_c, dy_c, d\varphi$ )

Nota  $\underline{L}$  dalla teoria dei centri, sapendo che  $m=3$  ed essendo  $s$  noto dalle equazioni di vincolo, si ha (con  $\underline{L}=m-s, i=s-s'$ )

$m-s = \underline{L} - i \Rightarrow i = \underline{L} - (m-s)$  è dunque identificabile  $s'$  senza rank( $M_c$ )

Se  $S = S_1 \cup S_2$  ( $m=6$ ) e se i centri assoluti  $C_1, C_2$  e quello relativo  $C_{12}$  sono noti:

- Se  $C_1, C_2$  e  $C_{12}$  **NON** sono allineati, il sistema è globalmente rigido (ovvero è rigido in ogni sua parte e nel complesso).
- Se  $C_1, C_2$  e  $C_{12}$  sono allineati,  $S$  è suscettibile di spostamenti rigidi piani e, dunque,  $S$  è labile (risultato conforme al Teorema di Allineamento dei centri):

È una generalizzazione su strutture con almeno 2 corpi rigidi: se è composta da più corpi si si riconduce a coppie a due a due di corpi rigidi componenti la struttura.

$(C_{21}) C_{12}: dC_{12} = d\varphi_1 \times (C_{12}-C_1) - d\varphi_2 \times (C_{12}-C_2) = 0 \Rightarrow d\varphi_1 \times (C_{12}-C_1) = d\varphi_2 \times (C_{12}-C_2) \quad \underline{L=1}$

In fatti:

↳ l'equazione identifica il moto relativo in cui il centro relativo è fisso  $\Rightarrow dC_{12} = 0$ .

$\forall P \in S_1, dP = d\varphi_1 \times (P-C_1) \Rightarrow dS_1 \leftrightarrow d\varphi_1$

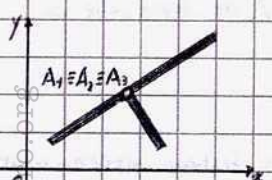
Se conoscessi il moto assoluto di  $S_1$  (e, dunque,  $\varphi_1 = \varphi_1$ ),  $C_2$  e  $C_{12}$  l'intero sistema  $S$  sarebbe noto: basta trovare  $\varphi_2$ , gli eventuali parametri liberi determinano la labilità del sistema.

$\forall P \in S_2 \Rightarrow dP$  noto dal moto di  $S_1, C_2, C_{12}$

- Se sono noti  $C_2$  e  $C_{12}, \underline{L=2}: (x_{c1}, d\varphi_{12})$  oppure  $(y_{c1}, d\varphi_{12})$  tale che  $C_1$  appartenga alla retta per  $C_2$  e  $C_{12}$
- Se è noto solo  $C_2, \underline{L=4}$ : rispetto al caso precedente occorrono anche le coordinate di  $C_{12}$
- Se è noto  $C_2$  e la retta  $r: C_{12} \in r \Rightarrow \underline{L=3}$

Nota  $\underline{L}$  dalla teoria dei centri, si ha  $m-s = \underline{L} - i \Rightarrow i = \underline{L} - (m-s)$  e, dunque, la struttura è risolta.

Tornando al vincolo cerniera interna, facciamo un altro esempio: consideriamo un sistema di tre aste con una cerniera interna nel punto  $A$ :



$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3, m=9$  coinc. log:  $x_{A1}, y_{A1}, \varphi_{12}, x_{A2}, y_{A2}, \varphi_{23}, x_{A3}, y_{A3}, \varphi_{30}$

$\begin{cases} dA_1 = dA_2 \\ dA_1 = dA_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_{A1} - dx_{A2} = 0 \\ dy_{A1} - dy_{A2} = 0 \\ dx_{A1} - dx_{A3} = 0 \\ dy_{A1} - dy_{A3} = 0 \end{cases} \quad s=4$

$M_c = \begin{pmatrix} dx_{A1} & dy_{A1} & d\varphi_{12} & dx_{A2} & dy_{A2} & d\varphi_{23} & dx_{A3} & dy_{A3} & d\varphi_{30} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad s'=4 \Rightarrow \underline{L=5} \quad \underline{i=0} \quad S \text{ è 5 volte labile}$

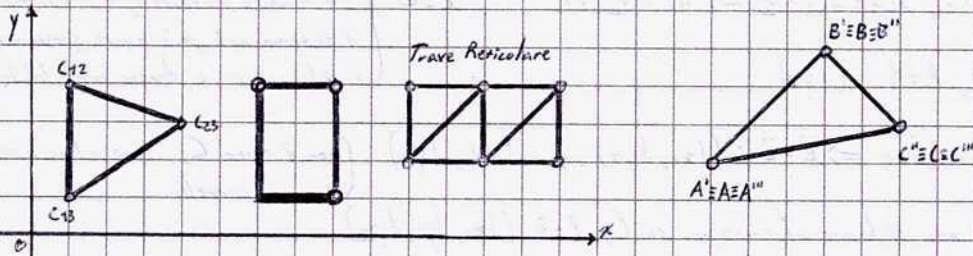
RicercaPolitecnica

In generale, per una cerniera interna in cui convergono  $N$  aste risulta:

$$s = s' = 2(N-1) \Rightarrow l = m - s' = 3N - 2(N-1) \Leftrightarrow \begin{cases} l = N + 2 \\ i = 0 \end{cases}$$

### Caso particolare: Maglie Triangolari

Una maglia triangolare è un sistema costituito da tre travi di trave collegati, in generale, da cerniere interne. Essa è un sistema rigido in quanto i tre centri relativi ( $C_{13}, C_{12}, C_{23}$ ), coincidendo con le tre cerniere, non sono allineati.



#### Analisi Cinematica

Coordinate normali (Lagrangiane):  
 $x_A, y_A, \varphi_1, x_B, y_B, \varphi_2, x_C, y_C, \varphi_3 \Rightarrow m = 9$

Equazioni di vincolo ( $e$ , dunque,  $s$ ) = 6:

- Cerniera interna in A:  $dA' = dA'' = 0 \quad (dx_A' = dx_A'' = 0, dy_A' = dy_A'' = 0)$
- Cerniera interna in B:  $dB' = dB'' = 0 \quad (dx_B' = dx_B'' = 0, dy_B' = dy_B'' = 0)$
- Cerniera interna in C:  $dC' = dC'' = 0 \quad (dx_C' = dx_C'' = 0, dy_C' = dy_C'' = 0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} dx_A - (dx_C - d\varphi_3(y_A - y_C)) = 0; & dy_A - (dy_C + d\varphi_3(x_A - x_C)) = 0 \\ dx_A - d\varphi_1(x_B - x_A) - dx_B = 0; & (dy_A + d\varphi_1(x_B - x_A)) - dy_B = 0 \\ dx_B - d\varphi_2(y_C - y_B) - dx_C = 0; & (dy_B + d\varphi_2(x_C - x_B)) - dy_C = 0 \end{cases}$$

trash in coordinate lagrangiane

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_B & dy_B & d\varphi_2 & dx_C & dy_C & d\varphi_3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & y_A - y_C \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -(x_A - x_C) \\ 1 & 0 & -(y_B - y_A) & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -(y_C - y_B) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_C - x_B & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s' = 6 \\ l = m - s' = 3 \\ i = s - s' = 0 \end{matrix}$$

La struttura è 3 volte labile, ma essendo i centri relativi non allineati non sono possibili spostamenti relativi tra le aste.

Per questi tipi di struttura, si può introdurre il concetto di labilità interna  $l^{int}$ , considerabile come l'indice dei possibili spostamenti relativi tra i corpi costituenti il sistema, indipendentemente dalla presenza di vincoli esterni.

Per un sistema meccanico composto da  $N$  travi collegate mediante vincoli interni si ha  $l^{int} = l - 3$

Dim

$m, l$  sono legati a un osservatore posto in un riferimento fisso

$m^{int}, l^{int}$  invece sono legati a un osservatore in un riferimento solidale ad una delle travi, ne segue che ne "visualizza"  $N-1$

$$\text{Ciò implica che: } \begin{matrix} m^{int} = 3(N-1) \\ l^{int} = 3(N-1) - s' \end{matrix} \Rightarrow l^{int} = 3N - 3 - s' = (3N - s') - 3 = l - 3 \quad \square$$

Se  $l^{int} = 0$ , il sistema si dice internamente rigido ( $e$ , dunque, la struttura è internamente isostatica), ne segue che un sistema è rigido ( $\Leftrightarrow$ )  $l^{int} = 0 \Leftrightarrow l = 3$  (si comporta come un unico corpo rigido)

Se  $l^{int} > 0$ , la struttura è internamente labile.

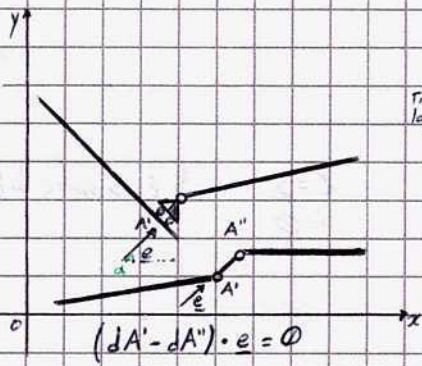
Se si considerano strutture esterne a partire dall'unione di maglie triangolari si ottengono ancora sistemi internamente isostatici.

Logicamente, l'aggiunta di tre vincoli esterni rendono un sistema di questo tipo globalmente isostatico.



## Carrelli e Pendoli Interni

Vincolano il punto di contatto tra i due corpi ad avere spostamento relativo parallelo alla direzione della retta di scorrimento:

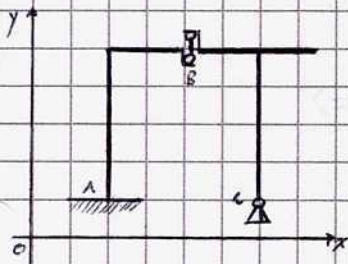


$$S = S' \cup S'' \quad m=6 \quad x_A', y_A', \varphi_{12}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{23} \quad \underline{e} = \cos d_i + \sin d_j$$

Trasf. coord. lagrangiane  $(dx_A' - dx_{A''}) \cos d + (dy_A' - dy_{A''}) \sin d = 0 \Rightarrow s=1$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A' & dy_A' & d\varphi_{12} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{23} \\ \cos d & \sin d & 0 & -\cos d & -\sin d & 0 \end{pmatrix} \quad s'=1 \quad l=5 \quad S \text{ è 5 volte labile} \quad i=0$$

## Esempio



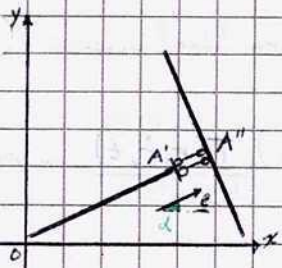
$$S = S_A \cup S_B \quad m=6 \quad x_A, y_A, \varphi_{12}, x_C, y_C, \varphi_{23}$$

$$\begin{cases} dA=0, d\varphi_1=0 \\ (dB' - dB'') \cdot j = 0 \\ dC=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A=0, dy_A=0 \\ d\varphi_{12}=0 \\ dy_B' - dy_B''=0 \\ dx_C=0, dy_C=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A=0, dy_A=0 \\ d\varphi_{12}=0 \\ [dy_B' + d\varphi_{12}(x_B - x_A)] - [dy_C + d\varphi_{23}(x_C - x_B)] = 0 \\ dx_C=0, dy_C=0 \end{cases} \quad s=6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{12} & dx_C & dy_C & d\varphi_{23} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & -(x_B - x_C) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s'=6 \quad l=0 \quad i=0 \quad \text{isostatica}$$

## Doppio Pendolo Interno

Vincola i corpi rigidi su cui agisce ad avere spostamenti relativi traslatori perpendicolari alla direzione dei pendoli



$$S = S' \cup S'' \quad m=6 \quad x_A', y_A', \varphi_{12}, x_{A''}, y_{A''}, \varphi_{23} \quad \underline{e} = \cos d_i + \sin d_j$$

$$\begin{cases} (dA' - dA'') \cdot e = 0 \\ d\varphi_1 - d\varphi_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (dx_A' - dx_{A''}) \cos d + (dy_A' - dy_{A''}) \sin d = 0 \\ d\varphi_{12} - d\varphi_{23} = 0 \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A' & dy_A' & d\varphi_{12} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{23} \\ \cos d & \sin d & 0 & -\cos d & -\sin d & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s=2 \quad l=4 \quad S \text{ è 4 volte labile} \\ s'=2 \quad i=0$$

## Doppio-doppio Pendolo Interno

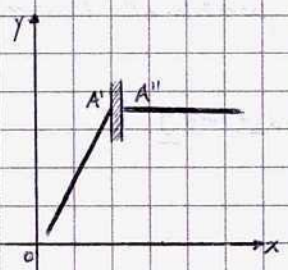
Vincola i corpi rigidi su cui agisce ad avere spostamenti relativi traslatori:

$$d\varphi_{12} - d\varphi_{23} = 0$$

$$m=6, \quad S = S_1 \cup S_2$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A' & dy_A' & d\varphi_{12} & dx_{A''} & dy_{A''} & d\varphi_{23} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s=s'=1 \quad l=5 \quad S \text{ è 5 volte labile} \quad i=0$$

Comporta l'irrigidimento dei due sistemi componenti (internamente rigido.)



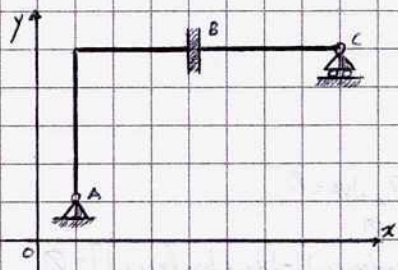
$$\begin{cases} dx_A' - dx_A'' = 0 \\ dy_A' - dy_A'' = 0 \\ d\varphi_{12} - d\varphi_{22} = 0 \end{cases} \quad s=3$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A' & dy_A' & d\varphi_{12} & dx_A'' & dy_A'' & d\varphi_{22} \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad s'=3$$

$$l=3 \quad i=0 \quad \text{\$ è 3 volte labile}$$

int. isostatico

Esempio



$$S = S_1 \cup S_2 \quad m=6 \quad x_A, y_A, \varphi_{12}, x_C, y_C, \varphi_{22}$$

$$\begin{cases} dA=0 \\ dB'=dB'' \\ dC \cdot j = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A=0, dy_A=0 \\ dx_B' - dx_B'' = 0 \\ dy_B' - dy_B'' = 0 \\ d\varphi_{12} - d\varphi_{22} = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx_A=0, dy_A=0 \\ (dx_A - d\varphi_{12}(y_B - y_A)) - (dx_C - d\varphi_{22}(y_B - y_C)) = 0 \\ (dy_A + d\varphi_{12}(x_B - x_A)) - (dy_C + d\varphi_{22}(x_C - x_C)) = 0 \\ d\varphi_{12} - d\varphi_{22} = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases} \quad s=6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{12} & dx_C & dy_C & d\varphi_{22} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_B - y_A & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_B - x_A & 0 & -1 & -(x_B - x_C) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad s'=6 \quad l=0 \quad i=0 \quad \text{\$ è isostatico}$$

Equazioni Cardinali della Statica

Per parlare di statica di un punto o di un sistema (inizieremo da sistemi discreti di punti liberi), occorre dare dei cenni di dinamica:

Assegnata la legge di forza (esistenza forze non costanti, dipendenti da posizione/velocità/tempo)  $F(r, \dot{r}, t)$ , si può definire l'equazione fondamentale della dinamica del punto libero:

$$m \ddot{r} = F(r, \dot{r}, t) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} m \ddot{x} = F_x(r, \dot{r}, t) \\ m \ddot{y} = F_y(r, \dot{r}, t) \\ m \ddot{z} = F_z(r, \dot{r}, t) \end{cases}$$

Ne segue che il problema fondamentale della dinamica è determinare il moto assegnata la legge F. Ognuno degli  $\infty^3$  moti possibili è individuato univocamente assegnando le condizioni iniziali per la posizione e velocità di P all'istante iniziale  $t_0$ :

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0 \quad \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0 \quad \text{dati di Cauchy}$$

Bisogna esprimere l'integrale generale (molto complessa); la classe delle eq. differenziali per le quali è possibile esprimere delle soluzioni è estremamente ristretta.

La Statistica ha invece per oggetto la ricerca di condizioni necessarie e sufficienti affinché una posizione del punto  $P$  sia una soluzione di quiete (ovvero che se  $P$  occupa detta posizione con velocità nulla vi rimane indefinitamente); sono problemi più semplici di quelli di dinamica poiché non prevedono l'integrazione di un'equazione differenziale;

Un punto, soggetto a una forza  $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$  è in quiete nella posizione  $P^*$  se e solo se:

$$\begin{cases} \forall t, \underline{F}(\underline{r}^*, \underline{0}, t) = \underline{0} \\ \underline{r}(0) = \underline{r}^*, \dot{\underline{r}}(0) = \underline{0} \end{cases}$$

Supponendo che il punto  $P$  in quiete nella posizione  $P^*$  sia ivi vincolato (il punto vincolato, <sup>consentita dai vincoli!</sup> occupa la posizione  $P^*$ ) e sotto l'azione della forza attiva  $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$ , si postula che è sempre possibile sostituire ad ogni vincolo cui è soggetto  $P$  una forza  $\underline{\Phi}$ , detta forza vincolare (o reazione vincolare), senza che ciò alteri lo stato di quiete o di moto del punto  $P$ .

⚠ Un punto vincolato si comporta come un punto libero soggetto alle reazioni vincolari oltre che alle forze attive:

$$m\ddot{\underline{r}} = \underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \underline{\Phi} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{cases} m\ddot{x} = F_x(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \Phi_x \\ m\ddot{y} = F_y(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \Phi_y \\ m\ddot{z} = F_z(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t) + \Phi_z \end{cases}$$

In generale, non vi si può associare un'equazione (una legge)

Osservazione: Il sistema non è sufficiente a determinare il moto di  $P$ , poiché contiene 6 funzioni incognite:  $x(t), y(t), z(t), \Phi_x, \Phi_y, \Phi_z$ .

Ciò perché  $\underline{\Phi}$  modella le piccole deformazioni che si accompagnano con la presenza del vincolo (evidenziate a livello microscopico tra il sistema meccanico e il dispositivo che impone il vincolo); estendiamo però la schematizzazione: i corpi rigidi anche ai dispositivi  $\rightarrow$  le reazioni vincolari sono incognite.

Condizione necessaria e sufficiente affinché un punto  $P$  soggetto a vincoli fissi si trovi in equilibrio nella posizione  $P^*$  (consentita dai vincoli) sotto l'azione della sollecitazione attiva  $\underline{F}(\underline{r}, \dot{\underline{r}}, t)$  è che i vincoli siano in grado di esplicare una reazione vincolare  $\underline{\Phi}$  tale che:

$$\begin{cases} \forall t, \underline{F}(\underline{r}^*, \underline{0}, t) + \underline{\Phi} = \underline{0} \\ \underline{r}(0) = \underline{r}^*; \dot{\underline{r}}(0) = \underline{0} \end{cases}$$

Per determinare condizioni pure di equilibrio è necessario stabilire quali reazioni vincolari  $\underline{\Phi}$  possono esplicare i particolari vincoli imposti a  $P$  (leggi dell'attrito); porremo però l'attenzione su vincoli fissi (privi di attrito), per i quali tutte e sole le reazioni vincolari esplicitate sono normali alla superficie con la quale si sta realizzando il vincolo.

Esempio: se  $P$  è vincolato a muoversi su una superficie  $G$  liscia (priva di attrito), essa può applicare su  $P$  in equilibrio su  $G$  tutte e sole le reazioni vincolari  $(P, \underline{\Phi})$  normali a  $G$ .

Generalizzando a un sistema discreto di  $N$  punti materiali  $P_i$  liberi di massa  $m_i$ , ciascuna dei quali è soggetto al risultante delle forze esterne  $\underline{F}_i$  e interne  $\underline{f}_i$ :

$$\mathcal{S} = \{P_1, \dots, P_N\}; \quad \forall P_i \in \mathcal{S}, \quad m_i \ddot{\underline{r}}_i = \underline{F}_i(\underline{r}_i, \dot{\underline{r}}_i, t) + \underline{f}_i$$

\* forze interne degli altri punti del sistema  
equazione di Newton per i punti materiali di un  $\mathcal{S}$  generico

Per il principio di Azione e Reazione, le forze interne sono un sistema equivalente a zero.

$$\sum_{i=1}^N \underline{f}_i = \underline{0} \quad \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{O}) \times \underline{f}_i = \underline{0}$$

Considerando l'intero sistema, ~~o~~ ovvero la sommatoria delle equazioni di Newton per tutti gli  $N$  punti, si ottengono le equazioni cardinali della meccanica in cui, come esplicitato

di seguito, non compaiono  $\underline{f}_i$  né  $M \underline{f}_i$  per quanto detto in precedenza, ma si introducono le cosiddette forze d'inerzia (date da  $-m_i \underline{a}_i$ , hanno le dimensioni di una forza ma non sono forze applicate da cause esterne).

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N m_i \underline{a}_i = \sum_{i=1}^N \underline{F}_i \\ \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{O}) \times m_i \underline{a}_i = \sum_{i=1}^N (\underline{r}_i - \underline{O}) \times \underline{F}_i \end{cases} \equiv \begin{cases} \underline{R}^{(m)} + \underline{R}^{(a)} = \underline{0} \\ \underline{M}_0^{(m)} + \underline{M}_0^{(a)} = \underline{0} \end{cases}$$

⚠ Non contengono forze interne

Se il sistema  $S$  è in quiete, si ottengono le equazioni cardinali della statica (ECS)

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \underline{F}_i = \underline{0} \\ \sum_{i=1}^n (P_i - O) \times \underline{F}_i = \underline{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(e)} = \underline{0} \end{cases}$$

Costituiscono una condizione necessaria, ma NON sufficiente, affinché  $S$  sia in equilibrio in una configurazione  $S_0$ .

Considerando sia forze attive che reazioni vincolari come sollecitazioni esterne, le equazioni cardinali della Statica forniscono una condizione necessaria per l'equilibrio di un sistema  $S$  vincolato:

$$\begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} \end{cases}$$

In generale, le ECS costituiscono una condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio se e soltanto se il sistema meccanico  $S$  è costituito da un unico punto materiale o un solo corpo rigido.

Il sistema libero o vincolato  $S$  è in equilibrio nella configurazione  $S_0$  se e soltanto se (poiché le ECS avv. derivano dal valore  $\forall P_i$ , scegliendo come poli  $O_i \equiv P_i$  si ha  $\underline{M}_{O_i}^{(e)} = \underline{0}$ ):

$$\underline{R}_i^{(e)} = \underline{0} \quad \forall t, \quad \forall i=1, \dots, N \quad \text{dove, se } S \text{ è vincolato, } \underline{R}_i^{(e)} = \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)}$$

Statica del corpo rigido e di sistemi di corpi rigidi

Sia  $S$  un corpo rigido libero o vincolato (a vincoli fissi), soggetto a una sollecitazione esterna  $\Sigma^{(e)}$  e sia  $S_0$  una configurazione del sistema compatibile con i vincoli.

$S_0$  è una configurazione di equilibrio per  $S$  se, sotto l'azione di  $\Sigma^{(e)}$ ,  $S$  permane in  $S_0 \quad \forall t \geq t_0$  se vi è inizialmente posto con atto di moto nullo. Ne segue che  $S_0$  è di equilibrio per  $S$  se e solo se:

$$\begin{cases} \underline{R}^{(e)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(e)} = \underline{0} \end{cases} \equiv \begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} \end{cases} \quad \text{ECS}$$

con  $\underline{R}^{(e)}$  e  $\underline{M}_O^{(e)}$  corrispondenti alla configurazione  $S_0$ , con atto di moto nullo, nel generico istante  $t \geq t_0$  e  $\Sigma^{(e)} = \Sigma^{(e)} + \dot{\Sigma}^{(v)}$

Queste condizioni sono fondamentali per:

- Determinare le condizioni pure di equilibrio per  $S$
- Calcolare le reazioni vincolari in condizioni di equilibrio (caratterizzazione completa delle sollecitazioni cui è sottoposto  $S$  e i dispositivi che realizzano i vincoli).

• Se  $S$  è libero, esso è in equilibrio ( $\Rightarrow$ )  $\begin{cases} \underline{R}^{(a)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} = \underline{0} \end{cases}$  da cui si evince che se a  $\Sigma^{(a)}$  si sostituisce una sollecitazione ad essa equivalente, lo stato di quiete di  $S$  in  $S_0$  non cambia.

• Se  $S$  è soggetto a vincoli fissi, esso è in equilibrio se tra le reazioni vincolari esplicabili su  $S$  (in quiete in  $S_0$ ) ne esiste almeno una che verifichi per ogni  $t$  e con  $S = S_0$  le ECS:

$$\begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} \end{cases}$$

Analogamente al caso per  $N$  punti materiali, se  $S = \{S_1, \dots, S_M\}$  è un sistema di  $M$  corpi rigidi le ECS forniscono solo una condizione necessaria per l'equilibrio in  $S_0$ :  $S$  è in equilibrio se e solo se le ECS valgono per ogni corpo rigido componente.

$$\begin{cases} \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_{O_i}^{(a)} + \underline{M}_{O_i}^{(v)} = \underline{0} \end{cases} \quad \forall i=1, \dots, M, \quad \forall t$$

• valgono per vincoli lisci e scabbi

Da queste ECS si giunge alle condizioni pure di equilibrio eliminando caso per caso le reazioni vincolari.

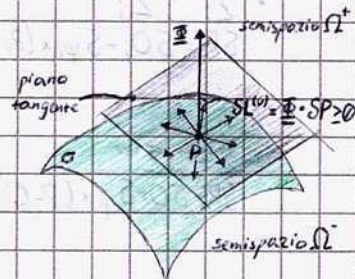
Se i vincoli sono lisci, si risale facilmente a condizioni pure di equilibrio tramite il principio dei lavori virtuali PLV

## Sistemi a Vincoli Privi di Attrito

Sia  $\mathcal{S}$  un sistema meccanico vincolato a vincoli lisci; allora le reazioni vincolari sono necessariamente normali alla superficie di contatto tra dispositivo esplicante il vincolo ed  $\mathcal{S}$ :

- $\mathcal{S} = \{P, m\}$  vincolato a muoversi su una superficie liscia  $\sigma$ : Ad ogni istante  $t$  la reazione vincolare  $\underline{Q}$  è ortogonale allo spostamento virtuale  $\delta P$  e, dunque, si ha:  

$$\delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta P = 0$$



- $\mathcal{S} = \{P, m\}$  poggiano su una superficie liscia  $\sigma$ : Ad ogni istante  $t$  ogni spostamento virtuale  $\delta P$  forma con la reazione vincolare  $\underline{Q}$  un angolo acuto o retto (essendo poggiano,  $P$  può muoversi sia su  $\sigma$  che nel semispazio  $\Omega^+$ ) e si ha:  

$$\delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta P \geq 0$$

In generale, in ogni sistema di solidi vincolati  $\mathcal{S}$ , a vincoli olonomi e lisci, il lavoro virtuale  $\delta L^{(v)}$  della sollecitazione vincolare  $\Sigma^{(v)}$ , proveniente sia dal contatto di  $\mathcal{S}$  con ostacoli esterni che dal mutuo contatto dei solidi costituenti  $\mathcal{S}$ , verifica le relazioni:

$$\delta L^{(v)} \geq 0 \quad \forall \delta \mathcal{S}$$

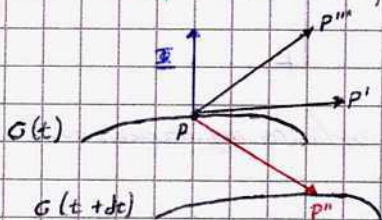
$$\delta L^{(v)} = 0 \quad \forall \delta \mathcal{S} \text{ reversibile} \text{ diretta conseguenza dell'altra eq.}$$

$$\delta \mathcal{S} \text{ reversibile} \Rightarrow \begin{cases} \delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta \mathcal{S} \geq 0 \\ \delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot (-\delta \mathcal{S}) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \delta L^{(v)} = 0$$

Dunque:

- Se  $\mathcal{S}$  non ha vincoli unilaterali, ogni spostamento virtuale è reversibile e dunque  $\Sigma^{(v)}$  verifica in ogni caso la relazione  $\delta L^{(v)} = 0 \quad \forall \delta \mathcal{S} \text{ reversibile}$
- Nel caso di vincoli dipendenti dal tempo, nessuna delle due relazioni è verificata per ogni spostamento possibile.

Esempio: Sia  $P$  un punto appoggiato su una superficie liscia  $\sigma(t)$



$$\bullet PP', PP'' \text{ virtuali e possibili} \Rightarrow \begin{cases} \delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta P' = 0 \\ \delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta P'' \geq 0 \end{cases}$$

$$\bullet PP'' \text{ possibile, non virtuale} \Rightarrow \delta L^{(v)} = \underline{Q} \cdot \delta P'' \leq 0$$

## Principio dei Lavori Virtuali

PLV

Si consideri un sistema meccanico  $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_n\}$  a vincoli olonomi e lisci:

$$\mathcal{S}_i = \begin{cases} \Sigma_i^{(a)} \longrightarrow \underline{R}_i^{(a)}, \underline{M}_{o_i}^{(a)} \\ \Sigma_i^{(v)} \longrightarrow \underline{R}_i^{(v)}, \underline{M}_{o_i}^{(v)} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n$$

Una configurazione  $\mathcal{S}_0$  del sistema  $\mathcal{S}$  a vincoli olonomi, fissi lisci o scabri è di equilibrio se e solo se i vincoli sono capaci di esplicare una sollecitazione vincolare soddisfacente le ECS

$$\begin{cases} \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_{o_i}^{(a)} + \underline{M}_{o_i}^{(v)} = \underline{0} \end{cases} \quad i = 1, \dots, n \quad \forall t, \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$$

Definiamo ora il lavoro virtuale della sollecitazione attiva/vincolare agente per ogni spostamento (rigido) virtuale

Distinguiamo due casi: prima ragioniamo nel dettaglio ( $\mathcal{S}_i$ ) e poi nel complesso ( $\mathcal{S}$ )

$\mathcal{S}_i$   
 $\cdot \sum_i^{(a)}, \sum_i^{(v)}$   
 $SP_i = SO_i + S\varphi_i \times (P_i - O_i)$

$\mathcal{S}_i$ :  $\begin{cases} SL_i^{(a)} = R_i^{(a)} \cdot SO_i + M_{O_i}^{(a)} \cdot S\varphi_i \\ SL_i^{(v)} = R_i^{(v)} \cdot SO_i + M_{O_i}^{(v)} \cdot S\varphi_i \end{cases} \quad i=1, \dots, n$

$\mathcal{S}$   
 $\cdot \sum^{(a)}, \sum^{(v)}$   
 $SP = SO + S\varphi \times (P - O)$

$SL^{(a)} + SL^{(v)} = \sum_{i=1}^n (SL_i^{(a)} + SL_i^{(v)}) = \sum_{i=1}^n (R_i^{(a)} + R_i^{(v)}) \cdot SO_i + \sum_{i=1}^n (M_{O_i}^{(a)} + M_{O_i}^{(v)}) \cdot S\varphi_i$

Da ciò segue che, se  $\mathcal{S}$  è a vincoli olonomi, lisci e fissi e  $\mathcal{S}_0$  è una configurazione di equilibrio per  $\mathcal{S}$ ,

$SL^{(a)} + SL^{(v)} = 0 \quad \text{per } \mathcal{S} = \mathcal{S}_0$

E, dalle relazioni  $SL^{(v)} \geq 0 \quad \forall \mathcal{S} \in \mathcal{S} \text{ [} = 0 \quad \forall \mathcal{S} \text{ reversibile]}$  si ottiene:  $SL^{(a)} \leq 0 \quad \forall \mathcal{S}$   
 $SL^{(a)} = 0 \quad \forall \mathcal{S} \text{ reversibile}$

**Proposizione:** Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema  $\mathcal{S}$  di solidi vincolati a vincoli olonomi lisci e indipendenti dal tempo sia in equilibrio in una configurazione  $\mathcal{S}_0$  è che per ogni spostamento virtuale  $\mathcal{S}$  eseguito a partire da  $\mathcal{S}_0$  sia  $SL^{(a)} \leq 0 \quad \forall \mathcal{S}$   $SL^{(a)} = 0 \quad \forall \mathcal{S}$  reversibile.

