

① Algebra Geometria Vettoriale

Vettore: elemento di uno s. vett. $\left\{ \begin{array}{l} \text{modulo} \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{array} \right.$

\underline{u} vettori liberi \neq vettori applicati
(= se equipolenti) (= se equipolenti e stesso P)

Notazioni alternative



- \underline{u}
- $(P-T)$
- \underline{r} T/P
- \overrightarrow{TP}

Operazioni tra Vettori

- Somma: commutativa, associativa, $\underline{0}$ neutro (dim. grafica, norme da pitagora)
- Prodotto x scalare: $a\underline{u} : |a\underline{u}| = |a||\underline{u}| \Rightarrow \exists$ vettore opposto $-\underline{u}$, vettore differenza $\underline{u}-\underline{v}$
 $\text{vers } \underline{u} = a\underline{u} : a = \frac{1}{\|\underline{u}\|} \Rightarrow a \|\text{vers } \underline{u}\| = 1$

Componente di un vettore secondo una retta orientata:

$u_r = \underline{u} \cdot \underline{e} = \underline{u} \cdot \text{vers } \underline{r} = u \cos \varphi$



Se hai due vettori e due angoli, ~~non~~ il vettore somma ha modulo dal T. Carnot e direzione dal T. seni:
 $|\underline{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2 \cos \alpha}$
 $\frac{F}{\sin \delta} = \frac{F_1}{\sin \varphi}$

Vettore risultante: $\underline{R} = \sum_{i=1}^n \underline{u}_i \Rightarrow R_r = (\sum w_i)_r = \sum (w_i)_r$

Componenti cartesiane: individuano univocamente il vettore poiché si crea uno spazio affine numerico; si dimostra considerando $\underline{u} = \sum u_i \underline{e}_i$ e $\underline{v} = \sum v_i \underline{e}_i$ e imponendo $\underline{u} = \underline{v}$ (\underline{e}_i lin. ind...)
 In sist. ortogonale, $\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum u_i^2}$

Coseni direttori: coseni formati da retta di appl. con assi di riferimento \Rightarrow se $\|\underline{u}\| = 1$, $u_i = \cos \alpha_i$
 $\cos \alpha_i = \frac{u_i}{u}$

Prodotto Scalare: $\varphi \in [0, \pi]$; $\underline{u} \cdot \underline{v} = u_v v = u v u$ $\underline{u} \cdot \underline{v} \geq 0 \forall \underline{u}, \underline{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \underline{u}_i \cdot \underline{v}_j$
 $\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij}$

Prodotto vettoriale: $\underline{u} \times \underline{v} = \underline{w}$ $\underline{w} \perp \underline{u}, \underline{w} \perp \underline{v}$, $|\underline{w}| = |\underline{u} \times \underline{v}| = uv \sin \varphi$ Verso tale che $(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$ levogira
 terna levogira: per sovrapp. asse 1 a 2 ruotando su 3 con $\varphi < \pi$ si ruota a Sx.

In componenti cart: $\underline{u} \times \underline{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_1 - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \underline{e}_2 + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \underline{e}_3$
 $(\underline{u} \times \underline{v})_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} u_j v_k$ $\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } ijk \text{ pari } (1,2,3), (3,1,2) \\ -1 & \text{se } ijk \text{ dispari } (3,2,1), (2,1,3) \\ 0 & \text{se 2 indici uguali} \end{cases}$

Prod. misto: $\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w}$ Si fa prima prod. rett., ovviamente.

$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = |\underline{u} \times \underline{v}| \cdot w_{\perp} = \pm \text{Volume di solido di spigoli } \underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$
 \uparrow levo/destragira

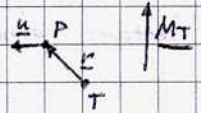
$\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

PROP CICLICA: $\underline{u} \times \underline{v} \cdot \underline{w} = \underline{w} \times \underline{u} \cdot \underline{v} = \underline{v} \times \underline{w} \cdot \underline{u} = 0 (\Leftrightarrow 2 \text{ paralleli}) \text{ o } \exists 0$

Momento Polare

È un VETTORE LIBERO dipendente dal POLO T:

$$\underline{M}_T = (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u} = \underline{u} \times (\underline{T}-\underline{P}) \quad (\underline{P}, \underline{u}), T \text{ polo}$$



$$|\underline{M}_T| = u \cdot |(\underline{T}-\underline{P})| \sin \alpha = b \cdot u$$

↳ distanza di T da retta appl. \underline{u}

↳ dato un vettore \underline{u} , $\underline{M}_T = \underline{M}_S$ se $b_T = b_S \Rightarrow$ proprietà dei momenti

Se $b = 0 \Rightarrow T \in r$ appl, $\underline{M}_T = \underline{0}$

↳ M_T non varia se polo sposti // retta appl. o $\underline{u} //$ retta appl.

Var. momento al var. polo: $\underline{M}_T = \underline{M}_0 + \underline{u} \times (\underline{T}-\underline{O})$

$$\text{Dim: } \underline{M}_T = (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u} = \underline{r}_P \times \underline{u} - \underline{r}_T \times \underline{u} = \underline{M}_0 + \underline{u} \times \underline{r}_T$$

Analogo per $\underline{M}_T = \underline{M}_S + \underline{u} \times (\underline{T}-\underline{S})$ ma con $(\underline{P}-\underline{T}) = (\underline{P}-\underline{S} + \underline{S}-\underline{T})$

Dim con var. momenti o con $\underline{M}_T - \underline{M}_0 = \underline{0}$

Momento Risultante di un Sistema

$$\mathcal{S} = \{(\underline{P}_i, \underline{u}_i), i=1, \dots, n\}$$

$$\underline{M}_T = \sum_{i=1}^n (\underline{P}_i - \underline{T}) \times \underline{u}_i = \sum \underline{r}_i \times \underline{u}_i - \underline{r}_T \times \underline{u}_i$$

Per legge var. momento, $\underline{M}_T = \underline{M}_0 + \underline{R} \times (\underline{T}-\underline{O})$

T. Varignon: momento \mathcal{S} appl. stesso punto = momento \underline{R} nel punto

Se $\underline{R} = \underline{0}$, \underline{M} non dipende dal polo e viceversa (coppie di forze)

Campi Vettoriali: $\mathcal{S} = \{(\underline{P}, \underline{u}(\underline{P})) : \underline{P} \in \Omega\} \Rightarrow$ applicazione puntuale di vettori (es. carichi distrib.)

$$\underline{R} = \int_{\Omega} \underline{u}(\underline{P}) d\mathcal{E} \quad \underline{M}_T = \int_{\Omega} (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u}(\underline{P}) d\mathcal{E}$$

Campi Notevoli	Uniforme $\underline{u} = -q \underline{j}$	Triangolare $\underline{u} = -\frac{q_0 x}{L} \underline{j}$	$x_A = 0$ $\Omega = AB, x_B = L$
----------------	--	---	-------------------------------------

MOMENTO ASSIALE

\mathcal{S} vett. appl., risultante \underline{R} , $\underline{r} = \text{vers } \underline{R} = \text{vers } r$ retta orientata

$$\underline{M}_T \cdot \underline{r} = \underline{M}_S \cdot \underline{r} \quad \forall T, S \in r \quad M_r = \underline{M}_T \cdot \underline{r} \quad \text{Momento assiale}$$

Esempio: $\pi \perp \underline{r}$, $\underline{P} \in \pi$
 $(\underline{P}, \underline{u}) \in \pi \Rightarrow \underline{u} \perp \underline{r} \Rightarrow M_r = \underline{0} \quad (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u} \cdot \underline{r} = \pm b |\underline{u}|$
 $(\underline{P}, \underline{u}) \notin \pi \Rightarrow \underline{u} = \underline{u}_\parallel + \underline{u}_\perp, \underline{u}_\parallel$ dà contributo nullo $\Rightarrow M_r = (\underline{P}-\underline{T}) \times \underline{u}_\perp \cdot \underline{r}$

Il momento assiale coincide per tutti i vettori aventi la stessa proiezione su π
 La componente $\parallel \underline{r}$ non contribuisce!

