

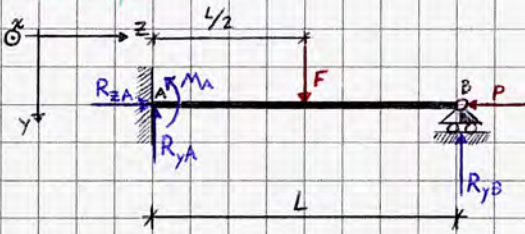
Scienza delle Costruzioni

prof. Massimiliano FRALDI

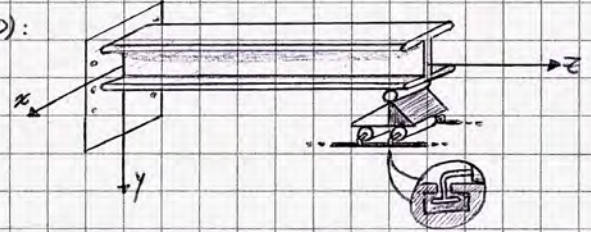
Appunti di Riccardo Maria Polidoro
riccardo.polidoro.org

La Scienza delle Costruzioni è una disciplina che si pone l'obiettivo di fornire piena consapevolezza nel progetto delle strutture; essa parte dalle conoscenze acquisite nel corso di Meccanica Razionale per risolvere essenzialmente 2 problemi: il calcolo delle reazioni vincolari - che permette di comprendere la trasmissione delle forze all'interno delle strutture - con conseguenti valutazioni per evitare flessioni eccessive negli elementi costruttivi e l'analisi di reazioni vincolari e caratteristiche di sollecitazione in sistemi iperstatici, operazione non possibile con le competenze acquisite nei corsi precedenti.

Esempio



In un caso reale (3D):



$$\begin{cases} R_{xA} - P = 0 \Rightarrow R_{xA} = P \\ -R_{yA} - R_{yB} + F = 0 \Rightarrow R_{yA} = F - R_{yB} \\ M_A - F \cdot \frac{L}{2} + R_{yB} \cdot L = 0 \Rightarrow M_A = F \cdot \frac{L}{2} - R_{yB} \cdot L \end{cases}$$

\downarrow disaccie col sistema di riferimento
 \downarrow coincide col s.d.r.
 \downarrow > 0 perché pre-ambonario

Si osserva che il sistema non può essere risolto con valori univoci, poiché esso è una volta iperstatico. Sarà necessario introdurre equazioni ulteriori di altra natura fisica in numero pari alle incognite. Dette equazioni sono spesso delle congruenze.

Il primo trattato significativo per la materia è l'Elastica di Eulero (1744); altri protagonisti nello sviluppo della disciplina sono Cauchy e de Saint Venant, che nel corso del XIX secolo portarono incredibili avanzamenti: la maggior parte degli strumenti che permettono di valutare se i valori teorici ottenuti dall'analisi della struttura siano eccettabili per una struttura reale è dovuta al loro contributo, che ha permesso la costruzione di una teoria che permette di dimensionare e verificare strutture realizzate in un dato materiale sulla base di valori sperimentali che lo verificano, il tutto grazie alla meccanica del continuo e a criteri di resistenza che permettano il passaggio da forze attive a tensioni (estese sulla superficie, dunque formalmente delle pressioni) da confrontare con valori limite.

$$F \rightarrow G \leq G_{lim}$$

[N] [Pa] [Pa]

Vincoli Piani

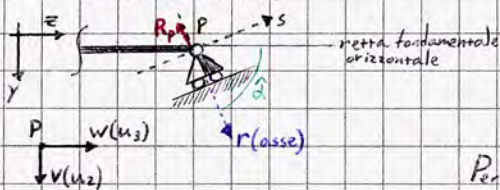
In base al numero di condizioni di vincolo, i vincoli si classificano in semplici, doppi e tripli; essi sono caratterizzati dalla proprietà di dualità: la condizione di vincolo si espleta sia in ambito statico che in cinematica.

In diverse applicazioni, considereremo vincoli:

- olonomi: è possibile descrivere il moto nota la configurazione iniziale, unica condizione da cui dipende l'esito del fenomeno: le condizioni di vincolo non dipendono dal tempo.
- bilateri: i vincoli limitano il movimento in maniera tale da poter espletare ogni reazione vincolare in qualunque dei due versi.
- puntuali: le dimensioni del dispositivo che caratterizza il vincolo si considerano trascurabili rispetto alla struttura.

Vincoli semplici:

- Carrello [Pendolo]

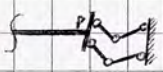


Cinematicamente: $u_{rP} = 0 \Rightarrow w_P \cos \hat{\alpha} + v_P \sin \hat{\alpha} = 0$

$$\begin{bmatrix} u_P \\ v_P \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \hat{\alpha} \\ \sin \hat{\alpha} \end{bmatrix} = 0$$

Per la dualità, si ha che $R_{rP} \cdot u_{rP} = 0 \Rightarrow R_{rP} \neq 0 \Rightarrow u_{rP} \neq 0$
 $R_{sP} = 0 \Rightarrow u_{sP} \neq 0$

• Doppio - Doppio Pendolo



Cinematicamente, $\varphi_P = 0$; Staticamente, $M_P \neq 0$

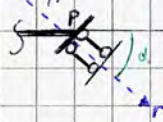
Vincoli Doppi:

• Cerniera



Cinematicamente, $V_P = 0$; $W_P = 0$
Staticamente, $R_P \neq 0$

• Doppio Pendolo



Cin. $\varphi_P = 0$
 $U_{rP} = 0 \Rightarrow W_P \cos \alpha + V_P \sin \alpha = 0$

Stat. $M_P \neq 0$
 $R_P \neq 0$

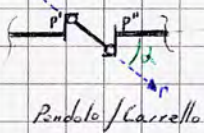
Vincolo Triplo: Incastro



$V_P = 0$ $R_{yP} \neq 0$
 $W_P = 0 \Leftrightarrow R_{zP} \neq 0$
 $\varphi_P = 0$ $M_P \neq 0$

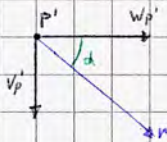
Vincoli "mutui" o "relativi": insistono in determinati punti legando parti differenti di una struttura.

Semplici



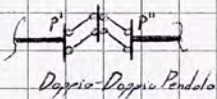
Pendolo / Carrello

$$U_{rP} = U_{rP''} \Rightarrow W_P \cos \alpha + V_P \sin \alpha = W_{P''} \cos \alpha + V_{P''} \sin \alpha$$



Si considera P' e P'': le dimensioni del vincolo sono trascurabili!

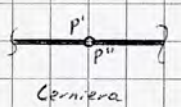
⚠ Nei vincoli mutui le reazioni vincolari sono sempre uguali e opposte.



Doppio-Doppio Pendolo

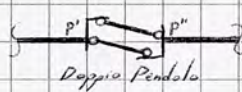
$$\varphi_{P'} = \varphi_{P''}$$

Doppi



Cerniera

$$\begin{cases} W_{P'} = W_{P''} \\ V_{P'} = V_{P''} \end{cases}$$



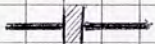
Doppio Pendolo

$$\begin{cases} U_{rP'} = U_{rP''} \\ \varphi_{P'} = \varphi_{P''} \end{cases}$$

Ovviamente c'è ancora dualità statico-cinematica:

$$\begin{cases} R_{P'} = R_{P''} \\ M_{P'} = M_{P''} \end{cases}$$

Triplo



$$\begin{cases} W_P = W_P'' \\ U_{rP} = U_{rP''} \\ \varphi_P = \varphi_P'' \end{cases}$$

L'incastro mutuo, anche detto vincolo di continuità, è un vincolo che esprime una condizione valida in un qualsiasi punto K di una trave. Viene però talvolta utilizzato nell'analisi delle strutture per analizzare eventuali movimenti dovuti alla cedevolezza limitata del vincolo, talvolta da dover necessariamente considerare il vincolo con un cedimento anelastico (cinematismo ammissibile entro certi valori).

Teoria della Trave

Prima di definire l'oggetto trave, è utile definire:

• Diametro caratteristico: dimensione del diametro della circonferenza minima che avvolge una data sezione



• Prisma Retto: Solido le cui sezioni rette - ovvero ortogonali all'asse del solido - hanno forma arbitraria, con l'asse definito come il luogo geometrico dei baricentri delle sezioni rette.



riccardo.polini@unipr.it

Solido Trave

- Oggetto essenzialmente prismatico

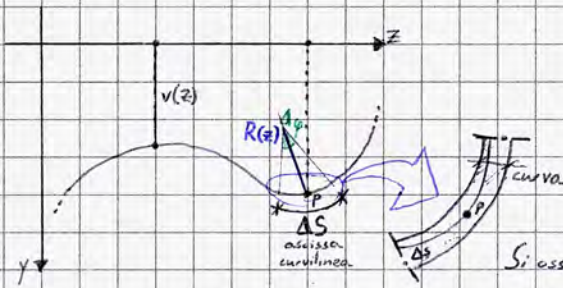
- Una grandezza longitudinale è molto maggiore del diametro caratteristico: $D/L \ll 1$

Si considera almeno un rapporto pari a $1/20$, pur avendo possibili applicazioni anche a $1/10$.

Se questa condizione non è rispettata, non è possibile applicare la teoria della trave: quando il solido trave è molto più lungo che spesso, ciò che accade come disturbo alle basi esterne ha un effetto modesto e limitato alle regioni prossime ad esso, fino ad una distanza confrontabile col diametro caratteristico.

Oltre quest'area, il solido risente solo delle forze risultanti. Tale enunciato sarà meglio formalizzato come postulato di De Saint Venant.

- Possiede "debole curvatura": $\chi \sim v'' \leftarrow |v'| \ll 1$



$$R \cdot \Delta\varphi = \Delta s;$$

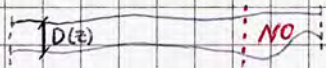
$$\frac{1}{R} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$$

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R} = \chi$$

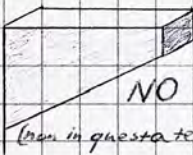
curvatura

Si osserva che $\chi = \frac{v''(z)}{(1+(v'(z))^2)^{3/2}} \approx \chi(z)$. Se $|v'(z)| \ll 1$, $\chi \sim -v''$

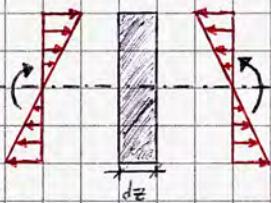
- Possiede una "debole variazione di sezione": $|D'(z)| \ll 1$



Dunque, $|D'(z)| \ll 1$ (quasi costante)



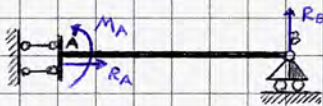
Determina stati tensionali specifici, con un regime sulle travi molto più complesso.



Consideriamo un concio di trave (schema a fianco). Si osserva come l'asse riesca a discriminare il momento flettente, cosa non fattibile in un elemento curvo poiché lo sforzo assiale del momento flettente è accoppiato ad un allungamento; essendo flessione ed estensione accoppiate ciò determina problemi differenti e minori libertà progettuali.

Gli oggetti della nostra realtà vengono spesso disegnati seguendo la teoria della trave poiché si ha maggior controllo nella progettazione.

Statica: identificazione e risoluzione delle strutture



Ricordiamo che $3t - s = l - i$

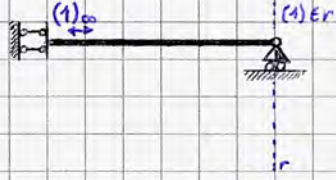
- grado di libertà del sistema
- indeterminazione del sistema
- numero di condizioni di vincolo
- numero di tronchi

Per verificare la natura della struttura si immagina di "svicolarla" da Terra rendendo il sistema libero nel piano. Desideriamo che la struttura è composta da un unico tronco; essendovi 3 equazioni di equilibrio per ogni tronco $3t = 3$.

Valutiamo il numero di condizioni di vincolo: $2(A) + 1(B) = 3$. Ne segue che $3t - s = 3 - 3 = 0$.

Per verificare che non ci sia labilità esistono due metodi:

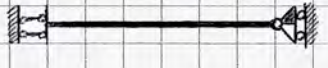
- Algebrico, con calcoli matriciali sulle matrici statica/cinematica
- Grafico, attraverso i centri di potenziale istantanea rotazione (approccio cinematico)



Dall'analisi grafica a fianco si osserva facilmente che $l=0$: il centro di rotazione del sistema dovrebbe essere improprio con direzione orizzontale per rispettare la condizione imposta dal doppio pendolo (consentendo unicamente traslazioni verticali), ma dovrebbe contemporaneamente appartenere all'asse del carrello; essendo le due condizioni in conflitto non esiste alcun centro di istantanea rotazione $\Rightarrow l=0$.

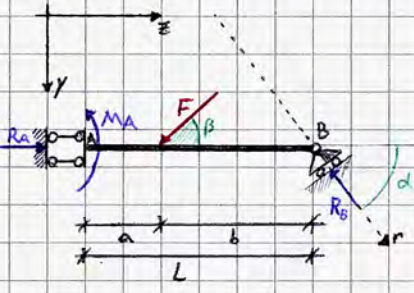
Essendo anche $l=0$, l'indeterminazione del sistema è anch'essa nulla: il sistema ammette soluzioni univoche e determinate.

Si osserva una variazione di linguaggio rispetto a quanto noto in Meccanica Razionale: non si parla di grado di iperstaticità perché pur determinando il numero di variabili iperstatiche - dovute alla presenza di condizioni di vincolo ridondanti - è più intuitivo ragionare su termini non legati all'equilibrio statico: strutture labili possono avere $i \neq 0$!



In questo caso, ad esempio, le condizioni sui centri di istantanea rotazione imposte dai vincoli sono coerenti; esiste dunque il centro (1) \leftrightarrow e sono consentiti cinematismi in verticale. Il sistema è una volta labile e dunque si ha $i=1$.

Immaginiamo ora che il carrello in B sia genericamente inclinato e che sia applicata una forza F di generica inclinazione in un punto generico della trave AB per determinare un'analisi sull'equilibrio statico della struttura:



$$\begin{cases} R_A - F \cos \beta - R_B \cos d = 0 \\ F \text{ sen } \beta - R_B \text{ sen } d = 0 \\ \sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - F \text{ sen } \beta \cdot a + R_B \text{ sen } d \cdot L = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = F \cos \beta + F \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } d} \cos d = F (\cos \beta + \text{sen } \beta \cot d) \\ R_B = F \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } d} \\ M_A = F \text{ sen } \beta \cdot a - F \frac{\text{sen } \beta}{\text{sen } d} \text{ sen } d \cdot L = F \text{ sen } \beta (a - L) = -F \text{ sen } \beta \cdot b \end{cases}$$

↳ per il generico momento negativo

Il sistema appena analizzato è del tutto equivalente alla seguente equazione matriciale:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\cos d \\ 0 & 0 & -\text{sen } d \\ 0 & 1 & L \text{ sen } d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_A \\ M_A \\ R_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \cos \beta \\ -F \text{ sen } \beta \\ F \text{ sen } \beta \cdot a \end{bmatrix}$$

Tale scrittura sarà molto utilizzata per la risoluzione di sistemi più complessi, poiché permette soluzioni rapide e precise. È un procedimento utile anche per la scrittura di programmi.

Il segno "-" nel risultato implica che il verso della reazione vincolare analizzata è inverso rispetto a quanto inizialmente ipotizzato; logicamente in questo caso ciò dipende dalla positività di $\text{sen } \beta$!

$$\underline{S} \cdot \underline{R} = \underline{E} \Rightarrow \underline{R} = \underline{S}^{-1} \cdot \underline{E}$$

- \underline{S} : matrice statica
 - \underline{R} : vettore delle reazioni vincolari
 - \underline{E} : vettore delle sollecitazioni attive

ricordando gli insegnamenti del corso di Geometria e Algebra, sappiamo che l'inversione della matrice può essere effettuata attraverso l'applicazione della regola di Cramer (attraverso il calcolo dei determinanti delle sottomatrici). Ciò richiede però un significativo impegno computazionale nel caso di matrici di ordine 5 o superiore; se sono matrici sparse, ovvero prive di zeri in posizioni significative, il numero delle operazioni da effettuare è legato fattorialmente all'ordine.

Nel caso in cui siano presenti numerose variabili iperstatiche risulta dunque impossibile il calcolo simbolico; esistono però delle tecniche numeriche di inversione delle matrici che risultano fondamentali nella impostazione di simili problemi e possono essere utilizzate per linearizzare problemi non lineari, risolvendoli "a tratti".

Ai fini del nostro esercizio occorre verificare che il determinante di \underline{S}^{-1} sia diverso da 0 - altrimenti esistono vincoli ridondanti - e per ottenere una valutazione preliminare possiamo considerare il rango della matrice: se è pari all'ordine della matrice stessa (o, nel caso di matrici rettangolari, è pari all'ordine massimo di una matrice quadrata estraibile da essa) si è certi dell'assenza di vincoli ridondanti; nel nostro caso, la soluzione sarebbe unica e determinata.

$p=3 \Rightarrow$ valutiamo se $\det \underline{S} \neq 0$, scegliamo la prima colonna come "pivot": $\det \underline{S} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -\cos d \\ 0 & 0 & -\text{sen } d \\ 0 & 1 & L \text{ sen } d \end{vmatrix} = \text{sen } d \neq 0 \Leftrightarrow d \neq 0 + k\pi$

Analizziamo ora la struttura in alcuni casi limite di carico e di vincolo:

• 1: Soluzione indeterminata

Se $\alpha = \beta = 0$, il sistema alla pagina precedente diventa:

$$\begin{cases} R_A - F - R_B = 0 \Rightarrow R_A = F + R_B \\ 0 = 0 \\ M_A = 0 \end{cases}$$

Il sistema è una volta indeterminato.

• 2: Sistema labile

Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0 + k\pi$, ad esempio se $\beta = \pi/2$:

$$\begin{cases} R_A - R_B = 0 \Rightarrow R_A = R_B \text{ indeterminata} \\ F = 0 \text{ IMPOSSIBILE PER IPOTESI} \\ M_A - F \cdot a = 0 \Rightarrow M_A = F \cdot a \end{cases}$$

Il sistema è una volta indeterminato e - in questa configurazione - non è in grado di assorbire/opporsi alla forza a meno che non sia nulla: essendo labile, non è in grado di sopportare la sollecitazione.

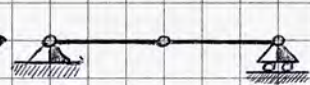
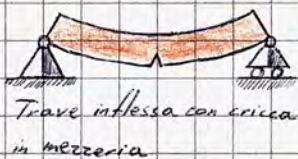
Ciò avviene perché le strutture labili possono resistere solo a forze passanti per i centri di rotazione; in questo secondo caso dunque non è possibile equilibrare la forza.

Dunque la labilità di un sistema può indurre un sistema lineare indeterminato o con soluzione impossibile; dopo aver verificato la labilità del sistema si valuta se i carichi assegnati passano o meno per i centri di rotazione: analizzando i carichi si può conoscere in anticipo il risultato.

Algebricamente, se il rango p non è massimo si considera l'aggiunta della matrice, matrice rettangolare dovuta all'aggiunta della colonna dei termini noti; se con l'aggiunta esiste una matrice quadrata con determinante non nullo di ordine maggiore a p , allora il sistema algebrico è impossibile; altrimenti è indeterminato.

Nel nostro esempio, se $\sin\beta = 0$ allora il rango della matrice dei coefficienti è uguale al rango della matrice aggiunta, dunque la soluzione è indeterminata.

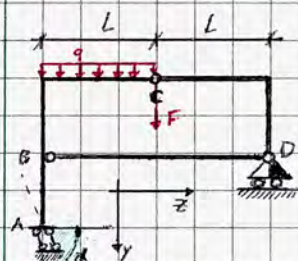
Questo tipo di studi è particolarmente applicato nell'analisi di meccanismi di collasso delle strutture; si osserva un tratto di struttura interessato da lesioni o altri fenomeni che ne limitano la resistenza ai carichi e lo si schematizza con un vincolo nullo che rappresenti il caso peggiore legato alla problematica; pur essendovi un declassamento del vincolo (poiché la struttura non è in grado di resistere allo stesso modo) non è detto che vi sia un collasso imminente: pur non essendovi labilità rigida un'analisi della geometria permette di valutare se potrebbe attivarsi un incipiente meccanismo di collasso.



Schematizzazione; logicamente la struttura è instabile

Nel caso in cui i due vincoli siano incastrati, il meccanismo incipiente di collasso non si attiverebbe (ma è ugualmente necessario un intervento)

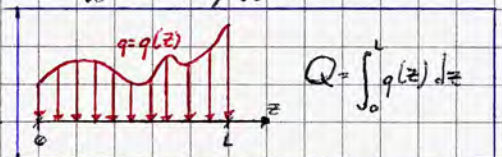
Esercizio



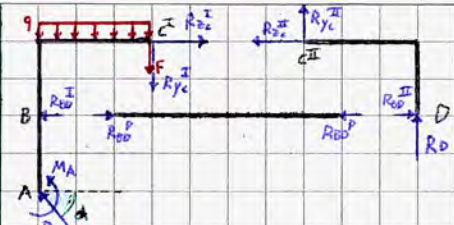
$$3t - s = 2 - i$$

Immaginando di liberare la struttura da terra osserviamo di avere delle condizioni di vincolo: $2(A) + 1(D)$
L'elemento BD può essere considerato un pendolo di dimensione non infinitesima, dunque $t = 2$.

$$z = \int_0^L q(z) dz / \int_0^L q(z) dz$$



"Problema" è la sollecitazione attiva applicata sulla cerniera; nel modello la scelta è però arbitraria e risulta particolarmente conveniente affidare la forza ad una delle due strutture (NON "spezzare a metà" il vincolo!), come schematizzato nella pagina a fianco.