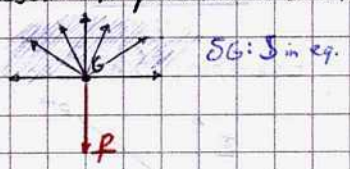
Questa è una condizione di equilibrio pura, e se il sistema è a vincoli bilaterali ogni spostamento virtuale è reversibile e quindi vale la seconda relazione.

Principio di Torricelli

Condizione necessaria e sufficiente affinché un sistema pesante (ovvero un sistema la cui sollecitazione attiva si riduce alla sola forza-peso)  $\mathcal{S}$  di solidi vincolati a vincoli olonomi, lisci e indipendenti dal tempo (fissi) sia in equilibrio per una configurazione  $\mathcal{S}_0$  è che il baricentro  $G$  di  $\mathcal{S}$  non sia suscettibile di abbassamenti per effetto di alcuno spostamento virtuale di  $\mathcal{S}$  eseguito a partire dalla configurazione  $\mathcal{S}_0$ :

$SL^{(a)} = p \cdot SG \leq 0 \Leftrightarrow \widehat{p \ SG} \geq 90^\circ$

*Forza-peso*



Ciò perché la forza peso, sistema di vettori paralleli, è equivalente al risultante applicato nel baricentro.

Dimostrazione

$SL^{(a)} = p \cdot SG \neq 0 \Leftrightarrow \widehat{p \ SG} \geq 90^\circ \Rightarrow SG$  non deve avere componenti verso il basso

Condizioni di Equilibrio per un Solido  $\mathcal{S}$

Siano  $\Sigma^{(a)}$  la sollecitazione attiva (esterna) che agisca su  $\mathcal{S}$ , corrispondente all'atto di moto nullo, e  $\underline{R}^{(a)}$  ed  $\underline{M}_O^{(a)}$  il risultante e il momento risultante rispetto al polo  $O$ .

$SP = SO + S\varphi \times (P - O), \quad \forall P \in \mathcal{S} \quad \Rightarrow \quad SL^{(a)} = \underline{R}^{(a)} \cdot SO + \underline{M}_O^{(a)} \cdot S\varphi$

Per i sistemi a vincoli olonomi, fissi, e lisci e bilaterali,  $\mathcal{S}_0$  è una configurazione di equilibrio se e solo se:

$SL^{(a)} = 0 \Leftrightarrow \underline{R}^{(a)} \cdot SO + \underline{M}_O^{(a)} \cdot S\varphi = 0 \quad \forall \mathcal{S}$

**Corpo Rigido Libero:** Ogni spostamento virtuale  $\mathcal{S}$  di  $\mathcal{S}$  a partire da  $\mathcal{S}_0$  si ottiene da  $SP = SO + S\varphi \times (P - O)$ , con  $SO$  e  $S\varphi$  del tutto arbitrari. Allora,  $\mathcal{S}_0$  è di equilibrio se e solo se:

$SL^{(a)} = \underline{R}^{(a)} \cdot SO + \underline{M}_O^{(a)} \cdot S\varphi = 0 \quad \forall SO, S\varphi \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{R}^{(a)} = 0 \\ \underline{M}_O^{(a)} = 0 \end{cases}$

Corpo Rigido con un Punto Fisso  $O$ : Ogni spostamento virtuale  $\delta S$  a partire da  $S_0$  è uno spostamento rigido sferico di centro  $O$ :

$$\delta P = \delta \varphi \times (P - O)$$

Allora,  $S_0$  è una configurazione d'equilibrio se e solo se:

$$SL^{(a)} = \underline{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi \Rightarrow \underline{M}_O^{(a)} = 0$$

Corpo Rigido con un Asse Fisso  $r$ : Ogni spostamento virtuale  $\delta S$  di  $S$  a partire da  $S_0$  è un'arbitraria rotazione infinitesima attorno all'asse  $r$ , scelto  $O \in r$  si ha:

$$\delta P = \delta \varphi \times (P - O), \text{ con } \delta \varphi \parallel \text{vers } r$$

Allora,  $S_0$  è di equilibrio se e solo se:

$$SL^{(a)} = \underline{M}_O^{(a)} \cdot \delta \varphi = 0 \quad \forall \delta \varphi \parallel \text{vers } r$$

$$\downarrow$$

$$SL^{(a)} = |\delta \varphi| \underline{M}_O^{(a)} \cdot \text{vers } r = |\delta \varphi| M_r^{(a)} = 0 \quad \forall |\delta \varphi| \Rightarrow M_r^{(a)} = 0 \Rightarrow \underline{M}_O^{(a)} \text{ non ha componente su } r$$

## Analisi Statica: Equilibrio e Reazioni Vincolari

Una reazione vincolare (interazione tra  $S$  e i dispositivi rigidi che schematizzano i vincoli) può essere puntuale o influenzare una regione del sistema meccanico (nel primo caso la reazione vincolare può essere espressa mediante un unico vettore); più spesso ci interesserà trattare del secondo caso, che prevede un sistema di forze equivalente a un sistema composto da una forza singola  $(A_i, \underline{\Phi}_i)$  ed una coppia di momento  $\Gamma_i$  (coppia non univocamente determinata).

Si ha un sistema a vincoli <sup>(lisci)</sup> olonomi, bilaterali, fissi e semplici:

$$\text{eq. di vincolo: } g_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \quad i=1, \dots, s$$

Se fissi, gli spostamenti virtuali e possibili coincidono!

contatto puntuale:  $(A_i, \underline{\Phi}_i)$  regione di contatto:  $((A_i, \underline{\Phi}_i), \Gamma_i)$   
 → modulo e verso (moltiplicatori di Lagrange)  
 reazione vincolare:  $\underline{\Phi}_i = X_i \nabla g_i \Big|_{A_i} \quad i=1, \dots, s$   
 → valutata in  $A_i$ , dove è applicata  $\underline{\Phi}_i$   
 → gradiente, normale alla superficie  $g_i \nabla g_i$

$$SL^{(v)} = \sum_{i=1}^s \underline{\Phi}_i \cdot \delta A_i = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \delta g_i = 0 \rightarrow \text{vincolo bilaterale}$$

→ moltiplicatori di Lagrange

Se in presenza di vincoli olonomi, unilaterali, lisci e semplici, si scinde il contributo dei vincoli tra posizioni ordinarie e di confine:

$$\text{diseg. di vincolo: } \gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) \leq 0 \quad i=1, \dots, r$$

$$\text{posizioni ordinarie: } \gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) < 0, \underline{\Phi}_i = 0$$

$$\text{posizioni di confine: } \gamma_i(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \underline{\Phi}_i = Y_i \nabla \gamma_i \Big|_{B_i} \quad i=1, \dots, r$$

punto di contatto  $S$ -vincolo

$$SL^{(v)} = \sum_{i=1}^r \underline{\Phi}_i \cdot \delta B_i = \sum_{i=1}^r Y_i \cdot \delta \gamma_i \geq 0$$

Qualunque sia lo spostamento virtuale,

$$SL^{(v)} = \sum_{i=1}^s X_i \cdot \delta g_i + \sum_{i=1}^r Y_i \cdot \delta \gamma_i \begin{cases} \geq 0 \quad \forall \delta S \\ = 0 \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \end{cases}$$

Sia  $S = \{S_1, \dots, S_N\}$  un sistema di  $N$  corpi rigidi vincolati a vincoli olonomi lisci, fissi e bilaterali:

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, s \quad \underline{\Phi}_i = X_i \nabla g_i|_{A_i} \quad i = 1, \dots, s$$

La configurazione  $S_0$  per  $S$  è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun solido:

$$\begin{cases} \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_{C_i}^{(a)} + \underline{M}_{C_i}^{(v)} = \underline{0} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, N \quad \forall e$$

Le ECS sono un sistema di  $m = 6N$  equazioni lineari nelle incognite reazioni vincolari  $\underline{X} = (X_1, \dots, X_s)^T$ ; tale sistema può dunque essere scritto in forma matriciale, in cui noteremo un forte legame con l'analisi cinematica e, in particolare,

la Matrice cinematica:

$$\underline{M}_s \underline{X} + \underline{f} = \underline{0}$$

↓  
Matrice Statica  
[m, s] ∇g<sub>i</sub>

→ Termini noti  $\underline{f} = (\underline{R}_{1x}^{(a)}, \dots, \underline{M}_{Nz}^{(a)})^T$

La matrice statica coincide con la trasposta della matrice cinematica  $\underline{M}_s = \underline{M}_c^T \Rightarrow \text{rank } \underline{M}_s = \text{rank } \underline{M}_c = s'$ ; ricordando che

$l = m - s'$  e  $i = s - s'$  si ha:

- $l = 0, i = 0$   $S$  è isostatico e dunque in equilibrio in  $S_0$ , le ECS sono soddisfatte ed ammettono una ed una sola soluzione.
- $l = 0, i > 0$   $S$  è  $i$ -volte iperstatico, è in equilibrio in  $S_0$ , le ECS sono soddisfatte ed ammettono  $\infty^i$  soluzioni.
- $l > 0, i = 0$   $S$  è  $l$ -volte labile: Se  $S_0$  è di equilibrio le ECS sono soddisfatte ed ammettono una e una sola soluzione. Se  $S_0$  non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.
- $l > 0, i > 0$   $S$  è  $l$ -volte labile con  $i$  vincoli dipendenti: Se  $S_0$  è di equilibrio le ECS sono soddisfatte ed ammettono  $\infty^i$  soluzioni. Se  $S_0$  non è di equilibrio le ECS non sono soddisfatte.

## Reazioni dei Vincoli nel Piano

Considerando vincoli olonomi, lisci, fissi, bilaterali si ha:

$$((A, \underline{\Phi}_A), \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = 0 \quad \forall dS \quad (\text{lisci}) \quad (\text{vincoli fissi} \Rightarrow S \cdot S = dS)$$

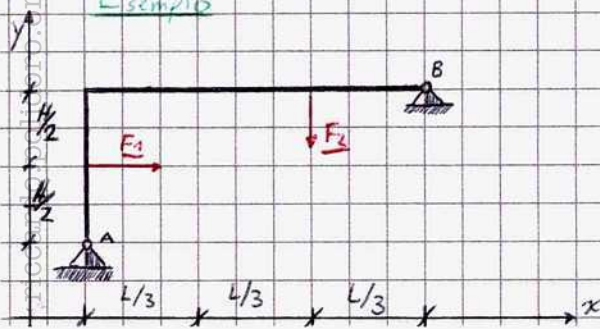
$$dP = dA + d\varphi \times (P - A) \Rightarrow dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A \cdot dA + \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall dA, d\varphi$$

Cerniera esterna  $dA = 0$

$$((A, \underline{\Phi}_A), \underline{\Gamma}_A) \quad dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A \cdot dA + \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall dS \Rightarrow \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = 0 \quad \forall d\varphi \Rightarrow \underline{\Gamma}_A = 0$$

$$\underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax} \underline{i} + \Phi_{Ay} \underline{j}, \quad \underline{\Gamma}_A = 0$$

Esempio



Analisi cinematica:  $m = 3$   $x_A, y_A, \varphi$

$$A = (x_A, y_A) \\ B = (x_A + L, y_A + H)$$

$$dA = 0, \quad dB = 0$$

$$\underline{M}_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ dx_A - H d\varphi & 0 & 0 \\ dy_A + L d\varphi & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} s=4 \\ s'=3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} l=0 \\ i=1 \end{array}$$

1 volta iperstatico



# Analisi Statica

- $(C, F_1): C = (x_A, y_A + H/2), F_1 = F_1 i$
- $(D, F_2): D = (x_A + \frac{2}{3}L, y_A + H), F_2 = -F_2 j$
- $(A, \Phi_A): A = (x_A, y_A), \Phi_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j$
- $(B, \Phi_B): B = (x_A + H, y_A + L), \Phi_B = \Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j$

3 equazioni: in un piano i momenti sono applicabili in qualunque punto, conviene scegliere come polo un punto in cui è applicata almeno una forza: SEMPLIFICA I CALCOLI

$$\begin{cases} R_x^{(A)} + R_x^{(B)} = 0 \\ R_y^{(A)} + R_y^{(B)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(B)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(A)} + R_x^{(B)} = 0 \\ R_y^{(A)} + R_y^{(B)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(B)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ -F_2 + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0 \\ -\frac{H}{2}F_1 + \frac{2L}{3}F_2 + L\Phi_{By} - H\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

$\infty^1$  soluzioni

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \\ 0 & 1 & L \end{pmatrix}$$

$$M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Phi_{Ay} & \Phi_{Bx} & \Phi_{By} \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -H & L \end{pmatrix}$$

rank  $M_S = s = 3$   
matrice dei coefficienti del sistema scalare delle ELS, l'ORDINE È FONDAMENTALE

$\infty^1$  soluzioni  $\Phi_{Ax} = -\Phi_{Bx} - F_1, \Phi_{Ay} = \frac{1}{3}F_2 - \frac{H}{2L}F_1 - \frac{H}{L}\Phi_{Bx}, \Phi_{By} = \frac{H}{2L}F_1 + \frac{2}{3}F_2 + \frac{H}{L}\Phi_{Bx}$

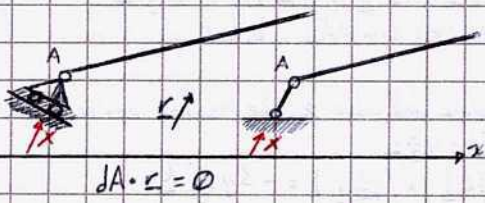
## Carrello e Pendolo Esterno

$$(A, \Phi_A, \Gamma_A) \quad dL^{(v)} = \Phi_{Ax} dx_A + \Phi_{Ay} dy_A + \Gamma_A dz = 0 \quad \forall dx_A, dy_A, dz$$

$$dA = dA_x + dA_z \quad dA_x \parallel z \quad dA_z \perp z \Rightarrow dA_x = 0 \Leftrightarrow dA = dA_z$$

$$dL^{(v)} = \Phi_{Az} \cdot dA + \Gamma_A \cdot dz = \Phi_{Az} dA + \Gamma_A dz = 0 \quad \forall dA, dz \Rightarrow \Phi_{Az} = 0, \Gamma_A = 0$$

$$\Phi_A = \Phi_{Ax} \quad \Gamma_A = 0$$



## Estimo

### Analisi cinematica

$m = 3 \quad x_A, y_A, \varphi \quad A = (x_A, y_A), B = (x_A + L, y_A + H)$

$$dA = 0, dB \cdot i = 0$$

$$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_A - H d\varphi = 0 \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \end{pmatrix}$$

$s = 3 \Rightarrow l = 0$   
 $s' = 3 \Rightarrow i = 0$   
isostatico

### Analisi statica

- $(C, F_1): C = (x_A, y_A + H/2), F_1 = F_1 i$
- $(D, F_2): D = (x_A + \frac{2}{3}L, y_A + H), F_2 = -F_2 j$
- $(A, \Phi_A): A = (x_A, y_A), \Phi_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j$
- $(B, \Phi_B): B = (x_A + H, y_A + L), \Phi_B = \Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j$

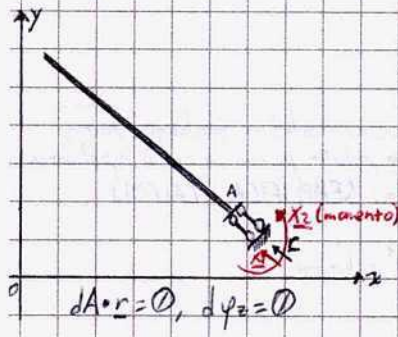
$$\begin{cases} R_x^{(A)} + R_x^{(B)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(B)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(A)} + R_x^{(B)} = 0 \\ R_y^{(A)} + R_y^{(B)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(B)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ -F_2 + \Phi_{Ay} = 0 \\ -\frac{H}{2}F_1 + \frac{2L}{3}F_2 - H\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

$$M_S = M_C^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Phi_{Ay} & \Phi_{Bx} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -H \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -H \end{pmatrix}$$

rank  $M_S = s = 3$

$$\Phi_{Ax} = -\frac{F_1}{2} + \frac{2L}{3H}F_2, \Phi_{Ay} = F_2, \Phi_{Bx} = -\frac{F_1}{2} - \frac{2L}{3H}F_2$$

# Doppio Pendolo Esterno

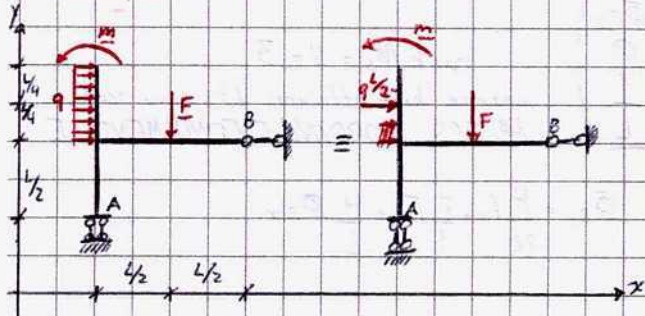


$$((A, \underline{\Phi}_A), \underline{\Gamma}_A) \quad \underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_r \underline{r} + \underline{\Phi}_s \underline{s} \quad dA = dA_r \underline{r} + dA_s \underline{s}$$

$$dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A \cdot dA + \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = \underline{\Phi}_r \cdot dA_r = 0 \quad \forall dA_r$$

$$\underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_r \underline{r}, \quad \underline{\Gamma}_A = \underline{\Gamma}_z \underline{k}$$

## Esempio



## Analisi Cinematica

$$m=3 \quad x_A, y_A, \varphi$$

$$A \equiv (x_A, y_A), \quad B \equiv (x_A + L, y_A + L/2)$$

$$\begin{cases} dy_A = 0 \\ d\varphi = 0 \\ dx_A - L d\varphi = 0 \end{cases}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -L/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s=3 \Rightarrow \rho=0 \\ s=3 \\ i=0 \end{matrix}$$

## Analisi Statica

Sollecitazioni Attive:

- $(C, \underline{F}_i): C \equiv (x_A + L/2, y_A + L/2), \underline{F}_i = -F \underline{j}$   
momento di  $\underline{F}_i$  rispetto ad A:  $(C-A) \times \underline{F}_i = (L/2 \underline{i} + L/2 \underline{j}) \times (-F \underline{j}) = -F \frac{L}{2} \underline{k}$   
*due reazioni vincolari  $\Rightarrow$  semplifica i calcoli dei momenti*
- Sollecitazione ripartita di intensità  $q$  nella direzione dell'asse  $x$  che risulta equivalente alla forza concentrata  $(D, \underline{F}_z): D \equiv (x_A, y_A + 3/4 L), \underline{F}_z = q \frac{L}{2} \underline{i}$   
momento di  $\underline{F}_z$  rispetto ad A:  $(D-A) \times \underline{F}_z = (\frac{3}{4} L \underline{i}) \times (q \frac{L}{2} \underline{i}) = -3q \frac{L^2}{8} \underline{k}$
- Coppia di momento  $\underline{m} = m \underline{k}$

Reazioni vincolari:

- $\underline{\Phi}_A = \Phi_A \underline{j}$
- $\underline{\Gamma}_A = \Gamma_A \underline{k}$
- $\underline{\Phi}_B = \Phi_{Bx} \underline{i} \quad B \equiv (x_A + L, y_A + L/2)$   
momento di  $\underline{\Phi}_B$  rispetto ad A:  $(B-A) \times \underline{\Phi}_B = (L \underline{i} + L/2 \underline{j}) \times (\Phi_{Bx} \underline{i}) = -\Phi_{Bx} \frac{L}{2} \underline{k}$

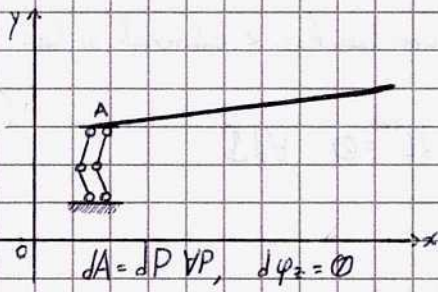
$$\begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0 \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0 \\ \cancel{R_z^{(a)}} + \cancel{R_z^{(v)}} = 0 \\ M_{Ax}^{(a)} + M_{Ax}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} q \frac{L}{2} + \Phi_{Bx} = 0 \\ -F + \Phi_A = 0 \\ -F \frac{L}{2} - 3q \frac{L^2}{8} + m + \Gamma_A - \Phi_{Bx} \frac{L}{2} = 0 \end{cases}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -L/2 \end{pmatrix}$$

$$M_s = M_c^T = \begin{pmatrix} \Phi_{Ax} & \Gamma_{Az} & \Phi_{Bx} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -L/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{Ax} &= F \\ \Gamma_{Az} &= F \frac{L}{2} - m + q \frac{L^2}{8} \\ \Phi_{Bx} &= -q \frac{L}{2} \end{aligned}$$

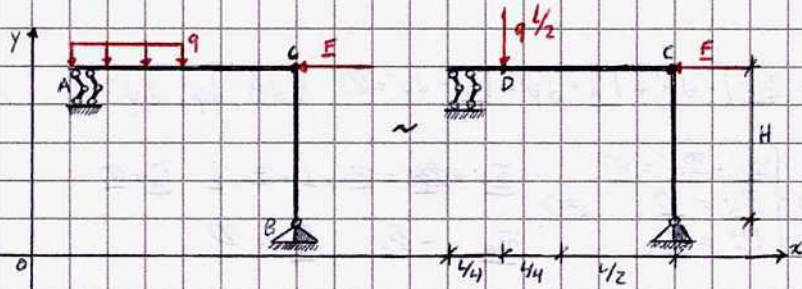
## Doppio-doppio Pendolo Esterno



$$((A, \underline{\Phi}_A), \underline{\Gamma}_A) \quad dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A \cdot dA + \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = \underline{\Phi}_A \cdot dA = 0 \quad \forall dA \Rightarrow \underline{\Phi}_A = 0; \underline{\Gamma}_A = \Gamma_A k$$

$$\underline{\Phi}_A = 0; \underline{\Gamma}_A = \Gamma_A k$$

## Esempio



### Analisi cinematica

$$m=3 \quad x_B, y_B, \varphi$$

$$A = (x_B - L, y_B + H), \quad B = (x_B, y_B)$$

$$d\varphi_z = 0, \quad d\underline{B} = 0$$

$$\begin{cases} d\varphi_z = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \end{cases} \quad M_C = \begin{pmatrix} dx_B & dy_B & d\varphi \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s=3 \\ s'=3 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l=0 \\ i=0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$$

### Analisi Statica

#### Sollecitazioni attive:

- $(C, F_1): C = (x_B, y_B + H), \quad F_1 = -F i$   
momento rispetto a B:  $(C-B) \times F_1 = H j \times (-F i) = FH k$

- Sollecitazione ripartita di intensità  $q$  nella direzione dell'asse  $y$ , equivalente alla forza concentrata  $(D, F_2): D = (x_B - 3/4 L, y_B + H), \quad F_2 = -q \frac{L}{2} j$   
momento rispetto a B:  $(D-B) \times F_2 = (-3/4 L i + H j) \times (-q \frac{L}{2} j) = 3q \frac{L^2}{4} k$

#### Reazioni vincolari:

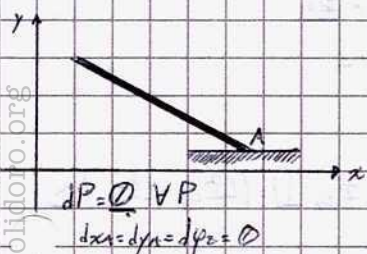
- $\underline{\Gamma}_A = \Gamma_A z k$

- $\underline{\Phi}_B = \underline{\Phi}_{Bx} i + \underline{\Phi}_{By} j$

$$ECS: \begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = 0 \\ \underline{M}_A^{(a)} + \underline{M}_A^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0 \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0 \\ M_{Ax}^{(a)} + M_{Ax}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} -F + \underline{\Phi}_{Bx} = 0 \\ -q \frac{L}{2} + \underline{\Phi}_{By} = 0 \\ FH + 3q \frac{L^2}{4} + \Gamma_A = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \Gamma_A = -FH - 3q \frac{L^2}{4} \\ \underline{\Phi}_{Bx} = F \\ \underline{\Phi}_{By} = q \frac{L}{2} \end{matrix}$$

$$M_s = M_C^T = \begin{pmatrix} \Gamma_A & \underline{\Phi}_{Bx} & \underline{\Phi}_{By} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{rank}(M_s) = s' = 3$$

## Incastro Esterno



$$((A, \underline{\Phi}_A), \underline{\Gamma}_A) \quad dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A \cdot dA + \underline{\Gamma}_A \cdot d\varphi = 0 \Rightarrow \underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_{Ax} i + \underline{\Phi}_{Ay} j, \quad \underline{\Gamma}_A = \Gamma_A k$$

$$\underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_{Ax} i + \underline{\Phi}_{Ay} j, \quad \underline{\Gamma}_A = \Gamma_A k$$

# Reazioni dei vincoli Interni nel Piano

Sia  $S = S' \cup S''$  (almeno 2 corpi rigidi), vincolato internamente con vincoli olonomi lisci, fissi e bilaterali si ha:

$$S': dP = dA' + d\varphi' \times (P-A') \quad \forall P \in S' \quad ((A', \underline{\Phi}_A'), \underline{\Gamma}_A')$$

$$S'': dP = dA'' + d\varphi'' \times (P-A'') \quad \forall P \in S'' \quad ((A'', \underline{\Phi}_A''), \underline{\Gamma}_A'')$$

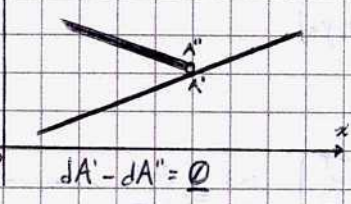
$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dS$$

$$dL^{(v)} = \underline{\Phi}_A' \cdot dA' + \underline{\Gamma}_A' \cdot d\varphi' + \underline{\Phi}_A'' \cdot dA'' + \underline{\Gamma}_A'' \cdot d\varphi'' = 0 \quad \forall dA', d\varphi', dA'', d\varphi''$$

## Cerniera Interna

$$dA' - dA'' = 0 \Rightarrow dL^{(v)} = (\underline{\Phi}_A' + \underline{\Phi}_A'') \cdot dA' + \underline{\Gamma}_A' \cdot d\varphi' + \underline{\Gamma}_A'' \cdot d\varphi'' = 0 \quad \forall dA', d\varphi', d\varphi''$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dA', d\varphi', d\varphi'' \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}_A' + \underline{\Phi}_A'' = 0 \\ \underline{\Gamma}_A' = 0 \\ \underline{\Gamma}_A'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}_A' = -\underline{\Phi}_A'' = -\Phi_{Ax}i + \Phi_{Ay}j \\ \underline{\Gamma}_A' = 0 \\ \underline{\Gamma}_A'' = 0 \end{cases}$$

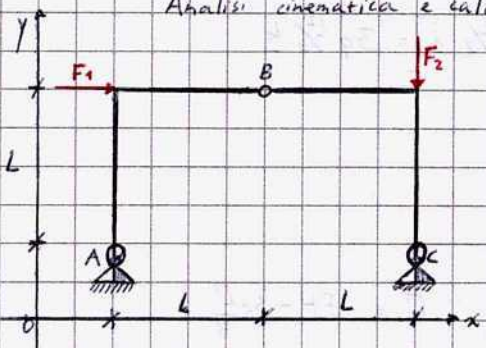


Nel caso in cui una cerniera interna colleghi  $N$  corpi  $S_i$  nel punto  $A$  si ha:

$$\sum_{i=1}^N \underline{\Phi}_i = 0; \quad \underline{\Gamma}_i = 0 \quad \forall i$$

## Esempio

Analisi cinematica e calcolo delle reazioni vincolari mediante le ECS di un arco a tre cerniere.