Invariante Scalare

$$I = \underline{M_T} \cdot \underline{R}$$

$$M_T = M_s + R \times (T - S) \Rightarrow M_T \cdot R = M_s \cdot R + \overbrace{R \times (T - S) \cdot R}^0$$

Osservazione: È costante la componente ^{parallela} del momento ^{lungo} ogni retta // R (Momento Assiale)

$$\underline{M_T} = \frac{L}{\parallel R} + \frac{N_T}{\perp R} \Rightarrow I = \underline{M_T} \cdot \underline{R} = (L + N_T) \cdot R = L \cdot R \Rightarrow L \text{ è invariante rispetto a } \mathcal{O} \in \mathcal{N}_1 \text{ retta}$$

$\Rightarrow \underline{M_T}$ dipende (in $\uparrow \uparrow$) N_T .

Asse Centrale È la retta dei poli rispetto ai quali il momento è minimo ($\underline{M_T} = \underline{L}$)

$$\mathcal{A} = \{P(x, y, z) : \underline{M_T} = \min \{ \underline{M_P} \} \} \Rightarrow \{ P \in T : \underline{N_T} = \underline{0} \}$$

Essa può essere determinata da 2 equazioni:

① Sia r una retta // ad R , Ox_1, x_2, x_3 riferimento e $\underline{R} = R \underline{e}_3$; sia $P = (x, y, z)$.

Allora, $\underline{M_P} = \underline{M_O} + R \times (P - O) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{M_P} = \underline{M_O} + \begin{vmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 0 & 0 & R_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \begin{cases} M_{P_1} = M_{O_1} - y R_3 \\ M_{P_2} = M_{O_2} + x R_3 \\ M_{P_3} = 0 \end{cases}$$

Se $\exists Q: \underline{M_Q} = \underline{0}$, \mathcal{A} è la retta per $Q \parallel R$

$$\underline{M_P} = \underline{L} + \underline{N_T}; \quad \underline{N_T} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} M_{O_1} - y R_3 = 0 \\ M_{O_2} + x R_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{M_{O_2}}{R_3} \\ y = \frac{M_{O_1}}{R_3} \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A} = \left\{ (x, y, z) : x = -\frac{M_{O_2}}{R_3}, y = \frac{M_{O_1}}{R_3}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Si definisce **CENTRO DEL SISTEMA** il punto con terza coordinata costruita similmente solitamente al punto con momento nullo.

② Siano noti risultante e momento risultante (non conviene fissare un nuovo riferimento)

$$\underline{M_T} = \underline{M_O} + \underline{R} \times (T - O) \xrightarrow{\underline{M_T} = \underline{L} + \underline{N_T}} \underline{L} + \underline{N_T} = \underline{L} + \underline{N_O} + \underline{R} \times (T - O) \Leftrightarrow \underline{N_T} = \underline{N_O} + \underline{R} \times (T - O)$$

$$P \in \mathcal{A} \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \underline{N_P} = \underline{0} \Rightarrow \underline{N_O} + \underline{R} \times (P - O) = \underline{0} \Rightarrow \underline{N_O} = (P - O) \times \underline{R} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{N_O} \times \underline{R} = [(P - O) \times \underline{R}] \times \underline{R} \Rightarrow \underline{N_O} \times \underline{R} = [(P - O) \cdot \underline{R}] \underline{R} - [\underline{R} \cdot \underline{R}] (P - O) \neq \underline{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (P - O) = \frac{[(P - O) \cdot \underline{R}] \underline{R}}{R^2} - \frac{\underline{N_O} \times \underline{R}}{R^2} = \frac{2 \underline{R} + \underline{R} \times \underline{N_O}}{R^2} \Rightarrow (P - O) = \frac{2 \underline{R} + \underline{R} \times \underline{M_O}}{R^2} \quad (\underline{L} \times \underline{R} = \underline{0})$$

$$\text{Dunque, } \mathcal{A} = \left\{ P = (x_1, x_2, x_3) : (P - O) = \frac{2 \underline{R} + \underline{R} \times \underline{M_O}}{R^2} \right\}$$

Se fissiamo un punto $Q: (Q - O) = \frac{\underline{R} \times \underline{M_O}}{R^2}$, $(P - O) = \frac{2 \underline{R} + \underline{R} \times \underline{M_O}}{R^2} \Rightarrow (P - Q) = \frac{2 \underline{R}}{R} \Rightarrow \underline{\lambda} = \frac{P - Q}{R}$

$$\text{E quindi } \mathcal{A} = \left\{ P(x_1, x_2, x_3) : \frac{x_1 - x_1'}{R_1} = \frac{x_2 - x_2'}{R_2} = \frac{x_3 - x_3'}{R_3} = \underline{\lambda} \right\}$$

$$\underline{\lambda} \in \mathbb{R}$$

Sistemi Piani

S è piano se i vettori appartengono ad uno stesso piano

$$S = \{ (P, u(P)) : P \in \pi, u(P) \parallel \pi \} \Rightarrow \boxed{I_s = 0} \quad (R \parallel \pi, M_T \perp \pi \quad \forall T)$$

$$M_T = \int_{\pi} (P-T) \times \underline{u}(P) \, d\tau$$

$$\underline{R} = R_x \underline{i} + R_y \underline{j} \quad \underline{M}_O = M_O \underline{k}$$

Sistemi Equilibrati

Anche detti equivalenti a \mathcal{O} , Sono sistemi in cui $\underline{R} = \mathcal{O}$ e $\underline{M}_O = \mathcal{O} \quad \forall O$

In generale implica 6 incognite, in un sistema piano sono solo 3.

Un qualunque sistema di 3 vettori risulta equilibrato \Leftrightarrow Sono complanari e concorrenti in uno stesso punto $[u]$

$$\begin{matrix} (A, \underline{u}) \\ (B, \underline{w}) \\ (C, \underline{v}) \end{matrix}$$

$$\underline{M}_A = (B-A) \times \underline{w} + (C-A) \times \underline{u} \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{O} = (B-A) \times \underline{w} + (C-A) \times \underline{u} \\ \mathcal{O} = (C-A) \times \underline{v} + (B-A) \times \underline{u} \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{complanari}$$

$$\underline{M}_B = (A-B) \times \underline{u} + (C-B) \times \underline{v} \Rightarrow \mathcal{O} = (A-B) \times \underline{u} + (C-B) \times \underline{v} \Leftrightarrow \text{tutti complanari}$$

$$\Rightarrow \underline{u}, \underline{w}, \underline{v} \in \pi_{ABC}$$

Se $\underline{u} \parallel \underline{w} \parallel \underline{v}$ concorrono in punto improprio e $\underline{M} = \mathcal{O}$

Altrimenti $\in T = r_u \cap r_v$

$$\underline{M}_T = (B-T) \times \underline{w} = \mathcal{O} \Leftrightarrow (B, \underline{w}) \text{ concorre in } T$$

\rightarrow Da cui segue che un sistema è equilibrato se ha Risultante nulla e $\exists T : \underline{M}_T = \mathcal{O}$

\rightarrow Se \exists 3 punti non allineati con momenti polari nulli, il sistema è equilibrato:

\Leftrightarrow ovvio

$$\Leftrightarrow \begin{cases} M_A = M_C + R \times (A-C) = \mathcal{O} \\ M_B = M_C + R \times (B-C) = \mathcal{O} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_A = M_C \Leftrightarrow R \perp AC \\ M_B = M_C \Leftrightarrow R \perp BC \end{cases} \Rightarrow R = \mathcal{O} \Rightarrow \underline{M}_T = \overbrace{M_A}^{\mathcal{O} \text{ per } H_p} + \mathcal{O} = \mathcal{O} \quad \forall T$$

\rightarrow Se \exists due punti con $\underline{M}_i = \mathcal{O}$ e $\underline{R} \cdot \text{retta punti} = \mathcal{O}$, il sist. è eq.