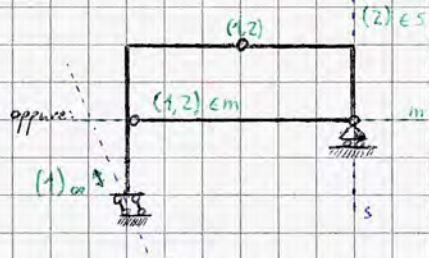


Bisogna sempre porre le reazioni dei vincoli mutui come uguali e opposte sui due tronchi; nel caso delle R_{BD} è possibile valutare dai loro segni se il pendolo è in trazione o in compressione.

$$3t - s = l - i \Rightarrow 3 \times 2 - 6 = l - i \Rightarrow i = 0$$

Per valutare la labilità è possibile considerare la matrice 6×6 associata al seguente sistema algebrico o assumere il diverso dai casi limite (dunque, $0 < \alpha < \pi/2$) e valutare la struttura seguendo la teoria dei centri:

$$\begin{cases} -R_A \cos \alpha - R_{BD}^I + R_{zc}^I = 0 \\ -R_A \sin \alpha + Q + F + R_{yc}^I = 0 \\ M_A + R_{BD}^I \cdot H - Q \cdot L/2 - R_{zc}^I \cdot 2H - R_{yc}^I \cdot L - F \cdot L = 0 \\ -R_{zc}^I + R_{BD}^{II} = 0 \\ -R_{yc}^I - R_D = 0 \\ R_{BD}^{II} \cdot H + R_D \cdot L = 0 \end{cases}$$



Si osserva facilmente che:
 (1) identificato univocamente: vi è un solo vincolo assoluto.
 (2) identificata una sola condizione.
 $\neq (1,2)$ a causa di condizioni contrastanti; i due tronchi sono almeno solidali.

Valutando il sistema come un unico corpo si osserva che i centri (1) e (2) non sono coerenti; dunque $l = 0$:



Mantenendo una continuità tra approccio analitico-computazionale e approccio grafico si osserva una possibile velocizzazione dei calcoli; osserviamo che:

- Il primo sottosistema presenta 3 equazioni in 5 incognite oltre alle sollecitazioni attive; è dunque particolarmente complesso.
- Il secondo sottosistema presenta 3 equazioni in 4 incognite ma è scarico; dunque è più rapido da risolvere.
- Il sistema complessivamente è vincolato da un doppio pendolo e un carrello; scrivendo le equazioni di equilibrio globali del sistema si ottiene un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, da cui è possibile ricavare R_A, M_A, R_D tramite le sollecitazioni attive per poi inserirle nel sistema originario:

$$\begin{cases} -R_A \cos \alpha = 0 \Rightarrow R_A = 0 & (\cos \alpha \neq 0 \text{ per l'ipotesi sui casi limite}) \\ -R_A \sin \alpha - R_D + Q + F = 0 \Rightarrow R_D = Q + F = \alpha L + F \\ M_A - Q \cdot L/2 - F \cdot L + R_D \cdot 2L = 0 \Rightarrow M_A = -F \cdot L - 3/2 Q \cdot L \end{cases}$$

\downarrow
 $Q \cdot 2L + F \cdot 2L$

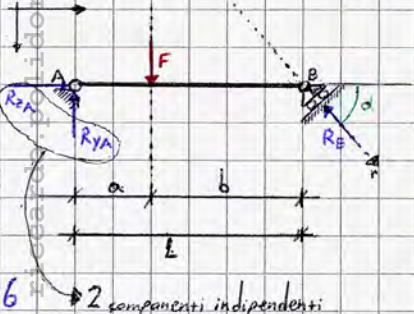
Aveva individuato R_A, R_D ed M_A possiamo adoperare questi 3 valori nel sistema di 6 equazioni, ricavando le incognite rimanenti nelle singole equazioni del sistema.

Si osserva che spesso scrivere equazioni ulteriori velocizza i calcoli!

Equilibrio delle forze grafico

Tutte le risoluzioni algebriche presentano una controparte grafica; nei sistemi piani le forze possono essere rappresentate come vettori ("cursori" poiché viaggiano su delle rette) con punto di applicazione coincidente con l'intersezione tra la retta di applicazione del vettore e la trave su cui la forza è applicata. Come sappiamo, lo studio dell'equilibrio per via algebrica si esplica nella valutazione delle sommatorie di forze orizzontali, forze verticali e momenti, che devono essere contemporaneamente nulle.

Dal punto di vista grafico, dire che un sistema di forze attive e reattive è in equilibrio implica che, se combinate vettorialmente, si ottiene un poligono chiuso (somma grafica di vettori). Per introdurre lo studio grafico dell'equilibrio, valutiamo un sistema semplice ed isostatico:



Come osserveremo, le operazioni grafiche sono spesso più comode nel caso di sistemi più complessi, poiché forniscono informazioni qualitative grafiche che possono tradursi analiticamente tramite processi di natura geometrica. Nella ricerca di sollecitazioni che riguardano ogni sezione di una trave, come i momenti flettenti, il metodo grafico permette di valutare quale sia la sezione sollecitata maggiormente, permettendo un facile dimensionamento della trave in base alla sollecitazione massima ammissibile in quella area.

6 \rightarrow 2 componenti indipendenti

Procedimento



1. Ci si accetta che la struttura sia isostatica.
2. Si cerca un eventuale vincolo semplice da cui "partire" o un vincolo particolarmente conveniente per il metodo.

Nel nostro caso, scegliamo il vincolo in B, la cui reazione vincolare appartiene all'asse r .

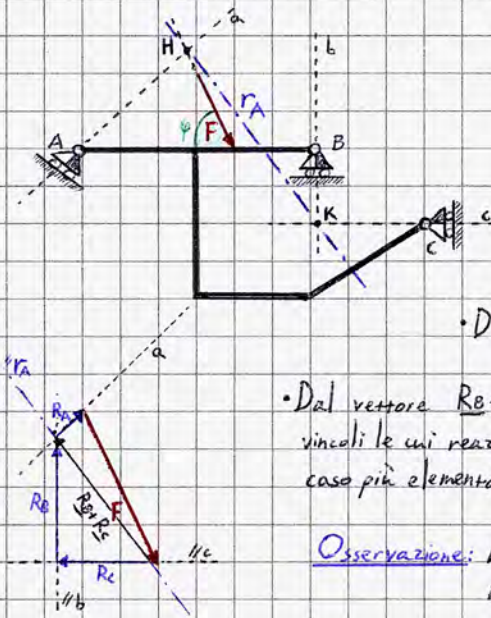
Congiungendo la retta di azione del vincolo semplice con la retta su cui è applicata F , individuiamo il punto H (punto per cui passa la forza risultante $R_B + F$)

3. Determinato il punto H, per cui passa la risultante $R_B + F$, osserviamo che la reazione del vincolo in A appartiene alla stella di rette di centro A (proprio), poiché passa per A.
4. Per avere equilibrio, per definizione tutte le forze attive e reattive devono determinare risultante e momento risultante nulli; osserviamo che R_A e $R_B + F$ appartengono alla stessa retta r_A , detta retta ausiliaria.
5. Per definire intensità e versi delle forze vincolari si considera il poligono delle forze, costituito dalle forze attive e le rette parallele alle rette individuate nei passaggi precedenti passanti per gli estremi delle sollecitazioni attive, determinando orientamenti e rapporti geometrici tra le sollecitazioni attive e le forze vincolari.

Osservazione: $\begin{cases} R_A \cos \beta = R_B \cos \alpha \\ R_B \sin \alpha + R_A \sin \beta = F \end{cases} \Rightarrow$ da informazioni grafiche è possibile dedurre relazioni analitiche!

Definiamo ora una struttura non elementare:

• Si verifica facilmente che la struttura è isostatica.



• Combiniamo F con un vincolo semplice a scelta (secondo la convenienza) per determinare il punto H (nel nostro caso il carrello in A).
La risultante $R_A + F$ passa per H.

• Congiungiamo B e C tramite i rispettivi assi, determinando il punto K per il quale passa la risultante $R_B + R_C$.

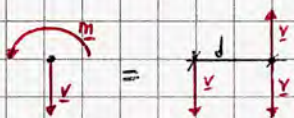
• Determiniamo la retta ausiliaria, che coincide con la congiungente dei punti H e K.

• Dal vettore $R_B + R_C$ ottenuto nel poligono delle forze si tracciano le rette parallele agli assi dei vincoli le cui reazioni costituiscono le componenti del vettore suddetto, con un procedimento analogo al caso più elementare, identificando le singole reazioni vincolari.

Osservazione: La geometria della struttura non incide sull'equilibrio delle sollecitazioni attive e reattive; incide solo la posizione relativa dei vincoli e delle forze e le inclinazioni dei relativi assi e rette di applicazione.

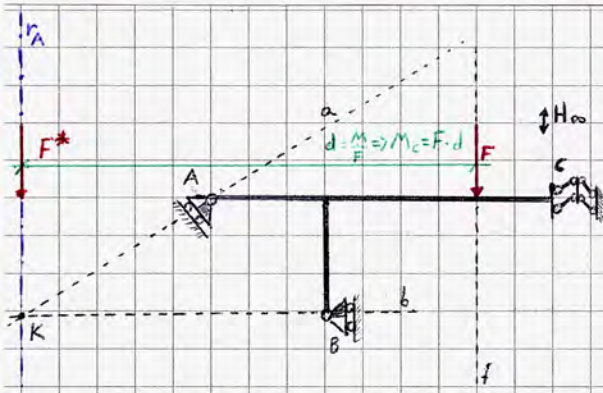
La geometria della struttura si rivelerà importante nel computo delle sollecitazioni interne, come il momento flettente.

Effettuiamo ora un breve richiamo sui momenti per introdurli nel metodo grafico:



Sostituendo al momento una coppia di intensità V , si osserva che il sistema di vettori dello schema è equivalente a V traslato ad una distanza tale da ripristinare la coppia; posto a sinistra del vettore per rispettare il verso del momento:

$$d = \frac{m}{V}$$



Si osserva che il poligono delle forze costituito da forza attiva e risultante delle reazioni vincolari in A e in B degenera in un segmento.

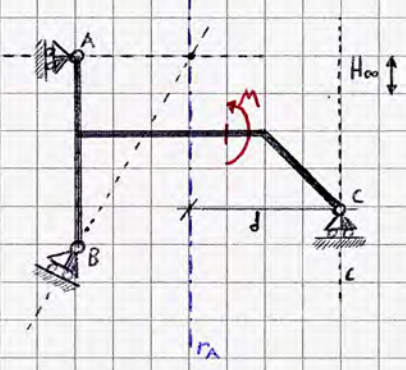
⚠ La distanza d - fondamentale per il calcolo del momento in C dov'è dovuto al doppio-doppio pendolo - esprime il trasporto dalla retta f alla retta ausiliaria NON dal vincolo che esplica la coppia!!!

Nel caso in cui sia presente un incastro:



$$M_A = F \cdot d ; R_A = F$$

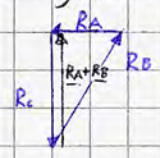
Consideriamo ora una struttura con una coppia applicata:



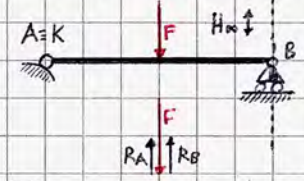
Congiungendo C con M, sappiamo che R_c viene "traslato" dalla coppia di una distanza d .

Per conoscere l'entità di R_c osserviamo che la coppia generata da R_c e $R_A + R_B$ deve essere uguale ed opposta ad M , che essendo antioraria implica che la coppia da generare è necessariamente oraria, determinando il verso di R_c .

$$\text{Nota il braccio della coppia ed } M, R_c \cdot d = M \Rightarrow R_c = \frac{M}{d}$$



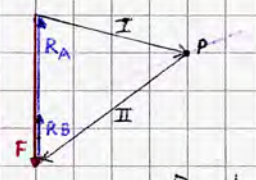
Infine, consideriamo una struttura soggetta unicamente a sollecitazioni verticali:



Essendo tutte le forze attive e reattive verticali, H è improprio in verticale; la retta di applicazione del vincolo in B e la retta ausiliaria sono anch'esse verticali e non è dunque possibile conoscere quanta quota di F viene assorbita da R_A [R_B].

In questi casi si utilizza una strategia usata intuitivamente anche da Grandi: la costruzione e lo studio di poligoni funicolari, che permette lo studio anche di strutture strallate.

Scegliamo un polo P arbitrario (non su F o centrato rispetto ad F) e costruiamo 2 rette proiettanti (I, II) su cui immaginiamo delle ipotetiche componenti di F . Possiamo immaginare che esse generino la retta di applicazione di f partendo da qualsiasi punto del piano; intersecando le rette di azione dei vincoli in A e in B si individuano i punti D-E dai quali è possibile costruire una terza retta (III) che individua nel poligono delle forze le quote imputate alle reazioni vincolari.

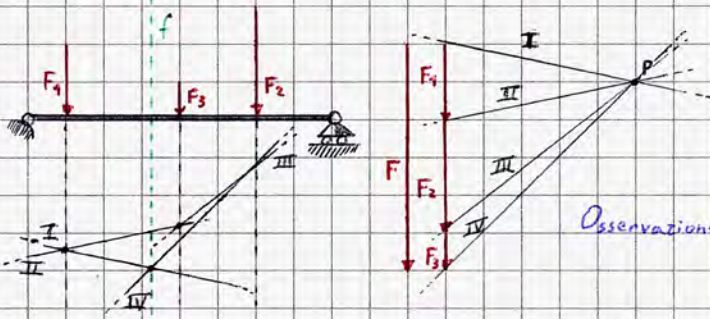


I vettori individuati sono coassiali, equiversi e chiudono il poligono delle forze; coincidono esattamente con le reazioni vincolari perché le proiettanti determinano dei vettori la cui somma complessiva è F ; la congiungente DE individua due vettori uguali e opposti la cui somma con I e II rispettivamente determina delle forze parziali: le cui opposte coincidono con le reazioni vincolari.

Ricordando le proprietà della geometria proiettiva, si osserva che al variare del polo il risultato non cambia: la III interseca F nello stesso punto e le reazioni individuate non variano.

⚠ Nella schema I-III grazie a r_A e si riferisce al vincolo in A; è fondamentale non "scambiare" le informazioni nel poligono delle forze!

Se ci sono più forze attive applicate, a seconda dei casi (con un'abilità acquisita solo con l'esercizio), si opta per un procedimento grafico e analitico; supponiamo di voler unicamente determinare la risultante delle forze applicate alla struttura mediante procedimento grafico per comprenderne le applicazioni future.



Il procedimento è in un certo senso inverso al precedente: F può essere vista come data dalla somma di vettori applicati in P e giacenti su I e IV ; determinando la loro intersezione sarà possibile identificare la retta di applicazione della risultante.

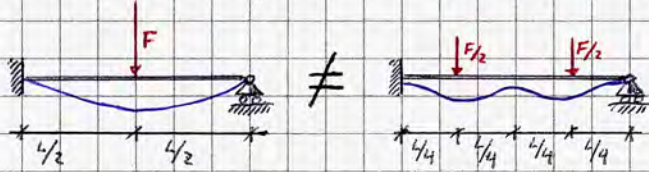
Osservazione: Il metodo si semplifica particolarmente se si fissa il polo P tale che $I \perp F_1$.

Analiticamente, note tutte le distanze delle forze da un polo A , la distanza della risultante dal polo viene determinata tramite l'equivalenza dei momenti:

$$M_A = -F_1 d_1 - F_2 d_2 - F_3 d_3 = -F d_4 \quad \text{da cui si ricava } d_4$$

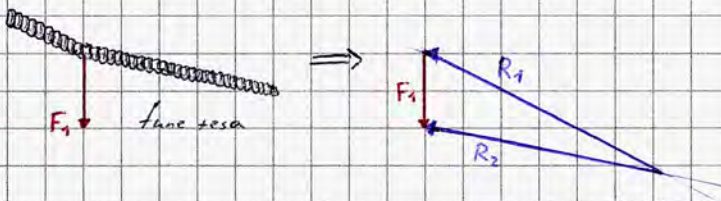
⚠ I metodi visti finora permettano l'analisi delle reazioni vincolari solo sui singoli tronchi; non viene solitamente richiesta la ricerca della risultante totale delle forze attive agenti su una struttura a più tronchi, utilizzata principalmente nell'analisi di vincoli esterni.

In un sistema rigido F è equivalente alle singole forze a_i (come sistema di forze) ai fini della valutazione dell'equilibrio; ciò non sarà più vero in strutture iperstatiche e deformabili.



Se agenti direttamente sui vincoli, le forze non deformerebbero affatto la struttura!

Il metodo grafico suddetto è detto dei poligoni funicolari, poiché ha una corrispondenza reale con la geometria assunta da fili tesi con carichi applicati in vari punti:



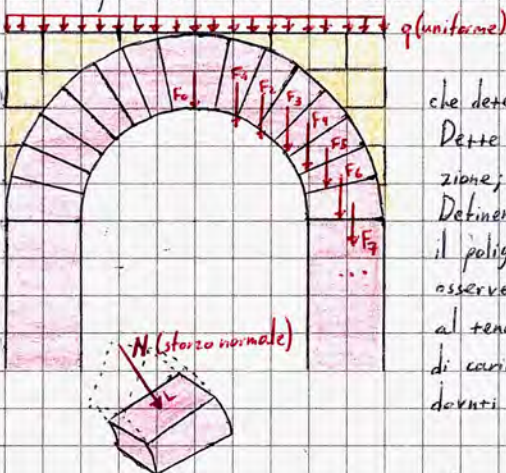
Si osserva che le forze di tensione interne al filo sono molto elevate rispetto al carico F_1 : maggiore l'orizzontalità della fune sotto carico (in altre parole: minore è l'inflessione della fune sull'orizzontale davanti al carico) maggiore è la forza di tensione. Ne segue che una maggiore rigidità implica forze reattive molto intense.

Da ciò segue logicamente che la progettazione delle strutture spesso richiede strutture flessibili e resistenti più che rigide e fragili; ad esempio, gli interventi su cedimenti strutturali sono sempre dispositivi flessibili.

È interessante tenere conto del prodotto delle osservazioni elaborate nel primo periodo di studio della statica grafica (5-'600) e perfezionate nell'Ottocento, che forniranno le basi per gli schemi di ragionamento di Grandi.

La strategia grafica era utilizzata per valutare la stabilità (capacità di sopportare determinate condizioni di carico) di una struttura, inizialmente imputata unicamente alla geometria e non ai materiali.

Un esempio è lo studio di strutture ad arco:



La risultante gravita su ogni conciò con un sistema di forze verticali; si prevede il funzionamento in compressione a causa della composizione geometrica della struttura, che determina il trasferimento di sforzi reattivi mutui tra i conci, tali da comprimere i conci adiacenti. Dette sollecitazioni si dicono sforzi normali perché agiscono su rette normali al piano di interazione; non sono generalmente applicate nel baricentro!

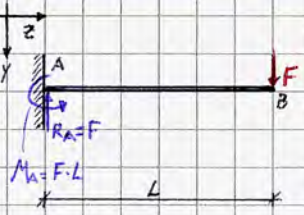
Definendo rette proiettanti parallele alle rette di applicazione delle forze normali si può definire il poligono delle forze per valutare l'entità delle reazioni interne; nel caso in esame si osserverà che essendo ogni concio soggetto al medesimo carico le reazioni normali aumenteranno al tendere del piano di interazione verso l'orizzontale; ne segue che variando la distribuzione di carico è possibile distribuire gli sforzi normali uniformemente, evitando cedimenti strutturali dovuti alla fragilità del materiale.

Ogni proiettante rappresenta uno sforzo normale; anticamente la condizione necessaria e sufficiente era che lo sforzo agisse all'interno del nocciolo centrale d'inerzia della sezione considerata, il che implica semplicemente che tutte le forze fossero unicamente di compressione:

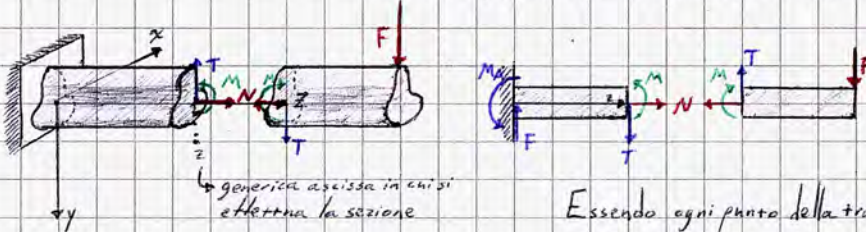


Se la spezzata poligonale delle sollecitazioni interne era in linea con il nocciolo d'inerzia si riteneva che la struttura fosse in equilibrio e stabile, ovvero indefinitamente capace di resistere alle sollecitazioni. Ad esempio, Brunelleschi realizzò un modello in scala 1:2 della sua cupola per provarne la bontà strutturale; pur avendo verificato le condizioni il modello reale subì problemi e lesioni; passando all'1:1 la crescita delle sollecitazioni non è lineare, ma almeno geometrica!

Caratteristiche Interne della Sollecitazione



Per analizzare quale sia la sezione più affaticata dai carichi applicati alle strutture - non necessariamente nei punti di applicazione delle sollecitazioni: nella schema a fianco infatti la sezione di trave in B è la meno affaticata! - occorre valutare l'effetto della sollecitazione attiva in ogni punto della trave in modo tale da poter identificare la sollecitazione massima; essendo detti effetti, tradotti in sollecitazioni interne essi si trasmettono di sezione in sezione secondo il principio di azione e reazione: il procedimento di analisi si serve di uno strumento che idealmente effettua una sezione mobile della trave in due elementi



N = sforzi normali
 T = sforzi di taglio
 M = momenti flettenti

\Rightarrow Caratteristiche della Sollecitazione

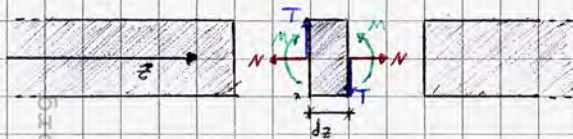
Essendo ogni punto della trave una solidale ai punti adiacenti, è come se si considerasse un incastrò mutuo in ogni punto (sezione di continuità); le reazioni suddette sono presenti $\forall z$ generica in cui viene effettuata un'ipotetica sezione.

In ogni sezione di continuità di trave, dette reazioni sono dette caratteristiche della sollecitazione. In generale,
 $N = N(z)$
 $T = T(z)$
 $M = M(z)$
 in funzione della posizione possono variare le caratteristiche della sollecitazione, ovvero gli sforzi assiali e tangenziali e il momento flettente cui è soggetta la struttura.

In un solido trave tridimensionale esiste una seconda sollecitazione tangenziale alla sezione ed altri due momenti a due a due ortogonali sul terzo!

Non è detto che i tre valori massimi si registrino contemporaneamente in una stessa sezione; in detti casi si applicano dei criteri di resistenza che permettono di identificare la combinazione più sfavorevole tra le sezioni più critiche analizzate, verificando la sezione più sollecitata.