### Analisi Cinematica

$$m=6; \quad x_A, y_A, \varphi_1, x_C, y_C, \varphi_2$$

$$A \equiv (x_A, y_A)$$

$$B \equiv (x_A + L, y_A + L)$$

$$C \equiv (x_A + 2L, y_A)$$

$$\text{eq. vinc.} \begin{cases} dA = 0 \\ dB - dB' = 0 \\ dC = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_A - d\varphi_{1z}(y_B - y_A) - (dx_C - d\varphi_{2z}(y_B - y_A)) = 0 \\ dy_A + d\varphi_{1z}(x_C - x_A) - (dy_C + d\varphi_{2z}(x_C - x_A)) = 0 \\ dx_C = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow s=6$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{1z} & dx_C & dy_C & d\varphi_{2z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -L & -1 & 0 & L \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$m=6, \quad s=6, \quad s'=6 \Rightarrow l=0, \quad i=0$$

$$S = S' \cup S'' \text{ isostatico}$$

### Analisi Statica

$$(P_1, F_1): P_1 \equiv (x_A, y_A + L), \quad F_1 = F_1 i$$

$$(P_2, F_2): P_2 \equiv (x_A + 2L, y_A + L), \quad F_2 = -F_2 j$$

$$(A, \underline{\Phi}_A): A \equiv (x_A, y_A), \quad \underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j$$

$$(B, \underline{\Phi}_B); (B, \underline{\Phi}_B'): B \equiv (x_A + L, y_A + L), \quad \underline{\Phi}_B'' = -\underline{\Phi}_B'$$

$$(C, \underline{\Phi}_C): C \equiv (x_A + 2L, y_A), \quad \underline{\Phi}_C = \Phi_{Cx} i + \Phi_{Cy} j$$

$$S': \begin{cases} R^{(A)} + R^{(v)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(v)} = 0 \end{cases} \quad S'': \begin{cases} R^{(C)} + R^{(v)} = 0 \\ M_C^{(C)} + M_C^{(v)} = 0 \end{cases}$$

$$M_A^{(A)} = (P_1 - A) \times F_1 = Lj \times F_1 i = -LF_1 k; \quad M_C^{(C)} = (B - A) \times \underline{\Phi}_B'' = (Lj + Lj) \times (\Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j) = (L\Phi_{By} - L\Phi_{Bx}) k$$

$$S = \begin{cases} R^{(A)} + R^{(v)} = 0 \\ M_A^{(A)} + M_A^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(A)} + R_x^{(v)} = 0 \\ R_y^{(A)} + R_y^{(v)} = 0 \\ M_{Ax}^{(A)} + M_{Ax}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} F_1 + \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0 \\ -LF_1 + L\Phi_{By} - L\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

$$M_c^{(a)} = (P_2 - C) \times F_z = Lj \times (-F_z j) = 0$$

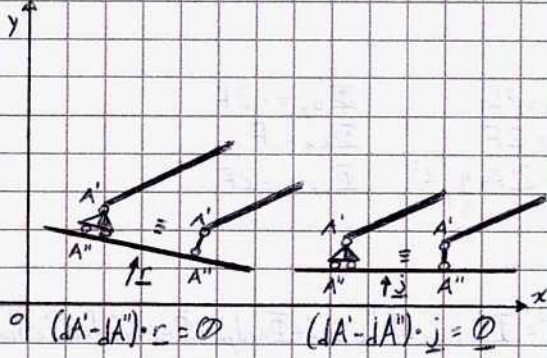
$\Phi_B' - \Phi_B''$

$$M_c^{(v)} = (B - C) \times \Phi_B'' = (-L_i + L_j) \times (-\Phi_{Bx}'' i - \Phi_{By}'' j) = (L\Phi_{By}'' + L\Phi_{Bx}'' )k$$

$$S'' = \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0 \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0 \\ M_c^{(a)} + M_c^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} R_x^{(a)} + R_x^{(v)} = 0 \\ R_y^{(a)} + R_y^{(v)} = 0 \\ M_c^{(a)} + M_c^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Cx} - \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Cy} - \Phi_{By} - F_z = 0 \\ L\Phi_{By} + L\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

Dal sistema  $S' \cup S''$  ottiene i risultati

### Carrello e Pendolo Interni



Consideriamo per semplicità il secondo caso:

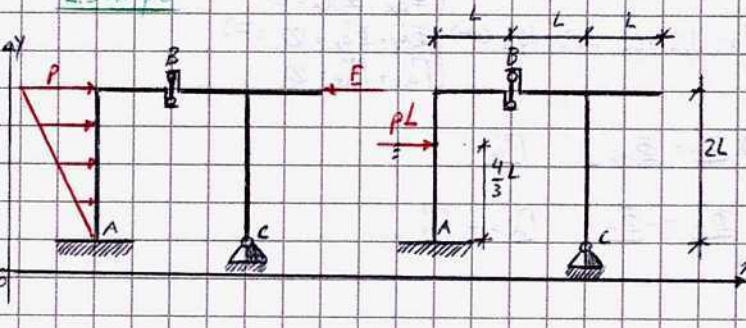
$$(dA' - dA'') \cdot j = 0 \Rightarrow dL^{(v)} = \Phi_{Ax}' dx_A' + \Phi_{Ax}'' dx_A'' + \Phi_{Ay}' dy_A' + \Phi_{Ay}'' dy_A'' + \Gamma_{Az}' dz_A' + \Gamma_{Az}'' dz_A''$$

$$= \Phi_{Ax}' dx_A' + \Phi_{Ax}'' dx_A'' + (\Phi_{Ay}' + \Phi_{Ay}'') dy_A' + \Gamma_{Az}' dz_A' + \Gamma_{Az}'' dz_A''$$

$$dL^{(v)} = 0 \quad \forall dx_A', dy_A', dz_A', dx_A'', dy_A'', dz_A'' \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax}' = \Phi_{Ax}'' = 0 \\ \Phi_{Ay}' + \Phi_{Ay}'' = 0 \\ \Gamma_{Az}' = \Gamma_{Az}'' = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_A' = \Phi_{Ay}' j & \Gamma_A' = 0 \\ \Phi_A'' = -\Phi_A' & \Gamma_A'' = 0 \end{cases}$$

### Esempio



Analisi cinematica

$$m=6 \quad x_A, y_A, \varphi_{Az}, x_C, y_C, \varphi_C$$

$$\begin{aligned} A &= (x_A, y_A) \\ B &= (x_A + L, y_A + 2L) \\ C &= (x_A + 2L, y_A) \end{aligned}$$

eq. di vincolo:  $dA = 0, d\varphi_A = 0, (dB' - dB'') \cdot j = 0, dC = 0$

$$\begin{cases} dA = 0, d\varphi_A = 0 \\ (dB' - dB'') \cdot j = 0 \\ dC = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0, d\varphi_{Az} = 0 \\ dy_A + d\varphi_{Az}(x_B - x_A) - (dy_C + d\varphi_C)(x_C - x_A) = 0 \\ dx_C = 0, dy_C = 0 \end{cases}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_{Az} & dx_C & dy_C & d\varphi_{Cz} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & +L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} s=6 & l=0 & S \text{ è isostatico} \\ s'=6 & i=0 & \end{matrix}$$

Analisi Statica

Il carico triangolare  $(P, u(P) = \frac{P}{2L} y_L)$ ,  $P \in \Omega = [0, 2L]$  è equivalente ai

$$(P_1, F_1): P_1 = (x_A, y_A + \frac{4}{3}L), F_1 = PL$$

$$(P_2, F_2): P_2 = (x_A + 3L, y_A + 2L), F_2 = -F_1$$

$$(A, \Phi_A, \Gamma_A): A = (x_A, y_A), \Phi_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j, \Gamma_A = \Gamma_{Az} k$$

$$(B, \Phi_B): B = (x_A + L, y_A + 2L), \Phi_B = -\Phi_{By}$$

$$(C, \Phi_C): C = (x_A + 2L, y_A), \Phi_C = \Phi_{Cx} i + \Phi_{Cy} j$$

Ricordando le ECS, calcoliamo i momenti di  $S'$  e  $S''$  per risolvere le ECS in ogni solido componente:

$$S': M_A^{(A)} = (P_1 - A) \times F_1 = \frac{4}{3} L j \times p L i = -\frac{4}{3} p L^2 k$$

$$M_A^{(V)} = (B - A) \times \underline{\Phi}_B' = (L i + 2L j) \times \underline{\Phi}'_{Byj} = L \underline{\Phi}'_{By} k$$

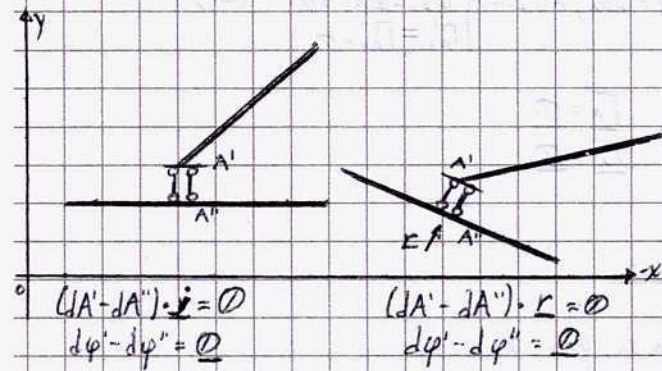
$$S' = \begin{cases} \underline{R}^{(A)} + \underline{R}^{(V)} = \underline{0} \\ \underline{M}_A^{(A)} + \underline{M}_A^{(V)} = \underline{0} \end{cases} = \begin{cases} -pL + \underline{\Phi}'_{Ax} = 0 \\ \underline{\Phi}'_{Ay} + \underline{\Phi}'_{By} = 0 \\ -\frac{4}{3} p L^2 + L \underline{\Phi}'_{By} + \Gamma_{Az} = 0 \end{cases} \begin{array}{l} \underline{R} \text{ in componenti} \\ \underline{M} \text{ in componenti} \end{array}$$

$$S'': M_C^{(A)} = (P_2 - C) \times F_2 = (L i + 2L j) \times (-F_1) = 2LF k$$

$$M_C^{(V)} = (B - C) \times \underline{\Phi}_B'' = (-L i + 2L j) \times (-\underline{\Phi}'_{Byj}) = L \underline{\Phi}'_{By} k$$

$$S'' = \begin{cases} \underline{R}^{(A)} + \underline{R}^{(V)} = \underline{0} \\ \underline{M}_C^{(A)} + \underline{M}_C^{(V)} = \underline{0} \end{cases} = \begin{cases} -F + \underline{\Phi}'_{Cx} = 0 \\ -\underline{\Phi}'_{By} + \underline{\Phi}'_{Cy} = 0 \\ 2LF + L \underline{\Phi}'_{By} = 0 \end{cases} \begin{array}{ll} \underline{\Phi}'_{Ax} = pL & \underline{\Phi}'_{By} = -2F \\ \underline{\Phi}'_{Ay} = 2F & \underline{\Phi}'_{Cx} = F \\ \Gamma_{Az} = 2LF + \frac{4}{3} p L^2 & \underline{\Phi}'_{Cy} = -2F \end{array}$$

### Doppio Pendolo Interno



$$(A' - A'') \cdot \underline{j} = 0 \Rightarrow dL^{(V)} = \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A' + \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A'' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A'' + \Gamma_{Az} d\varphi' + \Gamma_{Az} d\varphi''$$

$$d\varphi' = d\varphi''$$

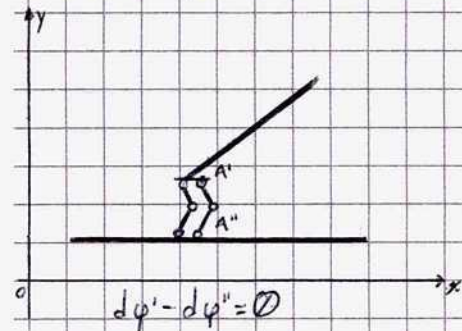
$$= \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A' + \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A'' + (\underline{\Phi}'_{Ay} + \underline{\Phi}'_{Ay}) dy_A' + (\Gamma_{Az} + \Gamma_{Az}) d\varphi'$$

$$dL^{(V)} = 0 \quad \forall dx_A', dy_A', d\varphi', dx_A'', dy_A'', d\varphi'' \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}'_{Ax} = \underline{\Phi}'_{Ax} = 0 \\ \underline{\Phi}'_{Ay} + \underline{\Phi}'_{Ay} = 0 \quad (=) \\ \Gamma_{Az} + \Gamma_{Az} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\Phi}'_A = \underline{\Phi}'_{Ay} \quad \Gamma_A$$

$$\underline{\Phi}''_A = -\underline{\Phi}'_A \quad \Gamma''_A = -\Gamma'_A$$

### Doppio-Doppio Pendolo Interno



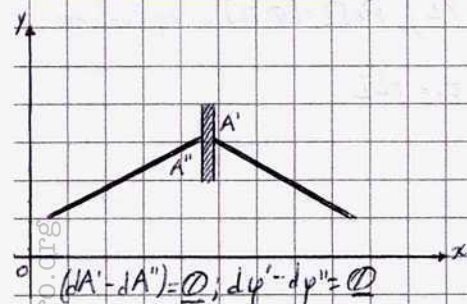
$$d\varphi' = d\varphi'' \Rightarrow dL^{(V)} = \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A' + \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A'' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A'' + \Gamma_{Az} d\varphi' + \Gamma_{Az} d\varphi''$$

$$= \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A' + \underline{\Phi}'_{Ax} dx_A'' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A' + \underline{\Phi}'_{Ay} dy_A'' + (\Gamma_{Az} + \Gamma_{Az}) d\varphi'$$

$$dL^{(V)} = 0 \quad \forall dx_A', dy_A', d\varphi', dx_A'', dy_A'', d\varphi'' \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}'_{Ax} = \underline{\Phi}'_{Ax} = 0 \\ \underline{\Phi}'_{Ay} = \underline{\Phi}'_{Ay} = 0 \quad (=) \\ \Gamma_{Az} + \Gamma_{Az} = 0 \end{cases} \begin{array}{ll} \underline{\Phi}'_A = \underline{0} & \Gamma_A \\ \underline{\Phi}''_A = \underline{0} & \Gamma''_A = -\Gamma'_A \end{array}$$

### Incastro Esterno



$$(A' - A'') \cdot \underline{j} = 0 \Rightarrow dL^{(V)} = \underline{\Phi}'_A \cdot dA' + \Gamma'_A \cdot d\varphi' + \underline{\Phi}''_A \cdot dA'' + \Gamma''_A \cdot d\varphi''$$

$$d\varphi' = d\varphi''$$

$$= (\underline{\Phi}'_A + \underline{\Phi}''_A) \cdot dA' + (\Gamma'_A + \Gamma''_A) \cdot d\varphi'$$

$$dL^{(V)} = 0 \quad \forall dA', d\varphi' \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}'_A + \underline{\Phi}''_A = \underline{0} \\ \Gamma'_A + \Gamma''_A = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \underline{\Phi}'_A = \underline{\Phi}'_{Ax} i + \underline{\Phi}'_{Ay} j; \Gamma'_A = \Gamma'_{Az} k \\ \underline{\Phi}''_A = -\underline{\Phi}'_A, \Gamma''_A = -\Gamma'_A \end{array}$$

Se l'incastro collega  $N$  travi, l'azione del vincolo in  $A$  risulta:

$$(\underline{A}, \underline{\Phi}, \Gamma): \sum_{i=1}^N \underline{\Phi}_i = \underline{0}, \sum_{i=1}^N \Gamma_i = 0$$

# Principio dei Lavori Virtuali: Analisi dell'equilibrio e calcolo delle Reazioni vincolari

Abbiamo visto come in un sistema di più corpi/punti materiali occorre risolvere le ECS per ogni componente del sistema affinché vi sia equilibrio; esse valgono in presenza di vincoli sia lisci che scabbi. Se  $L=0$ , il sistema è in equilibrio, dunque le ECS determinano le reazioni vincolari.

Se  $L > 0$ , l'equilibrio del sistema non è garantito: dipende dalle sollecitazioni attive cui è sottoposto. Nel caso di vincoli lisci, è possibile applicare il PLV, che determina l'equilibrio in una configurazione  $S_0 \Leftrightarrow \forall \delta S$  a partire da  $S_0$ ,  $\delta L^{(a)} \leq 0$

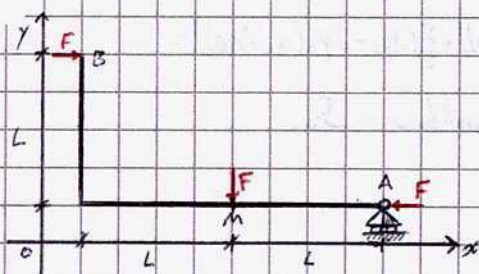
$$\delta L^{(a)} \begin{cases} \leq 0 \quad \forall \delta S \\ = 0 \quad \forall \delta S \text{ reversibile} \end{cases}$$

Non figurano sollecitazioni vincolari, il PLV  $\delta L$  determina una condizione di equilibrio anche in sistemi con  $L=0$ .

In particolare, il PLV consente:

- Analisi dell'equilibrio ( $L \geq 0$ )
- Condizioni pure di equilibrio
- Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni pure di equilibrio (vincoli lisci!)

## Esempio



### Analisi cinematica

$$m=3 \quad x, y, \varphi$$

$$A = (x_A, y_A)$$

$$B = (x_A - 2L, y_A + L)$$

$$dA \cdot j = 0$$

$$\Downarrow$$

$$dy_A = 0$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} s=1 \\ s'=1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} l=2 \\ i=0 \end{matrix}$$

2 volte labile

### Analisi dell'equilibrio

$$(B, F_B): B = (x_A - 2L, y_A + L), \quad F_B = F_j$$

$$(M, F_M): M = (x_A - L, y_A), \quad F_M = -F_j$$

$$(A, F_A): A = (x_A, y_A), \quad F_A = -F_j$$

$$(A, \underline{Q}_A): A = (x_A, y_A), \quad \underline{Q}_A = \underline{Q}_A \underline{j}$$

$$\begin{aligned} \delta L^{(a)} &= F_B \cdot \delta B + F_M \cdot \delta M + F_A \cdot \delta A = F \delta x_B - F \delta y_M - F \delta x_A = \\ &= F(\delta x_A - 2L) - F(\delta y_A) - F \delta x_A = \\ &= F(\delta x_A - L \delta \varphi) - F(-L \delta \varphi) - F \delta x_A = 0 \end{aligned}$$

$$\delta L^{(a)} = 0 \Leftrightarrow S \text{ è in equilibrio in } S_0$$

Il PLV può anche fornire condizioni generali di equilibrio per il sistema in esame:

$$\delta L^{(a)} = R^{(a)} \cdot dA + M_A^{(a)} \cdot d\varphi \Rightarrow \delta L^{(a)} = R_x^{(a)} dx_A + M_z^{(a)} d\varphi_z$$

$$dA \cdot j = 0$$

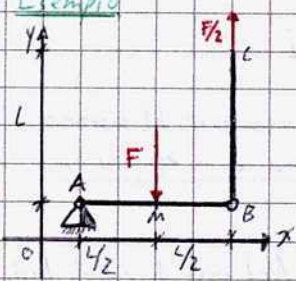
$$\delta L^{(a)} = R_x^{(a)} dx_A + M_z^{(a)} d\varphi_z = 0 \quad \forall dx_A, d\varphi_z \Leftrightarrow \sum^{(a)}: R_x^{(a)} = 0, \quad M_z^{(a)} = 0$$

### Calcolo delle Reazioni vincolari

La trave è in equilibrio e  $i=0$  allora per le ECS si ha  $\underline{Q}_A = F_j$ .

$$\begin{cases} R^{(a)} + R^{(v)} = 0 \\ M_o^{(a)} + M_o^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} F - F = 0, \quad \underline{Q}_A - F = 0 \\ (M - A) \times F_M + (B - A) \times F_B = L F_k - L F_k = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{Q}_A = F_j$$

## Analisi Cinematica



$$m = 6 \quad x_A, y_A, \varphi_1, \quad x_B, y_B, \varphi_2$$

$$dA = 0, \quad dB = dB''$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0 \\ dx_A - d\varphi_1 (y_B - y_A) - dx_B = 0 \\ dy_A + d\varphi_1 (x_B - x_A) - dy_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0 \\ dx_A - dx_B = 0 \\ dy_A + L d\varphi_1 - dy_B = 0 \end{cases} \quad s = 4$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_B & dy_B & d\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & L & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s' = 4 \Rightarrow \begin{matrix} L = 2 \\ i = 0 \end{matrix} \quad \text{2 volte mobile}$$

## Analisi dell'equilibrio

$$(M, F_M): M \equiv (x_A + \frac{L}{2}, y_A), \quad F_M = -F j$$

$$(C, F_C): C \equiv (x_A + L, y_A + L), \quad F_C = \frac{F}{2} j$$

$$(A, \Phi_A): A \equiv (x_A, y_A), \quad \Phi_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j$$

$$(B, \Phi_B): B \equiv (x_A + L, y_A), \quad \Phi_B = \Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j; \quad \Phi_B' = -\Phi_B''$$

$$\begin{aligned} dL^{(a)} &= F_M \cdot dM + F_C \cdot dC = -F dy_M + \frac{F}{2} dy_C = -F(dy_A + d\varphi_1(x_M - x_A)) + \frac{F}{2}(dy_A + d\varphi_1(x_C - x_B)) \\ &= -F \frac{L}{2} d\varphi_1 + \frac{F}{2} L d\varphi_1 \end{aligned} \quad dL^{(a)} = 0 \Leftrightarrow S \text{ è in equilibrio in } S_0$$

## Condizioni generali di equilibrio

$$\bullet \text{ Trave AB: } (R_1^{(a)}, M_{1A}^{(a)}), (R_1^{(v)}, M_{1A}^{(v)}), \quad dx_A = 0, dy_A = 0$$

$$\bullet \text{ Trave BC: } (R_2^{(a)}, M_{2B}^{(a)}), (R_2^{(v)}, M_{2B}^{(v)}), \quad dx_B = 0, dy_B = L d\varphi_2$$

$$dL^{(a)} = R_1^{(a)} \cdot dA + M_{1A}^{(a)} \cdot d\varphi_1 + R_2^{(a)} \cdot dB + M_{2B}^{(a)} \cdot d\varphi_2 = M_{1A_z}^{(a)} d\varphi_{1z} + R_{2y}^{(a)} dy_B + M_{2B_z}^{(a)} d\varphi_{2z} = (M_{1A_z}^{(a)} + L R_{2y}^{(a)}) d\varphi_{1z} + M_{2B_z}^{(a)} d\varphi_{2z}$$

$$dL^{(a)} = 0 \quad \forall d\varphi_{1z}, d\varphi_{2z} \Leftrightarrow \Sigma_1^{(a)}, \Sigma_2^{(a)} \begin{cases} M_{1A_z}^{(a)} + L R_{2y}^{(a)} = 0 \\ M_{2B_z}^{(a)} = 0 \end{cases}$$

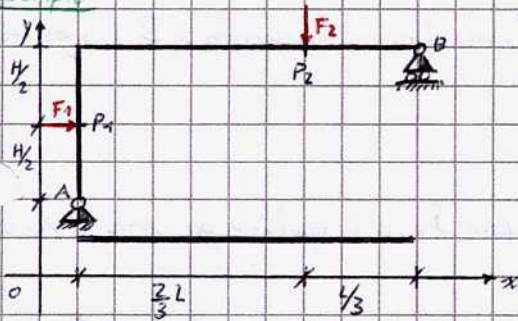
## Calcolo delle Reazioni Vincolari

La trave è in equilibrio nella configurazione  $S_0$  ed essendo  $i = 0$  il problema è staticamente determinato (1 soluzione)

$$\text{ECS} \begin{cases} \text{trave AB: } \begin{cases} R_1^{(a)} + R_1^{(v)} = 0 \\ M_{1A}^{(a)} + M_{1A}^{(v)} = 0 \end{cases} \\ \text{trave BC: } \begin{cases} R_2^{(a)} + R_2^{(v)} = 0 \\ M_{2B}^{(a)} + M_{2B}^{(v)} = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Ay} - F + \Phi_{By} = 0 \\ L \Phi_{Bx} - F \frac{L}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \Phi_A = \frac{F}{2} j, \quad \Phi_B = \frac{F}{2} j$$



Esempio



Analisi Cinematica

$m=3 \quad x_A, y_A, \varphi$

$dA=0, dB \cdot j=0$

$A=(x_A, y_A)$   
 $B=(x_A+L, y_A+H)$

$\begin{cases} dx_A=0, dy_A=0 \\ dy_B=0 \end{cases} \quad s=3$

$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & L \end{pmatrix} \quad s'=3 \Rightarrow \begin{matrix} l=0 \\ i=0 \end{matrix} \quad \text{isostatico}$

Analisi Statica

$\Sigma^{(A)}: P_1=(x_A, y_A+H/2), F_1=F_1 i; P_2=(x_A+2/3 L, y_A+H), F_2=-F_2 j$   
 $\Sigma^{(v)}: A=(x_A, y_A), \underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_{Ax} i + \underline{\Phi}_{Ay} j; B=(x_A+L, y_A+H), \underline{\Phi}_B = \underline{\Phi}_{By} j$

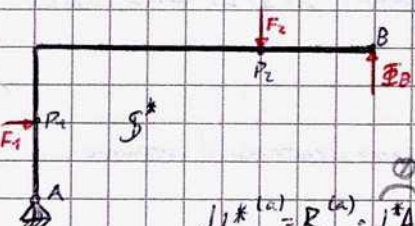
Calcolo delle reazioni vincolari con le FCS:

$\begin{cases} F_1 + \underline{\Phi}_{Ax} = 0 \\ -F_2 + \underline{\Phi}_{Ay} + \underline{\Phi}_{By} = 0 \\ -\frac{H}{2} F_1 - \frac{2}{3} L F_2 + L \underline{\Phi}_{By} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}_A = -F_1 i + (F_1 \frac{H}{2} - \frac{2}{3} F_2 L) j \\ \underline{\Phi}_B = (F_1 \frac{H}{2} + \frac{2}{3} F_2 L) j \end{cases}$

Calcolo delle reazioni vincolari con il PLV

Calcolo di  $\underline{\Phi}_B$ : Supprimiamo il carrello in B e consideriamo il sistema  $S^*$  vincolato con una cerniera in A e soggetto alla sollecitazione attiva  $\Sigma^{(a)} = \{(P_1, F_1), (P_2, F_2), (B, \underline{\Phi}_B)\}$

$dS^*$  è uno spostamento possibile per  $S^*$ , ma non per  $S$ , cioè tale che  $d^*y_B \neq 0$



$S^*: d^*y_B = d^*y_A + L d^*\varphi_z \Rightarrow d^*y_B = L d^*\varphi_z \Rightarrow d^*\varphi_z = d^*y_B / L$

$dL^{*(a)} = R^{(a)} \cdot d^*A + M_A^{(a)} \cdot d^*\varphi + \underline{\Phi}_B \cdot d^*B - d^*B = M_{Az}^{(a)} d^*\varphi_z + \underline{\Phi}_B d^*y_B = (\frac{M_{Az}^{(a)}}{L} + \underline{\Phi}_B) d^*y_B$

$dL^{*(a)} = 0 \quad \forall d^*y_B \Leftrightarrow \frac{M_{Az}^{(a)}}{L} + \underline{\Phi}_B \Leftrightarrow \underline{\Phi}_B = -\frac{M_{Az}^{(a)}}{L}$

Dato che il PLV ragiona con sollecitazioni attive, e  $dL^{(a)}=0$  sarebbe un'identità poiché  $S$  è isostatico, si sostituisce ad un vincolo la sua reazione vincolare come sollecitazione attiva.

In ogni spostamento  $dS^*$  la trave è suscettibile di rotazioni infinitesime attorno ad A:

$d^*P = d^*\varphi \times (P-A)$ , A centro istantaneo di rotazione

$\begin{cases} d^*x_P = -(y_P - y_A) d^*\varphi_z \\ d^*y_P = (x_P - x_A) d^*\varphi_z \\ d^*z = \text{tg} \alpha = d^*\varphi_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1: d^*x_1 = -\frac{H}{2} d^*\varphi_z, d^*y_1 = 0 \\ P_2: d^*x_2 = -H d^*\varphi_z, d^*y_2 = \frac{2}{3} L d^*\varphi_z \\ B: d^*x_B = -H d^*\varphi_z, d^*y_B = L d^*\varphi_z \end{cases}$

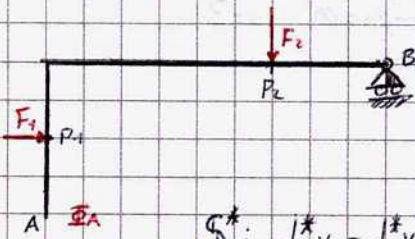
$dL^{*(a)} = F_1 \cdot d^*P_1 + F_2 \cdot d^*P_2 + \underline{\Phi}_B \cdot d^*B = 0 \quad \forall dS^*$

$dL^{*(a)} = F_1 d^*x_1 - F_2 d^*x_2 + \underline{\Phi}_{By} d^*y_B = (-\frac{H}{2} F_1 - \frac{2}{3} L F_2 + L \underline{\Phi}_{By}) \text{tg} \alpha = 0 \quad \forall \alpha \Rightarrow \underline{\Phi}_{By} = (F_1 \frac{H}{2} + \frac{2}{3} F_2 L)$

riccardo.poli@polito.it

Calcolo di  $\underline{\Phi}_A$ : Sopprimiamo la cerniera in A e consideriamo il sistema  $S^*$ , vincolato con un carrello in B e soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, F_1), (P_2, F_2), (A, \underline{\Phi}_A)\}$$



Allora si ha  $\rho^* = 2$ , ma la configurazione  $S_0$  è di equilibrio per ipotesi e per il PLV dovrà aversi:

$$dL^{(a)*} = 0 \quad \forall dS^*$$

Dove  $dS^*$  è uno spostamento possibile per  $S^*$  ma non per  $S$ , cioè  $d^*x_A \neq 0, d^*y_A \neq 0$

$$S^*: d^*y_B = d^*y_A + L d^*\varphi_2 = 0 \Rightarrow d^*\varphi_2 = -d^*y_A/L$$

$$dL^{(a)*} = R^{(a)} \cdot d^*A + M_A^{(a)} \cdot d^*\varphi + \underline{\Phi}_A \cdot d^*A =$$

$$= R_x^{(a)} d^*x_A + R_y^{(a)} d^*y_A + M_A^{(a)} d^*\varphi_2 + \underline{\Phi}_{Ax} d^*x_A + \underline{\Phi}_{Ay} d^*y_A = R_x^{(a)} d^*x_A + R_y^{(a)} d^*y_A - M_A^{(a)} d^*y_A/L + \underline{\Phi}_{Ax} d^*x_A + \underline{\Phi}_{Ay} d^*y_A =$$

$$= (R_x^{(a)} + \underline{\Phi}_{Ax}) d^*x_A + (R_y^{(a)} - \frac{M_A^{(a)}}{L} + \underline{\Phi}_{Ay}) d^*y_A = 0 \quad \forall d^*x_A, d^*y_A$$

$$dL^{(a)*} = 0 \quad \forall d^*x_A, d^*y_A \Leftrightarrow \begin{cases} R_x^{(a)} + \underline{\Phi}_{Ax} = 0 \\ R_y^{(a)} - \frac{M_A^{(a)}}{L} + \underline{\Phi}_{Ay} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_1 + \underline{\Phi}_{Ax} = 0 \\ -\frac{F_2}{3} + \frac{H F_1}{2L} + \underline{\Phi}_{Ay} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\Phi}_{Ax} = -F_1 \\ \underline{\Phi}_{Ay} = \frac{F_2}{3} - \frac{H F_1}{2L} \end{cases}$$

È anche possibile determinare la reazione di  $\underline{\Phi}_A$  con la teoria dei centri, utilizzando i diagrammi di spostamento. Per procedere in tale direzione conviene determinare  $\underline{\Phi}_{Ax}$  e  $\underline{\Phi}_{Ay}$  separatamente, ricordando che una cerniera esterna può essere immaginata come la composizione di due carrelli esterni ortogonali tra loro.

Per determinare  $\underline{\Phi}_{Ay}$ , consideriamo il sistema  $S^*$  vincolato con un carrello in A (che imprime il vincolo  $d^*x_A = 0$  (carrello con scorrimento // asse y)) e uno in B e soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, F_1), (P_2, F_2), (A: \underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_{Ay} \underline{j})\}$$

Allora si ha  $\rho^* = 1$ , con  $S_0$  di equilibrio per ipotesi e per il PLV dovrà aversi

$$dL^{(a)*} = 0 \quad \forall dS^*$$

Dove  $dS^*$  è una rotazione rispetto a C, centro istantaneo di rotazione.

$$\begin{cases} d^*x_P = -(y_P - y_C) d^*\varphi_2 \\ d^*y_P = (x_P - x_C) d^*\varphi_2 \\ d^*t_{gP} = d^*\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} P_1: d^*x_1 = -\frac{H}{2} d^*\varphi_2; \quad d^*y_1 = -L d^*\varphi_2 \\ P_2: d^*x_2 = -H d^*\varphi_2; \quad d^*y_2 = -\frac{L}{3} d^*\varphi_2 \\ A: d^*x_A = 0; \quad d^*y_A = -L d^*\varphi_2 \\ B: d^*x_B = -H d^*\varphi_2; \quad d^*y_B = 0 \end{cases}$$

$$dL^{(a)*} = F_1 d^*P_1 + F_2 d^*P_2 + \underline{\Phi}_A d^*A = F_1 d^*x_1 - F_2 d^*y_2 + \underline{\Phi}_{Ay} d^*y_A =$$

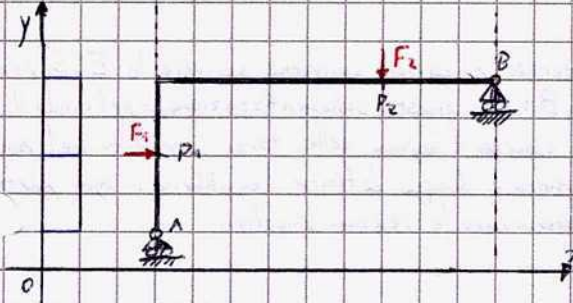
$$= (-\frac{H}{2} F_1 - \frac{L}{3} F_2 - L \underline{\Phi}_{Ay}) d^*\varphi_2 = 0 \quad \forall d^*\varphi_2 \Leftrightarrow \underline{\Phi}_{Ay} = -\frac{H}{2L} F_1 + \frac{F_2}{3}$$

Per determinare  $\underline{\Phi}_{Ax}$ , consideriamo il sistema  $S^*$  vincolato con un carrello in A e uno in B e soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^{(a)*} = \{(P_1, F_1), (P_2, F_2), (A, \underline{\Phi}_A = \underline{\Phi}_{Ax} \underline{i})\}$$

Allora si ha  $\rho^* = 1$ , con  $S_0$  configurazione di equilibrio per ipotesi  $\Rightarrow$  per il PLV dovrà aversi  $dL^{(a)*} = 0 \quad \forall dS^*$ , dove  $dS^*$  è una traslazione lungo l'asse x (C improprio nella direzione dell'asse y)

$$d^*x_P = \text{cost.}, \quad d^*y_P = 0$$



$$dL^{*(a)} = F_1 \cdot d^*P_1 + F_2 \cdot d^*P_2 + \Phi_A \cdot d^*A =$$

$$= F_1 d^*x_A - F_2 d^*y_B + \Phi_A d^*x_A = F_1 d^*x_A + \Phi_A d^*x_A$$

$$dL^{*(a)} = (F_1 + \Phi_A x_A) d^*x_A = 0, \quad \forall d^*x_A \Leftrightarrow \Phi_A x_A = -F_1$$

Applicheremo ora tutto ciò che è stato studiato nella risoluzione di una struttura, attraverso un'analisi cinematica e il calcolo delle reazioni vincolari. Per questo motivo, inizieremo con una breve riepilogazione dei concetti fondamentali studiati:

• **ECS**: Condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio  $\Leftrightarrow \mathcal{S}$  è composto da un unico punto materiale  $P$  o un unico corpo rigido  $\mathcal{S}$ :

$$P: \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} \quad \mathcal{S}: \begin{cases} \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} \end{cases}$$

In un sistema composto da  $N$  punti materiali e/o  $M$  corpi rigidi, una configurazione è di equilibrio se e solo se valgono le ECS per ciascun punto e/o solido

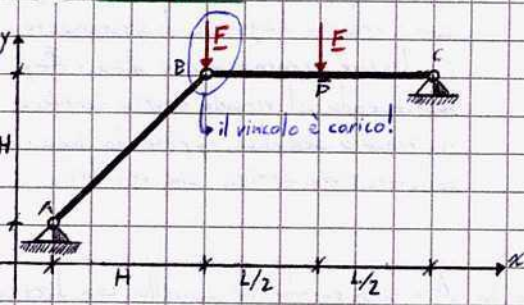
$$\{P_1, \dots, P_N\}: \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} \quad i=1, \dots, N \quad \text{Analogo per } \{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_M\}: \begin{cases} \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} \end{cases}$$

• Un sistema non labile ( $l=0$ ) è per definizione in equilibrio; le ECS sono applicabili per il calcolo delle reazioni vincolari

• **PLV** Applicabile nell'ipotesi di vincoli planari, lisci, fissi, permette l'analisi dell'equilibrio per  $l \geq 0$ : condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio è che  $\forall \mathcal{S} \mathcal{S}$  calcolato dalla configurazione in esame si ha  $\mathcal{S} L^{(a)} \leq 0$   $\forall \mathcal{S} \mathcal{S} [ = 0 \forall \mathcal{S} \mathcal{S}$  reversibile]. Consente:

- Analisi dell'equilibrio con  $l > 0$
- Analisi dell'equilibrio con  $l = 0$ , sfruttando teoria dei centri e diagrammi di spostamento
- Condizioni pure di equilibrio
- Calcolo delle reazioni vincolari in condizioni di equilibrio ( $\Delta$  vincoli lisci)

**Esercizio**



Prima considerazione da fare è sull'equilibrio che, se verificato, vale per la trave AB, BC e per il punto B (in cui opera la sollecitazione attiva  $F$ ); dopo l'analisi cinematica, per applicare le ECS isoleremo il punto B ("sistema equivalente") e, essendo l'equilibrio della struttura verificato dall'analisi cinematica (che, ricordiamo non dipende dalle sollecitazioni esterne), sarà possibile valutare l'equilibrio della struttura e calcolare le reazioni vincolari.