\Leftrightarrow Ovvio

$$\Leftrightarrow S = r_{AB}, \text{ vers } \underline{s} \Rightarrow R \cdot \underline{s} = \mathcal{O} \Rightarrow \underline{R} \perp \underline{s}$$

$$M_A = \underline{M}_B + R \times (A-B) = \mathcal{O} \Leftrightarrow R \times (A-B) = \mathcal{O} \Rightarrow \underline{R} = \mathcal{O}$$

Sistemi Equivalenti

Generalizzazione dei sistemi equilibrati: $S \equiv S' \Leftrightarrow \underline{R} = \underline{R}', \underline{M}_T = \underline{M}'_T \quad \forall T$

• $S \equiv S' \Leftrightarrow \underline{R} = \underline{R}', \exists O: \underline{M}_O = \underline{M}'_O$

(\Leftarrow): $\begin{cases} \underline{M}_T = \underline{M}_{OT} + \underline{R} \times (T-O) \\ \underline{M}'_T = \underline{M}'_{OT} + \underline{R}' \times (T-O) \end{cases} \Rightarrow \underline{M}_T - \underline{M}'_T = \underline{R} \times (T-O) - \underline{R}' \times (T-O) = \overbrace{(\underline{R} - \underline{R}') \times (T-O)}^{0 \text{ per Hp.}} = \underline{0} = \underline{M}_O - \underline{M}'_O$

• $S \equiv S' \Leftrightarrow \exists A, B, C \text{ non all. tale che } \underline{M}_A = \underline{M}'_A, \underline{M}_B = \underline{M}'_B, \underline{M}_C = \underline{M}'_C$

Stessa dim

• $S \equiv S' \Leftrightarrow \exists A, B: A \underline{M}_A = \underline{M}'_A, \underline{M}_B = \underline{M}'_B, \underline{R} \cdot s = \underline{R}' \cdot s \text{ con } s \text{ retta per } AB$

Stessa dim.

△ Qualunque sia S , è equivalente a una coppia di momento \underline{M}_O + un vettore applicato \underline{R} .

• $S \equiv \underline{R}, \underline{M}_O$

$S' = \{(O, \underline{R}), (A, -\underline{u}), (B, \underline{u})\}$

$\underline{R}' = \underline{R} + \underline{u} - \underline{u} = \underline{R}$

$\Rightarrow S \equiv S'$

$\underline{M}'_O = (A-O) \times \underline{u} + \underline{u} \times (B-O) = \underline{M}_O$

In particolare, se $I = 0$:

$S \equiv \underline{R}$ applicato in A o una coppia di momento \underline{M}_O ($\underline{R} = \underline{0}$) $\Leftrightarrow I = 0$

(\Rightarrow) evidente (uno dei due è nullo $\Rightarrow I$ è nullo)

(\Leftarrow) $I = 0 \rightarrow \underline{R} \neq \underline{0} \Rightarrow \exists A: \forall P \in A, \underline{M}_P \parallel \underline{R}$

$I = 0 \Rightarrow \underline{M}_O \cdot \underline{R} = \pm M_P \cdot \underline{R} = 0 \Leftrightarrow \underline{M}_P = \underline{0} \Rightarrow S \equiv \{(P, \underline{R})\}$

$\underline{R} = \underline{0} \Rightarrow$ una qualunque coppia di momento $\underline{M}_O \equiv S$

Sistemi di Vettori Paralleli

$$S = \{(P_i, \underline{u}_i) : \underline{u}_i = f_i \underline{r}, i=1, \dots, n\} \quad [f_i = u_{i,r} = \pm u_i]$$

$$R = f \underline{r} \quad f = \sum_i f_i = \sum_i u_{i,r} = R_r = \pm |R|$$

Risulta evidente che $\underline{I} = \underline{M}_O \cdot R = \mathcal{O} \Rightarrow S$ equivale a $\left\{ \begin{array}{l} \text{coppia } (R = \mathcal{O}) \\ \text{Risultante applicato nell'asse c.le } (R \neq \mathcal{O}) \end{array} \right.$

Supponiamo $R \neq \mathcal{O}$, $\underline{r} \parallel \underline{e}_3$ in una terna $Ox_1x_2x_3$; sia $(P_i - O) = x_{i1} \underline{e}_1 + x_{i2} \underline{e}_2 + x_{i3} \underline{e}_3$

$$\text{Dunque, } \underline{M}_O = \sum_i (P_i - O) \times f_i \underline{e}_3 = \overbrace{-\sum_i x_{i1} f_i \underline{e}_2}^{\text{Mod}} + \overbrace{\sum_i x_{i2} f_i \underline{e}_1}^{\text{Mod}}$$

$$\underline{R} = \sum_i f_i \underline{e}_3 = f \underline{e}_3$$

Ricordando che $\mathcal{A} = \{(x_1, x_2, x_3) : -\frac{\text{Mod}_2}{R_3} = x_1, x_2 = \frac{\text{Mod}_1}{R_3}, x_3 \in \mathbb{R}\}$

Abbiamo che $P \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \boxed{x_1 = \frac{1}{f} \sum_i x_{i1} f_i, x_2 = \frac{1}{f} \sum_i x_{i2} f_i}$ Da cui $C \in \mathcal{A}$,

$$z_c = \frac{\sum_i x_{i3} f_i}{f}$$

$$\underline{r}_c = \frac{1}{f} \sum_i f_i \underline{r}_i \longrightarrow \text{Analogo in } \frac{1}{f} \int_{\Omega} f(P) \underline{r}_P d\Omega$$

Si osserva che $S = \{(P_i, \underline{u}_i) : \underline{u}_i = f_i \underline{r}\}$ e $S' = \{(P_i, a_i \underline{u}_i) : \underline{u}_i = a_i f_i \underline{r}\}$ hanno lo stesso centro:

$$\underline{r}_c = \frac{1}{f} \sum_i f_i \underline{r}_i$$

$$\underline{r}'_c = \frac{1}{a f} \sum_i a_i f_i \underline{r}_i$$

② Geometria delle Masse

Baricentro

$$S = \{(P_i, m_i), i=1, \dots, n\}$$

(P_i, m_i) punti massa, $m = \sum_i m_i =$ massa del sistema

Fissiamo una terna $Oxyz$, sia $\underline{r}_i = \overrightarrow{OP_i}$.

$$\text{Baricentro} \equiv G: \underline{r}_G = \frac{1}{m} \sum_i m_i \underline{r}_i$$

Dipende solo dalle masse e posizioni dei punti, non dal riferimento:

$$\underline{r}_G = \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \underline{r}_i \quad \underline{r}'_G = \overrightarrow{O'G'} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \underline{r}'_i$$

Intatti

$$G \equiv G' \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GP_i} = m \overrightarrow{GG'} = \mathcal{O}$$

$$m \overrightarrow{GG'} = m(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'}) = m(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'G'} - \overrightarrow{OG}) =$$

$$= m \overrightarrow{OO'} + \sum_i m_i \overrightarrow{O'P_i} - \sum_i m_i \overrightarrow{OP_i} = m \overrightarrow{OO'} + \sum_i m_i (\overrightarrow{O'P_i} - \overrightarrow{OP_i}) = m \overrightarrow{OO'} + m \overrightarrow{O'O} = \mathcal{O} \Leftrightarrow G \equiv G'$$

Il baricentro gode di prop. analoghe ai centri di sistemi di vettori paralleli:

• Due sistemi aventi masse parzialmente differenti secondo uno stesso scalare hanno lo stesso baricentro

In particolare, un sistema di vettori paralleli ~~non~~ concordi aventi moduli proporzionali alle masse m_i ha centro coincidente col baricentro del sistema $\Rightarrow CM \equiv BG$

In un sistema continuo, si considera la densità di massa $\rho(P)$, proprietà puntuale

massa totale
momento di ord. 0 $\leftarrow m(C) = \int_C \rho(P) d\tau \Rightarrow \underline{r}_G = \frac{1}{m} \int_C \rho(P) \underline{r}(P) d\tau$

Se ρ è costante (corpo omogeneo), poiché $m = \rho \text{mis} B \equiv \rho B$ si può scrivere $\underline{r}_G = \frac{1}{B} \int_B \underline{r} d\tau$

Proprietà dei baricentri:

① $P \in \tau \forall P \in S \Rightarrow G \in \tau$ es. $\tau \equiv Oxy \Rightarrow P_i \equiv (x_i, y_i, 0) \Rightarrow z_G = 0$

② $P \in r \Rightarrow G \in r$

③ G appartiene a ogni piano diametrale coniugato di S e dunque a ogni piano di simmetria