Convenzione positiva



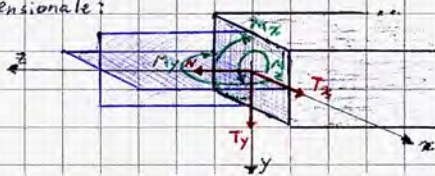
Considerando un conio di trave elementare, la convenzione positiva sulle caratteristiche della sollecitazione prevede:

- sforzi normali che pongono il conio in trazione
- sforzi di taglio che formano una coppia oraria
- momenti flettenti che tendono le fibre inferiori (osservabile sostituendo al momento una coppia di forze normali per comprenderne l'influenza).

Per il principio di azione e reazione, la convenzione positiva sulle sezioni di trave non segnate nello schema prevede sollecitazioni uguali e opposte a quelle considerate nel conio elementare.

Come anticipato, in un solido trave tridimensionale:

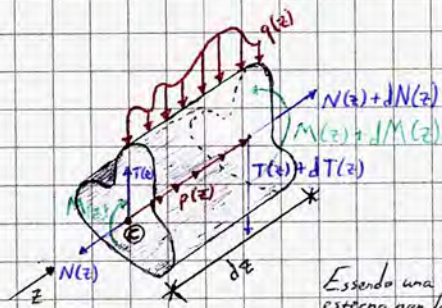
M_z (bivettore lungo z) si dice momento torcente



I termini momento e coppia, pur avendo stesse unità di misura, hanno un significato meccanico molto diverso: il primo è legato ad una reazione vincolare alle caratteristiche della sollecitazione; il secondo si riferisce ad una sollecitazione applicata, nota per ipotesi.

Scriviamo le condizioni di equilibrio al conio di trave elementare:

Forza	Effetto
Compressione	Contrazione
Trazione	Dilatazione/Elongazione



Lo schema a fianco esplica la condizione più generale di sollecitazione di un conio elementare di trave.

Assumiamo come riferimento positivo \downarrow e scriviamo le equazioni sull'equilibrio statico applicate al conio:

Essendo una valutazione dell'equilibrio i segni seguono un riferimento esterno, non la convenzione positiva di M, N, T !

$$\begin{cases} -N + N + dN + p(z)dz = 0 \Rightarrow dN + p(z)dz = 0 \Rightarrow \frac{dN}{dz} = -p(z) \\ -T + T + dT + q(z)dz = 0 \Rightarrow dT + q(z)dz = 0 \Rightarrow \frac{dT}{dz} = -q(z) \\ -(T + dT)dz - M + M + dM - \frac{dQ}{dz} dz = 0 \Rightarrow -T dz - dT dz + dM dz - \frac{q(z)}{2} dz^2 \Rightarrow \frac{dM}{dz} = T \end{cases}$$

$\frac{dN}{dz} = -p(z)$ (3D)
 $\frac{dT}{dz} = -q(z)$
 $\frac{dM}{dz} = T$ (intrecciati di ordine superiore \Rightarrow trascurabili)

Solitamente, nei tratti di discontinuità (dovuti, ad esempio, ad un vincolo interno), la analisi delle caratteristiche della sollecitazione si effettua considerando i singoli tratti di continuità.

L'analisi delle caratteristiche della sollecitazione è applicabile anche in presenza di carichi ripartiti.

Le relazioni ottenute, dette equazioni differenziali dell'equilibrio, sono equazioni differenziali del primo ordine, lineari e non omogenee;

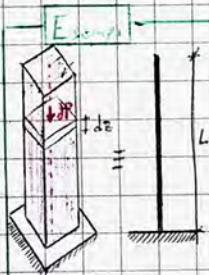
$$\frac{dN}{dz} = -p(z)$$

Ricordiamo che $dN = \frac{dN}{dz} dz$ (utile in casi tridimensionali)

$$\frac{dT}{dz} = -q(z)$$

$$\frac{dM}{dz} = T$$

utile nei grafici, è legata alla risoluzione della seconda equazione differenziale

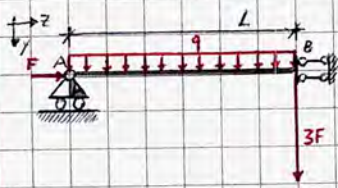


Valutazione del peso proprio di un pilastro come carico agente su una sua sezione
 \hookrightarrow carico ripartito ASSIALE

$$dV = dz \cdot A$$

$$dP = dm \cdot g = \rho dV \cdot g = \rho \cdot A \cdot g dz$$

$$\frac{dP}{dz} \stackrel{\text{def}}{=} p(z) = \rho A g \text{ sulla singola sezione} \Rightarrow P = \int_0^L p(z) dz \text{ carico totale agente sulla sezione}$$



Analisi delle caratteristiche della sollecitazione interne alla struttura; non è rilevante ciò che accade agli estremi; i vincoli si considerano condizioni al contorno.

$$N = -p(z) + N_0 \equiv N_0$$

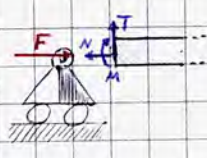
$$\frac{dT}{dz} = -q = \text{cost} \Rightarrow T = -qz + T_0$$

incognite che specializzano il problema alle specifiche condizioni tramite le condizioni al contorno (La dimensione di un contorno di un oggetto è $n-1$, con n pari alla dimensione dell'oggetto: un oggetto 3D ha contorno bidimensionale).

$$\frac{dM}{dz} = T = -qz + T_0 \Rightarrow M = -q \frac{z^2}{2} + T_0 z + M_0$$

Il contorno della struttura è costituita dai punti A e B.

In A, $\begin{cases} N(z=0) = -F \Rightarrow N_0 = -F \\ T(z=0) \neq 0 \text{ indeterminata a causa della reazione vincolare ignota} \\ M(z=0) = 0 \text{ il carrello non impone vincolo alla rotazione} \rightarrow z=0 \Rightarrow M_0 = 0 \end{cases}$



Si osserva che essendo la struttura isostatica si ottengono 2 condizioni da un polo e la terza dallo altera.

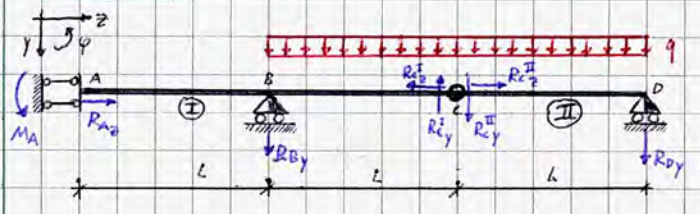
In B, $\begin{cases} N(z=L) \neq 0 \text{ vincolo} \\ T(z=L) = +3F \Rightarrow -qL + T_0 = 3F \Rightarrow T_0 = 3F + qL \\ M(z=L) \neq 0 \text{ vincolo} \end{cases}$

Se il segno delle caratteristiche di sollecitazione è costante, la caratteristica è costante in segno: ad esempio, T è costante in segno e > 0 poiché $T_A > 0$.

Dunque, $M = -q \frac{z^2}{2} + (3F + qL)z$; $T = -qz + 3F + qL$; $N = -F$

Si osserva che l'identificazione delle caratteristiche della sollecitazione forniscono informazioni non solo sulle forze interne alla struttura, ma anche le informazioni tratte dalle ECS (il conio di trave è generalmente di dimensioni arbitrarie): Nell'esempio precedente si osserva che $|R_A| = |T_A|$.

Esercizio



dot. Mario ARGENZIANO
mario.argenziano@uniroma1.it

Risolviamo inizialmente la valutazione sulle condizioni di labilità della struttura per poi risolverne l'equilibrio e valutare le caratteristiche della sollecitazione.

Consiglio: pur essendo concettualmente, nelle prime applicazioni conviene considerare tutte le reazioni vincolari concordi con il riferimento!

$3t - s = l + i$; $6 - (2(A) + 1(B) + 2(C) + 1(D)) = 0 \Rightarrow l = i$ $3t - s = 0$ è una condizione **NECESSARIA** per l'isostaticità!

Per valutare l applichiamo la teoria dei centri istantanei di rotazione: essendovi due tratti, la struttura è labile se si identificano 2 centri assoluti di rotazione ed un centro relativo allineati.

Considerando il primo tratto, risulta evidente che le condizioni sui centri di rotazione imposte dai vincoli sono incompatibili, dunque non esiste il centro assoluto di rotazione sul primo tratto; analogamente non esiste centro assoluto di rotazione sul secondo tratto (la cerniera in C è incompatibile col carrello in D), dunque $l = 0$ e la struttura è isostatica.

Per valutare il punto di applicazione di un qualsiasi carico distribuito si utilizza la relazione:

$$\bar{z} = \frac{\int_0^L q(z) \cdot z \, dz}{\int_0^L q(z) \, dz}$$

Per valutare l'equilibrio statico scomponiamo q in due carichi ripartiti di estensione L che insistono su tronchi diversi. Applicando le ECS risulta:

ⓐ $\begin{cases} R_{Ax} - R_{Cx} = 0 \Rightarrow R_{Ax} = 0 \\ R_{By} + R_{Cy} + qL = 0 \Rightarrow R_{By} = -\frac{3}{2}qL \\ M_A + R_{By} \cdot L + qL^2/2 = 0 \Rightarrow M_A = qL^2 \end{cases}$

I segni negativi nel computo delle reazioni indicano che esse sono opposte rispetto a quanto ipotizzate; avendo considerato vettori sempre concordi con il riferimento si è certi che dette reazioni siano anche discordi col sistema di riferimento!

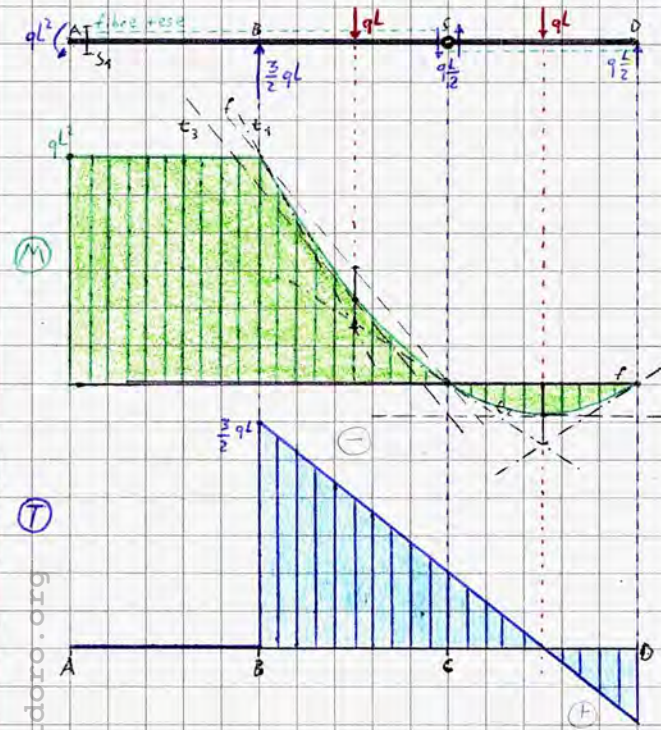
ⓑ $\begin{cases} R_{Cz} = 0 \Rightarrow R_{Cz} = 0 \\ R_{Cy} + R_{Dy} + qL = 0 \Rightarrow R_{Cy} = -qL/2 \\ -qL^2/2 - R_{Dy} \cdot L = 0 \Rightarrow R_{Dy} = -qL/2 \end{cases}$

Forze e coppie conc. \Rightarrow discont. in diagrammi
Identici nodi di sistemi di travi!

Consideriamo ora le caratteristiche della sollecitazione e rappresentiamone i diagrammi in scala, che forniscono informazioni qualitative e quantitative sulle grandezze in ogni punto e permettono di valutare facilmente le sezioni più affaticate della struttura. Può essere conveniente prescindere dai vincoli e considerare solo le forze attive e reattive applicate alla struttura.

Ricordiamo che:

$$\begin{cases} \frac{dN}{dz} = -q_z(z) & \text{carico assiale} \\ \frac{dT}{dz} = -q_y(z) \\ \frac{dM}{dz} = T(z) \end{cases}$$



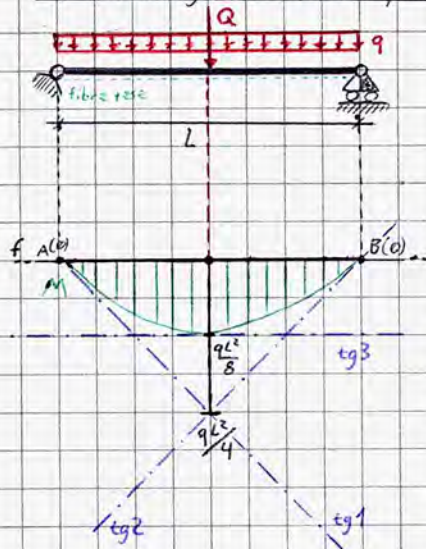
Gli elementi rispetto ai quali è possibile scalare il grafico delle caratteristiche della sollecitazione possono essere un segmento (come in questo caso, con qL^2 nel diagramma del momento) e una pendenza (e dunque uno specifico angolo α).

Consideriamo il diagramma del momento, procedendo da A e considerando una sezione S_1 posta ad un dz da A (e il relativo vincolo). In AB il diagramma del momento, così come quello del taglio, può essere parabolico, lineare o costante; è un diagramma per tratti di continuità (come il taglio) e non presenta discontinuità in uno stesso tronco; osserviamo che nel tratto citato il momento è costante poiché dT/dz è una funzione costante: la causa dell'assenza di carichi su y il taglio in detto tratto è addirittura nullo; dalla terza equazione del sistema si osserva che $M = \text{cost.}$

In BC è applicato un carico uniformemente distribuito che implica che il taglio è al più lineare e di conseguenza M è al più una funzione parabolica del secondo ordine. Essendo il momento nullo in C a causa della cerniera interna, è possibile rappresentare il primo tratto di parabola; segnando il procedimento esplicitato di seguito si effettua un ragionamento analogo su CD, ricordando che essendo D il limite della trave e non essendovi alcuna coppia attiva o reattiva il momento è nullo. Δ Il diagramma va sempre tracciato dal lato delle fibre tese.

Dalla terza equazione del sistema risulta evidente come i diagrammi di taglio e del momento siano interconnessi; infatti il taglio risulta nullo su AB per assenza di sollecitazioni, pari a $\frac{3}{2}qL$ poiché la reazione del vincolo rispetta la convenzione positiva; non varia di pendenza in C poiché le sollecitazioni al taglio sono uguali e opposte e dunque le tangenti al grafico coincidono; è nullo in corrispondenza al valore minimo di M e pari (in modulo) a R_{Dy} in D.

Costruzione grafica di momenti parabolici (momenti in funzione di un carico ripartito)



Sul diagramma si considerano i punti estremi del tratto con il relativo valore del momento (in questo caso nullo in entrambi i punti) e la retta che li unisce, detta **fondamentale** (in questo caso orizzontale, nell'esercizio precedente inclinata in un tratto).

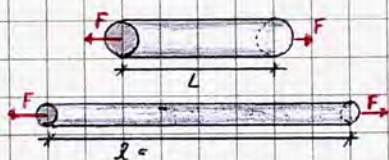
Successivamente si prolunga la retta di applicazione della risultante del carico ripartito, che interseca la fondamentale in un determinato punto (in questo caso in mezzeria).

Da detto punto si stacca una distanza pari a $\frac{q \cdot (\text{Luce del tratto})^2}{4}$ (in questo caso $\frac{qL^2}{4}$) per poi condurre due rette dagli estremi che definiscono la fondamentale al punto: dette rette sono due tangenti al grafico del momento (che essendo parabolico poiché q è costante e dunque T è lineare, è parabolico e dunque richiede almeno tre tangenti e un punto noto per essere rappresentato).

A una distanza dal punto pari alla metà della distanza stabilita in precedenza si traccia una retta parallela alla fondamentale, coincidente con la terza tangente e che identifica il valore assunto dal momento in mezzeria (ovvero all'intersezione con la retta di applicazione del carico ripartito; in questo caso è pari a $\frac{qL^2}{8}$).

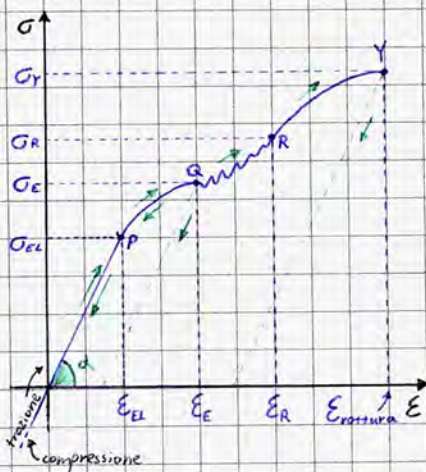
Teoria elastica delle Travi

derivata principalmente ad Euler e Bernoulli.



Elasticità: novità negli studi; introduce la deformabilità dei corpi e un nuovo legame costitutivo.

Possiamo considerare una tipica prova di trazione/compressione (solitamente su volumi normati, cilindrici o prismatici): spesso nel campo elastico il materiale si comporta indifferente dal punto di vista meccanico (fino a certi livelli di sforzo \Rightarrow la risposta è la stessa in ambito elastico lineare). Ciò si attua con 2 sistemi di clamping che ammassano il provino; uno dei due avanza registrando una curva che tradizionalmente era in un diagramma Forza - spostamento; attualmente invece si considera il diagramma tensione (sforzo) - deformazione (a fianco).



$$\sigma = \frac{F}{A} \quad \begin{matrix} \text{(forza)} \\ \text{(area)} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{tensione} \\ \text{(stress)} \end{matrix}$$



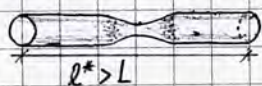
Le prove si effettuano in condizioni geometriche e di carico più elementari possibili in modo tale da avere valori normati.

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L} \quad \begin{matrix} \text{deformazione ingegneristica} \\ \text{(spesso espressa in percentuale)} \end{matrix}$$

$$= \frac{L - L_0}{L_0} \quad \text{adimensionale, \%}$$

Nel grafico si osservano diversi comportamenti; quelli più interessanti ai sensi del progetto strutturale sono quello elastico lineare (EL) e quello elastico non lineare (E), entrambi comportamenti conservativi: se il materiale è soggetto ad una forza nel processo di carico, con lo scarico esso è in grado di restituire tutta l'energia ricevuta durante il carico (è un'idealizzazione: in realtà vi è sempre dissipazione!); si punta a progettare strutture che operano in questo ambito.

Dal punto Q il comportamento del materiale è non elastico e non lineare, in cui il processo di scarico segue una retta parallela alla retta della fase elastica lineare; esiste dunque una E residua; tipicamente si nota una strizione centrale con corciamento delle aree circostanti (micro cricche). Infine, nel punto Y si ha il punto di rottura, qui corrispondono i valori:



• σ_Y yield stress: resistenza meccanica, limite oltre il quale il materiale non è in grado di sopportare un carico.

• $E_{rottura}$: elongation at break

Alla E residua corrisponde un'energia dissipata: l'integrale della curva suddetta misura l'energia per unità di volume; considerando l'integrale lungo il cammino di carico e scarico è possibile valutare l'entità dell'energia dissipata (dopo aver moltiplicata per il volume del campione).

Energia dissipata

Abbiamo dunque osservato che per $0 \leq \epsilon \leq \epsilon_{EL}$, la legge che schematizza il comportamento del materiale, detta legge di elasticità lineare o legge di Hooke generalizzata, è la seguente:

$$\sigma = E \epsilon$$

E rappresenta il Modulo di Young, anche noto come rigidità o modulo di elasticità longitudinale, prima caratteristica fondamentale che qualifica il materiale: maggiore il valore di E maggiore è la sua rigidità, ovvero minore è la sua elasticità/deformabilità. Dal grafico tensione-deformazione si osserva che:

$$E = \sigma / \epsilon$$

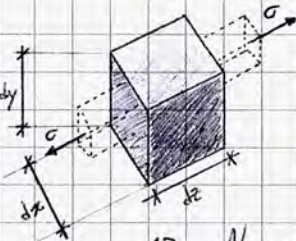
$$E [] \text{ MPa}$$

$$E_{\text{acciaio}} \approx 200 \text{ GPa}$$

$$E_{\text{acciaio}} \approx 200 \text{ GPa}$$

Si nota infatti che all'aumentare di d il materiale è più rigido; se d tende a $\sqrt{2}$ il comportamento del materiale tende ad essere paragonabile all'ipotesi di corpo rigido.

Studiamo più nel dettaglio il comportamento elastico lineare:



$$du = E dz \text{ (spostamento)}; \quad L = \sigma \cdot \underbrace{A}_{dx \cdot dy} \cdot \underbrace{du}_{dz}$$

Ne segue che $\int SL = \int \sigma dx dy dE dz = \int \sigma dE \int dx dy dz = \int \sigma dE dV \Rightarrow \frac{SL}{dV} = \sigma dE = \delta \varphi$

nel caso unidimensionale è pari a σdE

1D: Ne segue che $\varphi = \int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma dE$. Se $\varphi = \oint \sigma dE \rightarrow 0$, il materiale recupera tutta l'energia (comportamento ELASTICO)
 $\rightarrow \neq 0$, esiste una dissipazione di energia

L'energia così calcolata è un'unità specifica; va moltiplicata per il volume dell'oggetto studiato per determinare l'energia totale dissipata.

! σ_y si misura in MPa ma è un parametro di resistenza meccanica: oltre quel valore il materiale "collassa".
 Pur condividendo l'unità di misura, E non è un parametro di resistenza: permette di comprendere solo quanto sia deformabile il materiale, non quando si rompe.

$$\sigma_y \text{ Acciaio dolce} = 400 \text{ MPa}$$

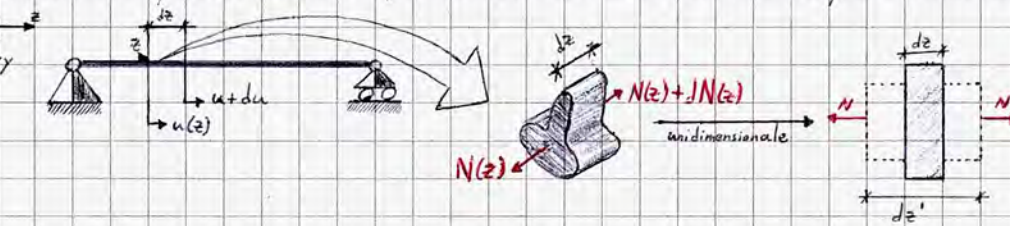
$$\sigma_y \text{ Acciaio armonico} = 4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$$

! La tensione ha le stesse unità di misura della pressione, ma non è necessariamente normale alla superficie (può anche essere tangenziale, nel caso di strisciamento); si può dire che la pressione è una particolare tensione.