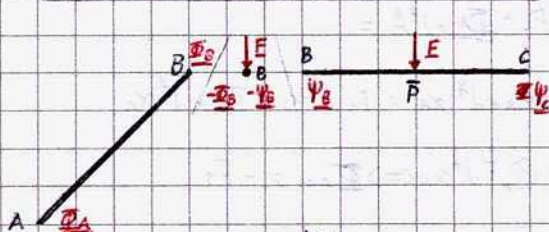
Analisi Cinematica  $\rightarrow$  orientamento della trave AB rispetto all'asse  $x$   
 $n = 6, \quad x_A, y_A, \varphi_A, x_B, y_B, \varphi_B$

$$\begin{cases} \text{cerniera in A: } dA = 0 \quad (dx_A = 0, dy_A = 0) \\ \text{cerniera interna in B: } dB' - dB'' = 0 \quad (dx_B' - dx_B'' = 0, dy_B' - dy_B'' = 0) \\ \text{cerniera in C: } (dx_C = 0, dy_C = 0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ [dx_A - d\varphi_1(y_B - y_A)] - [dx_C - d\varphi_2(y_B - y_C)] = 0 \\ [dy_A + d\varphi_1(x_B - x_A)] - [dy_C + d\varphi_2(x_B - x_C)] = 0 \\ dx_C = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_A - H d\varphi_1 - dx_C = 0 \\ dy_A + H d\varphi_1 - dy_C + L d\varphi_2 = 0 \\ dx_C = 0 \\ dy_C = 0 \end{cases} \quad M_C = \begin{matrix} & dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_C & dy_C & d\varphi_2 \\ \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -H & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & H & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

$s = s' = 6, \quad l = 0, \quad i = 0$  isostatico (l'equilibrio non dipende dalle sollecitazioni esterne)

Calcolo delle reazioni vincolari con le ECS



Osservando che la cerniera interna è carica, conviene scrivere le ECS per le travi AB e BC e per il punto B: con questa schematizzazione, applicando il principio di azione e reazione si osserva il legame delle forze applicate nel punto B: valutando l'equilibrio del punto è dunque definito l'equilibrio in ogni parte della struttura, e possiamo determinare le reazioni vincolari.

- trave AB: cerniera esterna in A:  $\underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax}i + \Phi_{Ay}j$   
cerniera interna in B:  $\underline{\Phi}_B = \Phi_{Bx}i + \Phi_{By}j$
- punto materiale B:  $-\underline{\Phi}_B, -\Psi_B$
- trave BC: cerniera interna in B:  $\Psi_B = \Psi_{Bx}i + \Psi_{By}j \equiv -\underline{\Phi}_B$  in assenza di sollecitazioni attive  
cerniera esterna in C:  $\underline{\Psi}_C = \Psi_{Cx}i + \Psi_{Cy}j$

**ECS**

trave AB: 
$$\begin{cases} R_1^{(a)} + R_1^{(v)} = 0 \\ M_{1A}^{(a)} + M_{1A}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi_{Bx} = 0 \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0 \\ H\Phi_{By} - H\Phi_{Bx} = 0 \end{cases}$$

punto materiale B: 
$$R_1^{(a)} + R_1^{(v)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\Phi_{Bx} - \Psi_{Bx} = 0 \\ -\Phi_{By} - \Psi_{By} - F = 0 \end{cases}$$

trave BC: 
$$\begin{cases} R_2^{(a)} + R_2^{(v)} = 0 \\ M_{2C}^{(a)} + M_{2C}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \Psi_{Cx} + \Psi_{Bx} = 0 \\ \Psi_{Cy} + \Psi_{By} = 0 \\ -L\Psi_{By} + \frac{1}{2}F = 0 \end{cases}$$

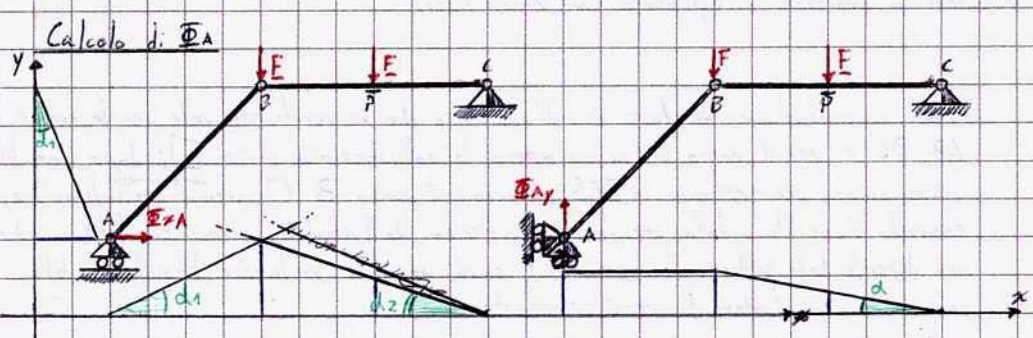
→ sistema di 8 equazioni in 8 incognite ⇒ risolvibile:

$$\underline{\Phi}_A = \frac{3}{2}F_i + \frac{3}{2}F_j ; \underline{\Phi}_B = -\frac{3}{2}F_i - \frac{3}{2}F_j$$

$$\underline{\Psi}_B = \frac{3}{2}F_i + \frac{F}{2}j ; \underline{\Psi}_C = -\frac{3}{2}F_i + \frac{F}{2}j$$

Determinazione delle reazioni vincolari con il PLV: teoria dei centri e diagrammi di spostamento

Nella determinazione delle reazioni vincolari tramite il PLV, occorrerà rendere di volta in volta il sistema labile, sostituendo al vincolo soppresso una sollecitazione attiva, che dovrà garantire l'equilibrio (ottenuta già nell'analisi cinematica!). Nel caso di vincoli doppi, come le cerniere, essi vengono sostituiti da vincoli semplici, in modo tale da poter applicare una unica reazione (sollecitazione attiva), che equilibra il sistema. Essendo la struttura labile, tale analisi può essere fatta in riferimento ai diagrammi di spostamento.



Come intuibile dai due diagrammi con i relativi diagrammi di spostamento, studiamo separatamente  $\Phi_{Ax}$  e  $\Phi_{Ay}$  sostituendo al vincolo doppio cerniera un vincolo semplice, applicando una sollecitazione attiva che equilibra.

• Calcolo di  $\Phi_{Ax}$ : Consideriamo il sistema  $S^*$  ottenuto sopprimendo la cerniera in A e sostituendovi un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle x, considerando la sollecitazione attiva (reazione vincolare)  $\underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax}i$

Allora il sistema  $S^*$ , una volta labile, è soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^* = \{ (A, \Phi_{Ax}i), (B, -F_j), (P, -F_j) \}$$

Per il PLV si ha:  $dL^{*(a)} = \Phi_{Ax}i \cdot d^*x_A - F_j \cdot d^*y_B + F_j \cdot d^*y_P = \Phi_{Ax}d^*x_A - F_j d^*y_B - F_j d^*y_P = 0 \quad \forall d^*S^*$

dove  $d^*S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo possibile in  $S^*$  ma non in  $S$ , per cui  $d^*x_A \neq 0$ .

trave AB:  $\begin{cases} d^*x_P = d^*x_A - d^*\varphi_1(y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*y_A + d^*\varphi_1(x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B = d^*x_A - Hd^*\varphi_1 = 0 \\ d^*y_B = Hd^*\varphi_1 \end{cases}$

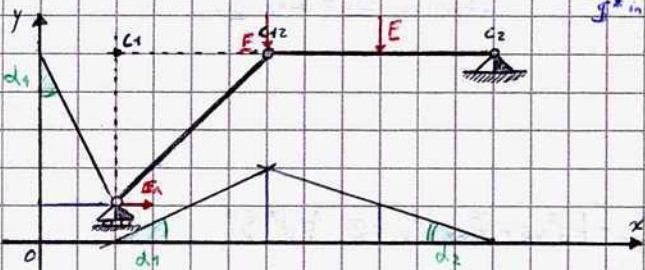
$\Rightarrow d^*x_A = Hd^*\varphi_1, d^*y_A = Hd^*\varphi_1$   
 $d^*y_F = -\frac{L}{2}d^*\varphi_2 = \frac{H}{2}d^*\varphi_1$

trave BC:  $\begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2(y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2(x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*y_F = -\frac{L}{2}d^*\varphi_2 \\ d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1 \end{cases}$

legame tra  $d^*\varphi_1$  e  $d^*\varphi_2$

Sostituiamo i valori trovati in  $d^*L^{(a)}$ , facendola dipendere dalla sola  $d^*\varphi_1$ :

$d^*L^{(a)} = (\Phi_{Ax}H - FH - FH/2)d^*\varphi_1 = 0 \quad \forall d^*\varphi_1 \Rightarrow \Phi_{Ax} = \frac{3}{2}F$   
 *$\mathcal{F}^*$  in equilibrio per ipotesi*



Il sistema in questa configurazione  $S^*$  ammette i centri di rotazione indicati: La struttura ha un centro  $C_1$  per la trave AB sulla retta ortogonale alla direzione di scorrimento del carrello e un centro relativo  $C_{12}$  in B, che deve essere allineato con  $C_1$  e il centro assoluto di rotazione della trave BC, coincidente con  $C \equiv C_2$ .

Il diagramma di spostamento lungo l'asse x è ottenuto ricordando che:

$d^*y_A = 0; d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \equiv Hd^*\varphi_1; d^*y_C = 0$

Quello riferito all'asse y si ricava invece dalle relazioni:

$d^*x_A = Hd^*\varphi_1, dx_{C1} = dx_B = dx_C = 0$  punti allineati rispetto al diagramma  $\Rightarrow$  stesso spostamento

L'applicazione del PLV coi diagrammi di spostamento è rapida, semplice e efficace!

**⚠** I diagrammi di spostamento sono valutati dal punto di vista cinematico; non si riferiscono alle sollecitazioni attive né all'equilibrio della struttura!

• Calcolo di  $\Phi_{Ay}$ : Consideriamo ora il sistema  $S^*$  ottenuto sopprimendo la cerniera in A e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle y e con la reazione vincolare (considerata come sollecitazione attiva)  $\underline{\Phi}_A = \Phi_{Ay} \underline{j}$

Allora il sistema  $S^*$ , una volta labile, è soggetto alla sollecitazione attiva:

$\Sigma^{(a)} = \{(A, \Phi_{Ay} \underline{j}), (B, -F \underline{j}), (P, -F \underline{j})\}$

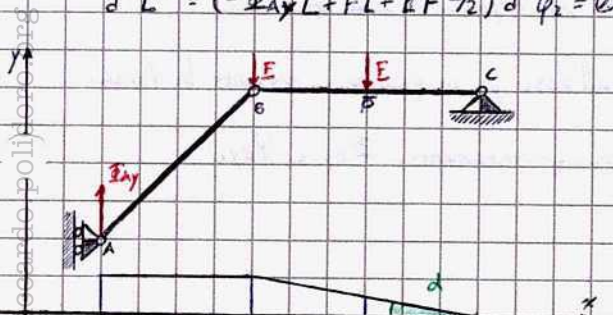
Per il PLV si ha  $d^*L^{(a)} = \Phi_{Ay} \underline{j} \cdot d^*A - F \underline{j} \cdot d^*B - F \underline{j} \cdot d^*P = \Phi_{Ay} d^*y_A - F d^*y_B - F d^*y_P = 0 \quad \forall d^*S^*$

dove  $d^*S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo per cui  $d^*y_A \neq 0$

$\begin{cases} d^*x_P = d^*x_A - d^*\varphi_1(y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*y_A + d^*\varphi_1(x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B = -Hd^*\varphi_1 = 0 \\ d^*y_B = d^*y_A + Hd^*\varphi_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*\varphi_1 = 0 \\ d^*y_B = d^*y_A \end{cases}$

$\begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2(y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2(x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*y_F = -\frac{L}{2}d^*\varphi_2 \\ d^*y_B = -Ld^*\varphi_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*y_A = +\frac{L}{2}d^*\varphi_2 \\ d^*y_A = -Ld^*\varphi_2 \end{cases}$

$d^*L^{(a)} = (-\Phi_{Ay}L + FL + \frac{1}{2}FL) d^*\varphi_2 = 0, \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \Phi_{Ay} = \frac{3}{2}F$



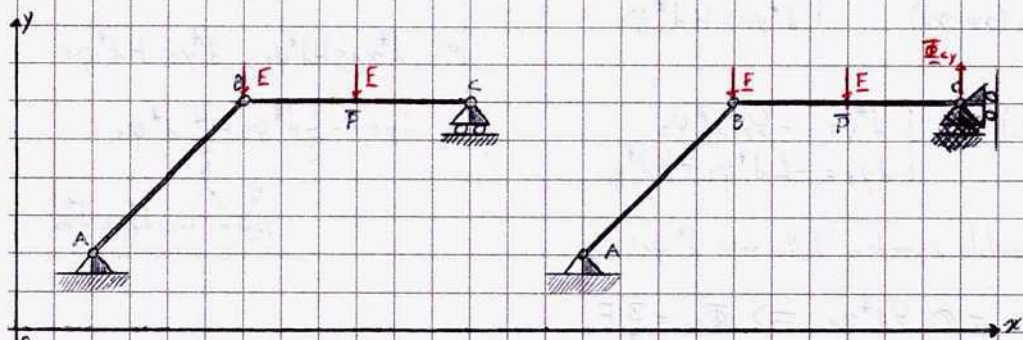
Il sistema in questa configurazione presenta un centro assoluto di rotazione improprio ed uno coincidente con C.

Il diagramma di spostamento riferito lungo l'asse x si ottiene da:

$d^*y_A = d^*y_B = -Ld^*\varphi_2; d^*y_P = -\frac{L}{2}d^*\varphi_2$

È nullo quello riferito all'asse y dato che  $d^*x_A = d^*x_B = d^*x_C = 0$

# Calcolo di $\Phi_c$



Si procede in maniera del tutto analoga a quanto fatto per il calcolo di  $\Phi_A$ .

Consideriamo il sistema  $S^*$  ottenuto sopprimendo la cerniera in C e sostituendola con un carrello con direzione di scorrimento parallela all'asse delle y e con la reazione vincolare  $\Phi_c = \Phi_{cy} \underline{j}$ .

Allora, il sistema  $S^*$  (una volta labile) è soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^* = \{ (B, -F \underline{j}), (P, -F \underline{j}), (C, \Phi_{cy} \underline{j}) \}$$

E, per il PLV:

$$d^* L^{(a)} = -F \underline{j} \cdot d^* B - F \underline{j} \cdot d^* P + \Phi_{cy} \underline{j} \cdot d^* C = -F d^* y_B - F d^* y_P + \Phi_{cy} d^* y_C = 0 \quad \forall d^* S^*$$

dove  $d^* S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo per cui  $d^* y_C \neq 0$  (non possibile in S)

trave AB:  $\begin{cases} d^* x_P = d^* x_A - d^* \varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^* y_P = d^* y_A + d^* \varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^* x_B = -H d^* \varphi_1 \\ d^* y_B = H d^* \varphi_1 \end{cases}$

$$\begin{aligned} d^* \varphi_1 &= 0 \\ d^* y_B &= 0 \\ d^* y_C &= L d^* \varphi_2 \\ d^* y_P &= \frac{L}{2} d^* \varphi_2 \end{aligned}$$

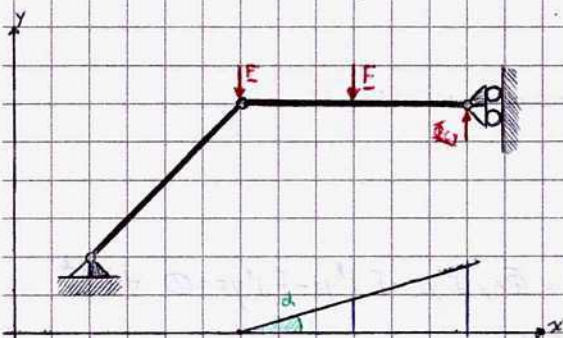
trave BC:  $\begin{cases} d^* x_P = -d^* \varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^* y_P = d^* y_C + d^* \varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^* x_B = 0 \\ d^* y_B = d^* y_C - \frac{L}{2} d^* \varphi_2 \\ d^* y_C = L d^* \varphi_2 \end{cases}$

$$d^* L^{(a)} = \left( -F \frac{L}{2} + \Phi_{cy} L \right) d^* \varphi_2 = 0 \quad \forall d^* \varphi_2 \Rightarrow \Phi_{cy} = \frac{F}{2}$$

In questa configurazione  $S^*$ , il sistema ammette come centri di rotazione

$$C_1 \equiv A, C_2 \equiv B, C_3 \infty$$

Con  $C_2$  parallelo all'asse x.



Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricordando che:

$$d^* y_B = 0, d^* y_P = \frac{L}{2} d^* \varphi_2, d^* y_C = L d^* \varphi_2$$

Mentre è nullo quello riferito all'asse y dato che  $d^* x_A = 0; d^* \varphi_1 = 0; d^* x_B = d^* x_C = 0$

## Determinazione delle reazioni per la cerniera interna in B

Essendo la cerniera interna in B carica, indichiamo con  $\Phi_B$  e  $\Psi_B$  le reazioni esercitate dal punto sulle travi AB e BC rispettivamente. Osservando che B è in equilibrio e che la sollecitazione attiva agente su B ha la direzione dell'asse y si ha:

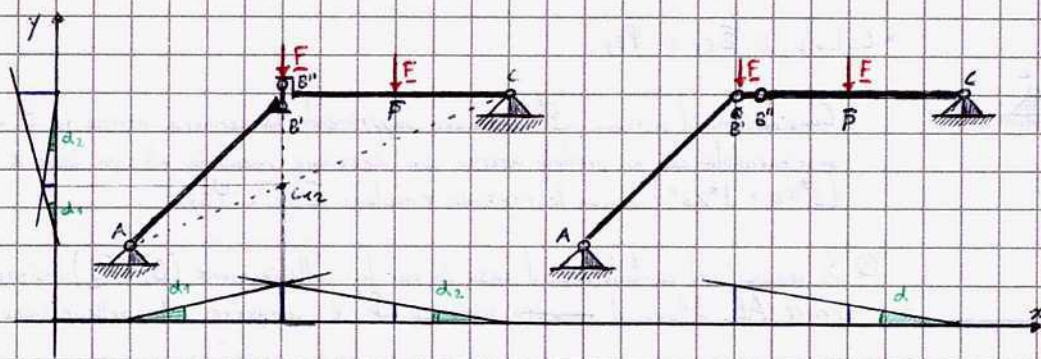
$$\Phi_{Bx}, \Psi_{Bx} = -\Phi_{Bx} \quad \text{necessario per l'equilibrio della struttura}$$

Non sussiste invece la stessa relazione per le componenti parallele all'asse y, in quanto è presente la forza.

Dovremo procedere dunque nell'identificazione di  $\Phi_{Bx} = \Psi_{Bx}$  e poi, separatamente,  $\Phi_{By}$  e  $\Psi_{By}$ .

$$F = -F_j$$

$$\bullet \text{ Calcoliamo } \Phi_{Bx} \text{ e } \Psi_{Bx} = -\Phi_{Bx}$$



Consideriamo il sistema  $S^*$  ottenuto sopprimendo la cerniera interna in B e sostituendola con un pendolo interno con direzione parallela all'asse delle  $y$  ( $d^*y_B = d^*y_B''$ ) e con la reazione vincolare  $\Phi_{Bx}$  ( $-\Psi_{Bx}$ ).

Definiamo dunque le sollecitazioni attive di  $S^*$ :  $\Sigma^* = \{(B, -F_j), (\bar{P}, -F_j), (B', \Phi_{Bx} i), (B'', -\Phi_{Bx} i)\}$

$$\text{E applichiamo il PLV: } d^*L^{(a)} = -F_j \cdot d^*B - F_j \cdot d^*\bar{P} + \Phi_{Bx} i \cdot d^*B' - \Phi_{Bx} i \cdot d^*B'' = \\ = -F d^*y_B - F d^*y_{\bar{P}} + \Phi_{Bx} d^*x_{B'} - \Phi_{Bx} d^*x_{B''} = 0, \forall d^*S^*$$

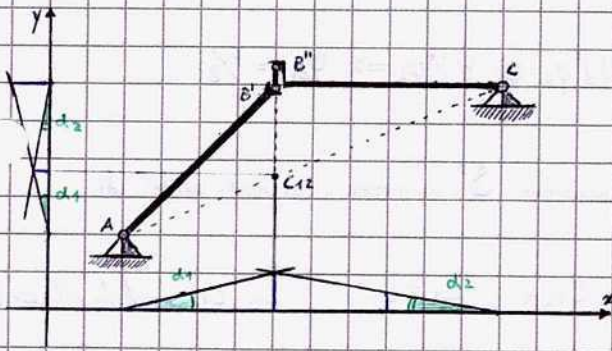
dove  $d^*S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo per cui  $d^*x_{B'} - d^*x_{B''} \neq 0$

$$\text{trave AB: } \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B'} = -H d^*\varphi_1 \\ d^*y_{B'} = H d^*\varphi_1 \end{cases}$$

$$\text{trave BC: } \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B''} = 0 \\ d^*y_{B''} = -L d^*\varphi_2 \equiv H d^*\varphi_1 \end{cases}$$

$$d^*L^{(a)} = (FL + F\frac{L}{2} + \Phi_{Bx} L) d^*\varphi_2 = 0 \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \Phi_{Bx} = -\Psi_{Bx} = -\frac{3}{2}F$$

Si osservi che, essendo  $d^*y_{B'} = d^*y_{B''}$ , nel computo del lavoro elementare per la forza attiva  $(B, -F_j)$  non è necessario specificare se tale azione insiste nel punto B come appartenente alla trave AB o alla trave BC.



Il sistema nella configurazione  $S^*$  ammette i seguenti centri di istantanea rotazione:

$$C_1 \equiv A, \quad C_{12} \equiv C, \quad C_2 \equiv C$$

Dove  $C_{12}$  è dato dall'intersezione della retta per A e C con la parallela all'asse  $y$  passante per B.

Si osservi che le rette dei diagrammi di spostamento di angolo  $d\alpha$  si riferiscono alla trave BC; si noti lo spostamento non nullo  $d^*x_{B'} = -H d^*\varphi_1$ .

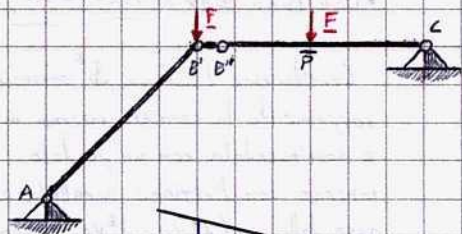
I diagrammi di spostamento sono ottenuti ricordando che:

$$\text{diagramma asse } x: \quad d^*x_A = 0, \quad d^*x_B = -L d^*\varphi_2 \equiv H d^*\varphi_1, \quad d^*x_C = 0$$

$$\text{diagramma asse } y: \quad d^*y_A = 0, \quad d^*y_{B'} = -H d^*\varphi_1, \quad d^*y_{B''} = 0, \quad d^*y_C = 0$$

Alla prossima pagina il calcolo di  $\Phi_{By}$  e  $\Psi_{By}$ .

• Calcolo di  $\Phi_{By}$  e  $\Psi_{By}$



Consideriamo il sistema  $S^*$  ottenuto sopprimendo la cerniera interna in B e sostituendola con un pendolo interno con direzione parallela all'asse delle x ( $d^*x_{B'} = d^*x_{B''}$ ) e con le reazioni vincolari  $\Phi_{By}$  e  $\Psi_{By}$ .

① Si cominci col considerare il caso in cui la sollecitazione  $(B, -F_j)$  insista sulla trave AB. Allora, il soggetto sistema  $S^*$  è soggetto alla sollecitazione attiva

$$\Sigma^* = \{(B', -F_j), (B'', -F_j), (B', -\Psi_{By} j), (B'', \Phi_{By} j)\}$$

Allora, applicando il PLV:  $d^*L^{(a)} = -F_j \cdot d^*B' - F_j \cdot d^*B'' - \Psi_{By} j \cdot d^*B' + \Phi_{By} j \cdot d^*B'' =$   
 $= -F d^*y_{B'} - F d^*y_{B''} - \Psi_{By} d^*y_{B'} + \Phi_{By} d^*y_{B''} = 0 \quad \forall d^*S^*$

dove  $d^*S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo per cui  $d^*y_{B'} - d^*y_{B''} \neq 0$

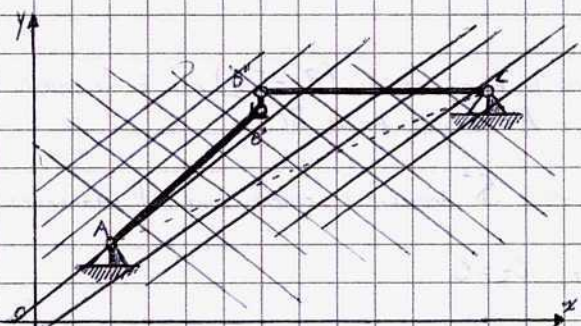
trave AB:  $\begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1(y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1(x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B'} = -H d^*\varphi_1 \\ d^*y_{B'} = H d^*\varphi_1 \end{cases}$

trave BC:  $\begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2(y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2(x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_{B''} = 0 \\ d^*y_{B''} = -L d^*\varphi_2 \end{cases}$

da cui, essendo  $d^*x_{B'} = d^*x_{B''}$ , si ricava  $d^*\varphi_1 = 0$  e quindi:

~~$d^*L^{(a)} = (FL/2 - \Phi_{By}L) d^*\varphi_2 = 0 \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \Phi_{By} = \Psi_{By} = \frac{3}{2}F$~~

~~Si osservi che, essendo  $d^*y_{B'} = d^*y_{B''}$ , nel computo del lavoro elementare per la forza attiva  $(B, -F_j)$  non è necessario specificare se tale azione insista nel punto B come appartenente alla trave AB o alla trave BC.~~



$$d^*x_{B'} = d^*x_{B''} = 0; \quad d^*y_{B'} = 0$$

$$d^*y_{B'} = -\frac{L}{2} d^*\varphi_2; \quad d^*y_{B''} = -L d^*\varphi_2$$

$$d^*L^{(a)} = (FL/2 - \Psi_{By}L) d^*\varphi_2 = 0 \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \Psi_{By} = F/2$$

Il sistema nella configurazione  $S^*$  ammette i seguenti centri di istantanea rotazione:

$$C_1 \equiv A, \quad C_2 \equiv \infty, \quad C_3 \equiv C \quad \text{con } C_2 \text{ parallelo all'asse } x$$

Il diagramma di spostamento riportato lungo l'asse x è ottenuto ricercando che:

$$d^*y_A = 0; \quad d^*y_{B'} = -L d^*\varphi_2; \quad d^*y_{B''} = -\frac{L}{2} d^*\varphi_2; \quad d^*y_C = 0$$

Laddove è nullo quello riferito all'asse y essendo:

$$d^*x_A = 0; \quad d^*x_{B'} = d^*x_{B''} = 0; \quad d^*x_C = 0$$



②: Consideriamo ora il caso in cui la sollecitazione  $(B, -F_j)$  insista sulla trave BC.

Allora, il sistema  $S^*$  è soggetto alla sollecitazione attiva:

$$\Sigma^* = \{ (B'', -F_j), (P, -F_j), (B', \overline{F}_B, j), (B'', -\overline{F}_B, j) \}$$

Per il PLV si ha:

$$dL^{*(a)} = -F_j \cdot d^*B'' - F_j \cdot d^*P + \overline{F}_B \cdot d^*B' - \overline{F}_B \cdot d^*B'' = 0, \quad \forall d^*S^* \text{ virtuale per } S^*$$

$$\text{In particolare, si ha: } dL^{*(a)} = -F_j d^*y_B'' - F_j d^*y_P + \overline{F}_B d^*y_B' - \overline{F}_B d^*y_B'' = 0 \quad \forall d^*S^*$$

Dove  $d^*S^*$  è uno spostamento rigido infinitesimo per cui  $d^*y_B' - d^*y_B'' \neq 0$

Ricordando che:

$$\text{trave AB: } \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_1 (y_P - y_A) \\ d^*y_P = d^*\varphi_1 (x_P - x_A) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B' = -H d^*\varphi_1 \\ d^*y_B' = H d^*\varphi_1 \end{cases}$$

$$\text{trave BC: } \begin{cases} d^*x_P = -d^*\varphi_2 (y_P - y_C) \\ d^*y_P = d^*\varphi_2 (x_P - x_C) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d^*x_B'' = 0 \\ d^*y_B'' = -L d^*\varphi_2 \end{cases}$$

Da cui, essendo  $d^*x_B' = d^*x_B''$  si ricava  $d^*\varphi_1 = 0$  e inoltre:

$$d^*x_B' = d^*x_B'' = 0; \quad d^*y_B' = 0; \quad d^*y_P = -\frac{L}{2} d^*\varphi_2; \quad d^*y_B'' = -L d^*\varphi_2$$

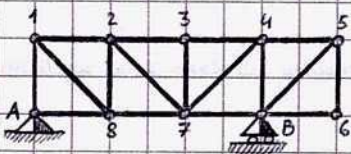
e quindi:

$$dL^{*(a)} = (F_j + F_j \frac{L}{2} + \overline{F}_B L) d^*\varphi_2 = 0 \quad \forall d^*\varphi_2 \Rightarrow \overline{F}_B = -\frac{3}{2} F_j$$

Il diagramma di spostamento del caso ② è uguale a quello del caso ①, come visibile alla pagina precedente.

## Strutture Reticolari

Una struttura reticolare è una struttura ottenuta dall'unione di maglie triangolari. Ricordando che le maglie triangolari costituiscono dei sistemi rigidi (3 centri relativi non allineati) internamente isostatici (3 volte labile globalmente, con l'indice di labilità interna pari ad  $k-3$ ), si osserva che l'aggiunta di 3 vincoli esterni semplici rende il sistema globalmente isostatico.



La travatura reticolare in figura, essendo soggetta a 3 vincoli esterni semplici, è in equilibrio.

Consideriamo un po' di nomenclatura:

Sono numerati tutti i nodi, punti d'incontro di più travi, eccetto quelli in cui sono presenti dei vincoli esterni (A, B in figura).