π : Piano diametrale coniugato alla direzione della retta r , individuata dal versore \underline{u} :

$$\forall P \in S: P \notin \pi \exists \hat{P} \in S: m_P = m_{\hat{P}}, \overline{P\hat{P}} \parallel \underline{u}, \exists T: \overline{PT} = \overline{\hat{P}T} \in \pi$$

$$[\rho_P = \rho_{\hat{P}}]$$

Se $\underline{u} \perp \tau$, il piano è di simmetria materiale

④ Prop. Distributiva: * Se $S = S' \cup S''$, $m \underline{r}_G = m' \underline{r}'_G + m'' \underline{r}''_G \Rightarrow G \equiv$ baricentro di $\{(G_i, m_i), i=1, \dots, n\}$

Analogamente, se $S = S' - S''$, $\underline{r}_G = \frac{m' \underline{r}'_G - m'' \underline{r}''_G}{m' - m''}$

$$* m \underline{r}_G = \int_B \rho \underline{r} d\tau = \sum_i \int_{B_i} \rho \underline{r} d\tau = \sum_i \left(\int_{B_i} \rho d\tau \right) \cdot \underline{r}_{Gi} = \sum m_i \underline{r}_{Gi}$$

Momenti Statici

momenti di ordine 1

In un SISTEMA PIANO, si def. momenti statici rispetto agli assi x/y :

$$S_x = \sum_i m_i y_i \left[\int_B \rho y d\tau \right] = m y_G ; \quad S_y = \sum_i m_i x_i \left[\int_B \rho x d\tau \right] = m x_G$$

\Rightarrow Il baricentro è il punto nel quale si può concentrare la massa del sistema per ottenere S_x e S_y

Momenti d'Inerzia

momenti di ordine 2

Dato un sistema discreto di punti materiali e una retta s , il I_s rispetto alla retta s è dato da:

$$I_s = \sum m_i d_i^2 \quad d_i = d(P_i, s) \quad I_s \geq 0, \quad I_s = 0 \Leftrightarrow P_i \in s \forall i$$

Fissato $Oxyz$, si ha $I_x = \sum m_i (y_i^2 + z_i^2)$; In un sistema piano $I_x = \sum m_i y_i^2$; $I_z = I_x + I_y$

[Analogo]

I_y analog.

Per i mom. inerz. vale la prop. distributiva: $S = S' \cup S''$, $I_s = I_{s'} + I_{s''}$

Δ terna baricentrale \Rightarrow
 $\Rightarrow \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \dots$

$$I_s = \int_C M(P) d^2(P) dC = \int_{C'} M(P) d^2(P) dC + \int_{C''} M(P) d^2(P) dC = I_{s'} + I_{s''}$$

Teorema degli Assi //

Oxyz, G ∈ AZ terne con assi // e concordi $\Rightarrow I_x = I_G + m d_{G,x}^2$ $d_{G,x}^2 = (y_G^2 + z_G^2)$

Analogo per gli altri

Dim: Sfruttiamo che $\forall P \in S$, $P = (x, y, z) = (\xi + x_G, \eta + y_G, \zeta + z_G) \Rightarrow x = \xi + x_G$

$$Es \ I_x = \int_C M \cdot (y^2 + z^2) dC = \int_C M \cdot [(\eta + y_G)^2 + (\zeta + z_G)^2] dC \Rightarrow$$

$$\int_C \xi dC = \xi_G = 0$$

$$\Rightarrow I_x = \int_C M (\eta^2 + 2\eta y_G + y_G^2 + \zeta^2 + 2\zeta z_G + z_G^2) dC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_x = \int_C M (\eta^2 + \zeta^2) dC + \int_C M (y_G^2 + z_G^2) dC + \int_C M (2\eta y_G + 2\zeta z_G) dC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_x = I_G + m d_{G,x}^2 + \underbrace{2y_G(m\eta_G) + 2z_G(m\zeta_G)}_{\leftarrow 0: \eta_G = \zeta_G = 0} \quad \boxed{QED}$$

Teorema di Huygens-Steiner

Sia s_0 una retta per il baricentro di S ed s una retta ad essa parallela. Allora:

$$I_s = I_{s_0} + m d_G^2 \quad d_G = d(G, s) \equiv d(s, s_0)$$

Considerando un'alteriore retta s' , si ha che:

$$I_{s'} = I_s + m d_s'^2 = I_s + m (d_G'^2 - d_G^2) \quad d_G' = d(G, s')$$

Dim analogo, si osserva che a s_0 compete I minimo; concentrando la massa in G si commette un errore per difetto nel computo di I_s (eccetto se $P_i \in s_0 \forall i$)

Prodotti d'Inerzia

momenti di ordine 2

Terna Oxyz

$$I_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i \quad \vee \quad I_{xy} = \int_C \rho xy dC \quad \text{analogo per gli altri}$$

• In un S piano, $I_{xz} = I_{xy} = 0$

• Vale la proprietà distributiva: $S = S' \cup S'' \Rightarrow I_{xy} = I_{xy'} + I_{xy''}$

• Vale il Teorema degli assi paralleli: $I_{xy} = I_{\xi\eta} + m x_G y_G$ con analogo dimostrazione

• Logicamente, se $G \in Ox \Rightarrow I_{xy} = I_{\xi\eta}$ etc.

Momenti Principali d'Inerzia

coseni direttori di s

Oxyz, $S = \{ (P_i, m_i), i=1, \dots, n \}$, $s: O \in s$, $s = \text{vers } \underline{s} = (\alpha, \beta, \gamma)$

Consideriamo $\underline{r}_i \equiv (P_i - O)$ e sia $P_i s$ la proiezione di P su s .

$$|\underline{r}_i|^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2; \quad |OP_i s|^2 = (r_i \cdot \underline{s})^2 = (x_i \alpha + y_i \beta + z_i \gamma)^2$$

$$d_i^2 = |\underline{r}_i|^2 - |OP_i s|^2 = x_i^2(1-\alpha^2) + y_i^2(1-\beta^2) + z_i^2(1-\gamma^2) - 2x_i y_i \alpha \beta - 2y_i z_i \beta \gamma - 2z_i x_i \gamma \alpha$$

Possiamo scrivere I_s in funzione di \underline{s} :

$$I_s = \sum m_i d_i^2 = I_x \alpha^2 + I_y \beta^2 + I_z \gamma^2 - 2I_{xy} \alpha \beta - 2I_{yz} \beta \gamma - 2I_{zx} \gamma \alpha$$

Consideriamo il luogo dei punti aventi $\frac{r_P}{\sqrt{I_s}} = \frac{\underline{s}}{\sqrt{I_s}}$ ($x = \frac{\alpha}{\sqrt{I_s}}$): sostituendo questa condizione a x, y e z otteniamo l'equazione dell'Ellissoide [Centrale] d'Inerzia E_0 [$G=O$]

$$E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy - 2I_{yz} yz - 2I_{zx} zx = 1$$

Si dicono Mom. Princ. I_α i momenti relativi agli assi di E_0 (assi princ. in), che hanno I_s [max]

Supponendo $P \equiv E_0 \cap s$, $\frac{|r_P|}{\sqrt{I_s}} = \frac{1}{\sqrt{I_s}} \Rightarrow I_s = \frac{1}{|r_P|^2} \Rightarrow$ asse max. momento min.

Proprietà:

- Se $\exists s: I_s = 0, P_i \in s \forall i \Rightarrow$ se Oxyz, $\underline{s} \parallel s, O \in s$ allora $I_x = I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$
- E_0 degenera in un cilindro: $I_x x^2 + I_y y^2 = 1, I_x = I_y = \sum m_i z_i^2$

* Se z è asse di simmetria materiale (princ. inerzia), $\pi = xy$ è di simmetria materiale, S è piano su xy si ha che: $(x, y, z) \in E_0 \Rightarrow (x, y, -z) \in E_0$ $I_{xz} = I_{yz} = 0$ $I_{xz} = I_{yz} = 0 (\Leftrightarrow) z$ è princ. d'inerzia $I_z = I_x + I_y!$

$$E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2I_{xy} xy = 1$$

* $G \in \pi \Rightarrow E_G: I_\xi \xi^2 + I_\eta \eta^2 + I_z z^2 - 2I_{\xi\eta} \xi\eta = 1$ * questa si dice che un asse è princ. \Leftrightarrow suoi prodotti d'inerzia sono nulli

• Se due assi (Oxyz) sono princ. in, lo è anche il terzo:

$$\forall x \text{ princ. in} \Leftrightarrow I_{xy} = I_{xz} = 0; \text{ analogo su } y \Rightarrow \text{idem su } z$$

• Una terna è princ. in $\Leftrightarrow I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$ e in tal caso E_0 assume la forma canonica:

$$E_0: I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \quad \text{se } I_x = I_y, \text{ si parla di giroscopi}$$

Determinazione degli Assi Principali d'Inerzia in un SISTEMA PIANO

$\pi = \mathcal{O}xy \Rightarrow 2$ princ. inerzia \Rightarrow Basta trovare 2 assi d'inerzia nel piano.