Nella deformazione ingegneristica si sceglie di considerare il rapporto adimensionale tra la variazione di lunghezza e la lunghezza iniziale perché in questo modo è possibile valutare immediatamente l'entità della deformazione: una Δl di 1 m può essere significativa (e causa di un imminente collasso strutturale) per campate ridotte - usate ad esempio in edilizia - o trascurabile per campate più consistenti, come quelle di grandi infrastrutture; è evidente l'importanza di commisurare l'allungamento alla lunghezza iniziale.

Grazie all'ipotesi di elasticità è possibile risolvere strutture iperstatiche tramite una successiva elaborazione delle Equazioni differenziali dell'equilibrio: il legame costitutivo lega l'azione statica con gli effetti deformativi (causa ed effetto).

In un'ipotesi di elasticità ad una trave in cui sia presente il solo sforzo normale \Rightarrow caso estensionale.



Si osserva che il legame costitutivo elastico introduce una funzione spostamento u che esplica lo spostamento delle singole sezioni di trave nella variazione di lunghezza della stessa.

Osserviamo dunque che $du = E dz \Rightarrow \frac{dz' - dz}{dz} = \epsilon \quad \Delta dz = E dz = du$

equazione di congruenza/compatibilità; da ciò otteniamo che $\frac{du}{dz} = \epsilon$, condizione da poter aggiungere alle equazioni differenziali dell'equilibrio!

Dal legame costitutivo del comportamento elastico lineare, $\sigma = E \epsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \epsilon \Rightarrow \frac{N}{A} = E \frac{du}{dz} \Rightarrow N = EA \frac{du}{dz}$ relazione costitutiva

rigidezza assiale (l'area della sezione retta è importante)

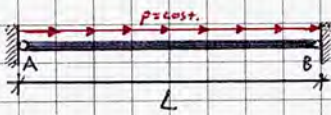
Per il problema di travi in puro regime estensionale (sic: dilatazione che contrazione):

• Per l'equilibrio: $\frac{dN}{dz} = -p(z)$

• Per le leggi costitutive (legame elastico): $N = EA \cdot \epsilon$

• Per le equazioni di compatibilità/congruenza (parametri geometriche): $\epsilon = \frac{du}{dz}$

Esempio



Supponiamo che nella struttura iperstatica in figura vi sia deformabilità; a prescindere dalla sua effettiva entità, possiamo determinare univocamente le reazioni vincolari. Ipotesizzando che la struttura permanga in uno stato tale da avere comportamento elastico lineare,

$\frac{dN}{dz} = -p(z) = -p \Rightarrow N = -pz + N_0$ comportamento al più lineare

$N = EA \epsilon \Rightarrow \frac{du}{dz} = \frac{N}{EA}$ = supponendo EA costante $\Rightarrow u = \int \frac{N dz}{EA} = \frac{1}{EA} \left(-\frac{pz^2}{2} + N_0 z + u_0 \right)$ campo di spostamento quadratico!

Per determinare u_0 e N_0 , consideriamo le condizioni al contorno:

A: $\begin{cases} N(z=0) \neq 0 \\ u(z=0) = 0 \rightarrow u_0 = 0 \end{cases}$

I vincoli non consentono di det. le R (elast. \Rightarrow no ECS)

è possibile dunque calcolare u in mezzera:

$u_c = u\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{p}{2EA} \cdot \frac{L^2}{4} = \frac{pL^2}{8EA}$

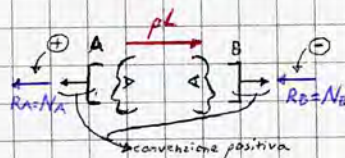
B: $\begin{cases} N(z=L) \neq 0 \\ u(z=L) = 0 \rightarrow \frac{1}{EA} \left[-p\frac{L^2}{2} + N_0 L \right] = 0 \Rightarrow N_0 = p\frac{L}{2} \end{cases}$

osserviamo che lo spostamento varia QUADRATICAMENTE: se la lunghezza di progetto raddoppia bisogna prevenire spostamenti 4 quadruplicati!

Dunque possiamo valutare le reazioni vincolari:

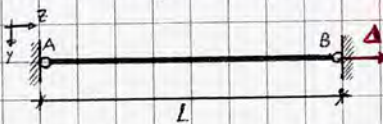
$N(z=0) = -p(0) + p\frac{L}{2} = p\frac{L}{2}$

$N(z=L) = -p \cdot L + p\frac{L}{2} = -p\frac{L}{2}$



Δ Il calcolo delle reazioni con le Caratt. Soll. rispetta la convenzione positiva delle caratt. soll.

Possiamo anche considerare, invece di un carico assiale ripartito, un cedimento anelastico Δ, ovvero un cedimento che non dipende dall'elasticità del materiale: in un pilastro ad esempio ciò può essere dovuto a un terreno bagnato che provoca uno spostamento di 3cm; essendo il materiale deformabile è possibile risolvere la struttura; nell'ipotesi rigida ciò sarebbe impossibile poiché la struttura non potrebbe dilatarsi!



$\frac{dN}{dz} = -p(z) \Rightarrow N = N_0$; $\frac{du}{dz} = \frac{N}{EA} \Rightarrow u = \frac{N_0 z}{EA} + u_0$

Condizioni al contorno: A $\begin{cases} u(z=0) = 0 \Rightarrow u_0 = 0 \\ N(z=0) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow u(z) = \frac{EAz}{L EA} \Delta = \frac{z}{L} \Delta$

B $\begin{cases} u(z=L) = \Delta \Rightarrow \frac{N_0 L}{EA} = \Delta \Rightarrow N_0 = \frac{EA}{L} \Delta \Rightarrow N(z) = \bar{N} = N_0 = \frac{EA}{L} \Delta \end{cases}$

Osservazione: contrariamente al caso precedente, lo sforzo normale dipende dal materiale (dalla rigidità assiale) in maniera lineare: allo aumentare della rigidità aumenta - anche significativamente - lo sforzo normale!

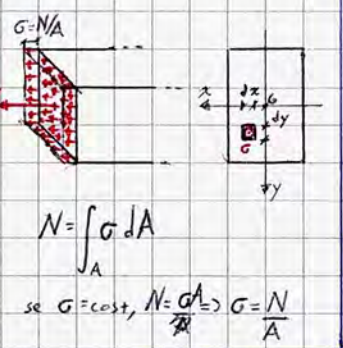
Se si prevede un mesurabile cedimento anelastico (ad esempio per dilatazione termica) si è vincolati al progetto di giunti (per non produrre Δ): le strutture iperstatiche producono sollecitazioni, i giunti tengono da "stogo" o ad attenuare a esigenze di robustezza della struttura evitando tensioni spicie con conseguenti instabilità.

Lo spostamento è invece un risultato puramente geometrico che non dipende né dal materiale (E) né dalla sezione (A), ciò perché in assenza di altre condizioni di carico la struttura deve necessariamente rispettare il cedimento anelastico imposto.

Caratteristica fondamentale di un buon modello è che si in grado di resistere sollecitazioni anche insperate!

Consideriamo ora lo studio della linea elastica flessionale, caso più articolato ed interessante della linea elastica tensionale. Per semplicità, consideriamo una trave in cui sia presente il solo regime flessionale e supponiamo di essere in condizioni tali da avere comportamento elastico lineare nel materiale.

In regime tensionale, (tensione)

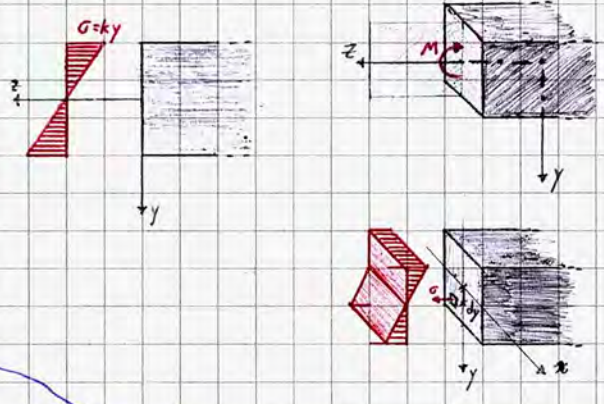


Nel caso flessionale la tensione si dispone in modo tale da determinare come risultante una coppia di forze che produce un momento, coincidente col momento flettente. Il caso più semplice che determina questo effetto è dovuto ad una distribuzione lineare di σ :

$$\sigma = ky$$

Detta distribuzione di tensione determina come risultante esattamente il momento flettente; dalla relazione suddetta, sapendo che:

$$dM = \underbrace{\sigma dA}_{dF} \cdot y$$



Otteniamo che $M = \int_A \sigma y dA = \int_A ky^2 dA = k \int_A y^2 dA$

Dunque $M = k I_x \Rightarrow \sigma = \frac{M}{I_x} y$ *Formula di Navier*

Momento d'inerzia rispetto all'asse baricentrica x

$$I_x := \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy = b \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12}$$

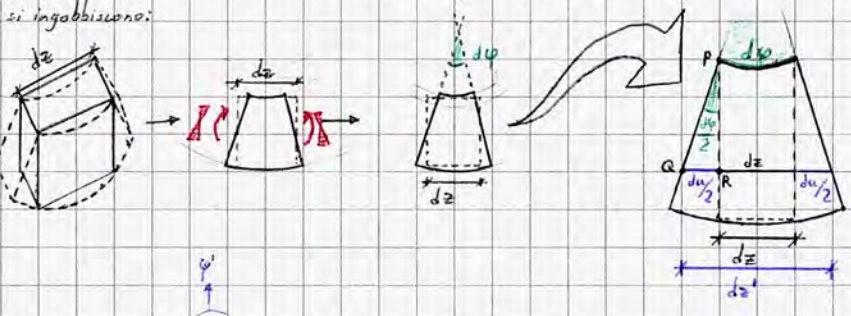
La formula di Navier è molto importante nei nostri studi: consente un primo dimensionamento/verifica strutturale; permette di osservare che le fibre più sollecitate nella flessione sono quelle più distanti dall'asse neutro, luogo geometrico (nel piano della sezione) dei punti in cui si annullano le tensioni normali dovute alla flessione (in questo caso coincidenti con l'asse x).

La tensione σ in un punto è inoltre legata al momento d'inerzia I_x ; è dunque possibile riferirsi ad un valore massimo ammissibile di σ in un dato materiale e verificare se i momenti flettenti nella struttura sono compatibili.

Osservazione: Nella formula di Navier interviene solo l'inerzia, non l'area! A parità di area una sezione ha maggiore inerzia rispetto ad un asse se è più centrifugata rispetto a detto asse.

Osserviamo il fenomeno dal punto di vista cinematico: tramite la relazione elastica si ottiene $\epsilon = \sigma/E$, e dunque $\epsilon = \frac{M}{E I_x} y$; fissata la I_x (variabile nel caso di variazioni di sezione) e il materiale si osserva che la deformazione aumenta linearmente con y .

Nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, che prescrive che nella deformazione le sezioni - particolarmente quelle laterali - restano piane, non si ingobbiscono:



Tramite gli schemi a fianco osserviamo che:

$$\epsilon = \frac{d\epsilon' - d\epsilon}{d\epsilon} = \frac{du + dz - dz}{dz} = \frac{du(y)}{dz} = \frac{d\varphi \cdot y}{dz}$$

Cio perché $\epsilon y \frac{d\varphi}{dz} = \frac{du}{dz} = \frac{du}{y}$; essendo $d\varphi$ infinitesimo si ha

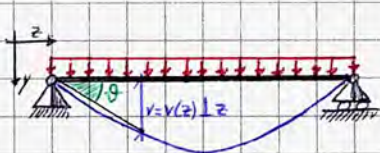
quindi che $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{du}{zy} \Rightarrow d\varphi = \frac{du}{y} = \epsilon \frac{dz}{y}$

$$\epsilon = \frac{d\varphi \cdot y}{dz} \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\epsilon}{y} = \frac{M}{E I_x} \left(\frac{M \cdot y}{E I_x \cdot y} \right)$$

Si ottiene dunque che $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{E I_x}$, da cui è possibile valutare la deformazione totale delle strutture: φ è il parametro che descrive al meglio la variazione delle geometrie a causa del regime flessionale.



Nello studio di travi in regime flessionale è utile formulare le seguenti ipotesi:



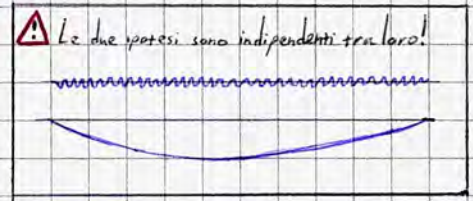
• Ipotesi di piccoli spostamenti: $\max |v(z)| \ll L$, $0 \leq z \leq L$

v : spostamento della sezione dovuto alla flessione della trave.

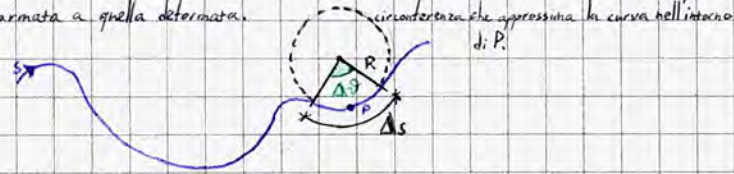
Quest'ipotesi evita di dover scrivere le equazioni della configurazione deformata della trave; inoltre l'ipotesi è coerente con gli obiettivi progettuali in ambito edilizio.

• Ipotesi di piccole deformazioni: $\left| \frac{dv}{dz} \right| = |v'(z)| \ll 1 \Leftrightarrow \text{tg } \vartheta \approx \vartheta$

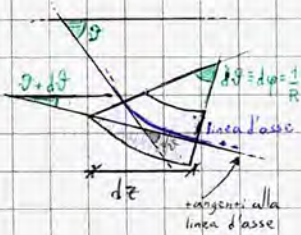
Nella deformazione, una trave da rettilinea diventa curva; detto fenomeno, quando osservato, lascia supporre che la trave sia in deformazione. È possibile dunque assumere come "metrica" (misura) di deformazione flessionale la curvatura della linea d'asse della trave, ovvero più precisamente la variazione di curvatura dalla configurazione indeformata a quella deformata.



$$\chi = \frac{v''}{(1+(v')^2)^{3/2}} := \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vartheta}{\Delta s} = \vartheta'(s)$$



Poiché per ipotesi $v' \ll 1$, sappiamo che $(v')^2 \ll 1 \Rightarrow 1+(v')^2 \approx 1 \Rightarrow \chi \approx v'' = \frac{1}{R}$ curvatura linearizzata



Dallo schema a fianco si osserva che $d\vartheta \equiv d\varphi$;

Ne segue che $\text{tg } \vartheta \approx \text{tg } \varphi = v' \Rightarrow \text{tg } \vartheta \approx \vartheta \approx \varphi \approx v' \Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \varphi' = v'' = \chi$

Da ciò si ottiene un'ulteriore condizione di equilibrio per determinare le caratteristiche della sollecitazione:

⚠ in questo caso yz NON è un riferimento levogiro, dunque $\frac{dv}{dz} = -\varphi'$

$$\frac{dT}{dz} = -q(z)$$

equazioni differenziali dell'equilibrio

$$\frac{dM}{dz} = T$$

angolo della retta tangente alla linea elastica flessionale

$$\chi = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI}$$

dalla relazione $\sigma = \frac{M}{I}$ si risale alla tensione (lineare) generalizzata

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi$$

equazione di congruità o compatibilità geometrica

L'effetto della flessione sulla curvatura deve tener conto sia del materiale che del momento d'inerzia; la seconda condizione è facilmente verificabile con un taglio di carta:

Stesso schema statico, stesso materiale, determinazione differente

$I < I'$

Deriviamo ulteriormente l'ultima equazione:

$$\frac{dv}{dz} = -\varphi \Rightarrow v'' = -\varphi' = -\frac{M}{EI} \Rightarrow M = EIv'' \Rightarrow M' = (-EIv''')$$

Ipotezzando $EI = \text{cost.}$, $M' = -EIv''' = T \Rightarrow T' = -EIv^{(4)} = -q$

equazione differenziale del quarto ordine della linea elastica flessionale; lega direttamente il carico alla flessione.

Effetti della temperatura sulla linea elastica flessionale

In presenza di una dilatazione termica, le equazioni della linea elastica flessionale si arricchiscono di un contributo anelastico, ovvero deformativo ma non di origine elastica:

$$\frac{\Delta L}{L} = \epsilon = \alpha \Delta T$$

coefficiente di dilatazione termica $[\alpha] = 1/^\circ C$, sempre > 0

Come per la dilatazione termica, anche la deformazione dovuta a sollecitazioni va a regime dopo un certo tempo dovuto alla velocità di propagazione dell'onda elastica nel mezzo; nel caso dell'acciaio, semplificando i calcoli, otteniamo:

$$v \propto \sqrt{\frac{E}{\rho}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^7 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2}{8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 10^{11}}{8 \cdot 10^3}} = \sqrt{25 \cdot 10^6} = 5 \text{ km/s}$$

⚠ $1 \text{ daN} = 9,81 \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

Date le elevate velocità la propagazione dell'effetto elastico è considerata spesso istantanea.

Ipotesi fondamentali nello studio di T

Consideriamo una trave soggetta a differenti temperature tra le sue due facce (tipico nel caso di una trave di copertura), entrambe differenti da una temperatura "ambiente"; per semplicità consideriamo una variazione simmetrica, in cui $|\Delta T^+| = |\Delta T^-| = \Delta T$ (rispetto alla temperatura ambiente) e consideriamo una fibra della trave ad una certa y , ricordando le equazioni studiate in precedenza.

A regime, le equazioni di Fourier determinano un andamento lineare:

$$\Delta T(y) = \frac{2\Delta T}{h} y = \frac{\Delta T}{h} y$$

Da ciò segue che:

$$\chi^a = \frac{\alpha \Delta T \cdot y}{h y} = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

curvatura anelastica (dovuta a T)

rigorosa nel caso di geometrie rettangolari; per altre sezioni al posto di h si considera l'altezza significativa o efficace.

Ricordiamo la curvatura nel caso elastico sollecitativo: (flessionale)

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\epsilon}{\rho} = \frac{\epsilon}{y}$$

$\chi = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\epsilon}{y}$ Stress ϵ della linea flessionale

Dunque, nel caso di effetti dovuti alla temperatura, si considera il sistema:

$$\begin{cases} \frac{dT}{dz} = -q(z) \\ \frac{dM}{dz} = T \\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{h} \\ \frac{dv}{dz} = -\varphi \end{cases}$$

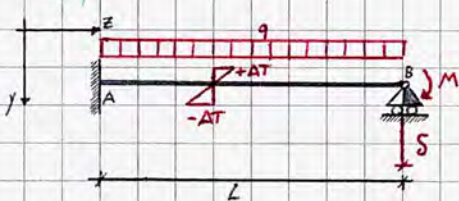
La curvatura totale è la somma delle curvature elastica e anelastica; il problema è in ambito lineare.

Nel caso di carichi termici asimmetrici, è possibile scomporre il carico in una parte uniforme ed una "a tartarola" simmetrica:



Se $\chi^a > 0$ (tende fibre inf)

Esempio



Supponiamo che la trave abbia comportamento elastico lineare; è teoricamente possibile applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per risolvere gli effetti dovuti ai singoli carichi (cioè è possibile se cause ed effetti sono legate linearmente, ovvero se $f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2) = f(x_1+x_2, y_1+y_2)$); infatti è possibile sommare tra loro i singoli contribuenti alle reazioni vincolari; il problema però non è ad esempio lineare rispetto alle lunghezze.

Struttiamo le relazioni che coinvolgono le caratteristiche della sollecitazione, ricordando di non considerare le condizioni al contorno.

$$\begin{cases} \frac{dT}{dz} = -q(z) = -q \Rightarrow T = -qz + T_0 \\ \frac{dM}{dz} = T \Rightarrow M = -\frac{qz^2}{2} + T_0 z + M_0 \\ \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta T}{h} \Rightarrow \text{supponiamo } \alpha, EI = \text{cost.} \Rightarrow \varphi = \frac{1}{EI} \left(-\frac{qz^3}{6} + \frac{T_0 z^2}{2} + M_0 z \right) + \varphi_0 - \frac{\alpha \Delta T z}{h} \\ \frac{dv}{dz} = -\varphi \Rightarrow v = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{qz^4}{24} + \frac{T_0 z^3}{6} + \frac{M_0 z^2}{2} \right) - \varphi_0 z + \frac{\alpha \Delta T}{2h} z^2 + v_0 \end{cases}$$

no contorno!

⚠ Negli esercizi di Scienza delle Costruzioni è fondamentale organizzare in serie cosa bisogna considerare: valutare ogni dato contemporaneamente non è MAI una strategia efficace!

Introduciamo le condizioni al contorno, che specializzano le equazioni suddette:

A $\begin{cases} \varphi(z=0) = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0 \\ v(z=0) = 0 \Rightarrow v_0 = 0 \end{cases}$

B $\begin{cases} M(z=L) = -M \\ v(z=L) = S \end{cases}$ la coppia applicata tende le fibre superiori

$$v(z=L)=\delta \Rightarrow \frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{24} + \frac{T_0L^3}{6} + \frac{M_0L^2}{2} \right) + \frac{\Delta T L^2}{2h} = \delta \Rightarrow -\frac{1}{EI} \left(\frac{qL^4}{24} + \frac{T_0L^3}{6} - \frac{ML^2}{2} - \frac{T_0L^3}{6} + \frac{qL^4}{4} \right) + \frac{\Delta T L^2}{2h} = \delta$$

$$-\frac{1}{EI} \left(T_0 \left(\frac{L^3}{6} - \frac{L^3}{2} \right) + qL^4 \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24} \right) - \frac{ML^2}{2} \right) = \delta - \frac{\Delta T L^2}{2h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{T_0L^3}{3EI} - \frac{5qL^4}{24EI} + \frac{ML^2}{2EI} = \delta - \frac{\Delta T L^2}{2h} \Rightarrow T_0 = \frac{3EI}{L^3} \left(\frac{5qL^4}{24EI} - \frac{ML^2}{2EI} - \frac{\Delta T L^2}{2h} + \delta \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{3}{8}qL - \frac{3M}{2L} - \frac{3\Delta T EI}{2hL^3} + \frac{3SEI}{L^3}$$

all'aumentare della rigidità delle viti aumentano le sollecitazioni termiche e diminuisce lo spostamento!

coincide con la somma lineare dei singoli contributi: il taglio è lineare rispetto alla coppia applicata, la temperatura, il cedimento elastico e il carico distribuito; non rispetto alla lunghezza.

$$M(z=0) = -M \Rightarrow -q\frac{L^2}{2} + T_0L + M_0 = -M \Rightarrow M_0 = -M - T_0L + q\frac{L^2}{2};$$

$$M_0 = -M - \frac{3}{8}qL^2 + \frac{3M}{2} + \frac{3}{2} \frac{\Delta T EI}{h} - \frac{3SEI}{L^2} + q\frac{L^2}{2} = \frac{1}{2}M + \frac{1}{8}qL^2 + \frac{3EI}{L^2} \left(\frac{\Delta T}{2h} - \frac{\delta}{L} \right)$$

In una struttura isostatica i cedimenti sui vincoli possono sempre moti rigidi, mai sollecitazioni: la curvatura anelastica termica in simili strutture determina deformazioni senza sollecitazioni al contorno.