Denotiamo con  $T_{ij}$  la trave di estremi  $i$  e  $j$ . Indichiamo:

- $R_{ij}$  reazione che  $T_{ij}$  applica sul nodo  $i$  ( $\Rightarrow -R_{ij}$  reazione che il nodo  $i$  applica sulla trave  $T_{ij}$ )
- $R_{ji}$  reazione che  $T_{ij}$  applica sul nodo  $j$  ( $\Rightarrow -R_{ji}$  reazione che il nodo  $j$  applica sulla trave  $T_{ij}$ )

Principio di Azione e Reazione

Nelle analisi delle strutture, distingueremo il caso in cui  $T_{ij}$  sia carica da quello in cui è scarica.

• Caso 1:  $T_{ij}$  è scarica.

Per le ECS, si ha  $R_{ij} + R_{ji} = 0$  e, posto  $u_{ij}$  il versore di direzione orientata  $i \rightarrow j$ , si ha:

$$R_{ij} = R_{ij} u_{ij}; \quad R_{ji} = -R_{ij} u_{ij} = R_{ij} u_{ji} = R_{ji} u_{ji}$$

$$N_{ij} \equiv R_{ij} = R_{ji} \quad \text{sfuerzo normale (grandezza scalare)}$$

• Caso 2:  $T_{ij}$  è carica  $\Rightarrow$  Le ECS, includendo le sollecitazioni esterne, forniscono il legame esistente tra  $R_{ij}$  e  $R_{ji}$

Una volta determinato l'equilibrio della struttura (analisi cinematica), che implica l'equilibrio di ogni sua parte, per il calcolo delle reazioni vincolari non è conveniente applicare le ECS, poiché si otterrebbe un sistema lineare composto da molte equazioni. Per questo motivo, si strutturano due possibili metodi di calcolo delle reazioni vincolari interne.

### Metodo dei Nodi

Supposto che la struttura reticolare sia in equilibrio, essa è in equilibrio in ogni sua parte.

Consideriamo il nodo  $i$ . Definiamo:

- $F_i$ : risultante della sollecitazione attiva agente sul nodo  $i$
- $R_i$ : risultante delle reazioni vincolari esterne agenti sul nodo  $i$
- $R_{ih}$ : reazione che la trave  $T_{ih}$  esprime sul nodo  $i$   $h=1, \dots, M$  ( $M$  = numero di travi concorrenti in  $i$ )

Allora, sapendo che il sistema è in equilibrio, dall'applicazione delle ECS otteniamo:

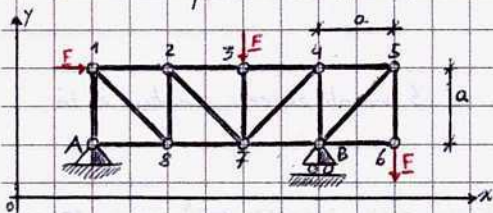
$$F_i + R_i + \sum_{h=1}^M R_{ih} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F_{ix} + R_{ix} + \sum_{h=1}^M R_{ihx} = 0 \\ F_{iy} + R_{iy} + \sum_{h=1}^M R_{ihy} = 0 \end{cases}$$

Supposte note le reazioni vincolari esterne ( $R_i$ ), si osserva che il sistema fornisce 2 equazioni (in tutto) per le  $2M$  incognite  $R_{ihx}, R_{ihy}$  ( $h=1, \dots, M$ ).

Se però alcune delle travi concorrenti in  $i$  sono scariche, le corrispondenti incognite  $R_{ih}$  assumono la forma:  $R_{ih} = R_{ih} u_{ih}$ , con  $u_{ih}$  versore noto banalmente dalla geometria della struttura.

In particolare, il sistema suddetto fornisce univocamente le reazioni  $R_{ih}$  nel caso in cui  $i$  sia un nodo semplice, ovvero se in  $i$  convergono solo due aste.

Il metodo dei nodi consente di determinare tutte le reazioni  $R_{ih}$  ( $V_{ih}$ ) a partire da un nodo semplice, procedendo in sequenza nell'individuazione delle reazioni negli altri nodi utilizzando i risultati ottenuti nei passi precedenti.



### Esempio

La trussatura reticolare in figura è in equilibrio, in quanto ad essa sono applicati tre vincoli esterni semplici tra loro indipendenti.

• Sollecitazioni esterne:  $(P_1, F_1), (P_3, -F_3), (P_6, -F_6)$

• Reazioni vincolari esterne:   
 cerniera in A  $(A, \Phi_{Ax i} + \Phi_{Ay j})$    
 carrello in B  $(B, \Phi_{By j})$

Consideriamo un polo in A e valutiamo l'equazione dei momenti: l'applicazione globale delle ECS è una condizione necessaria ma non sufficiente per l'equilibrio globale della struttura, ma l'equilibrio è già verificato; tale applicazione fornisce informazioni sulle componenti delle reazioni vincolari esterne; valutando l'equazione dei momenti, in cui interviene il complesso di sollecitazioni attive e vincolari esterne, e sapendo che essa è uguale a 0 (equilibrio), otteniamo le reazioni vincolari esterne (che bilanciano le sollecitazioni attive).

Equazione dei Momenti:

$$M_A^{(s)} + M_A^{(v)} = (P_1 - A) \times F_i - (P_3 - A) \times F_j - (P_6 - A) \times F_j + (B - A) \times \Phi_{By} =$$

$$= a_j \times F_i - (2a_i + a_j) \times F_j - (4a_i) \times F_j + (3a_i) \times \Phi_{By} =$$

$$= [-aF - 2aF - 4aF + 3a \Phi_{By}] k = (-7aF + 3a \Phi_{By}) k$$

Rispetto ad A  
 $\Rightarrow$  solo  $\Phi_{By}$  incognita

Applichiamo le ECS globalmente alla struttura, ottenendo:

$$\begin{cases} F + \Phi_{Ax} = 0 \\ -F - F + \Phi_{Ay} + \Phi_{By} = 0 \\ -7aF + 3a \Phi_{By} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax} = -F \\ \Phi_{Ay} = -F/3 \\ \Phi_{By} = 7/3 F \end{cases}$$

Noto le reazioni vincolari esterne, possiamo considerare il primo nodo (rigorosamente semplice): consideriamo il nodo A:

Ⓐ: Il nodo semplice è in equilibrio  $\Rightarrow$  applichiamo le ECS sapendo che:

$$\underline{R}_A = \Phi_{Ax} \underline{i} + \Phi_{Ay} \underline{j} ; \quad \underline{R}_{AS} = N_{AS} \underline{u}_{AS} = N_{AS} \underline{i}$$

$$\underline{R}_{A1} = N_{A1} \underline{u}_{A1} = N_{A1} \underline{j}$$

Possiamo determinare gli incogniti sforzi normali:

$$\underline{R}_A + \underline{R}_{AS} + \underline{R}_{A1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax} + N_{AS} = 0 \\ \Phi_{Ay} + N_{A1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -F + N_{AS} = 0 \\ -F/3 + N_{A1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{AS} = F \\ N_{A1} = F/3 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{R}_{AS} = F \underline{i} \\ \underline{R}_{A1} = \frac{F}{3} \underline{j} \end{matrix}}$$

Consideriamo ora il nodo 1: vi concorrono 3 travi, ma essendo nota  $\underline{R}_{A1}$  il nodo può considerarsi semplice e si possono dunque determinare  $\underline{R}_{12}$  e  $\underline{R}_{13}$ .

vincolo esterno assente

Ⓛ: Osserviamo che:  $\underline{F}_1 = F_i$ ;  $\underline{R}_1 = 0$ ;  $\underline{R}_{1A} = -\underline{R}_{A1} = -\frac{F}{3} \underline{j}$ ;  $\underline{R}_{12} = N_{12} \underline{u}_{12} = N_{12} \underline{i}$

$$\underline{R}_{13} = N_{13} \underline{u}_{13} = N_{13} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right)$$

E, dunque:

$$\underline{F}_1 + \underline{R}_{1A} + \underline{R}_{12} + \underline{R}_{13} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} F + N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{13} = 0 \\ -\frac{F}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{13} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{12} = -\frac{2}{3} F \\ N_{13} = -\frac{\sqrt{2}}{3} F \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{R}_{12} = -\frac{2}{3} F \underline{i} \\ \underline{R}_{13} = -\frac{F}{3} \underline{i} + \frac{F}{3} \underline{j} \end{matrix}}$$

Ⓜ Essendo noti  $\underline{R}_{AS}$  e  $\underline{R}_{13}$  il nodo può considerarsi semplice e si ha:

$$\underline{F}_2 = 0, \underline{R}_2 = 0; \underline{R}_{2A} = -F_i, \underline{R}_{21} = \frac{F}{3} \underline{i} - \frac{F}{3} \underline{j}; \underline{R}_{23} = N_{23} \underline{j}; \underline{R}_{27} = N_{27} \underline{i}$$

E, dunque:

$$\underline{F}_2 + \underline{R}_2 + \underline{R}_{2A} + \underline{R}_{21} + \underline{R}_{23} + \underline{R}_{27} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -F + \frac{F}{3} + N_{27} = 0 \\ -\frac{F}{3} + N_{23} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{27} = \frac{2}{3} F \\ N_{23} = \frac{F}{3} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{R}_{23} = \frac{2}{3} F \underline{j} \\ \underline{R}_{27} = \frac{F}{3} \underline{i} \end{matrix}}$$

Ⓝ Sapendo che:  $\underline{F}_3 = 0, \underline{R}_3 = 0$ ;  $\underline{R}_{31} = \frac{2}{3} F \underline{i}$ ,  $\underline{R}_{32} = -\frac{F}{3} \underline{j}$ ;  $\underline{R}_{33} = N_{23} \underline{j}$ ,  $\underline{R}_{37} = N_{27} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j} \right)$

si ha:  $\begin{cases} \frac{2}{3} F + N_{23} + N_{27} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \\ -\frac{F}{3} - N_{27} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{23} = -\frac{F}{3} \\ N_{27} = -\frac{\sqrt{2}}{3} F \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} \underline{R}_{23} = -\frac{F}{3} \underline{j} \\ \underline{R}_{27} = -\frac{F}{3} \underline{i} + \frac{F}{3} \underline{j} \end{matrix}}$

Si procede analogamente per la determinazione delle reazioni vincolari interne relative ai nodi restanti.

## Metodo di Ritter

Anche questo metodo ha per oggetto la determinazione delle reazioni interne di una trave reticolare, si basa sull'applicazione delle ECS ad opportune sezioni di una struttura reticolare in equilibrio; dette sezioni consentiranno l'applicazione globale delle ECS ad uno dei due sistemi componenti ottenuti dalla sezione, permettendo la valutazione di parte delle reazioni vincolari interne alla struttura.

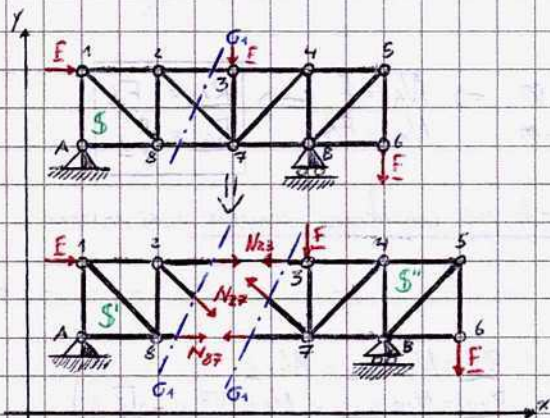
Una sezione di Ritter (o sezione di taglio), che divide la struttura in due parti  $S'$  ed  $S''$ , è una sezione che taglia aste scariche e tali che tutte le aste tranne una ( $T_{ij}$ ) concorrano in uno stesso punto  $T$ , proprio o improprio.

Logicamente, se la struttura  $S = S' \cup S''$  è in equilibrio, lo saranno anche le strutture componenti  $S'$  ed  $S''$ .

Supposto che  $T_{ij}$  sia l'unica asta che non concorre con le altre in un punto  $T$  proprio o improprio, applicando opportunamente le ECS ad  $S'$  oppure ad  $S''$  è possibile determinare  $R_{ij} = N_{ij} u_{ij}$ . In particolare:

- Se  $T$  è un punto proprio, dall'equazione  $M_T = 0$  si ottiene un'unica equazione nell'incognita  $N_{ij}$ .
- Se  $T$  è un punto improprio, allora dall'equazione  $R \cdot u = 0$ , con  $u$  vettore di direzione ortogonale a quella del punto improprio  $T$  in cui concorrono le aste, si ottiene un'unica equazione nell'incognita  $N_{ij}$ .

### Esempio



La sezione di Ritter in figura divide la struttura nelle due parti  $S'$  e  $S''$ .

Dalle ECS applicate all'intera struttura  $S$ , essendo essa in equilibrio, si ottengono le reazioni dei vincoli esterni (cerniera in A, carrello in B):

$$\underline{R}_A = -F \underline{i} - \frac{F}{3} \underline{j} ; \quad \underline{R}_B = \frac{2}{3} F \underline{j}$$

Prendiamo in esame il sistema  $S'$ , a sinistra di  $G_1$  (struttura più semplice; si giungerebbe agli stessi risultati considerando  $S''$ ).

- Sollecitazioni agenti su  $S'$ :

$$(P_1, F_1); (A, \underline{R}_A); (P_2, N_{23} u_{23}); (P_2, N_{27} u_{27}); (P_8, N_{87} u_{87})$$

Apriamo ora scegliendo volta per volta la trave da considerarsi isolata (non concorrente in uno stesso punto rispetto alle altre):

- ⊙  $T_{27}$   $G_1$  taglia le aste scariche  $T_{23}$  e  $T_{27}$ , che concorrono nel punto proprio  $P_2$ , in cui non concorre  $T_{87}$ . Imponendo  $M_{P_2} = 0$  per l'equilibrio, si ha che:

$$\begin{aligned} M_{P_2} &= (A - P_2) \times \underline{R}_A + (P_1 - P_2) \times F_1 + (P_8 - P_2) \times N_{87} u_{87} = \\ &= (-a \underline{i} - a \underline{j}) \times (-F \underline{i} - \frac{F}{3} \underline{j}) + (-a \underline{i}) \times F \underline{i} + (-a \underline{j}) \times N_{87} \underline{i} = (a \frac{F}{3} - aF + a N_{87}) \underline{k} \end{aligned}$$

$$M_{P_2} = 0 \Leftrightarrow N_{87} = \frac{2}{3} F \quad (\text{tirante})$$

- ⊙  $T_{27}$   $G_1$  taglia le aste scariche  $T_{23}$  e  $T_{87}$ , concorrenti in  $I$  (punto improprio di direzione  $\underline{i}$ ), in cui non concorre  $T_{27}$ . Imponendo  $R \cdot \underline{j} = 0$  per l'equilibrio, si ha:

$$\begin{aligned} R \cdot \underline{j} &= \underline{R}_A \cdot \underline{j} + F_1 \cdot \underline{j} + N_{23} u_{23} \cdot \underline{j} + N_{87} u_{87} \cdot \underline{j} + N_{27} u_{27} \cdot \underline{j} = \\ &= -\frac{F}{3} + N_{27} (\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j}) \cdot \underline{j} = -\frac{F}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} N_{27} \end{aligned}$$

$$R \cdot \underline{j} = 0 \Leftrightarrow \frac{F}{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{27} = 0 \Leftrightarrow N_{27} = -\frac{\sqrt{2}}{3} F \quad (\text{puntone})$$

(essendo  $u_{23} = u_{87} = \underline{i}$ ,  $u_{27} = (\frac{\sqrt{2}}{2} \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{j})$ )

(T<sub>23</sub>) G<sub>1</sub> taglia le aste sciariche T<sub>27</sub> e T<sub>87</sub>, che concorrono nel punto proprio P<sub>7</sub> cui non concorre T<sub>23</sub>.  
Imponendo che  $M_{P7} = 0$  per l'equilibrio, si ha:

$$M_{P7} = (A - P_7) \times \underline{F}_A + (P_1 - P_7) \times F_{i1} + (P_2 - P_7) \times (N_{23} u_{23} + N_{27} u_{27}) + (P_8 - P_7) \times N_{87} u_{87} =$$

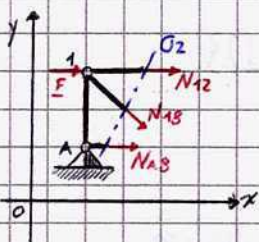
$$= (-2a_i) \times (-F_i - F/3 \underline{j}) + (-2a_i + a_j) \times F_{i1} + (-a_i + a_j) \times (N_{23} i + N_{27} (\frac{\sqrt{2}}{2} i - \frac{\sqrt{2}}{2} j)) + (-a_i) \times N_{87} i =$$

$$= (2aF/3 - aF - aN_{23}) k$$

$$M_{P7} = 0 \Leftrightarrow N_{23} = -F/3 \quad (\text{puntone})$$

Agli stessi risultati si perviene considerando S''.

La sezione di Ritter G<sub>2</sub> in figura consente di individuare N<sub>12</sub>, N<sub>18</sub>, N<sub>87</sub>

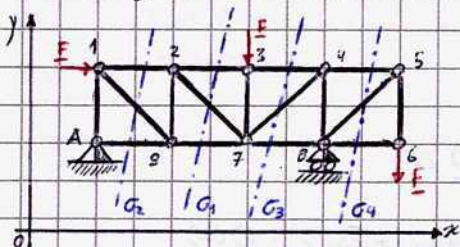


(T<sub>18</sub>) G<sub>2</sub> taglia le aste sciariche T<sub>12</sub> e T<sub>18</sub> concorrenti in P<sub>1</sub>, cui non concorre T<sub>18</sub>.  
Imponendo  $M_{P1} = 0$  sarà determinata N<sub>18</sub>.

(T<sub>12</sub>) G<sub>2</sub> taglia le aste sciariche T<sub>18</sub> e T<sub>87</sub> concorrenti in P<sub>8</sub>, cui non concorre T<sub>12</sub>.  
Imponendo  $M_{P8} = 0$ , sarà determinata N<sub>12</sub>.

(T<sub>18</sub>) G<sub>2</sub> taglia le aste sciariche T<sub>12</sub> e T<sub>87</sub> concorrenti nel punto improprio i, cui non concorre T<sub>18</sub>.  
Imponendo  $R \cdot \underline{j} = 0$  sarà determinata N<sub>18</sub>.

Analogamente da G<sub>3</sub> ricaviamo N<sub>43</sub>, N<sub>47</sub>, N<sub>87</sub> e da G<sub>4</sub> N<sub>54</sub>, N<sub>58</sub>, N<sub>88</sub>.



Se lo sforzo normale è  $> 0$ , esso si dice tirante.  
Se invece è  $< 0$ , viene detto puntone.  
Ciò vale anche nell'analisi mediante il Metodo dei Nodi.

### Esercizio di Ricapitolazione

Analisi cinematica della struttura, determinazione delle reazioni vincolari esterne ed interne.

La struttura può essere considerata come l'unione di 3 corpi rigidi: le aste BC ed AD e la struttura reticolare DCGEH, che essendo data dalla composizione di maglie triangolari è internamente isostatica può essere assimilata ad un unico corpo rigido.

$$S = S' \cup S'' \cup S'''$$

Coordinate normali:  $m=9$

S'  $\equiv$  asta BC  $x_B, y_B, \varphi_1$

S''  $\equiv$  struttura DCGEH  $x_C, y_C, \varphi_2$

S'''  $\equiv$  asta AD  $x_A, y_A, \varphi_3$

In questa schematizzazione, i vincoli oggetto dell'analisi cinematica sono le cerniere esterne in A, B e quelle interne in C (comune a S' ed S'') e D (comune a S'' ed S''').

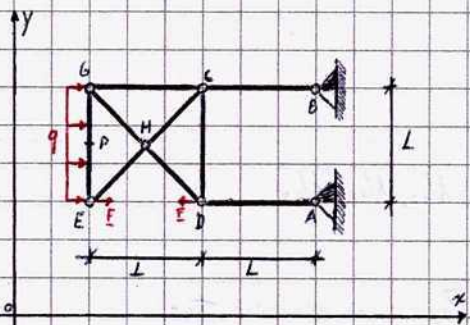
Le equazioni di vincolo sono dunque 8:

cerniera in A:  $dA = 0$  ( $dx_A = 0, dy_A = 0$ )    cerniera interna in C:  $dC' - dC'' = 0$  ( $dx_C' - dx_C'' = 0; dy_C' - dy_C'' = 0$ )  
 cerniera in B:  $dB = 0$  ( $dx_B = 0, dy_B = 0$ )    cerniera interna in D:  $dD'' - dD''' = 0$  ( $dx_D'' - dx_D''' = 0; dy_D'' - dy_D''' = 0$ )

$$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \\ [dx_B - d\varphi_1 (y_C - y_B)] - dx_C = 0 \\ [dy_B + d\varphi_1 (x_C - x_B)] - dy_C = 0 \\ [dx_C - d\varphi_2 (y_D - y_C)] - [dx_A - d\varphi_3 (y_D - y_A)] = 0 \\ [dy_C + d\varphi_2 (x_D - x_C)] + [dy_A + d\varphi_3 (x_D - x_A)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ dx_B = 0 \\ dy_B = 0 \\ dx_C - dx_B = 0 \Rightarrow dx_C = dx_B = 0 \\ dy_B + L d\varphi_1 - dy_C = 0 \\ dx_C + L d\varphi_2 - dx_A = 0 \Rightarrow d\varphi_2 = 0 \\ dy_C - dy_A + L d\varphi_3 = 0 \Rightarrow dy_C = -L d\varphi_3 \end{cases}$$

$s = 8$   
 $s' = 8$   
 $\Downarrow$   
 $l = 1$   
 $i = 0$   
 $S = S' \cup S'' \cup S'''$  è 1 volta labile



Consideriamo ora il complesso di sollecitazioni attive e vincolari esterne agenti sul sistema; essendo il sistema labile la verifica andrà effettuata mediante il PLV.

$$\begin{aligned} \cdot \Sigma^{(a)} &= \{(E, F_i), (D, -F_i), (P, qL_i)\} \text{ con } P = (x_E, y_E + L/2) \\ \cdot \Sigma_{ext}^{(v)} &= \{(A, \underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j), (B, \underline{\Phi}_B = \Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j)\} \end{aligned}$$

Analizziamo l'equilibrio con il PLV:

$$dL^{(a)} = \underbrace{R' \cdot dB + M'_B \cdot d\varphi_1}_{S'} + \underbrace{R'' \cdot dC + M'_C \cdot d\varphi_2}_{S''} + \underbrace{R''' \cdot dA + M'_A \cdot d\varphi_3}_{S'''} = \underbrace{M'_B \cdot d\varphi_1}_{\text{Forze attive}} + \underbrace{R'' \cdot dC}_{\text{Forze attive}} + \underbrace{M'_A \cdot d\varphi_3}_{\text{Forze attive}} = 0$$

Dunque, il sistema è in equilibrio nella configurazione  $S_0$ . Possiamo dunque calcolare le reazioni vincolari esterne, attraverso un'applicazione delle ELS:

$$M'_A = (D-A) \times (-F_i) = -L_i \times F_i = 0$$

$$\begin{aligned} A &\equiv (x_E + 2L, y_E) & C &\equiv (x_E + L, y_E + L) & G &\equiv (x_E, y_E + L) & E &\equiv (x_E, y_E) \\ B &\equiv (x_E + 2L, y_E + L) & D &\equiv (x_E + L, y_E) & H &\equiv (x_E + L/2, y_E + L/2) \end{aligned}$$

nuove coordinate di riferimento

• Applichiamo le ELS all'intera struttura:

$$\begin{aligned} M_A = 0 &\Leftrightarrow (E-A) \times F_i + (D-A) \times (-F_i) + (P-A) \times qL_i + (B-A) \times \Phi_B = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2L_i) \times F_i + (-L_i) \times (-F_i) + (-2L_i + L/2 j) \times qL_i + (L_j) \times (\Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -qL^2/2 k - L\Phi_{Bx} k = 0 \Rightarrow \Phi_{Bx} = -qL/2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_B = 0 &\Leftrightarrow (E-B) \times F_i + (D-B) \times (-F_i) + (P-B) \times qL_i + (A-B) \times \Phi_A = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (-2L_i - L_j) \times F_i + (-L_i - L_j) \times (-F_i) + (-2L_i - L/2 j) \times qL_i + (-L_j) \times (\Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (+LF - LF + qL^2/2 + L\Phi_{Ax}) k = 0 \Rightarrow \Phi_{Ax} = -qL/2 \end{aligned}$$

• App Consideriamo le ELS per la trave AD:

$$\begin{aligned} M_D = 0 &\Leftrightarrow (A+D) \times (\Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j) = 0 \Leftrightarrow L_i \times (\Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow L\Phi_{Ay} k = 0 \Rightarrow \Phi_{Ay} = 0 \end{aligned}$$

Consideriamo le ELS per la trave BC:

$$M_C = 0 \Leftrightarrow (B-C) \times (\Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j) \Leftrightarrow L_i \times (\Phi_{Bx} i + \Phi_{By} j) = 0 \Leftrightarrow L\Phi_{By} k = 0 \Rightarrow \Phi_{By} = 0$$

In definitiva, si ha  $(A, \underline{\Phi}_A = -qL/2 i)$ ,  $(B, \underline{\Phi}_B = -qL/2 i)$

Calcolo delle reazioni vincolari tramite il Metodo dei Nodi

(A) Il nodo A è in equilibrio.

$$\underline{F}_A = \underline{0}; \quad \underline{R}_A = \underline{F}_A = -qL/2 \underline{i} \quad \text{eq. } \Leftrightarrow -qL/2 - N_{AD} = 0 \Rightarrow N_{AD} = -qL/2$$

$$\underline{R}_{AD} = N_{AD} \underline{u}_{AD} = -N_{AD} \underline{i}$$

(D) Essendo nota  $\underline{R}_{AD}$ , il nodo D può considerarsi semplice; determiniamo  $\underline{R}_{DH}$  e  $\underline{R}_{DC}$

$$\underline{F}_D = -\underline{F}_i; \quad \underline{R}_{DA} = -qL/2 \underline{i}; \quad \underline{R}_{DH} = N_{DH} \underline{u}_{DH} = N_{DH} (-\sqrt{2}/2 \underline{i} + \sqrt{2}/2 \underline{j})$$

$$\underline{R}_{DC} = N_{DC} \underline{u}_{DC} = N_{DC} \underline{j}$$

$$\begin{cases} -F - qL/2 - \sqrt{2}/2 N_{DH} = 0 \\ \sqrt{2}/2 N_{DH} + N_{DC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{DH} = -\sqrt{2}(F + qL/2) \\ N_{DC} = F + qL/2 \end{cases}$$

(B)  $\underline{F}_B = \underline{0}, \underline{R}_B = -qL/2 \underline{i}; \underline{R}_{BC} = -N_{BC} \underline{i} \Rightarrow N_{BC} = -qL/2$

(C) Note  $\underline{R}_{BC}$  ed  $\underline{R}_{DC}$ , il nodo C può considerarsi semplice e le ECS consentono di determinare  $\underline{R}_{CH}$  e  $\underline{R}_{CG}$

$$\underline{R}_{CB} = -qL/2 \underline{i}, \quad \underline{R}_{CD} = -(F + qL/2) \underline{j}; \quad \underline{R}_{CH} = N_{CH} \underline{u}_{CH} = N_{CH} (-\sqrt{2}/2 \underline{i} - \sqrt{2}/2 \underline{j})$$

$$\underline{R}_{CG} = -N_{CG} \underline{u}_{CG} \underline{i}$$

$$\begin{cases} -N_{CH} \sqrt{2}/2 - qL/2 - N_{CG} = 0 \\ -(F + qL/2) - \sqrt{2}/2 N_{CH} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{CG} = F \\ N_{CH} = -\sqrt{2}(F + qL/2) \end{cases}$$

(H) Note  $\underline{R}_{CH}$  ed  $\underline{R}_{DH}$ , il nodo H può considerarsi semplice e dalle ECS otteniamo  $\underline{R}_{HE}$  ed  $\underline{R}_{HG}$

$$\underline{R}_{HC} = N_{CH} \underline{u}_{HC} = -(F + qL/2) (\underline{i} + \underline{j}); \quad \underline{R}_{HE} = N_{HE} \underline{u}_{HE} = N_{HE} (-\sqrt{2}/2 \underline{i} - \sqrt{2}/2 \underline{j})$$

$$\underline{R}_{HD} = N_{HD} \underline{u}_{HD} = -(F + qL/2) (\underline{i} - \underline{j}); \quad \underline{R}_{HG} = N_{HG} \underline{u}_{HG} = N_{HG} (-\sqrt{2}/2 \underline{i} + \sqrt{2}/2 \underline{j})$$

$$\begin{cases} -(F + qL/2) - (F + qL/2) - \sqrt{2}/2 N_{HE} - \sqrt{2}/2 N_{HG} = 0 \\ -(F + qL/2) + (F + qL/2) - \sqrt{2}/2 N_{HE} + \sqrt{2}/2 N_{HG} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_{HG} = -\sqrt{2}(F + qL/2) \\ N_{HE} = N_{HG} \end{cases}$$

(E) La trave EG è carica; indichiamo con  $\underline{R}_{EG}^*$  la reazione di EG su E:

$$\underline{F}_E = \underline{F}_i; \quad \underline{R}_{EG}^* = R_{EGx}^* \underline{i} + R_{EGy}^* \underline{j}; \quad \underline{R}_{EH} = N_{EH} \underline{u}_{EH} = N_{EH} (\sqrt{2}/2 \underline{i} + \sqrt{2}/2 \underline{j}) = -(F + qL/2) (\underline{i} + \underline{j})$$

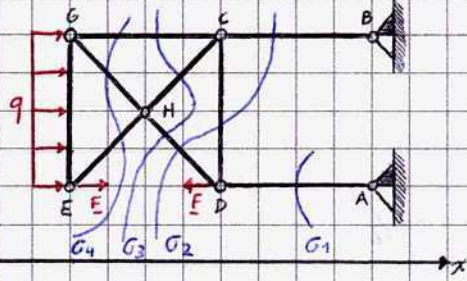
$$\begin{cases} R_{EGx}^* + F - (F + qL/2) = 0 \\ R_{EGy}^* - (F + qL/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{EGx}^* = qL/2 \\ R_{EGy}^* = F + qL/2 \end{cases}$$

(G) La trave EG è carica; indichiamo con  $\underline{R}_{GE}^*$  la reazione di EG su G:

$$\underline{R}_{GE}^* = R_{GEx}^* \underline{i} + R_{GEy}^* \underline{j}; \quad \underline{R}_{GH} = N_{GH} \underline{u}_{GH} = -(F + qL/2) (\underline{i} - \underline{j}), \quad \underline{R}_{GC} = N_{GC} \underline{u}_{GC} = \underline{F}_i$$

$$\begin{cases} R_{GEx}^* - (F + qL/2) + F = 0 \\ R_{GEy}^* + (F + qL/2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_{GEx}^* = qL/2 \\ R_{GEy}^* = -(F + qL/2) \end{cases}$$

## Calcolo delle reazioni vincolari interne tramite il Metodo di Ritter



(TAD) Dalla sezione  $G_1$  ricaviamo  $R_{AD}$  (attraverso la struttura  $S'$  a destra della sezione di taglio):

$$\underline{F}_A = -qL/2 \underline{i} ; \underline{R}_{AD} = N_{AD} \underline{u}_{AD} = -N_{AD} \underline{i}$$

$$(-N_{AD} \underline{i} - qL/2 \underline{i}) \cdot \underline{i} = 0 \Leftrightarrow N_{AD} = -qL/2$$

una sola asta  
 $\Rightarrow$  dir //

La sezione  $G_2$  taglia le aste scariche  $T_{DC}$ ,  $T_{DC}$  e  $T_{DH}$ .

(T<sub>DH</sub>) Le aste  $T_{DC}$  e  $T_{DH}$  concorrono nel punto C; imponendo  $M_C = 0$  si potrà determinare l'incognita  $N_{DH}$ .