Consideriamo una retta $s \in \pi \Rightarrow \underline{s} = (\alpha, \beta, 0) = (\cos \varphi, \sin \varphi, 0)$ $\varphi = \hat{s}$ con x

$$I_s = I_x \cos^2 \varphi + I_y \sin^2 \varphi - 2I_{xy} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$E_0 \cap \pi: I_x x^2 + I_y y^2 - 2xy I_{xy} = 1 \quad \forall \mathcal{O} \in \pi \quad (\text{se } I_x = I_y \text{ è un cerchio})$$

- Se x e y sono princ. in. l'ellisse assume forma canonica e $I_{xy} = 0$
- Se non sono princ. in., si trovano gli assi princ. in. r_1 ed r_2 imponendo che ad essi competano momento d'inerzia min/max \Rightarrow sono punti di stazionarietà di $I_s(\varphi)$; derivando rispetto a φ otteniamo:

$$\frac{\partial I_s}{\partial \varphi} = (I_x - I_y) \sin 2\varphi + I_{xy} \cos 2\varphi = 0 \quad \rightarrow \text{staz.}$$

$$\bullet \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\bullet I_x = I_y \Rightarrow \cos 2\varphi = 0$$

$$\bullet I_x \neq I_y \wedge \cos 2\varphi \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2\varphi = -\frac{2I_{xy} \cos 2\varphi}{I_x - I_y} \Rightarrow \operatorname{tg} 2\varphi = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

E risulta sempre a meno della periodicità $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$

Ellisse di Culmann

Definito il raggio d'inerzia $\rho = \sqrt{\frac{I_s}{m}}$, pari alla distanza da s cui concentrare la massa per avere I_s ,

Si consideri un SISTEMA CONTINUO PIANO e si definiscano i due raggi d'inerzia:

$$\rho_x = \sqrt{\frac{I_x}{m}}, \quad \rho_y = \sqrt{\frac{I_y}{m}}$$

Si definisce Ellisse di Culmann la conica di equazione $\frac{x^2}{\rho_y^2} + \frac{y^2}{\rho_x^2} = 1$

Antipolarità

È un'applicazione tra punti e rette del piano (tranne G e le rette per G) tale che:

$$A(x_A, y_A) \rightarrow r_A: \frac{x_A}{\rho_y^2} x + \frac{y_A}{\rho_x^2} y + 1 = 0 \quad \forall A \neq G$$

$$r: px + qy + 1 = 0 \rightarrow A(x_A, y_A): x_A = p \rho_y^2, y_A = q \rho_x^2 \quad \forall r: G \notin r$$

r "retta antipolare", A "antipolo"

Si nota che antipolo e antipolare corrispondenti si trovano su bande opposte rispetto al Baricentro.

Vale il Teorema di Reciprocità: Se A e B sono gli antipoli delle rette r_A ed r_B ,

$$A \in r_B \Leftrightarrow B \in r_A$$

Ne seguono due importanti proprietà:

- Sia A l'antipolo della retta α , allora ogni retta per A avrà antipolo su α
- Gli antipoli di un fascio di rette parallele appartengono alla stessa retta r_G passante per il baricentro, detta diametro coniugato del fascio

Il diametro coniugato si costruisce partendo dalla retta del fascio tangente all'ellisse di Culmann e congiungendo il punto di tangenza con G .

Segue un'evidente e deducibile estensione dell'Antipolarità a G e le rette per G :

- r_G ha antipolo P_{r_G} coincidente con la direzione delle rette del fascio
- l'antipolare di G è la retta impropria

Definite due rette a e b dello stesso fascio di rette $\parallel \Rightarrow$ gli antipoli A e B e stesso diametro (punti coniugati nell'antipolarità). Si ha che:

$$|BG| \cdot |AG| = |\text{costante}|, \text{ dipendente dal diametro coniugato}$$

Nocciolo Centrale d'Inerzia

[In un sistema CONTINUO PIANO]

È il luogo dei punti degli antipoli rispetto all'ellisse di Culmann delle rette che NON TAGLIANO IL SISTEMA \Rightarrow antipoli delle rette tangenti/esterne ad S .

Si dimostra che:

- $G \in$ Nocciolo
- Antipoli delle rette $\in X$
- X è sempre un dominio convesso
- ∂X è individuata dagli antipoli delle rette che hanno qualche punto in comune con S senza intersecarlo.

③ Cinematica del Punto Materiale

Studia la geometria del moto e i possibili moti (non si relaziona alle cause del moto)

Punto materiale: $(P, m) \Rightarrow$ massa.

I: Fissare un riferimento, spesso ortonormale.

II: Grandezze fondamentali: posizione (raggio vettore di P) $\Rightarrow P = (x_i) : \overset{\text{eq. traiettoria}}{x_i = x_i(t)} \quad i=1,2,3; t \in \mathbb{R}$
eq. finite del moto

$$\underline{r}_P = \underline{r}_P(t) = x_1(t) \underline{e}_1 + x_2(t) \underline{e}_2 + x_3(t) \underline{e}_3, \quad t \in \mathbb{R}$$

Nella modellizzazione cinematica, le curve che rappresentano la traiettoria vanno considerate almeno biregolari: in questo modo, derivando le eq. finite del moto si ottengono velocità e accelerazione vettoriali.

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}}_P(t) = \dot{x}_1(t) \underline{e}_1 + \dot{x}_2(t) \underline{e}_2 + \dot{x}_3(t) \underline{e}_3$$

$$\underline{a} = \ddot{\underline{r}}_P(t)$$

Considerando le traiettorie, possiamo strutturare un parametro diverso dal tempo che permette di scindere l'analisi della geometria del moto dai suoi aspetti intrinseci: si fissa un'origine sulla traiettoria, e un verso; il valore assoluto dell'ascissa curvilinea sarà pari alla lunghezza dell'arco descritto dal punto P.

Se P è in movimento, $s = s(t) \Rightarrow$ se si conosce la legge funzionale di P al variare di s (traiettoria) e quella di s al variare di t (legge oraria) il moto è completamente descritto.

$$\underline{r}_P(s) = x_1(s) \underline{e}_1 + x_2(s) \underline{e}_2 + x_3(s) \underline{e}_3 \quad \text{eq. della traiettoria}$$

$$\text{Se } s = s(t), \quad \underline{r}(t) = \underline{r}(s(t)) = x_1(s(t)) \underline{e}_1 + x_2(s(t)) \underline{e}_2 + x_3(s(t)) \underline{e}_3 \quad \text{legge oraria}$$

Consideriamo $\frac{d\underline{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\underline{r}(s+\Delta s) - \underline{r}(s)}{\Delta s} = \underline{r}'(s)$ graficamente si osserva che è tangente alla traiettoria con verso delle s crescenti.

Si dimostra inoltre che $\underline{t}(s) = \underline{r}'(s)$ è un versore, detto versore della tangente principale (Utilizzato per costruire una terna di riferimento locale sulla traiettoria, detta Triedro di Frenet).

$\underline{t}(s)$ è impiegato inoltre in un'espressione fondamentale della velocità, che lega \underline{v} a v. scalare dimostrando l'efficacia dell'ascissa curvilinea nel modellizzare moti di natura diversa (v cost. in modulo/direzione)

$$\underline{v} = \dot{s} \underline{t} \quad \dot{s}(t) \text{ velocità scalare} = |\underline{v}(t)|$$

Curvatura e raggio di curvatura

Consideriamo una generica traiettoria e i versori $\underline{t}(s), \underline{t}(s+\Delta s)$; le loro rette di appl. formano un angolo, detto angolo di contingenza $\Delta \varphi$.

$$\text{Si definisce curvatura } c(s) : \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}; \quad \text{raggio di curvatura } R(s) = \frac{1}{c(s)}$$

In una circonferenza risulterà $c(s) = \frac{1}{a}, R(s) = a$.