Possiamo ora conoscere le caratteristiche della sollecitazione in ogni punto; ad esempio sappiamo che $T(z=L) = \frac{-5qL}{8} - \frac{3M}{2L} - \frac{3\Delta T EI}{2hL} + \frac{3SEI}{L^3} \Rightarrow T_B$ è posizionato in maniera coerente rispetto alla reazione verso il basso

Esercizi



Valutiamo le caratteristiche della sollecitazione:

Linea elastica flessionale

$$M(z) = K_x \cdot \chi \approx E \cdot I_x \cdot (-v'') \xrightarrow{\frac{d^2M(z)}{dz^2} = q(z)} EI v'' = q \quad (1)$$

flessione elastica ipotesi di piccole deformazioni

$$N(z) = EA \cdot \epsilon_z = EA \left(\frac{du}{dz} \right) \xrightarrow{\frac{dN(z)}{dz} = -p(z)} EA \cdot u'' = -p(z) \quad (2)$$

deformazione assiale

$$\begin{aligned} EI v^{(4)} &= q; \\ EI v''' &= qz + C_0 = -T(z); \\ EI v'' &= \frac{qz^2}{2} + C_0z + C_1 = -M(z); \end{aligned}$$

$$EI v' = \frac{qz^3}{6} + C_0 \frac{z^2}{2} + C_1z + C_2 = -\varphi(z) \cdot EI; \int dz = \varphi(z)$$

$$EI v = \frac{qz^4}{24} + C_0 \frac{z^3}{6} + C_1 \frac{z^2}{2} + C_2z + C_3$$

abbassamento

Caso Estensionale

$$\begin{aligned} EA \cdot u''(z) &= 0 \quad (p=0) \\ EA \cdot u'(z) &= d_0 \\ EA \cdot u(z) &= d_0z + d_1 \end{aligned}$$

Dalla risoluzione delle equazioni differenziali è possibile risolvere la struttura introducendo le condizioni al contorno nella loro dualità statico-cinematica:

si uguagliano in modulo alle reazioni M_A, R_B, C_{Rx}

$$A: \left\{ \begin{aligned} M_A = M(z=0) \neq 0 \\ T_A = T(z=0) \neq 0 \\ N_A = N(z=0) \neq 0 \end{aligned} \right. \text{statica}$$

$$B: \left\{ \begin{aligned} \varphi_B = \varphi(z=L) \neq 0 \\ \psi_B = 0 \Rightarrow v(z=L) = -u(z=L) \cdot \cotg d \end{aligned} \right. \text{cinematica}$$

$$B: \left\{ \begin{aligned} M_B = M(z=L) = 0 \quad (4) \\ R_B = R(z=L) \neq 0 \quad (5) \\ R_B z = R_B, \cotg d \\ \downarrow \\ |N(z=L)| \end{aligned} \right. \left\{ \begin{aligned} \psi_B = \varphi(z=L) \neq 0 \\ \psi_B = 0 \Rightarrow v(z=L) = -u(z=L) \cdot \cotg d \end{aligned} \right. \text{(6)}$$

spostamento lungo l'asse del carrello (r)

Osserviamo che, in base alle caratteristiche della struttura e della sollecitazione:

$$\underbrace{u \cdot r = 0}_{\text{rotazione}} \quad \left(\begin{array}{l} \underline{u} \equiv [u, v] \\ \underline{r} \equiv [\cos d, \sin d] \end{array} \right)$$

$$u \cos d + v \sin d = 0 \Rightarrow v = -u \cotg d$$

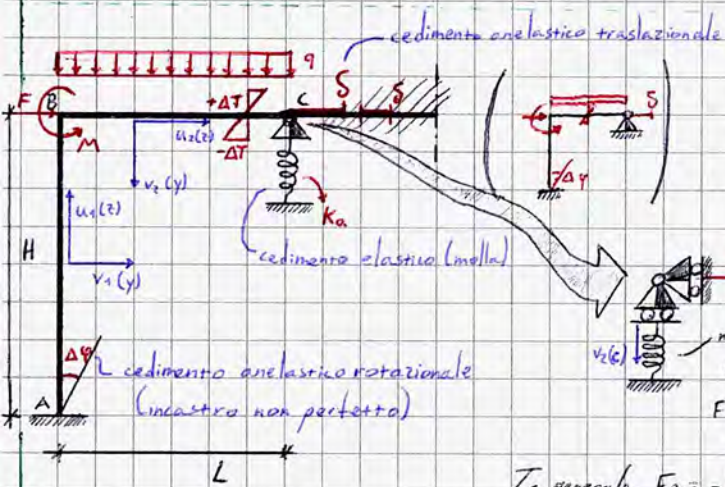
$$\underbrace{R \cdot s = 0}_{\text{traslazione}} \quad \left(\begin{array}{l} \underline{R} = [-R_{By}, -R_{Bz}] \\ \underline{s} = [-\cos d, \sin d] \end{array} \right)$$

$$-R_{By} \cos d - R_{Bz} \sin d = 0 \Rightarrow R_{Bz} \sin d = -R_{By} \cos d \Rightarrow R_{Bz} = R_{By} \cotg d$$

È dunque possibile risolvere il sistema di 6 equazioni (elencate alla pagina precedente) in 6 incognite ($c_0, c_1, c_2, c_3, d_0, d_1$)

Risolviamo ad esempio l'equazione (1); essendo i calcoli lunghi ed articolati ma con lo stesso metodo di calcolo le altre equazioni sono lasciate come esercitazione.

$$\varphi(z) = -\frac{qz^3}{6} - \frac{c_0 z^2}{2EI} - \frac{c_1 z}{EI} - \frac{c_2}{EI}; \quad \varphi(z=0) = 0 \Rightarrow -\frac{c_2}{EI} = 0 \Rightarrow c_2 = 0. \quad \text{si procede per sostituzione}$$



Per risolvere questo sistema particolarmente articolato si considerano i vari tratti di continuità scomponendo la trave in più tratti (l'asse della trave è una spezzata):

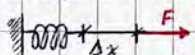
Consideriamo AB, il nodo B, BC.

Per AB scriviamo le equazioni della linea elastica flessionale ed estensionale

Per B consideriamo le equazioni dell'equilibrio e della congruenza

osservazione: $v_2 = -u_1$; $u_2 = v_1$ per i sistemi di riferimento locali assegnati.

In generale, $F_x = -K \Delta x$ (Legge di Hooke)



A causa della presenza della molla, si osserva che $R_{cy} = -K_a \cdot v_2$. L'asse del secondo carrello, ortogonale a quella della molla, implica che la sua reazione è indipendente da essa.

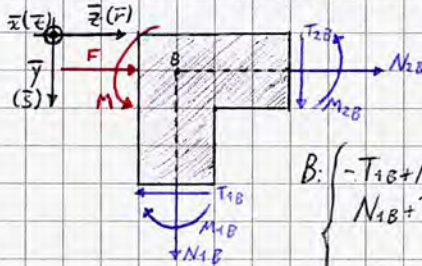
Una struttura isostatica non prevede sollecitazioni interne dovute a cedimenti (una struttura iperstatica sì!)

Consideriamo il dualismo statico-cinematico nei vari nodi:

$$A: \begin{cases} M_A \neq 0 \\ R_{Ay} \neq 0 \\ R_{Az} \neq 0 \end{cases} \text{ statica} \quad ; \quad \begin{cases} \varphi_A = \Delta \varphi \\ v_{1A} = 0 \\ u_{1A} = 0 \end{cases} \text{ cinematica}$$

$$C: \begin{cases} M_C = 0 \\ R_{Cy} \neq 0 \\ R_{Cz} \neq 0 \end{cases} \text{ statica} \quad ; \quad \begin{cases} \varphi_C \neq 0 \\ v_{2C} = -R_{Cy}/K_a \\ u_{2C} = \delta \end{cases} \text{ cinematica}$$

Consideriamo il concio elementare in B:



Da ciò possiamo considerare le equazioni nel nodo B:

$$B: \begin{cases} -T_{1B} + N_{2B} + F = 0 < \bar{z} > \\ N_{1B} + T_{2B} = 0 < \bar{y} > \\ -M_{1B} - M_{2B} + M = 0 < \bar{x} > \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} u_{1B} = -v_{2B} < \bar{y} > \\ v_{1B} = u_{2B} < \bar{z} > \\ \varphi_{1B} = \varphi_{2B} < \bar{x} > \end{cases}$$

Ne segue che per $0 \leq z \leq H$ si hanno 6 equazioni sul tratto AB
per $0 \leq z \leq L$ si hanno 6 equazioni sul tratto BC

Procedimento: dai tratti AB e BC si ottengono 12 equazioni in cui bisogna tener conto della differente variazione di z (in H e in L); infine si applicano le equazioni di equilibrio e congruenza sul nodo in B.

Introducendo le condizioni al contorno,

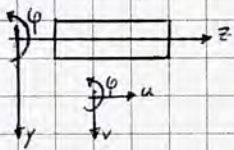
$$\begin{cases}
 (1) \begin{cases} -T_1(z_1=H) + N_2(z_2=0) + F = 0 & -T_{10} + N_{20} + F = 0 \\ N_1(z_1=H) + T_2(z_2=0) = 0 & N_{10} + T_{20} = 0 \end{cases} \\
 (2) \begin{cases} -M_1(z_1=H) + M_2(z_2=0) + M = 0 & -M_{10} + M_{20} + M = 0 \\ \varphi_1(z_1=H) = \varphi_2(z_2=0) & \varphi_{10} = \varphi_{20} \end{cases} \\
 (3) \begin{cases} u_1(z_1=H) = -v_2(z_2=0) & (4) \quad u_{10} = -v_{20} \\ v_1(z_1=H) = u_2(z_2=0) & (5) \quad v_{10} = u_{20} \\ \varphi_1(z_1=H) = \varphi_2(z_2=0) & (6) \quad \varphi_{10} = \varphi_{20} \end{cases}
 \end{cases}$$

$$M = K_x \cdot \chi = EI \cdot \chi = EI \left(-v'' + d \frac{\Delta T}{h} \right)$$

Sappiamo che: Da ciò è possibile esplicitare le reazioni incognite, ricordando l'incidenza del ΔT nella curvatura.

Metodo delle Forze

Riepilogando parzialmente alcune nozioni, si è osservato come una struttura iperstatica possa essere risolta con le equazioni differenziali di equilibrio, utilizzando le equazioni della linea elastica per l'analisi degli spostamenti (abbassamenti, rotazioni, spostamenti assiali). Nel caso di una struttura iperstatica, come visto nell'esercizio precedente, si impostano le equazioni della linea elastica in ogni tratto di continuità per individuare la configurazione di equilibrio.



$$\begin{cases}
 M = EI \chi \approx EI(-v''(z)) \\
 N = EA \epsilon_z = EA u'(z)
 \end{cases}$$

congruenza spostamenti-deformazioni

Equazioni della linea elastica: legano le caratteristiche della sollecitazione ad una deformazione tramite un coefficiente che a sua volta fornisce informazioni sul legame costitutivo (ed è in genere supposto costante).

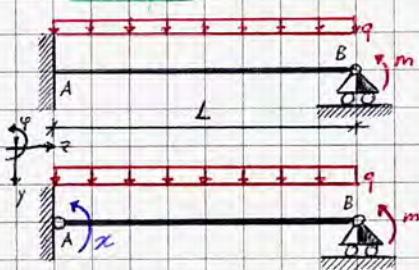
$$\begin{cases}
 \frac{dN(z)}{dz} = -p(z) \\
 \frac{dT(z)}{dz} = -q(z) \\
 \frac{dM(z)}{dz} = T(z)
 \end{cases}$$

Equazioni differenziali indefinite di equilibrio al concetto infinitesimale

Ricordiamo inoltre che gli spostamenti all'interno di una struttura devono essere compatibili col legame costitutivo e le condizioni al contorno esplicitate dai vincoli.

Nel caso di strutture più volte iperstatiche e/o costituite da più tronchi, la risoluzione di un generico problema implicherebbe la necessità di impostare sistemi di 6 equazioni in 6 incognite per ogni tratto di continuità. Nella Scienza delle Costruzioni però esistono dei metodi di calcolo differenti, che restituiscono un numero minore di informazioni ma consentono una risoluzione più agevole e rapida sull'intera struttura e che risultano molto più efficaci nella risoluzione di problemi mirati; tra questi figura il Metodo delle Forze, un metodo di risoluzione delle strutture iperstatiche in cui le incognite sono le forze intese in senso generale: sono incluse le sollecitazioni interne, vincolari e in momenti.

Esempio



La struttura a fianco è 1 volta iperstatica.

Il metodo delle forze assume un numero di forze (le reazioni iperstatiche) pari al grado di iperstaticità della struttura come incognite; costruendo uno schema ipostatico staticamente equivalente al precedente - ottenuto svincolando un numero di condizioni di vincolo pari al grado di iperstaticità e aggiungendo le reazioni sopresse a causa della riduzione della molteplicità dei vincoli come forze "attive" - è possibile ottenere delle incognite iperstatiche X_i .

Nel caso in esame è presente un'unica incognita dovuta al declassamento del vincolo incastrato.

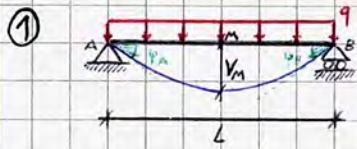
Per ripristinare la congruenza alla rotazione in A, non garantita dall'incognita in sé, occorre inoltre considerare una equazione di congruenza (nel nostro caso $\varphi(A) = 0$) che garantisce la congruenza assoluta con la struttura originaria.

Più in generale, allo schema si aggiunge un numero di equazioni di congruenza pari al grado di iperstaticità; esse rappresentano la dualità cinematica della condizione statica.

Teorema di Kirchhoff: Nel caso di un problema lineare sull'equilibrio elastico, se due sistemi strutturali continui possiedono le stesse caratteristiche statiche e cinematiche essi sono equivalenti; la soluzione al problema elastico è unica e determinata per entrambe.

Per la linearità, è possibile considerare la sovrapposizione degli effetti: $\varphi(A) = \varphi_A^{(q)} + \varphi_A^{(m)} + \varphi_A^{(X)} = 0$; $X?$

Nella risoluzione dell'equazione si utilizzano degli schemi notevoli (DA IMPARARE A MEMORIA!) ottenuti integrando le 6 equazioni (differenziali dell'equilibrio + linea elastica), come dimostrato nello schema 1.



$$\varphi_A = -\frac{qL^3}{24EI} = -\varphi_B \quad \text{per simmetria geometrica e di carico}$$

$$v_m = v(L/2) = \frac{5}{384} \left(\frac{qL^4}{EI} \right)$$

Dimostrazione

Per le condizioni al contorno,

$$EIv'''' = q$$

$$EIv''' = q \cdot z + c_0$$

$$EIv'' = q \cdot \frac{z^2}{2} + c_0 z + c_1 = -M(z) \quad \left\{ \begin{array}{l} M(z=0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ M(z=L) = 0 \Rightarrow c_0 = -q \cdot L/2 \end{array} \right.$$

$$EIv' = q \frac{z^3}{6} + c_0 \frac{z^2}{2} + c_1 z + c_2 = EI(-\varphi(z))$$

$$EIv = \frac{qz^4}{24} + c_0 \frac{z^3}{6} + c_1 \frac{z^2}{2} + c_2 z + c_3 \quad \left\{ \begin{array}{l} v(z=0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ v(z=L) = 0 \Rightarrow 0 = \frac{qL^4}{24} - \frac{qL^4}{12} + c_2 L \Rightarrow c_2 = \frac{qL^3}{24} \end{array} \right.$$

Ne segue che: $v(z) = \frac{qz^4}{24EI} - \frac{qLz^3}{12EI} + \frac{qL^3z}{24EI}$

$$\varphi(z) = -\frac{qz^3}{6EI} + \frac{qLz^2}{4EI} - \frac{qL^3}{24EI}$$

Da cui: $v(z=L/2) = \frac{qL^4}{(16 \cdot 24)EI} - \frac{qL(L^3)}{(8 \cdot 12)EI} + \frac{qL^3(L)}{48EI} = \frac{qL^4}{384EI} - \frac{qL^4}{96EI} + \frac{qL^4}{48EI} = \frac{qL^4(1-4+8)}{384EI} = \frac{5}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI}$

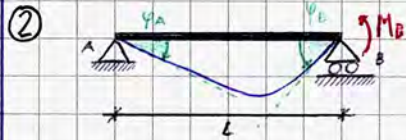
$$\varphi(z=0) = -\frac{qL^3}{24EI}$$

⚠ In sede d'esame non è ammesso non conoscere dimensioni e misure delle grandezze coinvolte!

Si può effettuare una rapida verifica del risultato attraverso una analisi dimensionale: senza esplicitare i parametri si verifica ad eson più se $v(z)$ è espresso in unità di lunghezza, ricordando che:

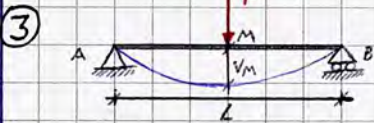
$$q [=] F/L; \quad E [=] F/L^2; \quad I [=] L^4$$

Altro metodo di verifica è sull'omogeneità dei termini lineari.



$$\varphi_A = -\frac{M_B L}{6EI}$$

$$\varphi_B = \frac{M_B L}{3EI}$$

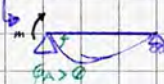


$$\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{FL^2}{16EI}$$

$$v_m = \frac{FL^3}{48EI}$$

Osserviamo che $\varphi_A(q)$ segue lo schema 1, mentre $\varphi_A^{(m)}$ e $\varphi_A^{(F)}$ lo schema 2.

$$\varphi_A = \varphi_A^{(q)} + \varphi_A^{(m)} + \varphi_A^{(F)} = 0; \quad \varphi_A = -\frac{qL^3}{24EI} - \frac{mL}{6EI} + \frac{XL}{3EI} = 0 \Rightarrow X = \frac{3qL^2}{24} + \frac{3m}{6} = \frac{qL^2}{8} + \frac{m}{2}$$



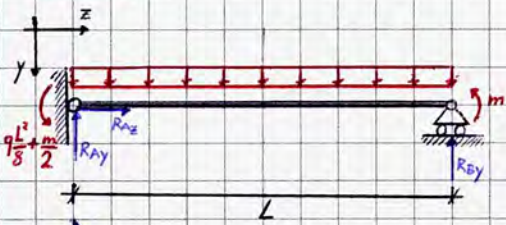
➔ p. 23 esercizio!

Dimensionalmente coerente.

Si osserva che X è proporzionale al carico, alle caratteristiche geometriche... Se $EI = \text{cost.}$ è funzione unicamente di q, m ; nel caso in cui la struttura fosse a due tratti esistono ulteriori proporzionalità dovute alla rigidità ($EI_1/h; EI_2/b \dots$)

L'incognita iperstatica è dunque nota; per tracciare i diagrammi di momento, taglio, sforzo normale è sufficiente considerare X nello schema isostatico e risolverne l'equilibrio: per il teorema di Kirchhoff i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione tra le due strutture sono coincidenti.

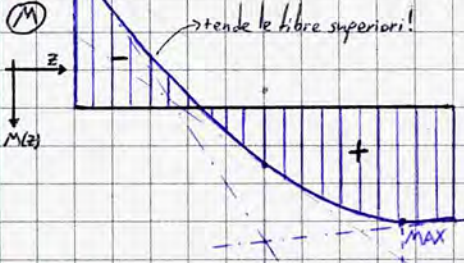
Esercizio



Applichiamo le equazioni differenziali dell'equilibrio:

$$y \begin{cases} qL - RAy - RBy = 0 \Rightarrow RAy = qL + \frac{qL}{8} + \frac{m}{2L} - \frac{qL}{2} + \frac{m}{L} = \frac{9}{8}qL - \frac{1}{2}qL + \frac{3m}{2L} = \frac{5}{8}qL + \frac{3m}{2L} \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$$x \textcircled{A} \begin{cases} \frac{qL^2}{8} + \frac{m}{2} - qL \cdot \frac{L}{2} + m + RBy \cdot L = 0 \Rightarrow RBy = -\frac{qL}{8} - \frac{m}{2L} + \frac{qL}{2} - \frac{m}{L} = \frac{3}{8}qL - \frac{3}{2} \frac{m}{L} \end{cases}$$



A seconda del peso del carico e dei termini noti è possibile determinare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione; solitamente negli esercizi m è proporzionale a qL , altrimenti sarebbe necessario studiare entrambi i casi.

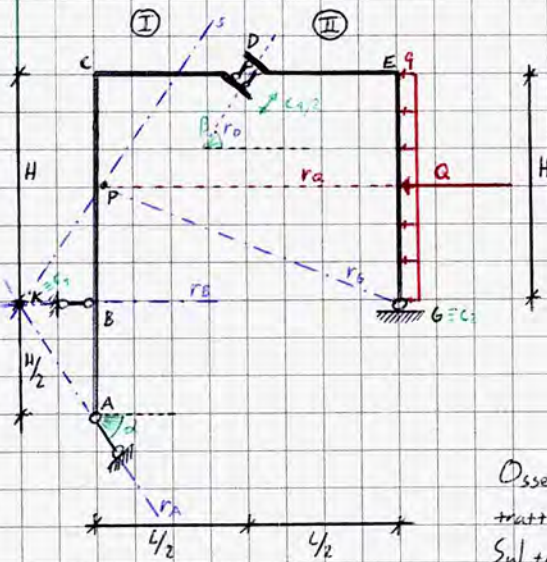
Nelle nostre ipotesi supponiamo $\frac{qL^2}{8} + \frac{m}{2} > m$

~~(N=0 \forall z)~~

Δ I diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono PARADIGMATICI all'esame!



Statica Grafica: risoluzione di strutture isostatiche



$$3e - s = l - i \Rightarrow 6 - (1+1+2+2) = l - i = 0$$

Per valutare il grado di labilità della struttura consideriamo i centri istantanei di rotazione (segnati in verde): non essendo allineati $l=0$ e la struttura è dunque globalmente isostatica.