Consideriamo le sollecitazioni agenti su  $S'$  (a destra di  $G_2$ ):

• attive e vincolari esterne:  $(D, -F \underline{i})$ ,  $(A, \underline{F}_A = -qL/2 \underline{i})$ ,  $(B, \underline{F}_B = -qL/2 \underline{i})$

• vincolari interne:  $(D, \underline{R}_{DH} = \sqrt{2}/2 N_{DH} (-\underline{i} + \underline{j}))$ ,  $(D, \underline{R}_{DC} = N_{DC} \underline{j})$ ,  $(B, \underline{R}_{BC} = -N_{BC} \underline{i})$

$$M_C = (D-C) \times (-F \underline{i}) + (A-C) \times \underline{F}_A + (B-C) \times \underline{F}_B + (D-C) \times \sqrt{2}/2 N_{DH} (-\underline{i} + \underline{j}) + (D-C) \times N_{DC} \underline{j} + (B-C) \times (-N_{BC} \underline{i}) ;$$

$$M_C = 0 \Leftrightarrow N_{DH} = -\sqrt{2} (F + qL/2)$$

(T<sub>DC</sub>) Le aste  $T_{DH}$  e  $T_{DC}$  concorrono nel punto D; imponendo  $M_D = 0$  possiamo determinare  $N_{BC}$ .

$$M_D = (A-D) \times \underline{F}_A + (B-D) \times \underline{F}_B + (B-D) \times (-N_{BC} \underline{i})$$

$$M_D = 0 \Leftrightarrow N_{BC} = -qL/2$$

(T<sub>DC</sub>) Le direzioni delle aste  $T_{DC}$  e  $T_{DH}$  concorrono nel punto G; imponendo  $M_G = 0$  si ha:

$$M_G = 0 \Leftrightarrow N_{DC} = F + qL/2$$

Considerando le sezioni  $G_3$  e  $G_4$ , è possibile determinare le restanti reazioni interne:

Ad esempio,  $G_3$  taglia le travi scariche  $T_{CG}$ ,  $T_{HG}$  e  $T_{HD}$ . Sarà possibile dunque determinare  $R_{CG}$  osservando che le travi  $T_{HG}$  e  $T_{HD}$  concorrono nel punto H, imponendo  $M_H = 0$ .

Lo stesso ragionamento si applica alle altre travi e alla sezione  $G_4$ .

## Geometria delle Masse

### Baricentro (o Centro di Massa)

Sia  $S$  un sistema discreto di  $n$  punti materiali, ciascuno con la propria massa:  $S = \{(P_i, m_i), i=1, \dots, n\}$ .

La massa del sistema  $S$  è la quantità positiva:

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Definita una terna di riferimento  $Oxyz$ , definiamo con  $\underline{r}_i$  il vettore posizione del punto  $P_i$  di massa  $m_i$ .

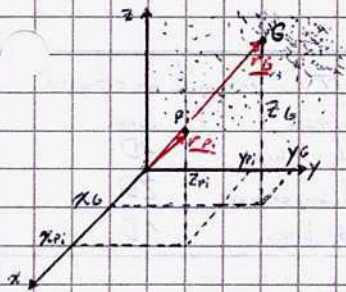
Si definisce baricentro o centro di massa il punto  $G$  tale che:

$$\underline{r}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i \Leftrightarrow x_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i, z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$



(baricentro)  
Osservazione: La posizione del punto  $G$  dipende solo dalle posizioni e masse dei punti  $P_i$  di  $S$

"Definizione":  $r_G \equiv OG = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i OP_i$ ;  $O'G' = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i O'P_i$ ;  $G \equiv G' \left( \sum_{i=1}^n m_i GP_i = mGG = 0 \right)$



Dim.

$$mGG' = m(GO + OO' + O'G') = m(OO' + O'G' - OG) = mOO' + \sum_{i=1}^n m_i O'P_i - \sum_{i=1}^n m_i O'P_i =$$

$$= mOO' + \sum_{i=1}^n m_i (O'P_i - OP_i) = mOO' + \sum_{i=1}^n m_i (O'O) = \underline{0} \iff G = G'$$

Il baricentro gode di proprietà analoghe a quelle stabilite per il centro di un sistema di vettori paralleli:

Si consideri ad esempio  $\Sigma$  sistema  $\Sigma$  di  $n$  vettori paralleli e concordi aventi direzione e verso arbitrari e moduli proporzionali alle masse  $m_i$  dei punti  $P_i$  di  $S$ :

$$\Sigma = \{ (P_i, am_i \underline{u}), i=1, \dots, n \}$$

dove  $a > 0$  e  $\underline{u}$  sono uno scalare ed un vettore arbitrari.

Il centro  $C$  del sistema  $\Sigma$  è definito da:

$$r_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i$$

simile a  $\frac{1}{f} \sum f_i r_i$

Allora, il centro di massa o baricentro  $G$  di  $S$  coincide con il centro degli infiniti sistemi  $\Sigma$  appena rappresentati.

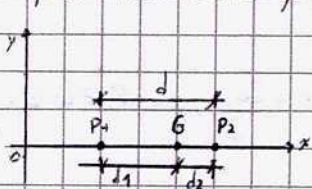
In particolare, per il sistema delle forze peso dei singoli punti  $P_i$  di  $S$ :

$$\Sigma = \{ (P_i, m_i g \underline{k}), i=1, \dots, n \}$$

si ha che il centro  $C$  coincide con  $G$

**Esempio**

Il baricentro  $G$  del sistema  $S = \{ (P_1, m_1), (P_2, m_2) \}$  è interno al segmento  $P_1 P_2$  e lo divide in parti inversamente proporzionali alle masse  $m_1$  ed  $m_2$ .



$$G = \frac{|GP_1|}{|GP_2|} = \frac{m_2}{m_1} \Rightarrow \text{è prop. masse!}$$

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0 \Rightarrow m x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} m x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2 \\ x_1 < x_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} m x_G < m_1 x_2 + m_2 x_2 \\ m x_G > m_1 x_1 + m_2 x_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} m x_G < (m_1 + m_2) x_2 \\ m x_G > (m_1 + m_2) x_1 \end{array} \right\} \Rightarrow x_1 < x_G < x_2$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = x_G - d_1 \\ x_2 = x_G + d_2 \end{array} \right\} \Rightarrow m x_G = m(x_G - d_1) + m_2(x_G + d_2) = m x_G - m_1 d_1 + m_2 d_2$$

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \Leftrightarrow \frac{d_1}{d_2} = \frac{m_2}{m_1} \Leftrightarrow \frac{|GP_1|}{|GP_2|} = \frac{m_2}{m_1}$$

Sia  $S = \{(P, p(P)), P \in B\}$  un sistema continuo in cui la massa si distribuisce lungo tutta la regione  $B$  occupata dal corpo.

La distribuzione di massa in  $B$  è caratterizzata dalla densità di massa  $p(P)$ :

$$m(c) = \int_c p(P) d\tau, \quad c \subseteq B; \quad m = \int_B p(P) d\tau$$

Con $d\tau$ si intende un elemento infinitesimale:	corpo
• di volume	3D
• di superficie	2D
• di linea	1D

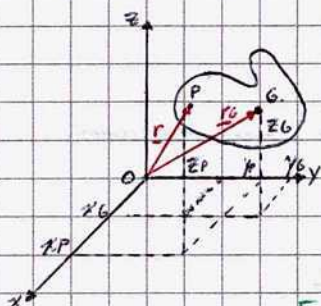
Sia  $r$  il vettore di posizione di  $P \in S$  in un riferimento  $Oxyz$ , il baricentro di  $S$  è il punto  $G$  tale che:

$$r_G = \frac{1}{m} \int_B p r d\tau \equiv x_G = \frac{1}{m} \int_B p x d\tau; \quad y_G = \frac{1}{m} \int_B p y d\tau; \quad z_G = \frac{1}{m} \int_B p z d\tau$$

Il sistema  $S$  è omogeneo se la densità  $p$  è costante.

$$m = p M(B) \stackrel{\text{mis } B}{=} p B; \quad r_G = \frac{1}{B} \int_B r d\tau \equiv x_G = \frac{1}{B} \int_B x d\tau, \quad y_G = \frac{1}{B} \int_B y d\tau, \quad z_G = \frac{1}{B} \int_B z d\tau$$

abuso di linguaggio



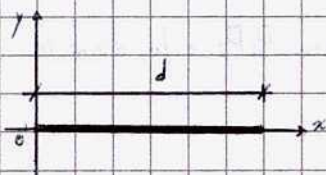
Analogamente al caso discreto, il sistema continuo di vettori paralleli:

$$Z = \{(P, a p u), P \in B\} \quad a > 0$$

ha il centro  $C$  coincidente col baricentro  $G$  di  $S$

Esempio

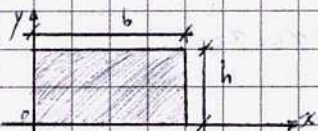
• Baricentro di una bacchetta di lunghezza  $d$  e densità  $p = \text{cost.} / p = ax, a > 0$



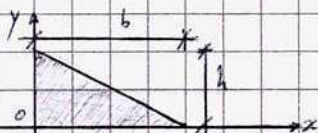
$$p = \text{cost.} \Rightarrow m = p d; \quad x_G = \frac{1}{d} \int_0^d x dx = \frac{d}{2}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0$$

$$p = ax \Rightarrow m = \int_0^d ax dx = a \frac{d^2}{2}, \quad x_G = \frac{2}{ad^2} \int_0^d ax^2 dx = \frac{2ad}{3}, \quad y_G = 0, \quad z_G = 0.$$

• Baricentro di un rettangolo e di un triangolo rettangolo omogenei



$$\text{rettangolo: } m = p b h; \quad x_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^h x dx dy = \frac{b}{2}; \quad y_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^h y dx dy = \frac{h}{2}, \quad z_G = 0$$

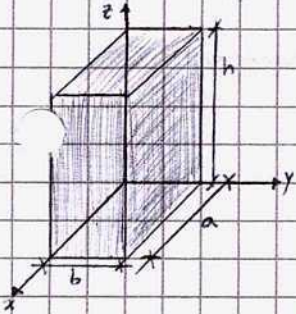


$$\text{triangolo: } m = p \frac{bh}{2}, \quad r_{AB}: y = h - \frac{h}{b}x.$$

$$x_G = \frac{2}{bh} \int_0^b \int_0^{h(\frac{1-x}{b})} x dx dy = \frac{2}{b} \int_0^b \left(x - \frac{x^2}{b}\right) dx = \frac{b}{3};$$

$$y_G = \frac{1}{bh} \int_0^b \int_0^{h(\frac{1-x}{b})} y dx dy = \frac{h}{3}; \quad z_G = 0$$

• Baricentro di un parallelepipedo omogeneo



$$m = \rho b a h$$

$$x_G = \frac{1}{b a h} \int_0^a \int_0^b \int_0^h x \, dx \, dy \, dz = \frac{a}{2}$$

$$y_G = \frac{1}{b a h} \int_0^a \int_0^b \int_0^h y \, dx \, dy \, dz = \frac{b}{2}$$

$$z_G = \frac{1}{b a h} \int_0^a \int_0^b \int_0^h z \, dx \, dy \, dz = \frac{h}{2}$$

Proprietà dei baricentri e simmetrie materiali

①  $VP \in S \quad P \in \pi \Rightarrow G \in \pi$

$$\pi \equiv Oxy; VP \in S \quad P \in \pi \Rightarrow z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0 \quad \Bigg/ \quad z_G = \frac{1}{m} \int_S \rho z \, d\tau = 0$$

②  $VP \in S \quad P \in r \Rightarrow G \in r$

$$r \equiv Oxy; VP \in S \quad P \in r \Rightarrow \begin{cases} y_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i = 0, & z_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i = 0 \\ y_G = \frac{1}{m} \int_S \rho y \, d\tau = 0, & z_G = \frac{1}{m} \int_S \rho z \, d\tau = 0 \end{cases}$$

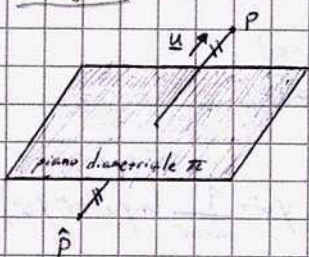
Un piano  $\pi$  si dice diametrale, coniugato alla direzione della retta  $r$  individuata dal vettore  $\underline{u}$ , per un sistema  $S$  se ad ogni punto  $P \in S, P \in \pi$  corrisponde un punto  $\hat{P} \in S$  tale che:

•  $P$  e  $\hat{P}$  hanno uguale massa/densità

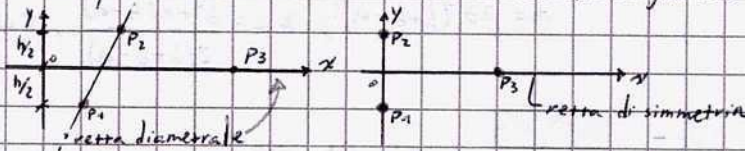
•  $P\hat{P} // \underline{u}$  e il punto medio di  $P\hat{P}$  appartiene a  $\pi$

I punti-massa  $P$  e  $\hat{P}$  si dicono coniugati.

In particolare, il piano diametrale si dice piano di simmetria materiale per  $S$  se è ortogonale alla direzione coniugata, ovvero se  $\underline{u} \perp \pi$ .



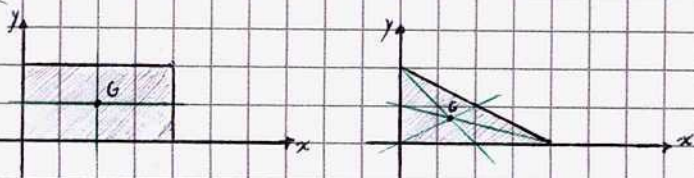
Per sistemi piani si definiscono le rette diametrali coniugate e le rette di simmetria:



③ Il baricentro  $G$  di un sistema  $S$  appartiene ad ogni piano diametrale coniugato di  $S$  e, in particolare, ad ogni piano di simmetria.

$$\pi: Oxy \text{ piano diametrale} \Rightarrow z_G = \frac{1}{m} \left[ \sum_h m_h z_h + \sum_h m_h (-z_h) \right] = 0 \Leftrightarrow G \in \pi$$

Analogamente nei sistemi continui



mediane: rette diametrali per figure piane omogenee

④ Proprietà distributiva: Sia  $S$  un sistema di massa  $m$  e baricentro  $G$  tale che  $S = \bigcup_{i=1}^k S_i$  e siano  $m_i$  e  $G_i$  la massa e il baricentro di ciascun sistema  $S_i$ . Allora  $G$  coincide con il baricentro del sistema di  $k$  punti materiali:

$$\{(G_i, m_i), i=1, \dots, k\}$$

$$S: m = \int_B \rho(P) d\tau; \quad \underline{r}_G = \frac{1}{m} \int_B \rho \underline{r} d\tau; \quad S_i: m_i = \int_{B_i} \rho(P) d\tau; \quad \underline{r}_{G_i} = \frac{1}{m_i} \int_{B_i} \rho \underline{r} d\tau$$

$$m \underline{r}_G = \int_B \rho \underline{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \int_{B_i} \rho \underline{r} d\tau = \sum_{i=1}^k \left[ \left( \int_{B_i} \rho d\tau \right) \underline{r}_{G_i} \right] = \sum_{i=1}^k m_i \underline{r}_{G_i}$$

In particolare, se  $S = \{(P_i, m_i), i=1, \dots, n\}$ ,  $S = S' \cup S''$ :  $S' = \{(P_i, m_i), i=1, \dots, n'\}$ ,  $S'' = \{(P_i, m_i), i=n'+1, \dots, n\}$  si ha

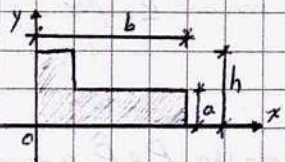
$$m' = \sum_{i=1}^{n'} m_i, \quad m'' = \sum_{i=n'+1}^n m_i, \quad m = \sum_{i=1}^n m_i = m' + m'' \quad \Rightarrow \quad m' \underline{r}_{G'} + m'' \underline{r}_{G''} = m \underline{r}_G$$

$$\underline{r}_{G'} = \frac{1}{m'} \sum_{i=1}^{n'} m_i \underline{r}_i, \quad \underline{r}_{G''} = \frac{1}{m''} \sum_{i=n'+1}^n m_i \underline{r}_i \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad S = S' \cup S'', \quad \underline{r}_G = \frac{1}{m} (m' \underline{r}_{G'} + m'' \underline{r}_{G''})$$

In modo analogo, si prova che:

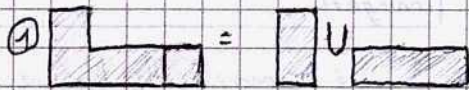
$$S' = S - S'': \underline{r}_{G'} = \frac{1}{m-m''} (m \underline{r}_G - m'' \underline{r}_{G''}); \quad S'' = S - S': \underline{r}_{G''} = \frac{1}{m-m'} (m \underline{r}_G - m' \underline{r}_{G'})$$

**Esempio** Baricentro di una sezione omogenea ad L



$$m = m' + m'', \quad x_G = \frac{1}{m} (m' x_{G'} + m'' x_{G''}), \quad y_G = \frac{1}{m} (m' y_{G'} + m'' y_{G''})$$

$$m' = \rho a h \Rightarrow G' = \left( \frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right)$$



$$m'' = \rho (b-a) a, \quad G'' = \left( a + \frac{b-a}{2}, \frac{a}{2} \right) = \left( \frac{b+a}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$m = \rho a (h+b-a), \quad x_G = \frac{b^2 + a(h-a)}{2(h+b-a)}, \quad y_G = \frac{h^2 + a(b-a)}{2(h+b-a)}$$



$$S' = S - S'': \quad x_{G'} = \frac{1}{m-m''} (m x_G - m'' x_{G''}), \quad y_{G'} = \frac{1}{m-m''} (m y_G - m'' y_{G''})$$

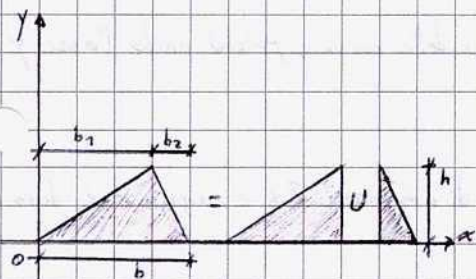
$$m = \rho b h, \quad G' = \left( \frac{b}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad m'' = \rho (b-a)(h-a), \quad G'' = \left( a + \frac{b-a}{2}, a + \frac{h-a}{2} \right) = \left( \frac{b+a}{2}, \frac{h+a}{2} \right)$$

$$x_{G'} = \frac{b^2 + a(h-a)}{2(h+b-a)}, \quad y_{G'} = \frac{h^2 + a(b-a)}{2(h+b-a)}$$

### Esempio

### Triangolo omogeneo

Per il baricentro  $G_i$  di ciascun triangolo rettangolo  $T_1$  e  $T_2$  di altezza  $h$  e base  $b_i$  si ha:



$$x_{G_1} = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \int_0^{\frac{h}{b_1}x} x \, dx \, dy = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \frac{h}{b_1} x^2 \, dx = \frac{2b_1}{3}$$

omogeneo  $\rightarrow$  Area  $\rightarrow$

$$y_{G_1} = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \int_0^{\frac{h}{b_1}x} y \, dx \, dy = \frac{2}{hb_1} \int_0^{b_1} \frac{h^2}{2b_1^2} x^2 \, dx = \frac{h}{3}$$

$$x_{G_2} = b_1 + \frac{b_2}{3} ; y_{G_2} = \frac{h}{3}$$

$$z_{G_1} = z_{G_2} = 0$$

$$m = m' + m'' = \frac{\rho b h}{2} ; m' = \frac{\rho b_1 h}{2}, m'' = \frac{\rho b_2 h}{2}$$

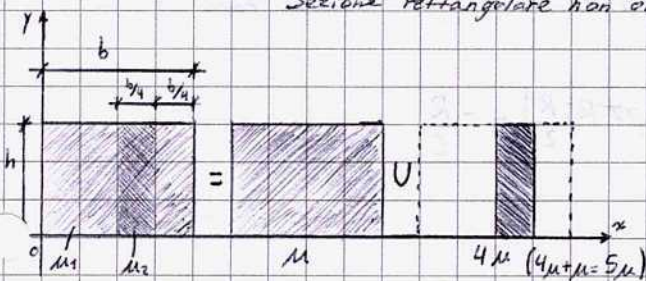
Per la proprietà distributiva si ottiene

$$x_G = \frac{1}{m} (m' x_{G'} + m'' x_{G''}) = \frac{1}{b} \left[ \frac{2b_1^2}{3} + b_2 \left( b_1 + \frac{b_2}{3} \right) \right] = \frac{1}{b} \left[ \frac{2b_1^2}{3} + \frac{2b_1 b_2}{3} + \frac{b_2^2}{3} \right]$$

$$x_G = \frac{2b_1 + b_2}{3} ; y_G = \frac{1}{b} h (b_1 + b_2) = \frac{h}{3} ; z_G = 0$$

### Esempio

Sezione rettangolare non omogenea con densità  $\mu_1 = \mu, \mu_2 = 5\mu$



$$S' = m' = \mu b h, G' = (b/2, h/2)$$

$$S'' = m'' = (\mu_2 - \mu_1) \frac{b}{4} h = \mu b h, G'' = (b/2 + b/8, h/2)$$

$$S = S' \cup S'' : m = 2\mu b h, x_G = \frac{1}{2\mu b h} \left( \mu b h \frac{b}{2} + \mu b h \frac{5b}{8} \right) = \frac{9}{16} b$$

$$y_G = \frac{h}{2}$$

### Esempio

Baricentro di un settore di corona circolare omogenea di apertura angolare  $2\alpha$  e compreso tra i raggi  $r_1$  ed  $r_2$

$r_2 > r_1 \Rightarrow$  corona circolare;  $r_1 = 0, r_2 = r \Rightarrow$  cerchio;  $r_1 = r_2 = r \Rightarrow$  circonferenza

L'asse  $Ox$  è di simmetria per il settore, dunque il baricentro  $G$  vi appartiene; dunque  $y_G = z_G = 0$ .

Inoltre, si ha che  $m = \rho (r_2^2 - r_1^2) \alpha$

$$x_G = \frac{1}{m} \int_{r_1}^{r_2} \int_{-\alpha}^{\alpha} \rho (r \cos \theta) r \, dr \, d\theta = \frac{1}{(r_2^2 - r_1^2) \alpha} \int_{r_1}^{r_2} r^2 (2 \sin \alpha) \, dr = \frac{2 \sin \alpha}{(r_2^2 - r_1^2) \alpha} \cdot \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{3}$$

$$x_G = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{3\alpha} \cdot \frac{(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2}$$

$$y_G = 0, z_G = 0$$

In particolare, si ha che:

- Se  $Z_d = 2\pi$ , il baricentro di una corona circolare è posto nel centro della corona, poiché anche l'asse  $y$  è di simmetria materiale.

$$x_G = y_G = z_G = 0$$

- Per  $r_1 = 0$  e  $r_2 = r$  si ha che il baricentro di un settore di cerchio di ampiezza  $Z_d$  e raggio  $r$  è dato da:

$$x_G = \frac{Z_d}{3} \frac{\sin d}{d} r, \quad y_G = z_G = 0$$

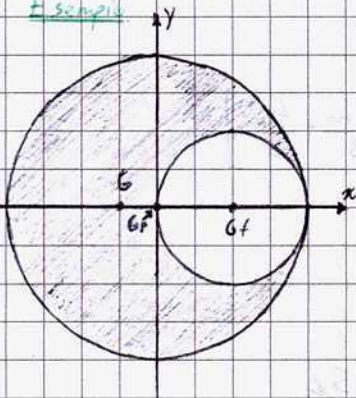
- Per  $r_1 = 0$ ,  $r_2 = r$  e  $d = \frac{\pi}{4}$ ;  $\frac{\pi}{2}$  si ricava il baricentro di un quarto di cerchio e di un semicerchio:

$$x_G = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi} r, \quad y_G = z_G = 0; \quad x_G = \frac{4}{3\pi} r, \quad y_G = z_G = 0$$

- Per  $r_1 = r_2 = r$  si ha che il baricentro di un settore di circonferenza di ampiezza  $Z_d$  e raggio  $r$  è dato da:

$$x_G = \frac{\sin d}{d} r, \quad y_G = z_G = 0$$

Esempio



Baricentro di una lamina piena omogenea circolare di raggio  $R$  nella quale è stato praticato un foro di raggio  $R/2$ .

L'asse  $x$  è di simmetria materiale, dunque  $y_G = z_G = 0$

Utilizzando la proprietà distributiva, si ha:

$$S_p: m_p = \rho \pi R^2, \quad G_p = (0, 0)$$

sistema "pieno"

$$S_f: m_f = \rho \pi R^2/4, \quad G_f = (R/2, 0)$$

sistema "foro"

$$S = S_p - S_f: \quad x_G = \frac{1}{m_p - m_f} (m_p x_{G_p} - m_f x_{G_f}) = \frac{4}{3\rho\pi R^2} \left( -\frac{1}{4} \rho\pi R^2 \frac{R}{2} \right) = -\frac{R}{6}$$

## Momenti d'Inerzia

Si consideri un sistema discreto di punti materiali  $S = \{(P_i, m_i), i = 1, \dots, n\}$  e una retta  $s$ , si definisce momento d'inerzia di  $S$  rispetto alla retta  $s$  la quantità:

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2, \quad d_i = d(P_i, s) \quad \text{è uno SCALARE!}$$

$$I_s \geq 0, \quad I_s = 0 \Leftrightarrow P_i \in s \quad \forall i$$

Fissato un sistema di assi cartesiani  $Oxyz$ , si hanno i seguenti momenti d'inerzia di  $S$  rispetto agli assi:

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i (z_i^2 + x_i^2); \quad I_z = \sum_{i=1}^n m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

In particolare, per un sistema piano ( $z=0$ ) si ha:  $I_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i^2; \quad I_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2; \quad I_z = I_x + I_y$

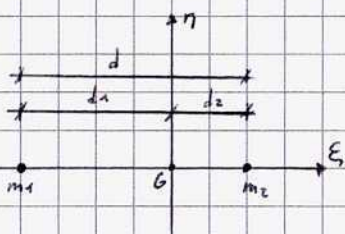
Si definisce raggio d'inerzia  $I_s$  rispetto alla retta  $s$  la quantità:

$$p_s = \sqrt{\frac{I_s}{m}} \quad \text{con } m = \sum_{i=1}^n m_i$$

Esso rappresenta la distanza dall'asse  $s$  a cui va concentrata la massa  $m$  per ottenere il medesimo momento di inerzia del sistema  $S$ .

Esempio

Calcolare i momenti d'inerzia di  $S = \{(P_1, m_1), (P_2, m_2)\}$  rispetto agli assi baricentrali  $G\xi\eta$

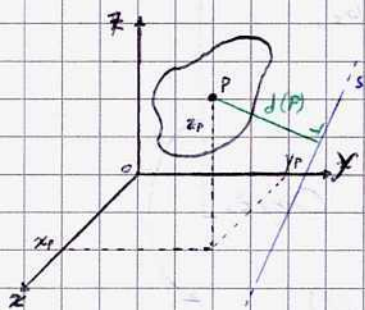


$$m E_G = m_1 E_{11} + m_2 E_{22} = m_1 (E_G - d_1) + m_2 (E_G + d_2) \Leftrightarrow m_1 d_1 = m_2 d_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} d_1 &= \frac{m_2}{m_1} d_2 \\ d_2 &= \frac{m_1}{m_2} d_1 \end{aligned} \quad \begin{aligned} d &= d_1 + d_2 = \frac{m_2}{m_1} d_2 \\ d &= d_1 + d_2 = \frac{m_1}{m_2} d_1 \end{aligned} \quad \Rightarrow \begin{aligned} d_2 &= \frac{m_1}{m} d \\ d_1 &= \frac{m_2}{m} d \end{aligned}$$

$$I_\xi = 0; \quad I_\eta = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 = m_1 \left(\frac{m_2}{m} d\right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m} d\right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m} d^2$$

In un sistema continuo  $S = \{(P, \mu), P \in C\}$  di densità  $\mu$  si ha:



$$I_s = \int_C \mu(P) d^2(P) dc; \quad p_s = \sqrt{\frac{I_s}{m}}, \quad m = \int_C \mu(P) dc;$$

$$I_x = \int_C \mu(P) (y^2 + z^2) dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) (x^2 + z^2) dc, \quad I_z = \int_C \mu(P) (x^2 + y^2) dc$$

In un sistema piano,  $I_x = \int_C \mu(P) y^2 dc, \quad I_y = \int_C \mu(P) x^2 dc, \quad I_z = I_x + I_y$

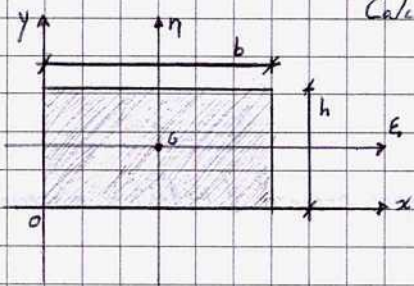
Proprietà distributiva:

$$S' = \{(P, \mu), P \in C'\}, \quad S'' = \{(P, \mu), P \in C''\}, \quad S = \{(P, \mu), P \in C' \cup C''\}$$

$$I_s = \int_C \mu(P) d^2(P) dc = \int_{C'} \mu(P) d^2(P) dc + \int_{C''} \mu(P) d^2(P) dc = I_{s'} + I_{s''}$$

### Esempio

Calcolare i momenti d'inerzia di un rettangolo omogeneo rispetto agli assi  $Oxyz$  e  $G\xi\eta\zeta$ .



$$I_x = \int_0^h \int_0^b \mu y^2 dx dy = \frac{\mu b h^3}{3}$$

$$I_y = \int_0^h \int_0^b \mu x^2 dx dy = \frac{\mu b^3 h}{3}$$

$$\Rightarrow I_z = I_x + I_y = \frac{\mu b h (b^2 + h^2)}{3}$$

$$I_{\xi} = \int_{-h/2}^{h/2} \int_{-b/2}^{b/2} \mu \eta^2 d\xi d\eta = \frac{\mu b h^3}{12}$$

$$\Rightarrow I_G = I_{\xi} + I_{\eta} = \frac{\mu b h (b^2 + h^2)}{12}$$

$$I_{\eta} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \mu \xi^2 d\xi d\eta = \frac{\mu b^3 h}{12}$$

$$I_x = I_{\xi} + \mu b h \frac{h^2}{4} = I_{\xi} + m \left(\frac{h}{2}\right)^2$$

$$I_y = I_{\eta} + \mu b h \frac{b^2}{4} = I_{\eta} + m \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow I_z = I_G + m \left[ \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right]$$

Ne segue che  $I_x = I_{\xi} + m d^2_{Gx}$ ;  $I_y = I_{\eta} + m d^2_{Gy}$ ;  $I_z = I_G + m d^2_{Gz}$ ,

dove

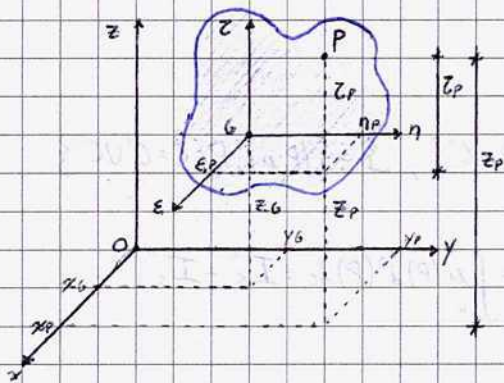
$$d^2_{Gx} = y_G^2 + z_G^2; \quad d^2_{Gy} = z_G^2 + x_G^2; \quad d^2_{Gz} = x_G^2 + y_G^2$$

sono i quadrati delle distanze del baricentro dagli assi della terna  $Oxyz$ .