La curvatura è importante nella definizione dell'accelerazione. Infatti:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(r'(s) \cdot \dot{s}(t))}{dt} = \ddot{s}(t) + \dot{s}^2 \underline{t}' = \ddot{s} \underline{t} + \dot{s}^2 \underline{t}'$$

$\underline{t}(s)$ è un versore $\Rightarrow \underline{t}(s) \cdot \underline{t}(s) = 1 \xrightarrow{\frac{d(\cdot)}{ds}} 2\underline{t}'(s) \cdot \underline{t}(s) = 0 \Rightarrow \underline{t}'(s) \perp \underline{t}(s)$

$\underline{t}'(s)$, coincidente con $\ddot{r}(s)$, è ortogonale a \underline{t} . Indicato con $\underline{n}(s)$ il suo versore, detto normale principale, si ha che:

$$\underline{t}'(s) = \left| \frac{r''(s)}{R(s)} \right| \underline{n}(s) = \frac{1}{R(s)} \underline{n}(s) \Rightarrow \underline{t}'(s) = \frac{\underline{n}(s)}{R(s)} \quad \text{I FORMULA DI FRÉNET}$$

\hookrightarrow esprime la variazione in direzione di \underline{t}

E, dunque, $\underline{a}(s) = \ddot{s} \underline{t} + \frac{\dot{s}^2}{R(s)} \underline{n}(s)$

Oss: l'accelerazione è scissa in componenti normale e tangenziale.

⚠ Oss. su moti con a pr. normale/eq.

Per completare il Triedro di Frénet, consideriamo il versore della binormale principale $\underline{b}(s)$:

$$\underline{b}(s) = \underline{t}(s) \times \underline{n}(s)$$

Abbiamo definito una terna di riferimento locale per ogni punto della curva.

Moti del Punto Materiale

Uniforme	Unit. Var. / Unit. Vario	Unit. Vario
$\ddot{s}(t) = 0 \quad \forall t$		$\ddot{s}(t) = \ddot{s}_0 \quad \forall t$
$\dot{s}(t) = \text{cost.} = \int \ddot{s}$		$\dot{s}(t) = \dot{s}_0 + \ddot{s}(t) \cdot t$
In mec. si suppone che le condizioni iniziali siano note \Rightarrow		$s(t) = s_0 + \dot{s}_0 t + \frac{\ddot{s}_0}{2} t^2$ legge oraria
$\Rightarrow \dot{s}(0) = \dot{s}_0 = \dot{s}(t) \quad \forall t$		$s(t)$ è una parabola, con vertice coincidente con l'istante di arresto, in cui $\dot{s}(t^*) = 0$
$\int \dot{s} \Rightarrow \underline{s}(t) = \dot{s}_0(t) + s_0 \quad \forall t$ \hookrightarrow legge oraria		
$s(t)$ è una funzione LINEARE, ma la traiettoria è QUALSIASI		

Moto progressivo: $\dot{s}(t) > 0 \quad \forall t \in I$
" retrogrado: " < 0 "

Moto accelerato: $|\dot{s}(t)|$ crescente
 $\ddot{s} > 0$

" ritardato: $|\dot{s}(t)|$ decrescente
 $\ddot{s} < 0$

Circolare

$$\underline{s} = \underline{s}(t) = R \varphi(t) \quad (R = \text{cost.})$$

$$\underline{r}(t) = R \cos \varphi(t) \underline{e}_1 + R \sin \varphi(t) \underline{e}_2; \quad (P-O) = -R \underline{n} = \underline{r}$$

$$\underline{v} = \dot{\underline{r}}(t) = -R \sin \varphi(t) \dot{\varphi} \underline{e}_1 + R \cos \varphi(t) \dot{\varphi} \underline{e}_2 \Rightarrow \underline{v} = \dot{s} \underline{t} = R \dot{\varphi}(t) \underline{t}$$

$$\underline{t} = \underline{n} \times \underline{e}_3 \Rightarrow \underline{v} = \dot{\varphi} \underline{n} \times \underline{e}_3 = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3 \times (-R \underline{n}) = \dot{\varphi}(t) \underline{e}_3 \times \underline{r} \Rightarrow \omega = \dot{\varphi} \underline{e}_3 \text{ velocità angolare}$$

$$\hookrightarrow \underline{v} = \omega(t) \times \underline{r}$$

$$\underline{a} = R \ddot{\varphi}(t) \underline{t} + R \dot{\varphi}^2(t) \underline{n}$$

In un moto c. unif., $\dot{\varphi}(t) = \dot{\varphi}_0$
 \Downarrow
 $\omega = \text{frequenza}$
 $T = \frac{2\pi}{\omega}, \quad r(t) = r(t+T) \quad \forall t$
Dim: $\varphi(t+T) = \varphi_0 + \dot{\varphi}t + \dot{\varphi}T = \varphi_0 + \dot{\varphi}T = \varphi_0 + 2\pi$

Moto Elicoidale

È un moto tridimensionale dato dalla composizione di un moto circolare [uniforme] di centro O su un piano π e un moto rettilineo [uniforme] lungo una retta per O ortogonale a π .

La traiettoria percorsa su $x_1^2 + x_2^2 = R^2$ è un'elica cilindrica, ovvero una curva che forma un angolo costante φ con le generatrici del cilindro.

Allo stesso modo, la velocità forma un angolo costante χ con l'asse $e_3 \equiv O x_3$.

$$\underline{r} = \underline{r}_1 + \underline{r}_3 \Rightarrow \underline{r}(t) = \underline{r}_1(t) + \underline{r}_3(t)$$

$$\underline{r}_1(t) = R \cos(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \underline{e}_1 + R \sin(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \underline{e}_2$$

$$\underline{r}_3(t) = (\dot{x}_{3,0} t + x_{3,0}) \underline{e}_3$$

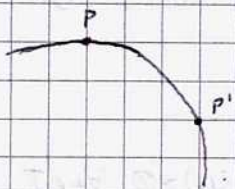
$$\underline{v}(t) = -\dot{\varphi}_0 R \sin(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \underline{e}_1 + \dot{\varphi}_0 R \cos(\dot{\varphi}_0 t + \varphi_0) \underline{e}_2 + \dot{x}_{3,0} \underline{e}_3, \quad |v(t)| = \text{cost.}$$

Essendo il moto di P circolare uniforme e dunque periodico, si può definire il passo dell'elica, indicato con p :

$$p = |x_3(t+T) - x_3(t)|$$

$$P \text{ percorre un'intera spirale dell'elica: } p = \frac{2\pi R}{\omega} |\dot{x}_3(t)|$$

Spostamento Elementare



$$\text{Spostamento finito} \equiv \overline{PP'} = \underline{r}(s+\Delta s) - \underline{r}(s) = \Delta \underline{r}$$

$$\underline{r}(s) = x_1(s) \underline{e}_1 + x_2(s) \underline{e}_2 + x_3(s) \underline{e}_3 \quad s = s(t) \quad \forall s$$

Applicando uno sviluppo in serie di Taylor a $\underline{r}(s+\Delta s)$ si ottiene:

$$\underline{r}(s+\Delta s) = \underline{r}(s) + \underline{r}'(s) \Delta s + \frac{1}{2} \underline{r}''(s) \Delta s^2 + \dots = \underline{r}(s) + \underline{r}'(s) \Delta s + \underline{h}(s)$$



$$\text{Dal T. sul differenziale, si ottiene } \underline{r}(s+\Delta s) - \underline{r}(s) = \underline{r}'(s) \Delta s \stackrel{h(s)}{\approx} \Delta \underline{r} = d\underline{r} + \underline{h}(s)$$

Si definisce **Spostamento inf. mo e elementare** $dP(s) = d\underline{r}(s) = \underline{t}(s) ds$

Ha significato come funzione vettoriale anche senza definire traiettorie e moti.

$\Delta \underline{r}$ è sulla corda, $d\underline{r}$ è tangente alla curva.