Per conoscere la direzione delle reazioni e chiudere il poligono delle forze, nella statica grafica è necessario avere un tratto iperstatico scarico o isostatico carico; in alternativa occorre che la struttura risulti globalmente isostatica carica. Se tali condizioni non sono rispettate la risoluzione grafica non è sufficiente alla risoluzione della struttura.

Osserviamo che i tratti I e II sono entrambi iperstatici (presi singolarmente), ma solo il tratto I è scarico.

Sul tratto I individuiamo il punto K, intersezione tra le rette di azione di R_A e R_B , da cui è possibile determinare la retta di azione di R_D^{I-II} , parallela all'asse del bipendolo e passante

per K; la direzione delle reazioni è nota.

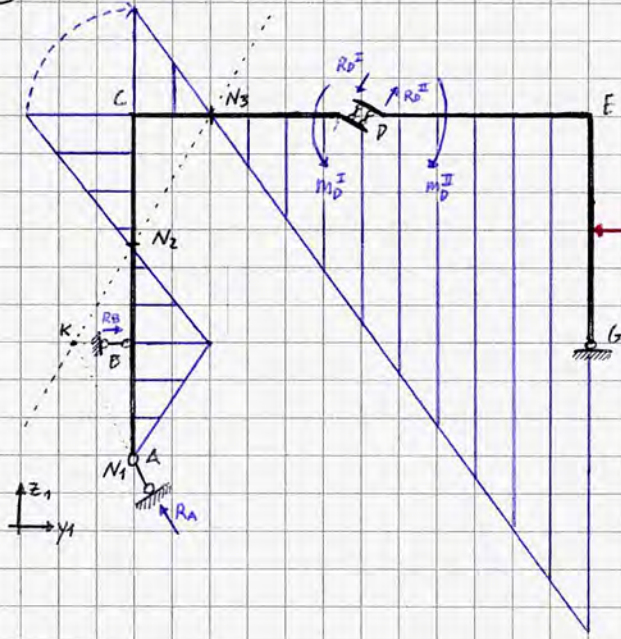
Attraverso un processo analogo sul tratto II - essendo già nota la direzione di R_D - poiché è presente il carico è possibile valutare proporzionalmente le reazioni e risolvere la struttura: la retta r_A interseca s in P, da cui è nota la direzione della reazione in G.



Sono dunque definiti i poligoni delle forze sui tratti I e II, come visibile nello schema a fianco; ne segue che le reazioni sono note.

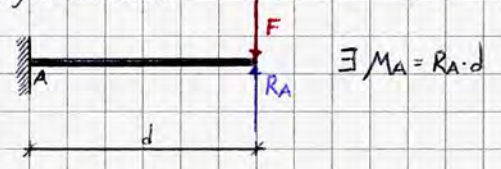
Valutiamo ora i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione:

(M)



Poiché R_D^I è applicata in K, nel riportarla in D occorre considerare il momento del trasporto (teorema di Huyghens-Steiner); essi sono applicati in M_D^{I-II} nello schema a fianco.

Per meglio comprendere il ragionamento, si analizzi il seguente schema:



Nella costruzione del diagramma è equivalente la scelta del punto di partenza; per convenzione partiamo dal nodo A, in cui $M_A = 0$ poiché si verifica il termine della struttura, il vincolo non esplica un momento e non è presente alcuna coppia applicata.

$N_1 \equiv A$ (punto di nullo)

Applichiamo il "teorema di sezionamento" (termine non più usato), in cui si immagina di far scorrere una sezione lungo il tratto di continuità; nel tratto AB si hanno fibre tese a destra. Osserviamo inoltre che il diagramma è lineare: in questo tratto il taglio è costante, dovuto alla componente R_{Ay} ; allo stesso modo lo sforzo normale è dovuto a R_{Az} .

Osserviamo inoltre che il diagramma è lineare: in questo tratto il taglio è costante, dovuto alla componente R_{Ay} ; allo stesso modo lo sforzo normale è dovuto a R_{Az} .

Siamo certi che in B il momento presenta una discontinuità (a causa del pendolo in B); immaginiamo di far scorrere una sezione da B a C; per l'equilibrio esiste $R_A + R_B = -R_D^F$ (appartenenti alla stessa retta passante per K, che interseca la struttura - più propriamente la linea d'asse della trave - nei punti in cui le risultanti presentano braccio nullo e dunque $b=0$), appartenente alla retta per K che determina i punti N_2 ed N_3 .

Il diagramma si preserva lineare fino a C, in cui:



Poiché C non ruota (tratto di continuità) occorre ribaltare M sul tratto CD, in cui è già individuato N_3 ; M è ancora lineare e passa per N_3 , in E si pratica un ulteriore ribaltamento per lo stesso motivo di C. N_4 si trova sull'intersezione tra la retta di applicazione di R_D e il prolungamento di EG.

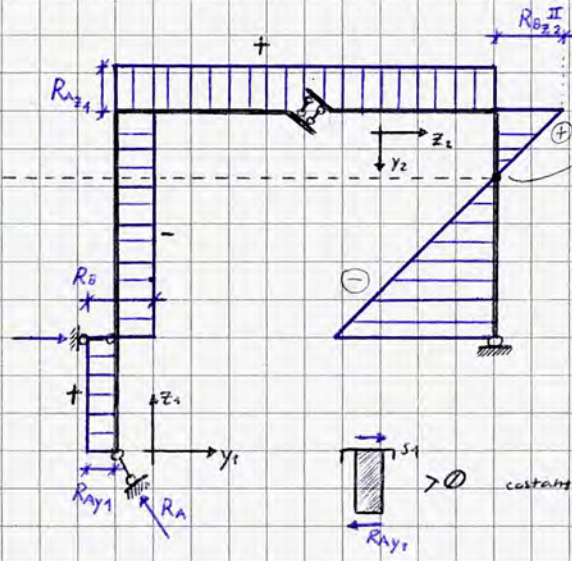
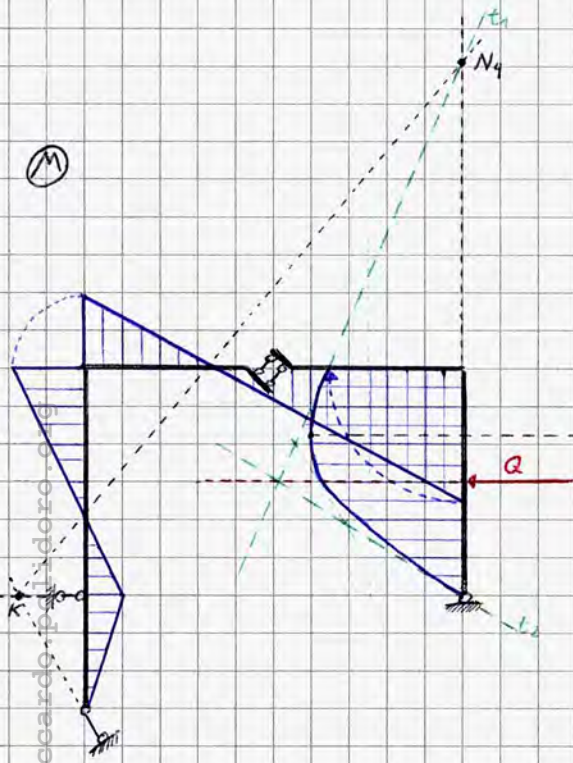
Nel tracciare i diagrammi occorre valutare:

- L'andamento del momento (parabolico/lineare/costante)
- La posizione dei punti di nullo

Essendo note le reazioni vincolari, le loro componenti sono in termini di taglio e sforzo normale

(M)

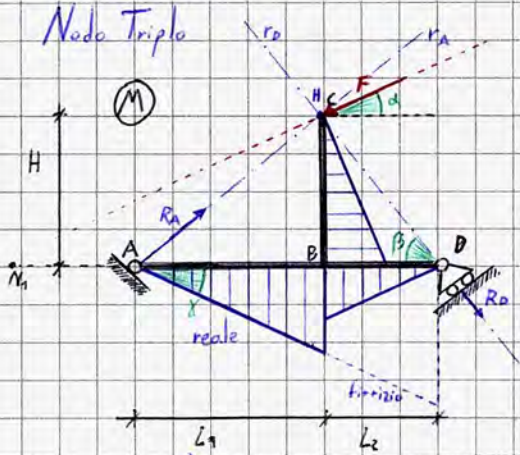
(T)



$= 0$ perché il momento è in un punto di massimo

> 0 costante perché M è lineare

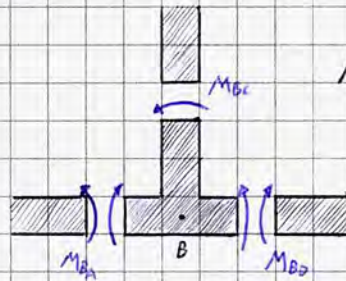
Nodo Triplo



Caso 1: $d \neq 0$

$$3t - s = l - i$$

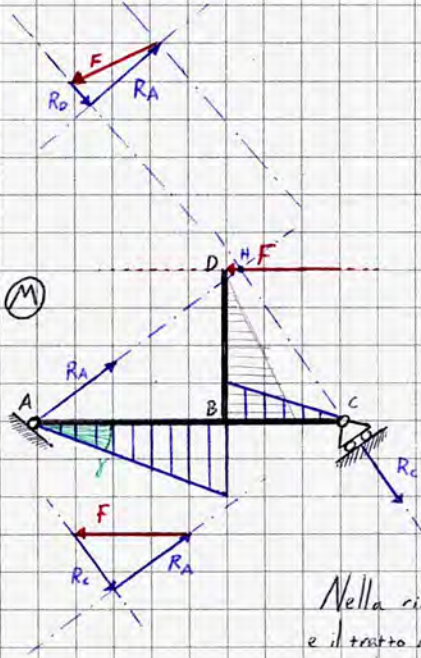
$l = 0$ isostatica (i centri di rotazione non sono allineati)



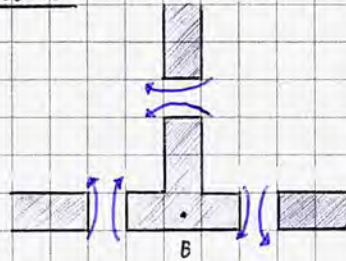
$$M_{BA} + M_{BD} + M_{BC} = 0$$

Lo schema è errato (d non è sufficientemente elevato da tendere le fibre interne nel tratto BD), ma si osserva come a seconda dell'angolo il momento cambi. Verifica $d = \pi/2$!

⚠ Negli esercizi è particolarmente rilevante trovare il punto H e determinare il poligono delle forze!



Caso 2: $d = 0$



Nella risoluzione dell'esercizio si trascura un tratto e si identifica il punto di nullo (intersezione tra F e il tratto non trascurato; quando $d=0$ è all'infinito e dunque F non fornisce contributo alla variazione di taglio su AC; determinando la stessa pendenza di M tra AB e BC poiché il taglio è pari a dM/dz)

Meccanica del Continuo di Cauchy

La meccanica del continuo studia il comportamento in termini meccanici (stati tensionali o deformativi) di corpi tridimensionali, sia solidi che fluidi; (nel nostro caso ci sotterremo sui solidi) essendo deformabili, se sottoposti a forze non compiono unicamente moti rigidi ma anche deformazioni, cui si associa uno stato di sforzi e tensioni interne. Essa costituisce la base per la teoria del de Saint Venant.

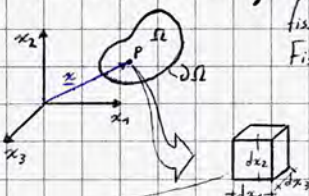
Analizzeremo 3 delle sottoteorie della Meccanica del Continuo:

- Teoria della deformazione: studio della cinematica dei corpi deformabili (spostamenti e deformazioni, indipendentemente dalla statica) con eq. di congruenza
- Teoria della tensione: studio della statica indipendentemente dalla cinematica con lo studio di equazioni di equilibrio (legame forze interne-attive)
- Legami costitutivi: legame tra il campo deformativo e gli sforzi, dipende anche dal tipo di materiale; con lo studio delle equazioni costitutive è possibile conoscere la struttura, ci concentreremo sul legame costitutivo elastico lineare.

Da questo è possibile analizzare il problema dell'equilibrio elastico per il continuo (ovvero il solido 3D), attraverso una ricombinazione delle equazioni precedenti; risolvendo il problema è noto il campo degli spostamenti, delle deformazioni, delle tensioni.

Continuo di Cauchy: modello fisico-matematico che schematizza l'oggetto dello studio; è una regione dello spazio euclideo (in particolare di \mathbb{R}^3): fissato un sistema di riferimento tridimensionale.

Fissato un sistema di riferimento 3D si individua una specifica regione $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la cui frontiera è $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^3$.



$$d\Omega \subset \Omega$$

$$P \leftrightarrow \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

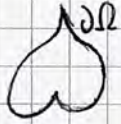
$$\rightarrow dm \rightarrow \rho(\underline{x}) = \frac{dm}{dV} = \frac{dm}{\text{vol}(d\Omega)}$$

Per essere un continuo, la regione suddetta deve rispettare tre proprietà che implicano una necessaria schematizzazione dell'oggetto di studio.

$$\forall x(P) \in \Omega \exists \rho(x) > 0$$

Per ogni interno di P esiste sempre una certa quantità di materia, ovvero di massa, dunque una certa densità. Ciò si schematizza attraverso la rappresentazione di un interno infinitesimo di P , convenzionalmente di forma parallelepipedica con gli spigoli paralleli agli assi del riferimento e con lunghezza infinitesima. Ciò coincide con un'approssimazione dell'oggetto di studio attraverso la teoria macroscopica della realtà, che considera ogni oggetto come se avesse porosità nulla: nell'intorno di ogni punto deve sempre esistere almeno un altro punto. Ne segue che Ω è un insieme denso, poiché $\forall P, P'$ è punto di accumulazione. In questo modo è possibile definire le operazioni di limite e, dunque, di derivato; ciò è necessario per lo studio dell'equilibrio (ad esempio).

$\partial\Omega$ è generalmente regolare



Ciò implica che $\forall x \in \partial\Omega \exists n^*$ ^{normale uscente} a meno che sia un insieme di misura nulla rispetto alla frontiera $\partial\Omega$, ovvero linee o curve definite sulla frontiera.

L'esistenza della normale alla frontiera in un punto implica l'esistenza di un piano tangente alla frontiera in quel punto; ne segue che la frontiera è al più liscia o con un numero finito di punti "cuspidali", in cui normale e piano tangente non sono univocamente determinati.

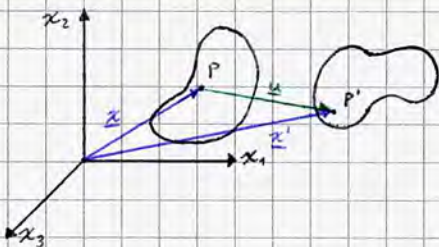
Attraverso questa ipotesi è possibile definire spostamenti e determinate forze: le forze di superficie-agenti sulla frontiera - ad esempio si scompongono in componenti tangenti ed ortogonali alla frontiera stessa.

$\partial\Omega$ è orientabile



È possibile distinguere tra interno ed esterno rispetto al continuo, la normale esterna è unica ed individuabile, e conferisce un verso alla frontiera (convenzionalmente verso l'esterno). La definizione dell'orientamento della superficie permette di determinare la positività delle forze agenti sulla frontiera.

Teoria della deformazione (Cinematica del Continuo)



Come è noto, in cinematica si considerano due configurazioni del sistema analizzato; quella allo istante t_0 , detta configurazione iniziale o - nelle nostre ipotesi, ma in generale non è detto - indormata e la configurazione deformata o finale all'istante $t' = t_0 + \Delta t$.

Nel processo di deformazione, un generico punto $P \in \Omega$ si porta in una nuova posizione $P' \in \Omega'$, individuata dal vettore x' :

$$P \leftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} ; P' \leftrightarrow x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

È possibile definire un vettore u tra P e P' , detto vettore spostamento, con costruzione facilmente descrivibile dall'algebra vettoriale.

$$x' = x + u$$

più propriamente

$$x'_i(x) = x_i + u_i(x)$$

Più propriamente, u è un campo vettoriale: $\forall Q, H: Q \neq H, \exists Q', H': u_Q \neq u_H$. Non avviene unicamente un moto rigido traslatorio sul corpo, in generale ogni punto effettua uno spostamento differente e per ogni coppia di punti fissati si registra generalmente una variazione della distanza, ovvero una deformazione e quindi una variazione in forma e volume.

In generale, la funzione scalare $u_i \in C^2(\Omega)$; in ambito fisico ciò implica che il campo di spostamento non determina discontinuità (ad esempio causate da lacerazioni).

$$\begin{bmatrix} x'_1(x) \\ x'_2(x) \\ x'_3(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{bmatrix} \Rightarrow x'_i(x) = x_i + u_i(x) \quad \forall i=1,2,3$$

Logicamente in campo cinematico è più rigoroso introdurre anche la dipendenza dal tempo t in x' ed u , ma l'analisi della configurazione in ogni istante esula dai nostri scopi; si sottintende la dipendenza da t ricordando che ci si riferisce sempre alla configurazione attuale.

Dalle relazioni si osserva che a partire dalla configurazione indormata, noto il campo di spostamento la configurazione attuale è univocamente determinata; ciò però non offre alcuna informazione sulla deformazione.

Per poter ottenere informazioni sulla deformazione occorre effettuare varie operazioni, di cui la prima (nonché la più naturale) è la differenziazione; poiché u ha componenti costanti legate al moto traslatorio rigido, con questa operazione è possibile rimuoverla dall'analisi.

$$u(x) = u + \Delta u(x) \Rightarrow dx'(x) = dx + du(x) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}$$

differenziali (sono funzioni in 3 variabili)

$$\begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix}$$

Prodotto riga per colonna

Ricapitolazione sul differenziale

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3 \quad \forall i = 1, 2, 3$$

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$$

Nel seguito verrà spesso utilizzata la notazione indiaciale, a notazione di Einstein, in cui si sottintende la sommatoria e la limitazione degli indici

$$\text{grad } u \rightarrow [\text{grad } u]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad \text{gradiente di } u_i$$

Ne segue che:

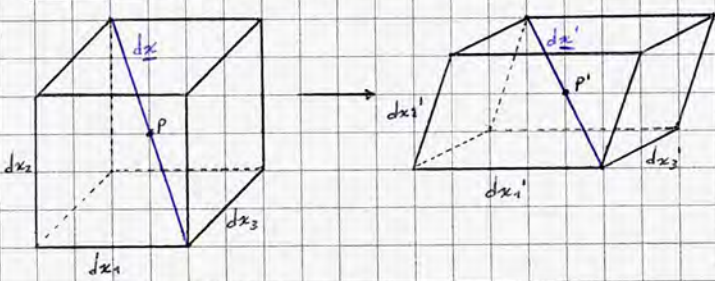
$$dx' = dx + du = dx + (\text{grad } u) dx \Rightarrow dx' = (\underline{I} + \text{grad } u) dx$$

$\underline{I} dx$

attraverso questa operazione è possibile mettere in evidenza dx' !

Dunque, $dx' = \underline{F} dx$

\underline{F} è un tensore, detto gradiente di deformazione: in \underline{F} attraverso $\text{grad } u$ è fornita parte dello spostamento legata alla deformazione; è però ancora presente una componente legata alle rotazioni rigide. Dal punto di vista fisico il tensore \underline{F} è un operatore bilineare che trasforma x in x' , descrivendo le trasformazioni delle fibre (elementi lineari infinitesimi) dalla configurazione indotformata a quella deformata.

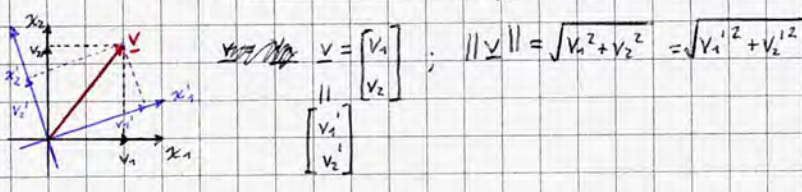


In forma indiaciale, $dx'_i = F_{ij} dx_j \quad \forall i = 1, 2, 3$

$$F_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

simbolo di Kronecker

Come è noto, alcune grandezze fisiche, definite da un unico numero, possono essere misurate indipendentemente dall'osservatore (un esempio è la temperatura); altre invece richiedono una definizione tramite vettori, la cui entità varia a seconda del riferimento pur conservando lo stesso modulo; ciò si riflette nella loro rappresentazione matriciale:



Un tensore è un operatore lineare cui si associa una rappresentazione matriciale dipendente dal sistema di riferimento e maggiore del singolo vettore; a seconda dell'ordine del tensore e la dimensione dello spazio vettoriale di riferimento esiste un determinato numero di invarianti.

In generale, \mathcal{T}_m^n (ordine del tensore n , dimensione dello spazio \mathbb{R}^m) $\rightarrow m^n$ componenti, nei nostri studi 3^n componenti.

\mathcal{T}_3^0 , tensore di ordine 0, ha una componente; coincide con lo scalare, ovvero l'invariante del tensore stesso

\mathcal{T}_3^1 ha 3 componenti, coincide con il vettore, il cui invariante è il modulo

I tensori di principale interesse nella meccanica del continuo sono i tensori di ordine 2: ad esempio, sforzo e deformazione sono grandezze fisiche descritte da un tensore del secondo ordine.

In generale, il numero di invarianti è pari al rango della rappresentazione matriciale del tensore, ovvero la dimensione della più grande matrice quadrata invertibile estraibile.

\mathbb{R}^3 ha 9 componenti (come \underline{F}); vi si associa una rappresentazione matriciale 3×3 e possiede 3 invarianti.

Gli invarianti di un tensore di ordine 2, aventi anche senso fisico, sono:

• invariante lineare $I_1(\underline{A}) = \text{tr}(\underline{A}) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$ traccia di \underline{A}

• invariante quadratico $I_2(\underline{A}) = \det \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ somma dei minori principali di \underline{A}
 $= a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} + a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13} + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$

• invariante cubico $I_3(\underline{A}) = \det(\underline{A})$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Al variare dell'osservatore non variano I_1, I_2, I_3 .

La notazione dei tensori è molto comoda perché a differenza della notazione indiciale/matriciale dei vettori non dipende dal sistema di riferimento.