### Teorema di Huygens-Steiner

(o Teorema degli assi paralleli)

Siano  $Oxyz$  e  $G\xi\eta\zeta$  due terne di riferimento con assi paralleli e concordi; allora:



$$I_x = I_{\xi} + m d^2_{Gx}; \quad I_y = I_{\eta} + m d^2_{Gy}; \quad I_z = I_G + m d^2_{Gz}$$

$$\text{dove } d^2_{Gx} = (y_G^2 + z_G^2)$$

$$d^2_{Gy} = (z_G^2 + x_G^2)$$

$$d^2_{Gz} = (x_G^2 + y_G^2)$$

Più formalmente, il Teorema afferma:

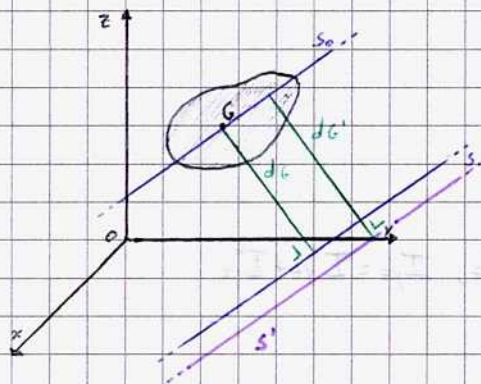


## Teorema di Huygens-Steiner

Siano  $S_0$  ed  $S$  due rette parallele e  $G \in S_0$ , allora si ha:

$$I_S = I_{S_0} + m d^2 G, \quad d_G = d(G, S) \equiv d(S_0, S)$$

$$s // s' \Rightarrow I_{s'} = I_s + m(d'^2 - d^2 G); \quad d'G = d(G, s'), \quad d_G = d(G, s)$$



$$I_S \geq I_{S_0}; \quad I_S = I_{S_0} \Leftrightarrow d_G = 0$$

$$I_S \geq m d^2 G; \quad I_S = m d^2 G \Leftrightarrow I_{S_0} = 0$$

Fra tutte le rette parallele ad  $s$ , quella che passa per  $G$  rende minimo il momento d'inerzia.

Escluso il caso in cui tutti i punti di  $S$  siano allineati su  $S_0$ , considerando la massa di  $S$  concentrata in  $G$  si commette un errore per difetto nella valutazione di  $I_S$ .

Dal teorema degli assi paralleli, otteniamo inoltre:

$$\forall P \in S, \quad x = \xi + x_G; \quad y = \eta + y_G; \quad z = \zeta + z_G$$

$$I_x = \int_C \mu (y^2 + z^2) dc = \int_C \mu [(\eta + y_G)^2 + (\zeta + z_G)^2] dc =$$

$$= \int_C \mu [\eta^2 + 2\eta y_G + y_G^2 + \zeta^2 + 2\zeta z_G + z_G^2] dc =$$

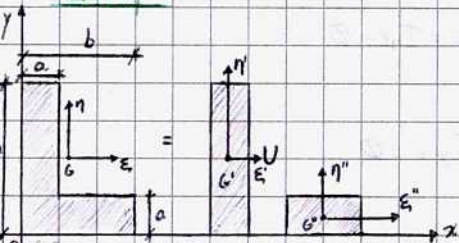
$$= \int_C \mu (\eta^2 + \zeta^2) dc + (y_G^2 + z_G^2) \int_C \mu dc + 2y_G \left( \int_C \mu \eta dc \right) + 2z_G \left( \int_C \mu \zeta dc \right) =$$

$$= I_\xi + m (y_G^2 + z_G^2) + 2y_G (m \eta_G) + 2z_G (m \zeta_G) =$$

$$= I_\xi + m (y_G^2 + z_G^2).$$

(Analogamente per gli altri assi)

Esempio



Calcolare i momenti d'inerzia rispetto agli assi  $G\xi, \eta\zeta$  della sezione ad L.

$$I_\xi \stackrel{\text{dist.}}{=} I_{\xi'} + I_{\xi''} \stackrel{\text{T.H.S}}{=} I_{\xi'} + m'(y_G' - y_G)^2 + I_{\xi''} + m''(y_G'' - y_G)^2$$

$$I_\eta \stackrel{\text{dist.}}{=} I_{\eta'} + I_{\eta''} \stackrel{\text{T.H.S}}{=} I_{\eta'} + m'(x_G' - x_G)^2 + I_{\eta''} + m''(x_G'' - x_G)^2$$

$$S': m' = p a h, \quad G' \equiv \left( \frac{a}{2}, \frac{h}{2} \right); \quad S'': m'' = p(b-a)a, \quad G'' \equiv \left( \frac{b+a}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$S = S' \cup S'': m = p a (h+b-a), \quad G \equiv \left( \frac{b^2 + a(h-a)}{2(h+b-a)}, \frac{h^2 + a(b-a)}{2(h+b-a)} \right)$$

$$I_{\xi'} = p a \frac{h^3}{12}, \quad I_{\xi''} = p(b-a) \frac{a^3}{12}; \quad I_{\eta'} = p a^3 \frac{h}{12}, \quad I_{\eta''} = p(b-a) \frac{a^3}{12}$$

## Prodotti d'Inerzia

⚠ Nei testi classici di meccanica si antepone un segno -!

In una terna di riferimento  $Oxyz$ , i prodotti d'inerzia di un sistema  $S$  sono:

$$I_{xy} = \sum_{i=1}^n m_i x_i y_i, \quad I_{xz} = \sum_{i=1}^n m_i x_i z_i, \quad I_{yz} = \sum_{i=1}^n m_i y_i z_i$$

$$I_{xy} = \int_C \rho(P) xy \, dc; \quad I_{xz} = \int_C \rho(P) xz \, dc; \quad I_{yz} = \int_C \rho(P) yz \, dc$$

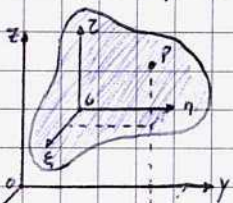
$$I. \text{ un sistema piano } (\bar{z} = 0) \Rightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$\text{Proprietà Distributiva: } S = S' \cup S'' \quad I_{xy} = I'_{xy} + I''_{xy}, \quad I_{xz} = I'_{xz} + I''_{xz}, \quad I_{yz} = I'_{yz} + I''_{yz}$$

Teorema degli assi paralleli:

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + m x_G y_G, \quad I_{xz} = I_{\xi z} + m x_G z_G, \quad I_{yz} = I_{\eta z} + m y_G z_G$$

$$\forall P \in S, \quad x = \xi + x_G, \quad y = \eta + y_G, \quad z = \zeta + z_G$$



$$I_{xy} = \int_C \mu xy \, dc = \int_C \mu (\xi + x_G)(\eta + y_G) \, dc =$$

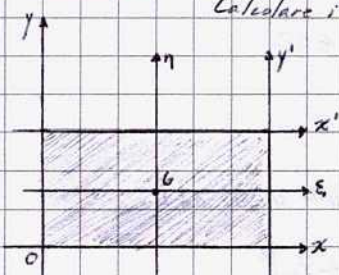
$$= \int_C \mu \xi \eta \, dc + x_G y_G \int_C \mu \, dc + y_G \int_C \mu \xi \, dc + x_G \int_C \mu \eta \, dc =$$

$$= I_{\xi\eta} + m x_G y_G + y_G \overset{0}{\int_C \mu \xi \, dc} + x_G \overset{0}{\int_C \mu \eta \, dc} = I_{\xi\eta} + m x_G y_G \quad (\text{Analogo per gli altri prodotti})$$

$$G \in O_x/O_y/O_z \Rightarrow I_{xy} = I_{\xi\eta} / I_{xz} = I_{\xi z} / I_{yz} = I_{\eta z}$$

## Esempio

Calcolare i prodotti d'inerzia del rettangolo omogeneo rispetto agli assi  $xy, \xi\eta, x'y'$



$$I_{xy} = \rho \int_0^b \int_0^h xy \, dx \, dy = \rho \frac{b^2 h^2}{4}, \quad I_{xz} = I_{yz} = 0 \quad (\text{asse piano})$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - m x_G y_G = \rho \frac{b^2 h^2}{4} - \rho b h \frac{b}{2} \frac{h}{2} = 0, \quad I_{\xi z} = I_{\eta z} = 0$$

$$I_{x'y'} = I_{\xi\eta} + m x'_G y'_G = \rho b h \frac{b}{2} \frac{h}{2} = \frac{b^2 h^2}{4} \rho, \quad I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0$$

## Momenti Principali d'Inerzia

Si considerino un sistema  $S$  di punti materiali e una retta  $s$  per l'origine  $O$  in un sistema di assi  $Oxyz$ ; siano  $\alpha, \beta, \gamma$  i coseni direttori di  $s$  (i "versori" componenti del versore di  $s$ ):

$$\underline{s} = \text{vers } s = (\alpha, \beta, \gamma), \quad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$$

Sia  $\underline{r}_i$  il vettore di posizione di  $P_i$  rispetto ad  $O$  e  $(P_i)$  la proiezione di  $P$  su  $s$

$$|\underline{r}_i|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2, \quad |OP_i|^2 = (\underline{r}_i \cdot \underline{s})^2 = (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2 \quad \alpha^2 = 1 - \alpha^2$$

$$d_i^2 = |\underline{r}_i|^2 - |OP_i|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2 = x_i^2 (\beta^2 + \gamma^2) + y_i^2 (\alpha^2 + \gamma^2) + \dots - 2x_i y_i \alpha \beta - \dots - 2y_i z_i \beta \gamma$$

Il momento d'inerzia di  $S$  rispetto ad  $s$  può esprimersi in funzione di  $\alpha, \beta, \gamma$ :

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i d_i^2 = \sum_{i=1}^n m_i (|\underline{r}_i|^2 - |OP_i|^2) = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{xz} \alpha \gamma - 2I_{yz} \beta \gamma$$

che consente di valutare  $I_s$  rispetto ad una qualsiasi retta  $s$  uscente da  $O$  quando si siano calcolati i momenti  $I_x, I_y, I_z$  e i prodotti d'inerzia  $I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$  di  $S$ .

Per ogni retta  $s$  uscente da  $O$ , supposto  $I_s > 0$ , si consideri il luogo (geometrico) dei punti  $Q(x, y, z) \in s$  tali che:

$$x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_s}}, \quad y = \frac{\beta}{\sqrt{I_s}}, \quad z = \frac{\gamma}{\sqrt{I_s}}$$

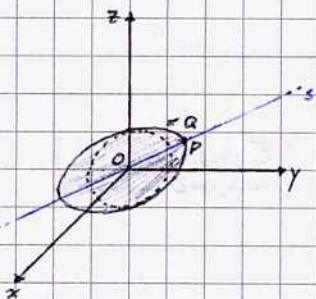
$$E_0 = \left\{ Q(x, y, z) \in s : \underline{r}_Q = \frac{\underline{s}}{\sqrt{I_s}} \right\} \quad \forall s: \underline{s} = \text{vers } s = (\alpha, \beta, \gamma)$$

Sostituendo le tre condizioni  $(x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_s}}, \dots)$  nell'espressione di  $I_s$  rispetto ai coseni direttori si ottiene l'equazione dell'ellissoide d'inerzia  $E_0$ :

$$E_0 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{xz} xz - 2I_{yz} yz = 1$$

Se  $O \equiv G$  si ottiene l'ellissoide centrale d'inerzia  $E_0$ .

I momenti d'inerzia relativi ai tre assi dell'ellissoide si definiscono momenti principali d'inerzia, e gli assi dell'ellissoide d'inerzia si dicono assi principali d'inerzia.



Si osservi che, determinato l'ellissoide d'inerzia  $E_0$ , è noto il momento d'inerzia relativo ad ogni retta  $s$  uscente da  $O$ .

Infatti, se  $P \in s \cap E_0$  allora si ha:

$$|OP| = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \Leftrightarrow I_s = \frac{1}{|OP|^2}$$

(P=Q)

E quindi agli assi principali d'inerzia competono momenti d'inerzia minimo e massimo.

In particolare, dalla relazione appena identificata risulta evidente che all'asse maggiore dell'ellissoide compete momento minimo e a quella minore il momento d'inerzia massimo.

Se esiste una retta  $\bar{S}$  passante per  $O$ :  $I_{\bar{S}} = 0$ , allora i punti del sistema  $S$  sono tutti allineati su  $\bar{S}$ .

Si consideri il sistema di assi  $Oxyz$  con l'asse  $z$  coincidente con  $\bar{S}$ , allora:

$$\forall P_i \in S, x_i = y_i = 0 \Rightarrow I_x = I_y = \sum_{i=1}^n m_i z_i^2, \quad I_z = I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$$

E il luogo dei punti (ellissoide d'inerzia) si riduce ad un cilindro (rotondo) il cui asse di simmetria  $z$  è asse principale d'inerzia:

$$C_0: I_x x^2 + I_y y^2 = 1, \quad I_x = I_y$$

Per l'ellissoide d'inerzia valgono le seguenti proprietà:

① Se l'asse  $z$  è un asse di simmetria <sup>(materiale)</sup> per l'ellissoide d'inerzia (asse principale), allora:

$$(x, y, z) \in E_0 \Rightarrow (x, y, -z) \in E_0 \quad \Rightarrow \text{i prodotti d'inerzia che contengono } z \text{ sono nulli!}$$

e l'equazione dell'ellissoide, essendo  $I_{xz} = I_{yz} = 0$ , diventa:

$$E_0 = I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1$$

e vale anche il viceversa, ovvero si è dimostrato che  $z$  è asse principale d'inerzia  $\Leftrightarrow I_{xz} = I_{yz} = 0$

② Se due assi del sistema sono principali d'inerzia, allora lo è anche il terzo.

Si supponga che gli assi  $x$  e  $y$  siano principali d'inerzia, allora:

$$I_{xy} = I_{xz} = 0, \quad I_{yx} = I_{yz} = 0$$

e quindi anche l'asse  $z$  è principale d'inerzia ( $I_{xz} = I_{yz} = 0$ )

③ Una terna è principale d'inerzia se e solo se  $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ .

In una terna principale d'inerzia l'ellissoide d'inerzia assume la forma canonica:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1$$

sempre possibile, permette lo studio delle connessioni tra l'ellissoide d'inerzia e la struttura geometrica e materiale del sistema (distribuzione di massa, simmetrie materiali)

④ Se  $\pi = xy$  è un piano di simmetria <sup>(materiale!)</sup>, allora:

$$I_x = I_y \Rightarrow \text{giroscopi}$$

$$E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi \quad \text{come } \textcircled{1}$$

Inoltre, poiché il baricentro  $G$  appartiene al piano  $\pi$  di simmetria, si ha:

$$E_G: I_{\xi} \xi^2 + I_{\eta} \eta^2 + I_z z^2 - 2I_{\xi\eta} \xi\eta = 1 \quad \left( \begin{array}{l} \text{perché materiale} \\ \text{I prod. inerzia che coinvolgono } z \text{ sono nulli} \end{array} \right)$$

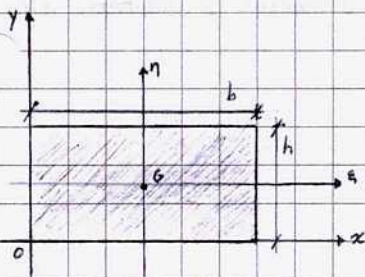
⑤ Per un sistema piano  $S$  i cui punti appartengono al piano  $\pi = xy$  si ha:

$$E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad I_z = I_x + I_y \quad \forall O \in \pi \quad \text{come } \textcircled{4}$$

e anche per  $E_G$  si ottiene un'equazione del tutto analoga.

### Esempio

Si determinano gli ellissoidi d'inerzia relativi alle origini dei riferimenti  $Oxy$ ,  $O\xi\eta$  di un rettangolo omogeneo di lati  $b$  ed  $h$ .



Ricordando che per un sistema piano risultano:

$$I_x = \int_c \mu(P) y^2 dc ; \quad I_y = \int_c \mu(P) x^2 dc ; \quad I_{xy} = \int_c \mu(P) xy dc$$

$$I_z = I_x + I_y , \quad I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$E_o: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi,$$

Proviamo nei calcoli.

$$I_x = \mu \int_0^h dy \int_0^b x^2 dx = \frac{\mu b h^3}{3} ; \quad I_y = \mu \int_0^b dx \int_0^h y^2 dy = \frac{\mu b^3 h}{3} ; \quad I_z = \frac{\mu b h}{3} (h^2 + b^2)$$

$$I_{xy} = \mu \int_0^h dy \int_0^b xy dx = \frac{\mu b^2 h^2}{4} ; \quad I_{xz} = I_{yz} = 0$$

$$E_o: \frac{\mu b h^3}{3} x^2 + \frac{\mu b^3 h}{3} y^2 + \frac{\mu b h}{3} (h^2 + b^2) z^2 - 2 \frac{\mu b^2 h^2}{4} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

L'asse  $z$  è un asse principale d'inerzia ( $I_{xz} = I_{yz} = 0$ )

$$m = \mu b h , \quad G = (b/2, h/2)$$

$$I_x = I_\xi + m y_G^2 ; \quad I_y = I_\eta + m x_G^2 ; \quad I_z = I_\xi + I_\eta ; \quad I_{xy} = I_\xi \eta + m x_G y_G ; \quad I_{xz} = I_\xi z ;$$

$$I_{yz} = I_\eta z ; \quad E_G: I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_z z^2 - 2I_\xi \eta \xi \eta = 1$$

Si osserva che la terna baricentrica è principale d'inerzia ( $I_\xi \eta = I_\xi z = I_\eta z = 0$ )

# Determinazione degli assi principali d'inertzia di un sistema piano

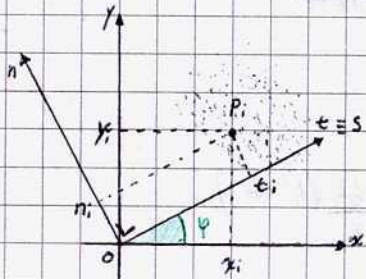
Si consideri il sistema  $S$  i cui punti appartengono al piano  $\pi = xy$ . sistema piano

Poiché l'asse ~~z~~  $z$  è principale d'inertzia, la ricerca di una terna d'inertzia è limitata alla determinazione di due assi nel piano  $xy$ .  
 (prod. inertzia con  $z = 0$ )

Si consideri una retta  $s$  del piano  $xy$ :

$$\underline{s} = \text{vers } s = (d, \beta, 0) \equiv (\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad d^2 + \beta^2 = 1$$

dove  $\varphi$  è l'angolo che  $s$  forma con l'asse  $x$



Il momento d'inertzia di  $S$  rispetto ad  $s$  è:

$$I_s = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi$$

È l'ellissoide d'inertzia  $E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$  interseca il piano  $xy$  in un'ellisse di equazione:

$$E_0 \cap \pi: I_x x^2 + I_y y^2 - 2I_{xy} xy = 1 \quad \forall O \in \pi$$

sezione dell'ellissoide giacente nel piano  $xy$ : se  $I_x = I_y$  è un cerchio. Dipende dalla distr. geometrica e materiale di  $S$ .

Sono possibili due casi:

- Gli assi  $x$  e  $y$  sono principali d'inertzia.

Allora l'ellisse assume la forma canonica:

$$E_0 \cap \pi: I_x x^2 + I_y y^2 = 1 \quad \forall O \in \pi \Rightarrow I_{xy} = 0$$

- Gli assi  $x$  e  $y$  NON sono principali d'inertzia.

Allora, è possibile individuare gli assi principali d'inertzia  $r_1$  ed  $r_2$  imponendo che ad essi corrisponda momento d'inertzia minimo o massimo.

Siano  $r_1$  ed  $r_2$  detti assi e si supponga che  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  siano gli angoli formati dalle rette con l'asse delle  $x$ .

Per determinare il minimo e il massimo di  $I_s$  si cominci con l'ipotesi che tali rette siano punti di stazionarietà per  $I_s(\varphi)$ :

$$\frac{dI_s(\varphi)}{d\varphi} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{d\varphi} (I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \cos \varphi \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underline{(I_x - I_y) \sin 2\varphi + 2I_{xy} \cos 2\varphi = 0}$$

Allora si ha:

$$\bullet \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad \text{da cui si ottiene: } \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet I_x = I_y \Rightarrow \cos 2\varphi = 0 \quad \text{e ci si riconduce al caso precedente: } \varphi_1 = -\frac{\pi}{4}, \varphi_2 = \frac{\pi}{4}$$

$$\bullet I_x \neq I_y, \cos 2\varphi \neq 0 \Rightarrow \sin 2\varphi = -\frac{2I_{xy} \cos 2\varphi}{I_x - I_y} \Leftrightarrow \tan 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

da cui, a meno della periodicità, si ottengono due valori per l'angolo  $\varphi$  che differiscono di  $\pi/2$ .

Esistono anche altri metodi che permettono di determinare gli assi principali d'inerzia, questo è però il più diretto.

## Ellisse di Culmann

## SISTEMI PIANI CONTINUI

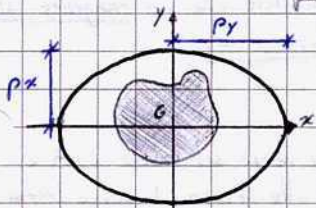
Si consideri un sistema piano  $S$  e un riferimento baricentrale  $(x, y)$  principale d'inerzia. Allora, se  $m$  è la massa di  $S$ , definiamo i due raggi d'inerzia:

$$p_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} \quad p_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} \quad (\text{visti in precedenza}) \quad p. 87$$

Si definisce ellisse di Culmann l'ellisse di semiasse  $p_x$  e  $p_y$ , ovvero la conica di equazione:

$$\frac{x^2}{p_y^2} + \frac{y^2}{p_x^2} = 1$$

⚠:  $\frac{x^2}{p_y^2}$  ... osserva che sono "invertiti": spesso all'esame sbagliano questa cosa!!



Ellisse di Culmann

## Antipolarità

Si consideri la seguente applicazione tra punti e rette del piano ad esclusione del baricentro  $G$  del sistema  $S$  e delle rette da esso uscenti:

$$A = (x_A, y_A) \rightarrow \frac{x_A}{p_y^2} x + \frac{y_A}{p_x^2} y + 1 = 0 \quad \forall A \neq G$$

retta che si ottiene dall'ellisse di Culmann  $\Rightarrow$  occorre prima def. l'ellisse e i raggi d'inerzia!

$$\text{e l'inversa: } r: px + qy + 1 = 0 \rightarrow A = (x_A, y_A): x_A = p^2 q, y_A = q^2 p \quad \forall r: G \notin r$$

Questa corrispondenza definita nelle relazioni precedenti è detta antipolarità; la retta associata ad ogni punto  $A \neq G$  è detta antipolare, mentre il punto  $A$  associato alla retta  $r$  mediante la seconda relazione si dice antipolo.

### Esempio

Determinare gli antipoli delle rette parallele agli assi e delle rette:

$$a_1: x = -p_y \quad a_2: x = p_y \quad a_3: x = -\frac{p_y}{2} \quad a_4: x = 2p_y$$

$$px + qy + 1 = 0 \rightarrow A = (x_A, y_A): x_A = p^2 q, y_A = q^2 p \quad \forall r: G \notin r$$

$$a_1: \frac{1}{p_y} x + 1 = 0 \rightarrow A_1 = (p_y, 0)$$

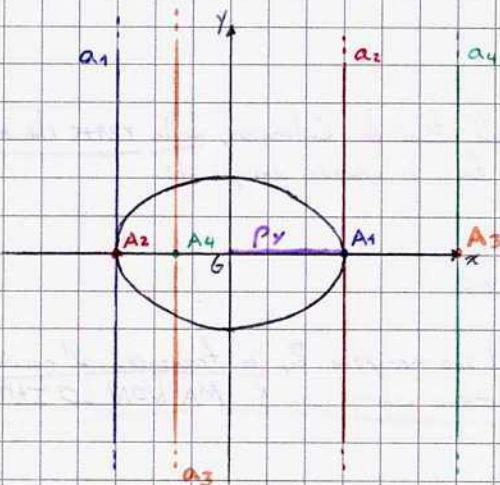
$$a_2: -\frac{1}{p_y} x + 1 = 0 \rightarrow A_2 = (-p_y, 0)$$

$$a_3: \frac{2}{p_y} x + 1 = 0 \rightarrow A_3 = (2p_y, 0)$$

$$a_4: -\frac{1}{2p_y} x + 1 = 0 \rightarrow A_4 = (-\frac{p_y}{2}, 0)$$

$$\text{rette } \parallel x: qy + 1 = 0 \rightarrow A_x = (0, q^2 p)$$

$$\text{rette } \parallel y: px + 1 = 0 \rightarrow A_y = (p^2 p, 0)$$



osservazione: antipolo e retta antipolare corrispondenti si trovano su bande opposte rispetto al baricentro.

Inoltre si nota che il prodotto delle distanze tra il baricentro di due rette passanti per i rispettivi antipoli è costante.

Teorema di reciprocità: Siano  $A$  e  $B$  gli antipoli delle rette  $a$  e  $b$ ; allora:

$$A \in \text{retta } b \iff B \in \text{retta } a$$

Ne seguono le seguenti proprietà:

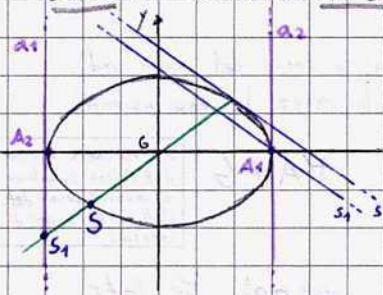
- Sia  $A$  l'antipolo della retta  $a$ , allora ogni retta  $s_a$  di centro  $A$  ha l'antipolo  $S_A \in a$ :

$$(A, a), \quad \forall s_a \text{ uscente da } A \implies S_A \in a$$

- Gli antipoli di un fascio di rette parallele appartengono alla stessa retta  $r_G$  passante per il baricentro, detta diametro coniugato alla direzione del fascio di rette parallele.

$$\forall a, b: a \parallel b, \quad A, B \in r_G$$

La costruzione del diametro coniugato si effettua considerando la retta del fascio di rette parallele che sia tangente all'ellisse di Culmann: il diametro coniugato è la retta per il punto di tangenza e il baricentro  $G$ .



Si consideri un fascio di rette parallele e siano  $a$  e  $b$  due rette del fascio e  $A$  e  $B$  i corrispondenti antipoli, allora  $A$  e  $B$  appartengono allo stesso diametro (retta per  $G$ ).  
I punti  $A$  e  $B$  sono detti punti coniugati nell'antipolarità e si ha:

$$|AG| |BG| = \text{cost.}$$

La costante dipende dal diametro

Individuazione dell'antipolo di una retta  $s_i$  sfruttando le proprietà studiate.

Nell'esempio alla pagina precedente, poiché le rette sono parallele tra loro gli antipoli appartengono allo stesso diametro e risulta:

$$|A_1G| |A_2G| = |A_3G| |A_4G| = p^2$$

### Antipolarità per $G$ e per le rette passanti per $G$

Come deducibile dalle valutazioni precedenti, per definire l'antipolarità sulle rette per il baricentro o sul baricentro occorre attuare un'estensione:

- Alle rette passanti per il baricentro si associa come antipolo il punto improprio rappresentante la direzione delle rette del fascio di rette parallele di cui le rette in esame sono diametri coniugati.
- Il baricentro, analogamente, può essere considerato l'antipolo della retta impropria che contiene tutte le direzioni dei fasci di rette parallele di cui una retta per  $G$  è il diametro coniugato.

### Nocciolo (centrale) d'inerzia

Sia  $S$  un sistema continuo piano.

Il nocciolo d'inerzia è il luogo dei punti formato dagli antipoli, rispetto all'ellisse di Culmann, delle rette che non tagliano il sistema  $S$ , ovvero gli antipoli delle rette esterne o tangenti ad  $S$ . Si osserva dunque che:

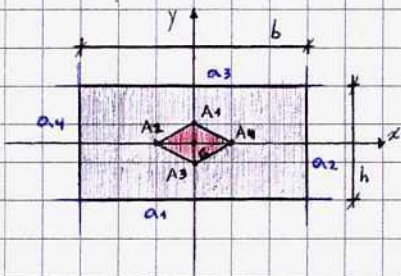
- Il baricentro  $G$  di  $S$  appartiene al nocciolo d'inerzia.
- Gli antipoli delle rette esterne ad  $S$  sono punti interni al nocciolo d'inerzia.
- Il nocciolo d'inerzia è sempre un dominio convesso.
- Poiché maggiore è la distanza di una retta  $r$  da  $G$  minore è quella del suo antipolo  $R$ , la frontiera del nocciolo d'inerzia è individuata dagli antipoli delle rette che hanno qualche punto in comune con  $S$  MA NON LO INTERSECANO.

riccardo.polidoro.96



### Esempio

Determinare l'ellisse di Culmann e il nocciolo d'inertia di un rettangolo omogeneo:



Osservando che gli assi sono assi centrali d'inertia, per determinare l'ellisse di Culmann è sufficiente calcolare i raggi d'inertia:

$$p_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}} = \sqrt{\frac{Mbh^3}{12} \cdot \frac{1}{Mbh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}}$$

$$p_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}} = \sqrt{\frac{Mb^3h}{12} \cdot \frac{1}{Mbh}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}}$$

$$I_x = \int_C m(\rho) y^2 dC$$

$$= \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} m y^2 dx dy$$

$$\text{ellisse di Culmann: } \frac{x^2}{p_y^2} + \frac{y^2}{p_x^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2/12} + \frac{y^2}{h^2/12} = 1$$

Per determinare il nocciolo d'inertia è sufficiente individuare gli antipoli delle rette passanti per i vertici e i lati del rettangolo.

$$r: px + qy + 1 = 0 \rightarrow A = (x_A, y_A) = x_A = -\frac{p}{q}, y_A = -\frac{1}{q} \quad \forall r \neq r_6$$

$$A = (x_A, y_A) \rightarrow \frac{x_A}{p^2} x + \frac{y_A}{q^2} y + 1 = 0 \quad \forall A \neq G$$

$$a_1: y = -\frac{h}{2} \Rightarrow \frac{2}{h}y + 1 = 0 \rightarrow A_1 = (0, \frac{h}{6}) ; \quad a_2: x = \frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{2}{b}x + 1 = 0 \rightarrow A_2 = (-\frac{b}{6}, 0)$$

$$a_3: y = \frac{h}{2} \Rightarrow -\frac{2}{h}y + 1 = 0 \rightarrow A_3 = (0, -\frac{h}{6}) ; \quad a_4: x = -\frac{b}{2} \Rightarrow \frac{2}{b}x + 1 = 0 \rightarrow A_4 = (\frac{b}{6}, 0)$$

Calcoliamo ora le antipolari dei quattro vertici:

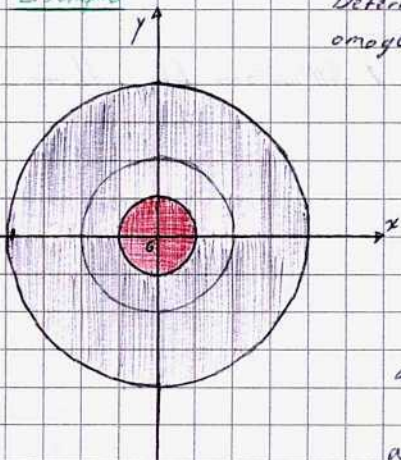
$$V_{12} \equiv (\frac{b}{2}, -\frac{h}{2}) \rightarrow r_{12}: \frac{6}{b}x - \frac{6}{h}y + 1 = 0 ; \quad V_{23} \equiv (\frac{b}{2}, \frac{h}{2}) \rightarrow r_{23}: \frac{6}{b}x + \frac{6}{h}y + 1 = 0$$

$$V_{34} \equiv (-\frac{b}{2}, \frac{h}{2}) \rightarrow r_{34}: -\frac{6}{b}x + \frac{6}{h}y + 1 = 0 ; \quad V_{41} \equiv (-\frac{b}{2}, -\frac{h}{2}) \rightarrow r_{41}: -\frac{6}{b}x - \frac{6}{h}y + 1 = 0$$

Osservando che le rette della stella di centro  $V_{ij}$  hanno l'antipolo sulla retta  $r_{ij}$  passante per  $A_i$  e  $A_j$  si ottiene il segmento di estremi  $A_i$  e  $A_j$ .

### Esempio

Determinare ellisse di Culmann e nocciolo d'inertia di un sistema costituito da un disco omogeneo di raggio  $R$ .



I raggi d'inertia di un disco omogeneo sono  $p_x = p_y = R/2$  e, dunque, l'ellisse di Culmann è una circonferenza di raggio  $R/2$ .