Poiché in un moto tutto è in funzione del tempo t , occorre definire spostamenti a partire da un istante t^* per un assegnato incremento dt ; si osserva che \exists legame tra \underline{v} e dP :

$$\left. \begin{aligned} \underline{r}(t) &= \underline{r}(s); s = s(t) \\ \underline{v}(t) &= \dot{\underline{r}}(s(t)) = \underline{r}'(s(t)) \cdot \dot{s}(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \underline{v}(t) dt = \underline{r}'(s(t)) ds(t) = d\underline{r}(s(t)) \Leftrightarrow dP(s(t)) = \underline{v}(t) dt$$

Es: moto circolare

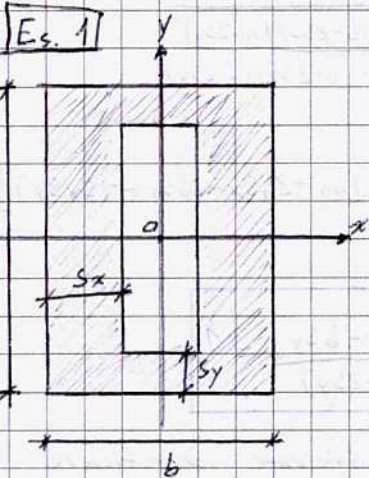
$$s = R\varphi$$

$$\underline{e} = -R\underline{n}$$

$$d\underline{r} = \underline{e} ds = \underline{n} \times \underline{e}_3 R d\varphi = d\varphi \underline{e}_3 \times \underline{n} = d\varphi \underline{x} \underline{r}$$

$d\varphi$ vett. rotazione

$$\text{moto elicoidale: } d\underline{r} = d\underline{r}_1 + d\underline{r}_3 = d\varphi \underline{x} \underline{r}_1 + dx_3 \underline{e}_3 = d\varphi \underline{x} \underline{r}_1 + d\underline{t} \quad d\underline{t} \text{ vett. traslazione}$$



Essendo la figura piana omogenea, si osserva facilmente che ~~imp~~ gli assi Ox ed Oy sono assi di simmetria materiale.

Ne segue che $G \equiv O$, poiché il baricentro appartiene a tutte le rette diametrali di una figura e, in particolare, alle rette agli assi di simmetria materiale.

Calcolo dei momenti d'inerzia:

$$S \equiv S' - S'' \Rightarrow m = \rho (bh - (b-2sx)(h-2sy))$$

$$S': m_1 = \rho bh, G' \equiv O; S'': m_2 = \rho (b-2sx)(h-2sy), G'' \equiv O$$

$$I_x = I'_x - I''_x$$

($G \equiv G' \equiv G'' \equiv O \Rightarrow$ non è necessario applicare il teorema del trasporto)

$$I'_x = \int_{S'} \rho y^2 dS' = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = b\rho \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\rho b h^3}{12}$$

Analogamente, $I'_y = \frac{\rho b^3 h}{12}$; $I'_y = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x^2 dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dy = \rho h \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{\rho b^3 h}{12}$ □

$$I''_x = \rho \int_{-\frac{b-2sx}{2}}^{\frac{b-2sx}{2}} dx \int_{-\frac{h-2sy}{2}}^{\frac{h-2sy}{2}} y^2 dy = \frac{(b-2sx)\rho (h-2sy)^3}{12}$$

Sostituendo $\epsilon = b-2sx$ e $k = h-2sy$ si ottiene un integrale analogo a quello utilizzato per la valutazione di I'_x

E, dunque, $I''_y = \frac{(b-2sx)^3 \cdot (h-2sy)\rho}{12}$

$$I_x = \frac{\rho}{12} [b^3 h^3 - (b-2sx)^3 (h-2sy)^3]; \quad I_y = \frac{\rho}{12} [b^3 h^3 - (b-2sx)^3 (h-2sy)^3]$$

$$I_{xy} = I'_{xy} - I''_{xy}$$

la terna è principale d'inerzia (\Rightarrow); prodotti d'inerzia sono nulli.

$$I'_{xy} = \rho \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} x dx \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y dy = \frac{\rho b^2 h^2}{4} = \frac{\rho b^2 h^2}{16} \cdot 4 = \frac{\rho}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left[\frac{y^2}{2} \right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{\rho}{4} \left(\frac{2b^2}{4} \cdot \frac{2h^2}{4} \right) = \frac{\rho}{4} \cdot \frac{b^2 h^2}{4} = \frac{\rho b^2 h^2}{16}$$

$$I''_{xy} = \rho \int_{-\frac{b-2sx}{2}}^{\frac{b-2sx}{2}} x dx \int_{-\frac{h-2sy}{2}}^{\frac{h-2sy}{2}} y dy = \frac{\rho}{4} \left[\frac{(b-2sx)^2}{2} \cdot \frac{(h-2sy)^2}{2} \right] = \frac{\rho (b^2 - 4sx + 4sx^2)(h^2 - 4sy + 4sy^2)}{16}$$

$$I_{xy} = \frac{\rho}{16} (\rho b^2 h^2 - b^2 h^2 + 4b^2 sy - 4b^2 sy^2 + 4h^2 sx - 16sx sy - 16sx sy^2 - 4h^2 sx^2 + 16sx^2 sy + 16sx^2 sy^2)$$

Essendo Ox, Oy assi β (baricentrali) di simmetria materiale, essi sono assi principali d'inerzia.

L'ellisse centrata d'inerzia

I raggi d'inerzia sono:

$$(p_x)^2 = \frac{I_x}{m} = \frac{\rho (b^3 h^3 - (b-2s_x)(h-2s_y)^3)}{12 \rho (bh - (b-2s_x)(h-2s_y))} \Rightarrow p_x = \sqrt{\frac{bh^3 - (b-2s_x)(h-2s_y)^3}{12(bh - (b-2s_x)(h-2s_y))}}$$

$$(p_y)^2 = \frac{I_y}{m} = \frac{\rho (b^3 h^3 - (b-2s_x)^3 (h-2s_y))}{12 \rho (bh - (b-2s_x)(h-2s_y))} \Rightarrow (*) \quad [bh - (bh - 2hs_x - 2bs_y + 4s_x s_y)]$$

$$\text{Ellisse di Culmann: } E: \frac{12y^2 [2(2s_x s_y - hs_x - bs_y)]}{bh^3 - (b-2s_x)(h-2s_y)^3} + \frac{24x^2 [2s_x s_y - hs_x - bs_y]}{b^3 h - (b-2s_x)^3 (h-2s_y)} = 1$$

In virtù della simmetria della figura, per determinarne il nocciolo sarà sufficiente identificare due antipoli di rette tangenti: g i restanti due saranno simmetrici ai precedenti rispetto all'origine (coincidente col baricentro del sistema).

Considero le rette $a: x = \frac{b}{2}$, $b: y = \frac{h}{2}$

Allora, l'antipolo A di a appartiene all'asse x e:

$$A(x_A, y_A) \rightarrow \frac{x_A}{\rho^2 y} x + \frac{y_A}{\rho^2 x} y + 1 = 0 \Leftrightarrow px + by + 1 = 0 \rightarrow A(\rho^2 y, \rho^2 x)$$

$$y_A = 0, \quad x_A = -\frac{2}{b} \left(\frac{b^3 h - (b-2s_x)^3 (h-2s_y)}{12(bh - (b-2s_x)(h-2s_y))} \right)$$

$$a: x - \frac{b}{2} = 0; \quad -\frac{2}{b} x + 1 = 0$$

$$A \equiv \left(-\frac{2}{b} \left(\frac{b^3 h - (b-2s_x)^3 (h-2s_y)}{12(bh - (b-2s_x)(h-2s_y))} \right), 0 \right) \quad \text{e} \quad \text{C' antipolo di } c: x = -\frac{b}{2} \text{ è } C \equiv (-x_A, 0)$$

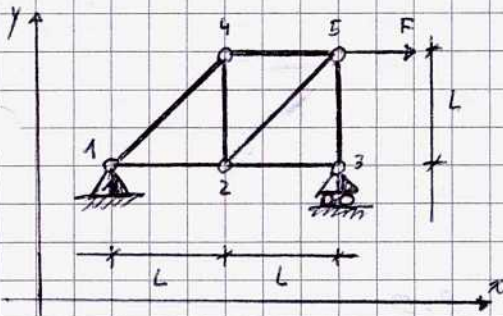
Analogamente, $B \equiv \left(0, -\frac{2}{h} \left(\frac{b^3 h - (b-2s_x)(h-2s_y)^3}{12(bh - (b-2s_x)(h-2s_y))} \right) \right)$ e l'antipolo di $d: y = -\frac{h}{2}$ è $D \equiv (0, -y_B)$

Il dominio convesso avente per frontiera il poligono di vertici ABCD coincide con il Nocciolo d'Inerzia. Esso è un rombo, con centro in G .

$$(*) \Rightarrow p_y = \sqrt{\frac{b^3 h - (b-2s_x)^3 (h-2s_y)}{12(bh - (b-2s_x)(h-2s_y))}}$$

$$\text{Ellisse di Culmann: } \frac{24y^2 (2s_x s_y - hs_x - bs_y)}{bh^3 - (b-2s_x)(h-2s_y)^3} + \frac{24x^2 (2s_x s_y - hs_x - bs_y)}{b^3 h - (b-2s_x)^3 (h-2s_y)} = 1$$

Es. 2



La travatura reticolare in figura è internamente isostatica, poiché composta di maglie triangolari.