Operatori differenziali principali nella studio della Meccanica del Continuo

Assegnato un generico campo vettoriale $\underline{u}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(x_1, x_2, x_3) \\ u_3(x_1, x_2, x_3) \end{bmatrix}$, definiamo:

• divergenza: $\text{div } \underline{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \nabla \cdot \underline{u} = \nabla^t \underline{u}$ prodotto scalare
 (tabella, operatore differenziale che estende il concetto di derivata: $\nabla = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{bmatrix}$ prodotto riga per colonna della trasposta di tabella per \underline{u})

• rotore: $\text{rot } \underline{u} = \nabla \times \underline{u} = \det \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \hat{e}_1 - \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) \hat{e}_2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \hat{e}_3$

• gradiente: $\text{grad } \underline{u} = [\nabla \otimes \underline{u}]^T \rightarrow [\text{grad } \underline{u}]_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ agisce su un campo vettoriale restituendo un tensore di ordine 2.

\otimes : diade o prodotto tensoriale: operazione tra due vettori che restituisce un tensore:

Esempio: $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$; $\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$; $\underline{a} \otimes \underline{b} = [\underline{a} \otimes \underline{b}]_{ij} = a_i b_j = \underline{a} \underline{b}^t = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 \end{bmatrix}$

Si osserva che è un'operazione complementare al prodotto scalare (è trasposto il secondo membro)

$$\nabla \otimes \underline{u} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \text{grad } \underline{u} = (\nabla \otimes \underline{u})^t$$

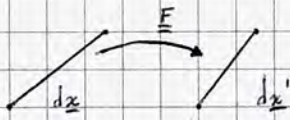
Osservazione: $\underline{F} = \underline{I} + (\nabla \otimes \underline{u})^t$

Come è noto, non esiste un'unica tipologia di deformazione; ad esempio, come visto nel caso unidimensionale, esistono sia le deformazioni assiali che quelle flessionali:

$\epsilon = \frac{\Delta l}{l} \rightarrow \epsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$; $u = u(x)$; $\chi = -v''(x)$ Teoria della deformazione di secondo gradiente (derivata seconda)
 ↳ derivata prima

Ciò si riflette nel caso tridimensionale: esistono diverse tipologie di deformazione che trovano formulazione mediante teorie del I-II gradiente concettualmente analoghe a quanto visto nel caso monodimensionale.

Teoria del primo gradiente: consideriamo nella formulazione della teoria un elemento infinitesimo lineare del continuo, detto fibra.



$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{|d\underline{x}'|^2 - |d\underline{x}|^2}{|d\underline{x}|^2} \quad \text{esplicitiamo le grandezze coinvolte}$$

Misura euclidea di deformazione (basata sul concetto di distanza nella geometria euclidea)

$$\begin{aligned} \bullet |d\underline{x}|^2 &= dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = d\underline{x} \cdot d\underline{x} \\ d\underline{x} &= \underline{\underline{I}} d\underline{x} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad d\underline{x} \cdot d\underline{x} = d\underline{x}^t d\underline{x} = d\underline{x}^t \underline{\underline{I}} d\underline{x}$$

$$\bullet \text{Analogamente, } |d\underline{x}'|^2 = d\underline{x}' \cdot d\underline{x}' = d\underline{x}'^t d\underline{x}' \quad \rightarrow \quad (\underline{\underline{F}} d\underline{x})^t (\underline{\underline{F}} d\underline{x}) = d\underline{x}^t \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} d\underline{x}$$

$$d\underline{x}' = \underline{\underline{F}} d\underline{x}$$

$$\text{Ne segue che } \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{d\underline{x}^t \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} d\underline{x} - d\underline{x}^t \underline{\underline{I}} d\underline{x}}{|d\underline{x}|^2} \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{d\underline{x}^t (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}}) d\underline{x}}{|d\underline{x}|^2} \quad \text{tensore } \underline{\underline{D}}$$

Si definisce **tensore delle deformazioni finite** (o **tensore di Green-Lagrange**) $\underline{\underline{D}}$ il seguente tensore, che regala le deformazioni fornendo informazioni a riguardo:

$$\underline{\underline{D}} = \frac{1}{2} (\underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}})$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{D}} &= \underline{\underline{F}}^t \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{I}} \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{D}} = [\underline{\underline{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})^t]^t [\underline{\underline{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})^t] - \underline{\underline{I}} = \\ &= [\underline{\underline{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})] [\underline{\underline{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})^t] - \underline{\underline{I}} = \\ &= \underline{\underline{I}} + \underbrace{(\nabla \otimes \underline{u})^t + (\nabla \otimes \underline{u})}_{\text{lineare rispetto a } \underline{grad} \underline{u}} + \underbrace{(\nabla \otimes \underline{u})(\nabla \otimes \underline{u})^t}_{\text{non lineare rispetto a } \underline{grad} \underline{u}} - \underline{\underline{I}} \end{aligned}$$

In forma indiciale infatti si osserva che $[2\underline{\underline{D}}]_{ij} = \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial x_j}}_{\text{lineare}} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ (non lineare (si sottintende $\sum_{k=1}^3$))

Verificata l'ipotesi di piccole deformazioni, i prodotti del contributo non lineare diventano trascurabili rispetto alle componenti del contributo lineare; ciò permette di linearizzare il tensore delle deformazioni finite. Ne risulta un vantaggio sostanziale giustificato da precisi obiettivi progettuali: non è possibile ammettere grandi deformazioni in abitazioni civili.

Perché lavoriamo nell'ipotesi di piccole deformazioni, in cui $\epsilon \ll 1$ (o max 10%), sia nel caso 1D che in quello 3D, nel continuo la condizione si traduce in $|\partial u_i / \partial x_j| \ll 1$, ciò implica che tutte le componenti del campo di spostamento hanno derivate parziali piccole.

Ne segue che $\underline{\underline{D}} \approx \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{u})^t + (\nabla \otimes \underline{u})] =: \underline{\underline{\epsilon}}$ **tensore delle deformazioni infinitesime** (è il tensore di riferimento per le deformazioni nelle nostre applicazioni).

↳ nell'ipotesi di piccole deformazioni

Determiniamo ora le equazioni di congruenza (analoghe ad $\epsilon = du/dx$); come osserveremo in generale sembreranno 9 relazioni, ma essendo la forma matriciale del tensore simmetrica ne diventano 6.

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \left[(\nabla \otimes \underline{u})^t + (\nabla \otimes \underline{u}) \right]$$

$$[\underline{\underline{E}}]_{ij} = \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Osservazioni:

• Il tensore $\underline{\underline{E}}$ ha carattere locale, è funzione di \underline{x} . $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}(\underline{x}) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\underline{x})$

• Il tensore è simmetrico: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \Rightarrow \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}^t$

Ciò si verifica perché l'espressione $\frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{u})^t + (\nabla \otimes \underline{u})]$ coincide con la parte simmetrica del gradiente di \underline{u} :

$$\underline{\underline{E}} = \text{sym} [(\nabla \otimes \underline{u})^t]$$

Ricapitolazione: Scomposizione di una matrice in parte simmetrica e antisimmetrica

Sia \underline{A} un tensore. Allora:

$$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{A} + \frac{1}{2} \underline{A} = \frac{1}{2} \underline{A} + \frac{1}{2} \underline{A}^t + \frac{1}{2} \underline{A} - \frac{1}{2} \underline{A}^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A} = \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{A} + \underline{A}^t)}_{\text{sym}(\underline{A})} + \underbrace{\frac{1}{2} (\underline{A} - \underline{A}^t)}_{\text{skew}(\underline{A})}$$

$\text{sym}(\underline{A})$: parte simmetrica di \underline{A}

$\text{skew}(\underline{A})$: parte antisimmetrica di \underline{A}

$$\text{Infatti: } \left[\frac{1}{2} (\underline{A} + \underline{A}^t) \right]^t = \frac{1}{2} (\underline{A}^t + \underline{A}) \Rightarrow [\text{sym}(\underline{A})]^t = \text{sym}(\underline{A}); [\text{sym}(\underline{A})]_{ij} = [\text{sym}(\underline{A})]_{ji}$$

$$\left[\frac{1}{2} (\underline{A} - \underline{A}^t) \right]^t = \frac{1}{2} (\underline{A}^t - \underline{A}) = -\frac{1}{2} (\underline{A} - \underline{A}^t) \Rightarrow [\text{skew}(\underline{A})]_{ij} = -[\text{skew}(\underline{A})]_{ji}$$

ciò implica che un tensore antisimmetrico ha gli elementi sulla diagonale principale nulli, ovvero $[\text{skew}(\underline{A})]_{ii} = 0$

Ne segue che le componenti di $\underline{\underline{E}}$ sono:

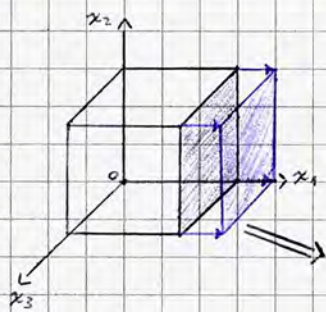
$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad i \neq j$$

Studiamo le componenti sulla diagonale principale, considerando ad esempio $\frac{\partial u_1}{\partial x_1}$.

Supponiamo di estrarre il volumetto infinitesimo del continuo, coincidente con l'intorno del punto P.

Per semplicità, fissiamo un sistema di riferimento triortogonale con origine in un vertice del volumetto e gli assi paralleli agli spigoli.

Supponiamo ora di deformare il volumetto in vari modi, e analizziamone gli effetti:



In questo caso, una generica fibra parallela all'asse x_1 possiede una lunghezza iniziale dx_1 che in seguito allo spostamento du_1 si deforma, con una lunghezza finale $dx_1 + du_1$.

Ne segue che du_1 esprime la variazione di lunghezza di una fibra di questo tipo; come nel caso monodimensionale la deformazione di una fibra di questo tipo è pari a du_1/dx_1 ; occorre però considerare che du_1 è funzione di 3 variabili, dunque:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3$$

In questo caso i punti con $x_2 = 0$ hanno spostamento nullo, mentre rispetto agli assi x_2 e x_3 il comportamento del volumetto è costante: tutti i punti appartenenti a fibre parallele a detti assi si spostano in maniera uniforme.

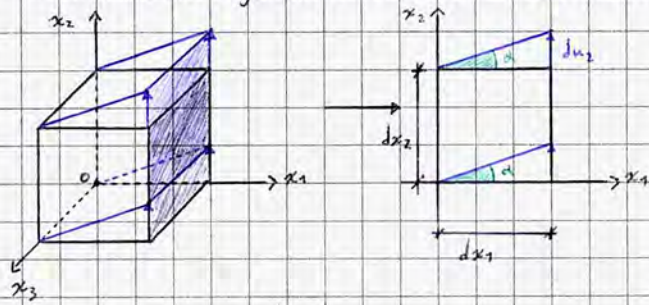
Ne segue che i termini di du_1 contenenti dx_2 e dx_3 sono nulli:

$$\frac{du_1}{dx_1} = \frac{1}{dx_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}$$

Ne segue che ε_{11} rappresenta le deformazioni di tutte le fibre del continuo con direzione parallela all'asse x_1 ; si ha un'elongazione $[\text{contrazione}]$ se $\varepsilon_{11} > [<] 0$.

Analogo è il ragionamento per ε_{22} ed ε_{33} .

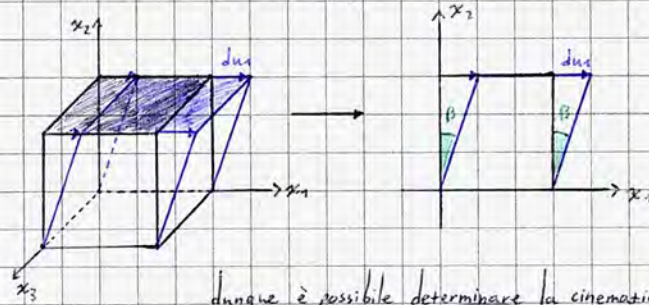
Ricerchiamo ora il significato dei termini di $\underline{\underline{E}}$ esterni alla diagonale principale, considerando ad esempio $E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$



Si osserva che $\text{tg } \alpha = \frac{du_2}{dx_1} = \frac{1}{dx_1} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \right)$

Notiamo però che du_2 varia linearmente lungo x_1 , mentre è uniforme nelle direzioni parallele a x_2 e x_3 ; come nel caso precedente, le derivate rispetto a x_2 e x_3 sono nulle.

Ne segue che $\text{tg } \alpha = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$, che nell'ipotesi di piccole deformazioni è $\ll 1 \Rightarrow \text{tg } \alpha \ll 1 \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \approx \alpha$



Analogamente al caso precedente,

$$\text{tg } \beta = \frac{du_1}{dx_2} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \approx \beta$$

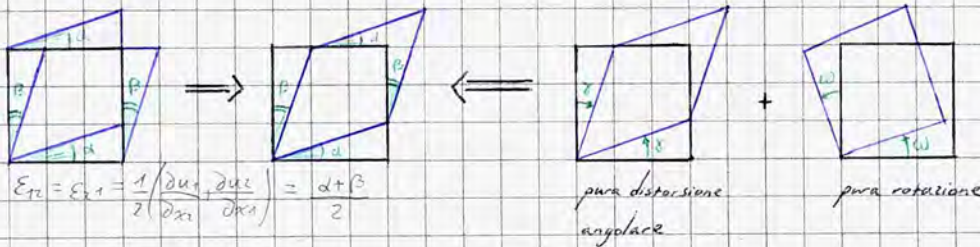
$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$$

Poiché vale l'ipotesi di piccole deformazioni è possibile linearizzare il problema, dunque è possibile determinare la cinematica (deformativa) complessiva applicando il principio di sovrapposizione degli effetti sulla configurazione indeformata (in presenza di grandi deformazioni invece è necessario applicare una prima cinematica alla indeformata per poi applicare la seconda sulla prima deformata).

Dalla sovrapposizione degli effetti:

L'effetto è però ottenibile anche come sovrapposizione di due cinematiche differenti:



Δ In generale $\alpha \neq \beta$, mentre le pure distorsioni/rotazioni prevedono angoli uguali!

$$E_{12} = E_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Se consideriamo il verso antiorario come verso positivo delle rotazioni, si ottiene che:

$$\begin{cases} \gamma + \omega = \alpha \\ \gamma - \omega = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\alpha + \beta}{2} = E_{12} = E_{21} \\ \omega = \frac{\alpha - \beta}{2} \end{cases}$$

Da cui si ottiene che:

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = E_{12} = E_{21} = [\text{sym}(\nabla \otimes \underline{u})]_{21/12}$$

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) = [\text{skew}(\nabla \otimes \underline{u})^t]_{21}$$

Dunque le componenti di $\underline{\underline{E}}$ non appartenenti alla diagonale principale rappresentano gli svercimenti (distorsioni) angolari che le facce del parallelepipedo elementare subiscono nei vari piani coordinati cui esse appartengono: E_{12} rappresenta uno svercimento nel piano $x_1 x_2$.

ω invece esplicita la rotazione, la sua espressione è una differenza di derivate coincidente con la componente 21 della parte antisimmetrica di $\text{grad } \underline{u}$.

Infatti, $\text{skew} [(\nabla \otimes \underline{u})^t] = \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{u})^t - (\nabla \otimes \underline{u})] = \underline{\underline{\Omega}}$; in particolare $[\underline{\underline{\Omega}}]_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \omega_{ij}$

Ne segue che le rotazioni rigide subite dalle facce di dV nei piani paralleli ai piani coordinati sono le componenti del tensore $\underline{\underline{\Omega}}$, detto tensore delle rotazioni rigide.

Dunque, la parte simmetrica di $\text{grad } \underline{u}$ fornisce informazioni sulle deformazioni, mentre quella antisimmetrica sulle rotazioni rigide.

$$\text{grad } \underline{u} = (\nabla \otimes \underline{u})^t = \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}$$

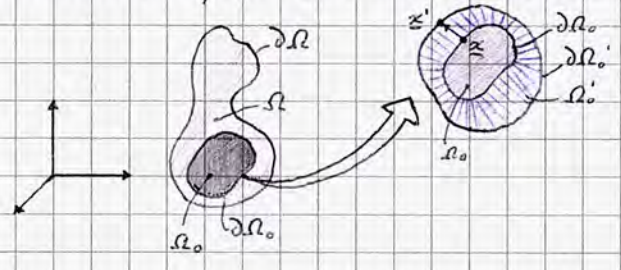
Di fatto, anche $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})^t = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{E}} + \underline{\underline{\Omega}}$; come anticipato $\underline{\underline{E}}$ contiene informazioni su deformazioni e rotazioni.

In generale, l'esistenza di rotazioni rigide locali implica l'esistenza di rotazioni relative tra punti (poiché la singola rotazione dipende dal punto considerato); come ad esempio accade nel caso unidimensionale con la trave appoggiata e appoggiata soggetta a carico distribuito, in cui si registra una rotazione differente punto per punto, dunque un gradiente di rotazione (parametrizzato nel caso monodimensionale tramite la curvatura χ).

Nel caso 3D per descrivere detto fenomeno si considera il gradiente del rotore del campo di spostamento: infatti le componenti del rotore di u sono le componenti di rotazione del processo cinematico; possono essere viste come le componenti del gradiente di rotazione di u (in cui gli indici individuano il piano in cui avviene la rotazione) o come componenti del rotore, in cui è indicato l'asse di rotazione.

Il gradiente di rotazione è equivalente alla curvatura del caso monodimensionale, ma nei nostri studi non sarà solitamente considerato poiché ci soffermeremo sugli studi deformativi legati ad \underline{E} e alla teoria di primo gradiente.

Consideriamo le componenti E_{ii} : la loro somma ha un altro significato fisico e geometrico.



Consideriamo una regione Ω_0 del continuo con le stesse proprietà di Ω (in particolare relative alla frontiera).

$$\sum_{i=1}^3 E_{ii} = C = \frac{\Delta(V)}{dV} \rightarrow dV = \text{Vol}(d\Omega)$$

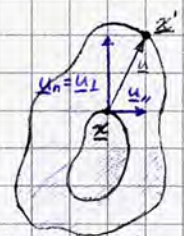
↑ generico elemento infinitesimo del continuo

coefficiente di variazione volumetrica percentuale
(valuta la variazione di volume degli elementi dV rispetto al volume originale)

Il campo di spostamento $u(x)$ deforma sia Ω che Ω_0 (logicamente $d\Omega \subseteq \Omega_0 \subseteq \Omega$); in generale Ω_0 subisce una variazione di volume (evidenziata graficamente in azzurro nello schema in alto); sapendo che $\forall P \in \Omega \exists u(x)$, ciò si riflette su Ω_0 , in particolare, su $\partial\Omega_0$.

Essendo $d\Omega_0$ regolare, esistono in ogni suo punto piano tangente e normale positiva; ne segue che è possibile scomporre in ogni punto u nelle componenti tangenti ed ortogonali a $\partial\Omega_0$.

Le componenti ortogonali alla frontiera producono una variazione di volume, quelle tangenti distorcono la frontiera stessa; ne segue che:



$$\Delta V = \int_{\partial\Omega_0} u_n(x) ds = \int_{\partial\Omega_0} u(x) \cdot \underline{n} ds = \int_{\Omega_0} \nabla \cdot u dV \Rightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} \int_{\Omega_0} \nabla \cdot u dV$$

dal teorema della divergenza sappiamo che:

$$\int_{\partial\Omega_0} f \cdot \underline{n} ds = \int_{\Omega_0} \nabla \cdot f dV$$

↑ $\text{div}(f)$

Passare all'infinitesimo \Rightarrow LIMITE!

$(u_n = (u_i) \hat{n}_i)$

Dunque, $\lim_{V \rightarrow dV} \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{dV} \int_{\partial\Omega_0} u_n dS = \frac{1}{dV} \int_{\partial\Omega_0} u \cdot \underline{n} dS = \nabla \cdot u = \frac{\Delta(V)}{dV} = C(x)$ coefficiente di variazione volumetrica, ha caratteristica locale (in ogni intorno di x)

Osserviamo che $\nabla \cdot u = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \Rightarrow E_{11} + E_{22} + E_{33} = \sum_{i=1}^3 E_{ii} = \text{tr}(\underline{E}) = \text{I}_1(\underline{E})$

è invariante rispetto al sistema di riferimento perché ΔV è una grandezza scalare.

$C(x)$

- $> 0 \Rightarrow dV' > dV$ dilatazione volumetrica
- $= 0 \Rightarrow dV' = dV$; se vale $\forall x \in \Omega$ la deformazione si dice isocora
- $< 0 \Rightarrow dV' < dV$ contrazione volumetrica; $-1 < C < 0$: $C = \frac{\Delta(V)}{dV} = \frac{dV' - dV}{dV} = \frac{dV'}{dV} - 1 \Rightarrow dV' = (1+C)dV$, e $dV > 0$

Equazioni di congruenza inversa

Abbiamo osservato come a partire da un campo di spostamento di classe $C^2(\Omega)$ sia possibile determinare tramite le equazioni di congruenza diretta le varie componenti della deformazione, che compongono il tensore $\underline{E} = \text{sym}[(\nabla \otimes u)^e]$; in altre parole se il campo u è sufficientemente regolare è possibile passare direttamente dal campo di spostamento ad informazioni sulla deformazione.

Le equazioni di congruenza inversa (o di compatibilità interna) forniscono una condizione necessaria (NON sufficiente) affinché esista un campo di spostamento compatibile con un campo di deformazione assegnato; in altre parole, noto \underline{E} ($E_{ij} = E_{ji}$) ci si chiede se $\exists u: \underline{E} = \text{sym}[(\nabla \otimes u)^e]$.

Nella schematizzazione unidimensionale le equazioni di compatibilità inversa sono sempre verificate, in 2D e 3D no a causa della presenza di più variabili:

1D: $f(x)$ se sufficientemente regolare, $\exists \partial f / \partial x$

$\exists F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = \partial F / \partial x$

$F(x)$ primitiva $= \int f(x) dx \Rightarrow \delta F = f(x) dx = dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx \Rightarrow \exists F = \int f dx \rightarrow \delta F = f(x) dx \equiv dF$ perché $f(x) dx = \frac{\partial F}{\partial x} dx$; $\frac{\partial F}{\partial x} dx$ è una forma differenziale esatta e dunque $\exists F = \int dF$

Per quanto concerne spostamenti e deformazioni,

$f(x) \equiv \epsilon(x) \Rightarrow \exists u(x) = \int \epsilon(x) dx ?$ ovvero, $\epsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x} ?$

Nel caso 1D, poiché una funzione continua è anche integrabile, $\epsilon(x) dx = \delta u \equiv du = \frac{\partial u}{\partial x} dx \Rightarrow u = \int du$

La risposta dunque è sempre affermativa e le equazioni di congruenza inversa sono sempre determinate.