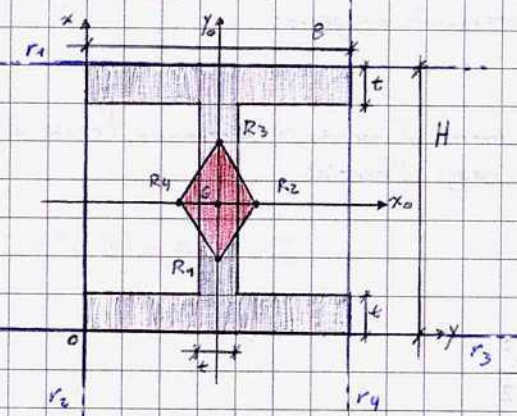
Il nocciolo d'inertia può ottenersi considerando che la sua frontiera è determinata dagli antipoli delle rette tangenti al disco.

Per la simmetria, è facile osservare che il nocciolo d'inertia è un disco di raggio  $R/4$ : consideriamo le tangenti ad  $S$  parallele agli assi:

$$a_1: -\frac{y}{R} + 1 = 0 \rightarrow A_1 = (0, -\frac{R}{4}) ; \quad a_2: \frac{y}{R} + 1 = 0 \rightarrow A_2 = (0, \frac{R}{4})$$

$$a_3: -\frac{x}{R} + 1 = 0 \rightarrow A_3 = (-\frac{R}{4}, 0) ; \quad a_4: \frac{x}{R} + 1 = 0 \rightarrow A_4 = (\frac{R}{4}, 0)$$

I punti  $A_i$  rappresentano le intersezioni del disco di raggio  $R/4$  con gli assi.



Determinare l'ellisse di Culmann e il nocciolo d'inertia della sezione a doppia T in figura.

$B = 14 \text{ cm}$   
 $H = 14 \text{ cm}$   
 $t = 2 \text{ cm}$

Scala di risoluzione per sistemi generici:

- ① Trovare baricentro e una terna baricentrica
- ② Individuare l'ellisse di Culmann
- ③ Strutturare l'antipolarità per trovare il nocciolo d'inertia.

⚠ La difficoltà maggiore riscontrata all'esame è un'eccessiva attenzione agli esercizi, che si traduce in carenze teoriche: all'ora le definizioni chieste vanno messe in relazione con altri concetti ad essi legati. Es. per parlare di nocciolo d'inertia bisogna riferirsi alle ellisse di Culmann, sistema di riferimento baricentrico, come si calcola il baricentro, i prodotti d'inertia, i momenti centrali d'inertia...

### Ricapitolazione: Argomenti Essenziali

#### Calcolo Vettoriale

• Momento Polare (è un vettore libero!)

Momento del vettore applicato  $(P, u)$  rispetto al polo  $T$ :

$$\underline{M}_T = (P-T) \times \underline{u} = (r_P - r_T) \times \underline{u} \quad ; \quad \underline{M}_T = \underline{M}_S + \underline{u} \times (T-S)$$

- Il momento di  $(P, u)$  non varia se si sposta il polo lungo una retta parallela ad  $u$
- Il momento non varia se si sposta il vettore  $u$  lungo la sua retta di applicazione

#### Esempio

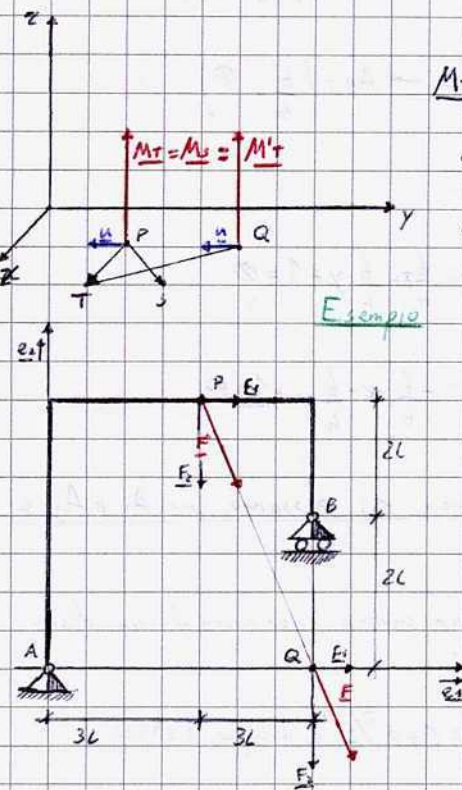
Calcolare il momento del vettore  $(P, E)$  rispetto ad  $A$

$$\underline{E} = \frac{3}{5} F \underline{e}_1 - \frac{4}{5} F \underline{e}_2$$

$$\underline{M}_A = (Q-A) \times \underline{E} = 6L \underline{e}_1 \times \frac{4}{5} F \underline{e}_2 = -\frac{24}{5} F \underline{e}_3$$

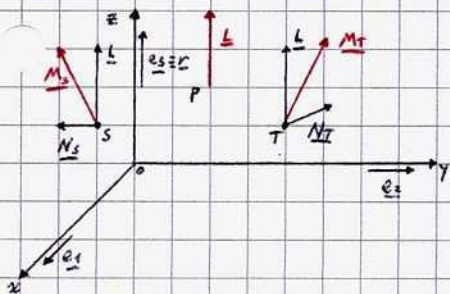
oppure:  $\underline{M}_A = (P-A) \times \underline{E} = (3L \underline{e}_1 + 4L \underline{e}_2) \times \left( \frac{3}{5} F \underline{e}_1 - \frac{4}{5} F \underline{e}_2 \right) = -\frac{12}{5} LF - \frac{12}{5} LF = -\frac{24}{5} F \underline{e}_3$

Risulta evidente la convenienza ~~anziché~~ dell'utilizzo delle suddette proprietà nella risoluzione degli esercizi.



• Asse Centrale

La componente  $L$  del momento parallela al risultante  $R$  non dipende dal polo:



$$M_T \cdot R = M_S \cdot R \quad \forall T, S$$

$$M_T = L + N_T \quad L \parallel R, N_T \perp R$$

$$\text{asse centrale: } \mathcal{A} = \{P: |M_P| = \min |M_T|\} = \{P: N_P = \mathbf{0}\} = \{P: M_P = L\}$$

$$\text{Se } R \parallel O x_3, \mathcal{A} = \{P \equiv (x_1, x_2, x_3): x_1 = -\frac{M_{02}}{R_3}, x_2 = \frac{M_{01}}{R_3}, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

In generale, per un sistema  $S$  di vettori applicati con risultante  $R$  e momento  $M_0$  si ha:

$$\text{asse centrale } \mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3): (P-O) = \lambda R + \frac{R \times M_0}{R^2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

questa relazione si ottiene (e il risultante) se il momento risultante è assegnato - si vuole calcolare l'asse centrale.

Dim

$$\mathcal{A} = \left\{ P \equiv (x_1, x_2, x_3): \frac{x_1 - x_1'}{R_1} = \frac{x_2 - x_2'}{R_2} = \frac{x_3 - x_3'}{R_3} \right\}, (Q-O) = \frac{R \times M_0}{R^2} \equiv (x_1', x_2', x_3')$$

(eq. cartesiana)

$$M_T = M_0 + R \times (T-O) \Leftrightarrow L + N_T = L + N_0 + R \times (T-O) \quad (a \times b) \times b = [(a \cdot b)b - b \cdot b(a)]$$

$$P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow N_P = \mathbf{0} \Leftrightarrow N_0 + R \times (P-O) = \mathbf{0} \Leftrightarrow N_0 = (P-O) \times R \Leftrightarrow$$

moltiplico per R entrambi

$$\Leftrightarrow N_0 \times R = [(P-O) \times R] \times R \Leftrightarrow N_0 \times R = [(P-O) \cdot R] R - (R \cdot R)(P-O)$$

doppio prodotto vett

$$(P-O) = \frac{[(P-O) \cdot R]}{R^2} R - \frac{N_0 \times R}{R^2} \equiv \lambda R + \frac{R \times M_0}{R^2}$$

scalare

$M_0 = N_0 + L$  ma  $L \times R = \mathbf{0}$

$R \cdot R$ , quantità vicina a  $(P-O)$  nei passaggi precedenti

$$(Q-O) = \frac{R \times M_0}{R^2} \Rightarrow (P-O) = \lambda R + (Q-O) \Leftrightarrow (P-Q) = \lambda R \Leftrightarrow (x_1 - x_1', x_2 - x_2', x_3 - x_3') = \lambda (R_1, R_2, R_3)$$

stretto il precedente

$P = (x_i)$

$Q = (x_i')$

stessa costante  $\Rightarrow \Rightarrow \frac{x_i - x_i'}{R_i} = \lambda$

Esempio

Nel riferimento  $Oxyz$ , determinare l'asse centrale per il sistema di vettori applicati  $S = \{(A_i, v_i), i=1,2,3\}$

$$A_1 = (2, 0, 0) \quad A_2 = (0, 0, 2) \quad A_3 = (0, 1, 0)$$

$$v_1 = (1, 0, 0) \quad v_2 = (1, 0, 1) \quad v_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$R = \sum_{i=1}^3 v_i = \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad M_0 = \sum_{i=1}^3 (A_i - O) \times v_i = \left(0, 2, -\frac{1}{2}\right)$$

$$R^2 = \|R\|^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \frac{19}{2}$$

serve per applicare la formula appena dimostrata

$$R \times M_0 = \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5\right)$$

$$\mathcal{A}: (P-O) = \lambda R + \frac{R \times M_0}{R^2} \Leftrightarrow (P-O) = \lambda \left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) + \frac{2}{19} \left(-\frac{7}{4}, \frac{5}{4}, 5\right) \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{eq. implicita}$$

$$\mathcal{A}: \begin{cases} x = -\frac{7}{30} + \frac{5}{2} \lambda \\ y = \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \lambda \\ z = \frac{1}{3} + \lambda \end{cases} \quad \text{eq. parametrica}$$

$$\frac{2}{5} \left(\frac{x+7}{30}\right) = \frac{2}{6} (1-y) = z - \frac{2}{3} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \text{eq. cartesiana}$$

Esercizio: Determinare i valori di  $\alpha$  e  $\beta$  tali che il punto  $P \equiv (\alpha, \alpha + \sqrt{6}, \beta)$  appartenga all'asse centrale  $\mathcal{A}$  appena individuato.

## Sistemi Equivalenti

Si considerino due sistemi  $S$  ed  $S'$  di vettori applicati:

L'uso è frequente nella statica: si sostituiscono sistemi di forze con forze più semplici ma con effetti equivalenti.

$$S = \{(P_i, \underline{u}_i), i=1, \dots, n\} \quad [S = \{(P, \underline{u}(P)) : P \in \Omega\}] \quad \underline{R}, \underline{M}_T \quad \forall T$$

$$S' = \{(Q_j, \underline{v}_j), j=1, \dots, m\} \quad [S' = \{(P, \underline{v}(P)) : P \in \Omega'\}] \quad \underline{R}', \underline{M}'_T \quad \forall T$$

$$S \text{ ed } S' \text{ sono equivalenti} \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{R} = \underline{R}', \quad \underline{M}_T = \underline{M}'_T \quad \forall T \\ \underline{R} = \underline{R}', \quad \exists O: \underline{M}_O = \underline{M}'_O \end{cases}$$

In particolare, si ottiene la Tabella di massima riduzione di un sistema:

Invariante Scalare	Risultante	Momento Risultante	Sistema equivalente ("massima riduzione")
	$\underline{R} = \underline{0}$	$\underline{M}_O = \underline{0}$	zero
$I = 0$	$\underline{R} = \underline{0}$	$\underline{M}_O \neq \underline{0}$	coppia di momento $\underline{M}_O$
	$\underline{R} \neq \underline{0}$	$\underline{M}_O = \underline{0}$	$\underline{R}$ applicato in un punto dell'asse centrale
$I \neq 0$	$\underline{R} \neq \underline{0}$	$\underline{M}_O \neq \underline{0}$	$\underline{R}$ applicato in un punto $O$ più una coppia di momento $\underline{M}_O$

\* Sistemi piani \*

⚠ La coppia di momento  $\underline{M}_O$  NON è univocamente determinata!

Bisogna essere in grado di DIMOSTRARE ciascuna delle equivalenze.

## Cinematica

### Moti rigidi

$$S \text{ corpo rigido} \Leftrightarrow |PQ| = \text{cost.} \quad \forall P, Q \in S, \quad \forall t$$

$$\text{spostamento rigido: } |PQ| = |P'Q'| \quad \forall P, Q \in S \text{ rigido o non rigido}$$

$$\text{moto rigido: } \forall t: |PQ| = \text{cost.} \quad \forall P, Q \in S \text{ rigido o non rigido}$$

### Configurazione di un corpo rigido

$$O x_1 x_2 x_3 \quad \text{terna fissa (di laboratorio) di versori } (\underline{e}_i) : P \equiv (x_1, x_2, x_3)$$

$$O y_1 y_2 y_3 \quad \text{terna mobile solidale ad } S \text{ di versori } (\underline{u}_i) : O \in S, P \equiv (y_1, y_2, y_3)$$

$$O \in S \Leftrightarrow \underline{r}_{P/O}(t) = \underline{r}_{P/O}(t) + \underline{r}_{P/O}(t) \quad \forall P \in S$$

Dunque:

$$\underline{r}_{P/O}(t) = x_{01}(t) \underline{e}_1 + x_{02}(t) \underline{e}_2 + x_{03}(t) \underline{e}_3 ; \quad \underline{r}_{P/O}(t) = y_1 \underline{u}_1(t) + y_2 \underline{u}_2(t) + y_3 \underline{u}_3(t)$$

$$\underline{u}_i(t) = A_{i1}(t) \underline{e}_1 + A_{i2}(t) \underline{e}_2 + A_{i3}(t) \underline{e}_3 \quad A_{ij} \text{ coseni direttori}$$

$$\underline{u}_i(t) \cdot \underline{u}_i(t) = 1 \quad \forall i, \quad \underline{u}_i(t) \cdot \underline{u}_j(t) = 0 \quad \forall i \neq j$$

$$\underline{r}_{P/O}(t) = x_{01}(t) \underline{e}_1 + x_{02}(t) \underline{e}_2 + x_{03}(t) \underline{e}_3 + y_1 (A_{11}(t) \underline{e}_1 + A_{12}(t) \underline{e}_2 + A_{13}(t) \underline{e}_3) + y_2 \left( \sum_{i=1}^3 A_{2i}(t) \underline{e}_i \right) + y_3 \left( \sum_{i=1}^3 A_{3i}(t) \underline{e}_i \right)$$

Ne segue che le configurazioni di un sistema rigido  $S$  dipendono da 6 funzioni del tempo:

- $x_{oi}(t)$  ( $i=1,2,3$ ) che definiscono la posizione del punto  $O$  nel riferimento fisso
- 3 coseni direttori indipendenti  $A_{ij}$  che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

In alternativa, si introduce un terzo sistema di riferimento:

$Ox_1x_2x_3 (e_i)$  terna di laboratorio

$Ox_1x_2x_3 (e_i)$  terna con centro in  $O \in S$  e versori  $e_i$

$Oy_1y_2y_3 (u_i)$  terna mobile con centro in  $O \in S$  solidale al sistema

- Si definiscono:
- linea dei nodi:  $n = Ox_1x_2 \cap Oy_1y_2$   $\underline{n} = \text{vers } n$
  - angoli di Eulero:  $\Psi$  (precessione),  $\varphi$  (rotazione propria),  $\mathcal{J}$  (nutazione)

Le configurazioni di un sistema rigido  $S$  dipendono da 6 funzioni del tempo:

- $x_{oi}(t)$  ( $i=1,2,3$ )
- 3 angoli di Eulero che definiscono l'orientazione della terna solidale rispetto a quella fissa.

Si definiscono infine:

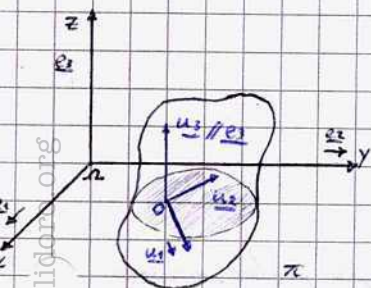
Atto di moto rigido:  $\forall P \in S \quad \underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad \forall t$

Spostamento elementare  $dP = dO + d\varphi \times (P-O), \quad d\varphi = \underline{\omega} dt$

Vettore di rotazione elementare  $d\varphi = \underline{\omega} dt$

- Moti Traslatori
- Moti Rotatori attorno ad un asse fisso  $a$
- Moti Rototraslatori
- Moti Rigido-sterici
- Moti con asse scorrevole su sé stesso
- Moti Elicoidali
- Teorema di Mezzi; Invariante cinematico

• Moti Rigidi PIANI (utili dato lo studio, in particolare, di sezioni piane di strutture)



$Ox_1x_2x_3 (e_i)$  fisso:  $\underline{\pi} \equiv \underline{Ox_1x_2} \quad \underline{\pi} // \underline{\pi}_s \quad Ox_2 // Oy_3 \Rightarrow e_3 = u_3$

$Oy_1y_2y_3 (u_i)$  solidale:  $\underline{\pi}_s \equiv Oy_1y_2 \quad \varphi \in (-\pi, \pi) = \widehat{x_1y_1} \quad x_{\alpha,3}(t) = 0$

Atto di moto piano  $\underline{v}_P(t) = \underline{v}_O(t) + \underline{\omega}(t) \times (P-O) \quad \underline{v}_O(t) // \underline{\pi}, \quad \underline{\omega}(t) = \dot{\varphi} e_3$

Spostamento elementare piano:  $dP = dO + d\varphi \times (P-O) \quad dO // \underline{\pi}, \quad \varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$

⚠ Ogni atto di moto rigido piano  $\alpha$  è traslatorio parallelamente al piano  $\pi$  oppure è rotatorio attorno ad un asse ortogonale a  $\pi$ .

## Classificazioni:

- Se  $d\varphi \neq \underline{0}$  si hanno spostamenti elementari rotatori attorno ad un asse  $a \perp \pi$ .

centro istantaneo di rotazione:  $\exists C \in \pi_s: dC = \underline{0} \Leftrightarrow C = \left( x_{01} - \frac{dx_{02}}{d\varphi}, x_{02} + \frac{dx_{01}}{d\varphi}, 0 \right)$

$$d\varphi \neq \underline{0} \Rightarrow dP = d\varphi \times (P - C); dC = \underline{0}, \varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$$

Se  $a$  è una retta dello spazio solidale passante per  $C$  e ortogonale ad  $s$  si ha:

asse istantaneo di rotazione:  $\forall A \in a, dA = d\varphi \times (A - C) \Rightarrow \forall A \in a, dA = \underline{0}$

$$dP = d\varphi \times (P - A); A \in a, \varphi = \varphi e_3 \quad \forall P$$

- Se  $d\varphi = \underline{0}$  si hanno spostamenti elementari traslatori parallelamente a  $\pi$

$$d\varphi = \underline{0} \Rightarrow dP = d\underline{0} \quad \forall P$$

Teorema di Chasles: In un moto rigido piano le perpendicolari agli spostamenti elementari passano per il centro istantaneo di rotazione  $C$  (proprio se  $d\varphi \neq \underline{0}$ , improprio se  $d\varphi = \underline{0}$ ).

## Proprietà dei Centri Istantanei di Rotazione

- Se  $\exists O: dO = \underline{0} \Rightarrow O \equiv C$
- Se  $\exists P_1, P_2: dP_1 = dP_2 = \underline{0} (dP_1 \neq P_2) \Rightarrow dP = \underline{0} \quad \forall P$
- Se  $\forall P_1, P_2: dP_1 = dP_2 \exists P_3: dP_3 = \underline{0} \Rightarrow dP = \underline{0} \quad \forall P$

## Diagrammi di Spostamento

## Centri assoluti e centri relativi

## Sistemi Vincolati

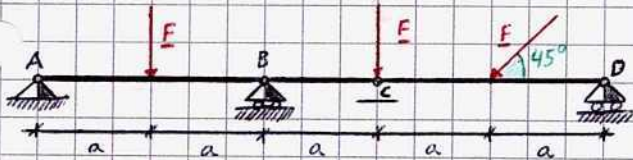
- Vincoli olonami, lisci, fissi, unilaterali o bilaterali
- Equazioni e disegrazioni di vincolo
- Coordinate Lagrangiane e Gradi di Libertà
- Sistemi isostatici, i-volte iperstatici, h-volte labili con i vincoli dipendenti
- Analisi cinematica di un sistema vincolato piano
- Matrice cinematica
- Vincoli nel piano (esterni e interni): pendolo, cerniera, carrello, doppio pendolo, doppio-doppio pendolo, incastro.

# Statica

- Equazioni Cardinali della Statica (ECS)
- Analisi statica di un sistema: matrice statica e relazione tra i modelli statico e cinematico.
- Reazioni vincolari dei vincoli: cerniera, carrello, pendolo, doppio pendolo, doppio-doppio pendolo, incastro
- Maglie triangolari e strutture reticolari: labilità, isostaticità e iperstaticità interne.
- Metodo dei Nodi
- Metodo di Ritter
- Principio dei Lavori Virtuali (PLV)
- Principio di Torricelli
- Condizioni di equilibrio per un corpo rigido
- Analisi dell'equilibrio con il PLV e condizioni generali di equilibrio
- Determinazione delle reazioni vincolari con il PLV e diagrammi di spostamento.

## Esempio

Si effettua l'analisi cinematica della Trave Gerber a due campate (AC e CD) e si determinano le reazioni vincolari con le ECS



Una trave Gerber a  $n$  campate è una trave costituita da  $n$  travi sovrapposte mediante cerniere interne, ciascuna con almeno 1 appoggio. In generale sono strutture isostatiche.

## Analisi Cinematica

$$m=6 \quad x_A, y_A, \varphi_1 \quad x_D, y_D, \varphi_2$$

$$\text{cerniera in A: } dA = 0 \quad (dx_A = 0, dy_A = 0)$$

$$\text{carrello in B: } dB \cdot j = 0 \quad (dy_B = 0)$$

$$\text{cerniera interna in C: } dC' - dC'' = 0 \quad (dx_C' = dx_C'', dy_C' = dy_C'')$$

$$\text{carrello in D: } dD \cdot j = 0 \quad (dy_D = 0)$$

$$\begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0 \\ dy_A + d\varphi_1(x_B - x_A) = 0 \\ [dx_A - d\varphi_1(y_C - y_A)] - [dx_D - d\varphi_2(y_C - y_D)] = 0 \\ [dy_A + d\varphi_1(x_C - x_A)] - [dy_D + d\varphi_2(x_C - x_D)] = 0 \\ dy_D = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} dx_A = 0, dy_A = 0 \\ dy_A + 2a d\varphi_1 = 0 \\ dx_A - dx_D = 0 \\ dy_A + 3a d\varphi_1 - dy_D + 2a d\varphi_2 = 0 \\ dy_D = 0 \end{cases}$$

$$M_c = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi_1 & dx_D & dy_D & d\varphi_2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3a & 0 & -1 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$s=6, s'=6 \Rightarrow l=0, i=0 \text{ isostatico}$$

## Calcolo delle reazioni vincolari con le ECS

Si osservi che la cerniera interna in C è carica, pertanto conviene scrivere le ECS per le travi AC e CD e per il punto materiale C.

Reazioni vincolari e sollecitazioni attive:

\* R vinc:

trave AC:	→ cerniera esterna in A	$\underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax} \underline{i} + \Phi_{Ay} \underline{j}$
	→ carrello esterno in B	$\underline{\Phi}_B = \Phi_{By} \underline{j}$
	→ cerniera interna in C	$\underline{\Phi}_C = \Phi_{Cx} \underline{i} + \Phi_{Cy} \underline{j}$

punto materiale C:  $-\underline{\Phi}_C, -\Psi_C$

trave CD:	→ cerniera interna in C	$\Psi_C = \Psi_{Cx} \underline{i} + \Psi_{Cy} \underline{j}$
	→ carrello esterno in D	$\underline{\Phi}_D = \Phi_{Dy} \underline{j}$

\* Sol. attive:

$(P_1, \underline{F}_1): P_1 \equiv (x_A + a, y_A), \underline{F}_1 = -F \underline{j}$  ;  $(P_2, \underline{F}_2): P_2 \equiv (x_A + 4a, y_A), \underline{F}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} (F' \underline{i} + F' \underline{j})$

$(C, \underline{F}_C): C \equiv (x_A + 3a, y_A), \underline{F}_C = -F \underline{j}$

\* ECS:

trave AC → 
$$\begin{cases} \underline{R}_1^{(a)} + \underline{R}_1^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_{1A}^{(a)} + \underline{M}_{1A}^{(v)} = 0 \end{cases} \equiv \begin{cases} \Phi_{Ax} + \Phi_{Cx} = 0 \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} + \Phi_{Cy} - F = 0 \\ 2a \Phi_{By} + 3a \Phi_{Cy} - aF = 0 \end{cases}$$

punto mat. C → 
$$\underline{R}_1^{(a)} + \underline{R}_1^{(v)} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} -\Phi_{Cx} - \Psi_{Cx} = 0 \\ -\Phi_{Cy} - \Psi_{Cy} - F = 0 \end{cases}$$

trave CD → 
$$\begin{cases} \underline{R}_2^{(a)} + \underline{R}_2^{(v)} = \underline{0} \\ \underline{M}_{2D}^{(a)} + \underline{M}_{2D}^{(v)} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Psi_{Cx} = \frac{\sqrt{2}}{2} F' \\ \Phi_{Dy} + \Psi_{Cy} - \frac{\sqrt{2}}{2} F' = 0 \\ -2a \Psi_{Cy} + a \frac{\sqrt{2}}{2} F' = 0 \end{cases}$$

$\underline{\Phi}_A = \frac{\sqrt{2}}{2} F' \underline{i} - \frac{\sqrt{2}}{8} F' \underline{j}$  ;  $\underline{\Phi}_B = \left( \frac{2F + 3\sqrt{2}}{8} F' \right) \underline{j}$  ;  $\Psi_C = \frac{\sqrt{2}}{2} F' \underline{i} + \frac{\sqrt{2}}{4} F' \underline{j}$  ;  $\underline{\Phi}_C = -\frac{\sqrt{2}}{2} F' \underline{i} + \left( -F - \frac{\sqrt{2}}{4} F' \right) \underline{j}$

L'esercizio è risolto; riproponiamo come esempio una trave Gerber a 3 campate:





# Geometria delle Masse

## • Massa e Baricentro

$$S = \{ (P_i, m_i), i=1, \dots, n \}$$

$$m = \sum_{i=1}^n m_i; \quad r_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i r_i$$

discreto

$$S = \{ (P, \rho(P)), P \in B \}$$

regione

$$m = \int_B \rho(P) d\tau; \quad r_G = \frac{1}{m} \int_B \rho(P) r d\tau$$

continuo

•  $\rho(P)$  è un campo scalare che definisce la distribuzione di massa; è una funzione  $\in C^1(B)$ , associa puntualmente la densità.

• la massa totale viene anche definita con MOMENTO DI ORDINE 0

• Il baricentro dipende dalla distribuzione di masse e la posizione dei punti del sistema.

## Proprietà del Baricentro

$$\forall P \in S, P \in \pi \Rightarrow G \in \pi; \quad \forall P \in S, P \in r \Rightarrow G \in r$$

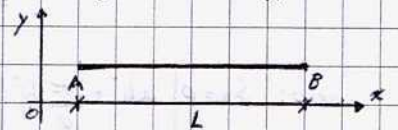
• Il baricentro di un sistema  $S$  appartiene ad ogni piano diametrale coniugato di  $S$  ed, in particolare, ad ogni piano di simmetria.

• Proprietà distributiva:  $S = \bigcup_{i=1}^k S_i \Rightarrow m = \sum_{i=1}^k m_i, \quad m r_G = \sum_{i=1}^k m_i r_{G_i}$

si può generalizzare anche al complemento di insiemi!

Esempio: Calcolare la massa e il baricentro di un'asta  $AB$  non omogenea di lunghezza  $L$ , supponendo che la densità in un suo generico punto  $P$  sia:

①  $\rho(P) = \frac{2m}{L^2} |AP|$ ;    ②  $\rho(P) = \frac{3m}{L^3} |AP|^2$

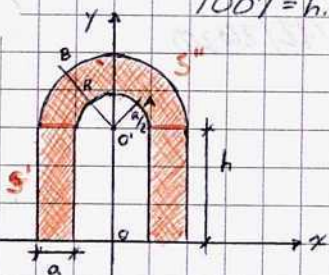


①:  $M = \int_0^L \frac{2m}{L^2} x dx = \frac{2m}{L^2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^L = m; \quad x_G = \frac{1}{M} \int_0^L \left( \frac{2m}{L^2} x \right) x dx = \frac{1}{m} \frac{2m}{L^2} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = \frac{2}{3} L$

②:  $M = \int_0^L \frac{3m}{L^3} x^2 dx = \frac{3m}{L^3} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L = m; \quad x_G = \frac{1}{M} \int_0^L \left( \frac{3m}{L^3} x^2 \right) x dx = \frac{1}{m} \frac{3m}{L^3} \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^L = \frac{3}{4} L$

Si nota la necessità di saper definire massa totale e baricentro indipendentemente dal sistema proposto

Esempio: Si determini il baricentro  $G$  della sezione piana e omogenea in figura, sapendo che  $IO'A' = R/2, IO'B' = R, IO'O' = h$ .



• L'asse delle  $y$  è di simmetria; ne segue che  $x_G = 0$ .

• Sia  $S = S' \cup S''$  dove  $S'$  è formato dai due rettangoli di base  $a$  e altezza  $h$ , ed  $S''$  è la semicirconferenza delimitata dalle circonferenze di raggio  $R$  ed  $R/2$ .  
Per la proprietà distributiva del baricentro si ha:

$$m = m' + m''; \quad y_G = \frac{m' y_{G'} + m'' y_{G''}}{m}$$

$$S': m' = 2\rho a h; \quad y_{G'} = h/2$$

Perché per una generica corona circolare simmetrica rispetto a  $Oy$  e delimitata da circonferenze di raggi  $R$  ed  $r$  risulta:

$$m'' = \rho \frac{\pi}{2} [R^2 - r^2], \quad y_{G''} = \frac{4}{3\pi} \frac{[R^3 - r^3]}{[R^2 - r^2]} \Rightarrow S'': m'' = \rho \frac{3\pi}{8} R^2; \quad y_{G''} = h + \frac{14}{9\pi} R$$

In definitiva, si ottiene:

$$y_G = \frac{2ah^2 + \frac{3\pi}{8} R^2 \left[ h + \frac{14}{9\pi} R \right]}{2ah + \frac{3\pi}{8} R^2}$$

## • Momenti Statici



In un sistema piano, si definiscono momenti statici rispetto agli assi  $[S_x \text{ e } S_y]$  (o momenti di ordine 1):

$$m = \sum_{i=1}^n m_i$$

$$m = \int_B \rho(P) d\tau$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n m_i y_i = m y_G$$

$$S_x = \int_B \rho y d\tau = m y_G$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n m_i x_i = m x_G$$

$$S_y = \int_B \rho x d\tau = m x_G$$

I momenti di ordine 2 sono i momenti e i prodotti d'inerzia.

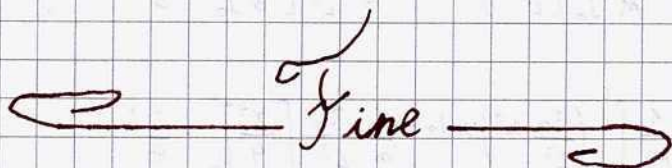
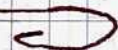
Ne segue che il baricentro è il punto in cui concentrare l'intera massa del sistema  $S$  per ottenere  $S_x$  e  $S_y$ .

Esempio: Determinare i momenti statici per i sistemi proposti nei due esempi precedenti.

asta: ①  $S_x = 0, S_y = \frac{2}{3} mL$       ②  $S_x = 0, S_y = \frac{3}{4} mL$

arco:  $S_x = \rho \left[ ah^2 + \frac{3\pi R^2}{8} \left( h + \frac{14}{9\pi} R \right) \right], S_y = 0$

La risoluzione è immediata poiché sono già noti massa totale e coordinate del baricentro; altrimenti occorre strutturare la definizione ed integrare!

 Fine 

Mechanica Razionale

prof.ssa Adolinda Marasco

17/12/2020

19/01/2021 - 30L