Attraverso la Teoria dei centri, si osserva che la struttura è isostatica: vi sono due centri di istantanea rotazione P_1 e P_2 .

$$m=3, \quad l=0 \Rightarrow m-s=l-i, \quad i=l(m-s)=0$$

La struttura è dunque isostatica, e quindi è in equilibrio in questa configurazione \Rightarrow valgono le ECS sulla struttura e in ogni sua parte.

Calcolo delle Reazioni Vincolari:

$$\begin{cases} R^{(a)} + R^{(v)} = 0 \\ M_A^{(a)} + M_A^{(v)} = 0 \end{cases} \quad (\Leftrightarrow)$$

sollecitazioni

$$\begin{cases} \Sigma^{(a)}: \{P_1, F_i\} \\ \Sigma^{(v)}: \{P_1, \underline{\Phi}_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j\}, \{P_3, \underline{\Phi}_B = \Phi_{By} j\} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_i + \Phi_{Ax} i = 0 \\ \Phi_{Ay} + \Phi_{By} j = 0 \\ -LF + 2L\Phi_{By} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \Phi_{Ax} = -F \\ \Phi_{Ay} = -F/2 \\ \Phi_{By} = +F/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{\Phi}_A = (-F i + \frac{F}{2} j) \\ \underline{\Phi}_B = +\frac{F}{2} j \end{cases}$$

*: i centri di istantanea rotazione sono P_1 e C_{oo} , punto improprio nella direzione j .

Metodo dei Nodi

Il nodo 1 è semplice, e vi convergono aste scariche.

$$R_1 = -F i + \frac{F}{2} j, \quad R_{12} = N_{12} u_{12} = N_{12} i$$

$$R_{14} = N_{14} u_{14} = N_{14} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} i + \frac{\sqrt{2}}{2} j \right)$$

Il nodo 2 è in equilibrio \Leftrightarrow

$$\begin{cases} N_{12} + \frac{\sqrt{2}}{2} N_{14} - F = 0 \\ N_{14} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{F}{2} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} N_{12} = \frac{1}{2} F & \text{tirante} \\ N_{14} = +\frac{F}{\sqrt{2}} & \text{tirante} \end{cases}$$

$$R_{12} = \frac{1}{2} F i; \quad R_{14} = +\frac{F}{2} (i + j)$$

Essendo nota R_{14} , il nodo 4 può considerarsi semplice e:

$$R_{45} = N_{45} u_{45} = N_{45} i; \quad R_{42} = N_{42} u_{42} = -N_{42} j; \quad R_{41} = -R_{14} = -\frac{F}{2} (i + j)$$

Il nodo 4 è in equilibrio \Leftrightarrow

$$\begin{cases} N_{45} + \frac{F}{2} = 0 \\ -N_{42} - \frac{F}{2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} N_{45} = -\frac{F}{2} & \text{tirante} \\ N_{42} = -\frac{F}{2} & \text{puntone} \end{cases}$$

$$R_{45} = +\frac{F}{2} i; \quad R_{42} = +\frac{F}{2} j$$

Si osserva che si sarebbe pervenuti a risultati analoghi attraverso lo studio della matrice cinematica:

$$m=3 \quad x_A, y_A, \varphi$$

$$\text{Eq. di vincolo: } dA=0$$

$$dB \cdot j = 0 \Rightarrow dy_A + d\varphi (x_B - x_A) = 0$$

$$\begin{cases} dx_A = 0 \\ dy_A = 0 \\ 2Ld\varphi = 0 \end{cases}$$

$$M_C = \begin{pmatrix} dx_A & dy_A & d\varphi \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2L \end{pmatrix}$$

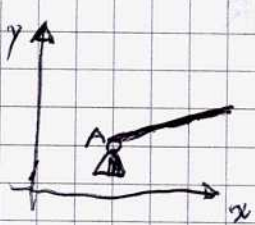
$$s=3$$

$$r=0$$

$$s'=3$$

$$i=0$$

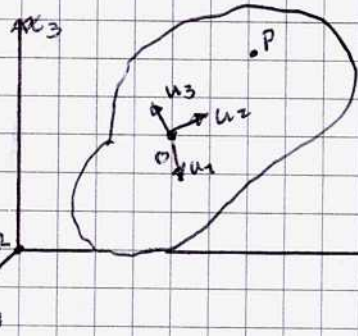
isostatica



$$dA = \ominus$$

$$SL^{(v)} = \underbrace{\Phi_A - dA}_{\downarrow} + M_0 \cdot d\varphi = 0$$

$$\Phi_A = \Phi_{Ax} i + \Phi_{Ay} j$$



$$\underline{r}_{P/O} = \underline{r}_{P/O} + \underline{r}_{O/O}$$

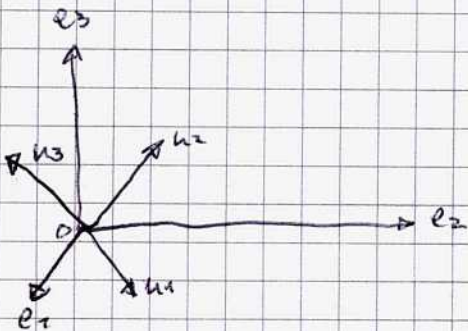
$$\underline{r}_{P/O} = y_1 \underline{u}_1(t) + \dots$$

$$\underline{r}_{O/O} = x_{o1}(t) \underline{e}_1 + x_{o2}(t) \underline{e}_2 + x_{o3}(t) \underline{e}_3$$

$$\underline{u}_i + \underline{u}_j = \delta$$

$$\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_{11}^2 + A_{22}^2 + A_{33}^2 = 1 \\ A_{i1}A_{j1} + A_{i2}A_{j2} + A_{i3}A_{j3} = 0 \quad i \neq j \end{cases}$$



$$S = \{(P_i, m_i) \quad i=1, \dots, n\}$$

$$G \quad \underline{x}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \underline{r}_i$$

$$S' = \{(P_i, \underline{u}_i : \underline{u}_i)\}$$

$$S = S' U S''$$

$$G \quad S$$

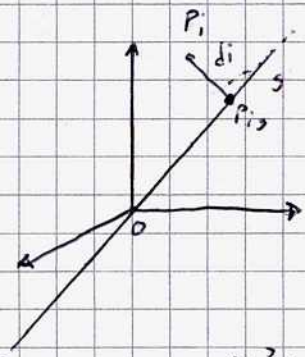
$$\downarrow \\ G(x_G, y_G)$$

$$X G = \frac{m' x'_G + m'' x''_G}{m}$$

$$I_s = \sum_{i=1}^n m_i \underline{d}_i^2$$

$$I_s = \int_{\Omega} \rho(P) d^2(P, s) d\Omega$$

$$\underline{s} = (d, \beta, \gamma)$$



$$d_i = \underline{r}_{P_i} \cdot \underline{s} = (\underline{P}_{i_s} - \underline{0})$$

$$P_i = (x_1, y_1, z_1)$$

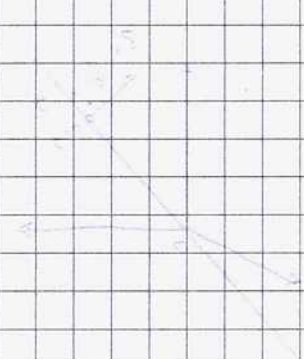
$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (x_1 d + x_2 \beta + x_3 \gamma)^2 =$$

$$= x_1^2 (1-d)^2 + x_2^2 (1-\beta)^2 + x_3^2 (1-\gamma)^2 - 2 x_1 x_2$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$$