$\delta F = f_x(x,y) dx + f_y(x,y) dy = dF \Rightarrow f_x(x,y) = \frac{\partial f(x)}{\partial x}; f_y(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} (\Rightarrow) f_{xy} = f_{yx}$

Più Variabili

Matematicamente, assegnate le funzioni $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ - non necessariamente derivate parziali della funzione F - occorre verificare se $\exists F = \int dF$, condizione verificata $\Leftrightarrow f_x$ e f_y soddisfano le condizioni di Schwarz.

Assegnate f_x e f_y dunque non è detto che $\delta F = f_x(x,y) dx + f_y(x,y) dy$ sia una forma differenziale esatta (ovvero che $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy$ con $f_x(x) = \frac{\partial F}{\partial x}$ e $f_y = \frac{\partial F}{\partial y}$)

Le condizioni di Schwarz sono verificate se $\frac{\partial f_x(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial f_y(x,y)}{\partial x}$; se F è una forma differenziale esatta ciò si traduce anche nella condizione:

$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$

\Downarrow

$\frac{\partial f_y}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial y}$ se non verificata sicuramente non esiste F

Tornando al campo applicativo della Meccanica del Continuo, assegnate le $\epsilon_{ij}(x)$ si tenta di determinare u .

Se u esistesse, allora $\boxed{du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_i}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_3} dx_3} \quad \forall i=1,2,3 \Rightarrow \exists u_i(x) = \int du_i$

$\rightarrow du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$

Le forme differenziali che si possono scrivere assegnati gli ϵ però sono:

$\delta u_i = \underbrace{(\epsilon_{i1} + \omega_{i1})}_{a_1} dx_1 + \underbrace{(\epsilon_{i2} + \omega_{i2})}_{b_1} dx_2 + \underbrace{(\epsilon_{i3} + \omega_{i3})}_{c_1} dx_3 = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$

ciò perché $\epsilon_{ij} + \omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$

Esempio: $\epsilon_{11} + \omega_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$

in questa fase supponiamo che anche gli ω_{ij} siano assegnati, anche se la condizione si rivelerà superflua.

Condizione necessaria affinché $\delta u_i \equiv du_i$ è che le derivate seconde miste coincidano, ovvero che:

$\frac{\partial a_i}{\partial x_2} = \frac{\partial b_i}{\partial x_1}; \frac{\partial a_i}{\partial x_3} = \frac{\partial c_i}{\partial x_1}; \frac{\partial b_i}{\partial x_3} = \frac{\partial c_i}{\partial x_2} \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{\underline{\epsilon}})^t = \underline{\underline{0}}$ il rotore del rotore del campo di deformazione è il tensore nullo

$\left(\frac{\partial^2 \epsilon_{ij}}{\partial x_h \partial x_k} \right) = \epsilon_{ij, hk} + \epsilon_{hk, ij} = \epsilon_{ih, jk} + \epsilon_{jk, ih} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{con } i, j, h, k = 1, 2, 3 \Rightarrow 6 \text{ equazioni di congruenza inversa.}$

La condizione, che se verificata permette di affermare che è possibile che $\exists u_i = \int du_i$, è demandata alle sole ϵ e non le ω .

La dimostrazione di quanto affermato è analoga tra il caso 2D e 3D; per semplicità, dimostriamo la condizione nel caso bidimensionale.

Nelle due dimensioni in generale \underline{u} ha due componenti: $u_1(x_1, x_2)$ e $u_2(x_1, x_2)$; ne segue che $\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix}$, con $E_{12} = E_{21}$.

Ci chiediamo se partendo da $\underline{\underline{E}} \exists \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$ compatibile; ciò avviene necessariamente se:

$$du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \int du_1$$

$$du_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 = \int du_2$$

Assegnate le componenti di deformazione, esse assumono la forma:

$$du_1 = (E_{11} + W_{11}) dx_1 + (E_{12} + W_{12}) dx_2 = E_{11} dx_1 + (E_{12} + W_{12}) dx_2 \quad W_{11} = 0$$

$$du_2 = (E_{21} + W_{21}) dx_1 + (E_{22} + W_{22}) dx_2 = (E_{12} - W_{12}) dx_1 + E_{22} dx_2 \quad W_{22} = 0$$

Anche in questo caso supponiamo che siano assegnate le W , anche se sappiamo che $W_{11} = W_{22} = 0$ e $W_{12} = -W_{21}$ perché componenti della parte antisimmetrica del gradiente di u .

Condizione necessaria affinché siano forme differenziali esatte è che si verifichino le condizioni di Schwarz, ovvero:

$$\begin{cases} \frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial (E_{12} + W_{12})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial (E_{12} + W_{12})}{\partial x_2} = \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial E_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{12}}{\partial x_1} < \partial/\partial x_2 > \\ \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} = \frac{\partial E_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial W_{12}}{\partial x_2} < \partial/\partial x_1 > \end{cases} \Rightarrow$$

derivando come indicato in prossimità delle equazioni del sistema si ottengono in particolare delle uguaglianze:

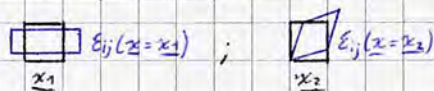
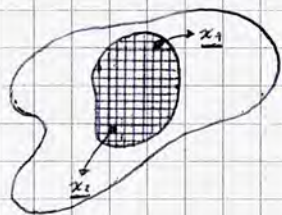
$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 W_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \end{cases} \oplus \Rightarrow \frac{\partial^2 E_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 E_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 E_{12}}{\partial x_1 \partial x_2}$$

condizioni di Schwarz: le derivate seconde miste sono uguali.

equazioni di congruenza inversa/compatibilità interna (nelle due dimensioni è unica!)

$$\text{In gen. } \frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} \Rightarrow E_{i,jk} + E_{k,lj} = E_{k,jl} + E_{l,ik} \quad \forall i$$

Significato fisico delle equazioni di compatibilità interna: tramite le equazioni di congruenza diretta, la condizione $\underline{u} \in C^2(\Omega)$ consente di affermare che la deformazione avviene in maniera continua, senza lacerazioni o compenetrazioni di materia; dalle equazioni di congruenza si richiedono le stesse condizioni per verificare la configurazione e determinare l'esistenza di \underline{u} a partire dalle condizioni assegnate sulla deformazione.



per essendo locali, le condizioni deformative non sono esattamente arbitrarie; la configurazione deformata richiede comunque continuità tra gli elementi infinitesimi adiacenti.

Teoria della Tensione

Con detta teoria si studia lo stato di sollecitazione del continuo, si mettono in relazione le forze applicate al continuo prescindendo dalla cinematica: non ci si interessa di conoscere la configurazione deformata (in cui però deve effettivamente verificarsi l'equilibrio e in cui si sviluppano le reazioni interne) anche grazie alle ipotesi di piccole deformazioni e di piccoli spostamenti:

• $\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ ipotesi di piccole deformazioni (deformazioni infinitesime)

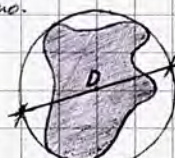
• $\frac{|u_i|}{D} \ll 1 \quad \forall \underline{x} \in \Omega$ ipotesi di piccoli spostamenti

la configurazione deformata è molto prossima a quella indeformata; dal punto di vista statico le due configurazioni si possono confondere per la definizione degli sforzi e le equazioni di equilibrio.

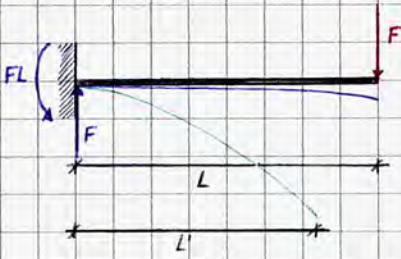
Esempio: prova di trazione su una trave



Lo sforzo $\sigma = F/A$ è definito a partire dalla configurazione indeformata; nei materiali classici con la trazione si ha una dilatazione della trave lungo l'asse di F ed una contrazione trasversale; ne segue che $A' < A$, $L' > L$; lo sforzo effettivo da considerare dovrebbe essere F/A' ma poiché valgono le ipotesi suddette $A' \approx A \Rightarrow \sigma = F/A$.



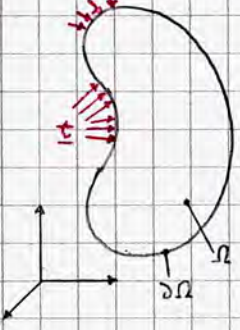
Per lo stesso motivo, è anche possibile scrivere le equazioni di equilibrio sulla configurazione indeformata:



Nelle ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni infinitesime, i punti si spostano solo ortogonalmente all'asse della trave (spostamenti orizzontali \ll spostamenti verticali); ne segue che nella configurazione deformata la forza applicata si trova ancora ad una distanza L dal vincolo.
Se tali ipotesi non sono verificate, la deformazione induce una riduzione della luce, portando l'azione di F a una distanza $L' < L$; ne segue che la reazione esercitata dall'incastro nella configurazione deformata rispetto a quella indeformata, rendendo indispensabile la conoscenza della cinematica.

Le forze che agiscono su un continuo possono essere:

- **Di superficie:** Agiscono nei punti della frontiera, si indicano con \underline{t} (tractions), il loro modulo si misura in Pa. Esempio particolare di forze di superficie è la pressione, che agisce solo ortogonalmente alla frontiera; più in generale dette forze hanno una componente normale e due componenti tangenziali (mutuamente ortogonali) alla frontiera.



La porzione di frontiera in cui agiscono le forze di superficie si indica con $\partial\Omega_t$; tale simbologia viene utilizzata per distinguere le aree sollecitate da quelle in cui avvengono spostamenti (indicata con $\partial\Omega_u$; ne segue che i punti della frontiera non soggetti a spostamenti appartengono a $\partial\Omega_t$, con $\underline{t} = \underline{0}$; l'assegnazione di un campo di spostamenti $u(\underline{x}) \forall \underline{x} \in \partial\Omega_u$ impone una condizione al contorno nell'equazione di congruenza alla deformazione); in generale $\partial\Omega = \partial\Omega_u \cup \partial\Omega_t$

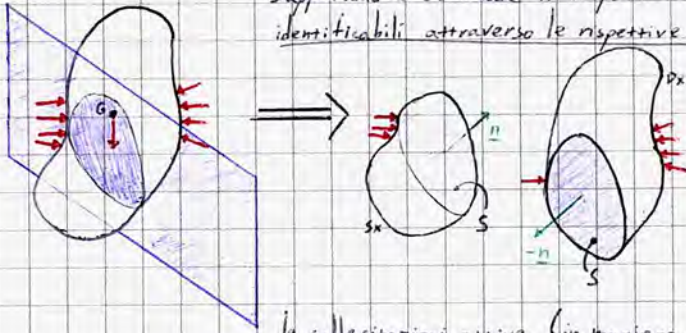
- **Di volume:** Agiscono nei punti interni al corpo, si indicano con \underline{b} (body forces), il loro modulo si misura in N/m^3 ; nelle nostre applicazioni si considera principalmente la forza peso, effetto dell'immersione del continuo avente densità non nulla in ogni intorno di ogni suo punto interno - in un campo gravitazionale. Tipicamente dunque $\underline{b}(\underline{x}) = \rho(\underline{x}) \underline{g}$; dette forze sono però spesso trascurabili rispetto alle forze di superficie.



Se un continuo è soggetto ad un sistema di forze, nei suoi punti interni si generano delle forze dovute alle interazioni tra le sue porzioni a causa delle aree soggette alle sollecitazioni appena descritte; si determinano tensioni e stress interni.

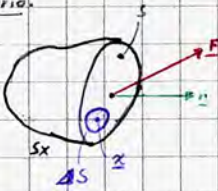
Esempio: consideriamo un continuo soggetto ad un sistema di forze esterne equilibrate (le ECS sono verificate).

Supponiamo di sezionare il corpo in due porzioni; ne segue che emergono due superfici di taglio S identificabili attraverso le rispettive normali.



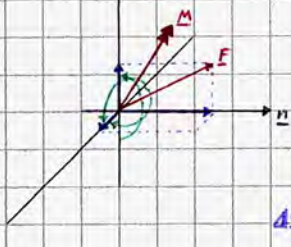
Ripristinando il sistema di forze sulle due porzioni, si osserva come le forze si dividano sulle parti di continuo appena determinate, generando in generale configurazioni max in equilibrio; poiché per definizione un corpo è in equilibrio se e soltanto se è in equilibrio ogni sua parte, sappiamo che le due porzioni sono necessariamente in equilibrio; ne segue che sulle due superfici che emergono dal taglio sono presenti delle forze che equilibrano

le sollecitazioni attive (in maniera simile a quanto visto per le caratteristiche della sollecitazione nelle travi); quando le due porzioni sono unite tra loro esse si trasmettono le sollecitazioni suddette (inclusi eventuali momenti) nel piano corrispondente al piano di sezione; per il principio di azione e reazione le forze sono necessariamente uguali e opposte, garantendo l'equilibrio.



Le sollecitazioni interne appena descritte hanno risultante nel baricentro della sezione; nel caso delle forze è determinata da una componente ortogonale alla superficie di sezione e due tangenti ad essa, per eventuali azioni di momento invece si hanno componenti sul piano di sezione e sui piani formati dalla direzione normale alla superficie e una delle due direzioni degli assi sui quali sono state definite le componenti tangenziali della forza; il momento risultante è rappresentabile come un bivettore \underline{M} che indica la direzione normale al piano in cui giace il momento risultante.

Si può riflettere quanto osservato su una piccola porzione della superficie di taglio del continuo: supponiamo di fissare un punto \underline{x} su S (s_x):



$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} =: \underline{t}_n(\underline{x}) \quad \text{vettore di tensione di Cauchy}$$

$\Delta S \rightarrow dS$ ΔA \leftarrow area (ΔS)

Si osserva come i seguenti ragionamenti siano una generalizzazione delle tre caratteristiche della sollecitazione

$$t_n(x) = \frac{dF}{dA}$$

→ vale in un intorno di x , non è detto ci sia una distribuzione di forze uniforme nel continuo
 → dipende da n perché a seconda dell'orientamento del piano di sezione passante per x variano le forze interne, e la norma le individua il piano.

Il vettore di tensione di Cauchy offre una misura dello stato di sofferenza di una data regione in base alle interazioni tra le forze interne; è riferito ad una misura areale in modo tale da determinare una misura nominale e normalizzata.

Da un analogo ragionamento sullo stesso punto x considerato come appartenente alla porzione di destra si ottiene che $t_{-n}(x) = -t_n(x)$

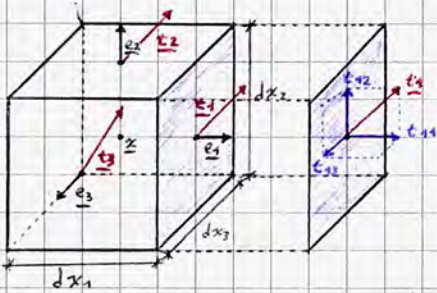
La teoria della tensione di Cauchy prevede inoltre che:

$$\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} = 0$$

Nella teoria della tensione di Cauchy applicata al continuo di Cauchy i momenti (più propriamente, le coppie) diventano trascurabili quando si considerano superfici infinitesime, dunque non esistono coppie concentrate

Tensore delle Tensioni

Supponiamo di tagliare il continuo con piani paralleli agli assi cartesiani, in particolare con coppie di piani posti a distanza infinitesima da un punto x : si ottiene il dV con normali ~~parallele~~ coincidenti con i vettori degli assi coordinati.



Sui baricentri delle facce agiscono le tensioni dovute al sistema di forze esterne (t_1, t_2, t_3) per ognuna delle quali è possibile considerare le componenti (una ortogonale alla faccia corrispondente e due tangenti, parallele alle altre direzioni):

$$t_i = \begin{bmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \\ t_{i3} \end{bmatrix} \quad \forall i=1,2,3$$

Solitamente si indicano con σ come parallelismo con lo sforzo; più precisamente si considerano le σ_{ii} (ortogonali alle facce) e le τ_{ij} ($i \neq j$), tangenziali alle facce.

Dalle 9 componenti di tensione appena definite si può costruire una matrice 3x3:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1^T \\ t_2^T \\ t_3^T \end{bmatrix}$$

rappresentazione matriciale in questo specifico sistema di riferimento del tensore delle tensioni o degli sforzi (stress)

→ $\underline{T}(x) \Rightarrow \sigma_{ij}(x)$ dipendono dallo specifico punto; è possibile definire un campo di tensione partendo dal tensore.

Detto tensore è un perfetto parallelismo col tensore delle deformazioni (teoria della deformazione); se si conosce \underline{T} si può ricavare il vettore di tensione di Cauchy relativo ad ogni piano che seziona x con una qualsiasi normale n ; infatti:

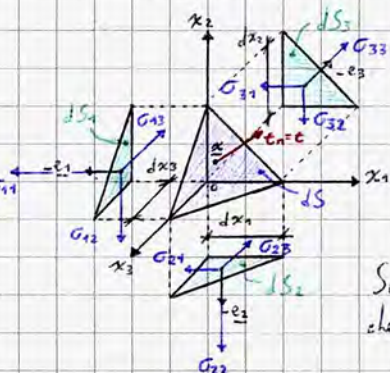
$$t_n(x) = \underline{T}(x) \cdot n \quad \text{Teorema di Cauchy}$$

Per dimostrare il teorema consideriamo il tetraedro di Cauchy, ottenuto tagliando il piano di interesse avente generica normale n con i tre piani coordinati cartesiani; consideriamo sempre misure infinitesime.

Il punto x coincide con il baricentro della faccia di interesse, su cui agisce un certo vettore $t_n = t$ (per semplicità di scrittura ometteremo la dipendenza da x).

Le facce parallele ai piani cartesiani hanno sui rispettivi baricentri le varie convenzioni su σ , che seguono una convenzione analoga a quella dello sforzo normale nel caso unidimensionale: si considerano positive le tensioni concordi alla direzione degli assi cartesiani se appartengono alle facce incrementali; sulla faccia non incrementale vale l'opposto.

Supponiamo di estrarre il tetraedro dal continuo; vale quindi l'equilibrio sia alle sollecitazioni che alla traslazione; è per noi di particolare rilievo il secondo.



Nella direzione 1, stabilendo come convenzione positiva \rightarrow , si ha che:

$$t_1 dS - G_{11} dS_1 - G_{21} dS_2 - G_{31} dS_3 = 0$$

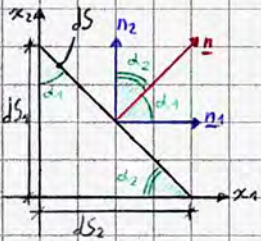
\leftarrow c'è equilibrio

formalmente t_{n1} ; la forza agisce sulla faccia di normale n , parallela ad e_1 .

Poiché le dS_i sono le proiezioni di dS sui piani coordinati di normale $e_i \Rightarrow dS_i = dS \cdot n_i$

\leftarrow componente i -ma del versore $n = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$, coincidenti con i coseni diretti n_i di n

Per meglio comprendere le varie trasformazioni attuate, consideriamo uno schema a due dimensioni:



$$dS_1 = dS \cos \alpha_1 \quad \text{ma } n_1 = \frac{1}{|n|} \cos \alpha_1 \Rightarrow dS_1 = dS \cdot n_1$$

$$dS_2 = dS \cos \alpha_2 \quad \text{ma } n_2 = \frac{1}{|n|} \cos \alpha_2 \Rightarrow dS_2 = dS \cdot n_2$$

Considerando tutti questi ragionamenti, l'equazione in alto diventa:

$$t_1 dS - G_{11} n_1 dS - G_{21} n_2 dS - G_{31} n_3 dS = 0;$$

$$t_1 = G_{11} n_1 + G_{21} n_2 + G_{31} n_3 = G_{j1} n_j$$

Analogamente,

$$t_2 = G_{12} n_1 + G_{22} n_2 + G_{32} n_3 = G_{j2} n_j$$

$$t_3 = G_{13} n_1 + G_{23} n_2 + G_{33} n_3 = G_{j3} n_j$$

$$\left. \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix} \right\} \Rightarrow t_{ij} = G_{ji} n_j \quad \forall i=1,2,3 \quad \text{forma indiciale}$$

La forma indiciale $t_{ij} = G_{ji} n_j \quad \forall i=1,2,3$ si traduce in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{21} & G_{31} \\ G_{12} & G_{22} & G_{32} \\ G_{13} & G_{23} & G_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{t}_n = \underline{I}^T n \quad \square$$

Osservazione: nel baricentro del tetraedro in generale possono agire forze di volume, non considerate nella dimostrazione; se consideriamo la prima equazione infatti,

$$t_1 dS - G_{11} dS_1 - G_{21} dS_2 - G_{31} dS_3 + b_1 dV = 0$$

Mentre $dS_i \propto dx_j dx_k$, $dV \propto dx_1 dx_2 dx_3$; ne segue che il contributo delle forze di volume è un infinitesimo di ordine superiore ed è dunque trascurabile (proporzionale a 3 grandezze infinitesime)

Nella pratica, tenendo conto dell'equilibrio complessivo e imponendo l'equilibrio alle traslazioni e alle rotazioni, interessa valutare le condizioni che \underline{I} deve rispettare per verificare l'equilibrio.

Principio dei Lavori Virtuali applicato alle Strutture

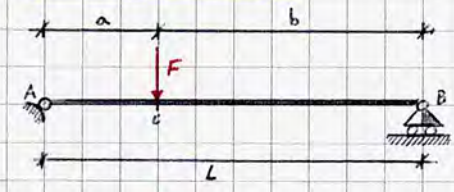
Il principio dei lavori virtuali ha una storia molto importante ed interessante; pur essendo più propriamente un teorema, essendo dovuto ad altri risultati, conserva la dicitura di principio per questioni storiche.

Ricordiamo dagli studi di meccanica razionale che la condizione affinché una struttura sia in equilibrio è che il lavoro virtuale sia uguale a 0.

$$\text{STRUTTURE RIGIDE} \Rightarrow LV = 0$$

ISOSTATICHE

Strutture isostatiche



Essendo isostatica, è possibile verificare l'equilibrio della struttura semplicemente applicando le Equazioni Cardinali della Statica.

Supponendo di voler conoscere la reazione R_B , per applicare il Principio dei Lavori Virtuali si trasforma il sistema in un sistema staticamente equivalente ottenuto sostituendo l'incognita reazione R_B al vincolo e imponendo $L_v = 0$ (equilibrio verificato dalle ECS).

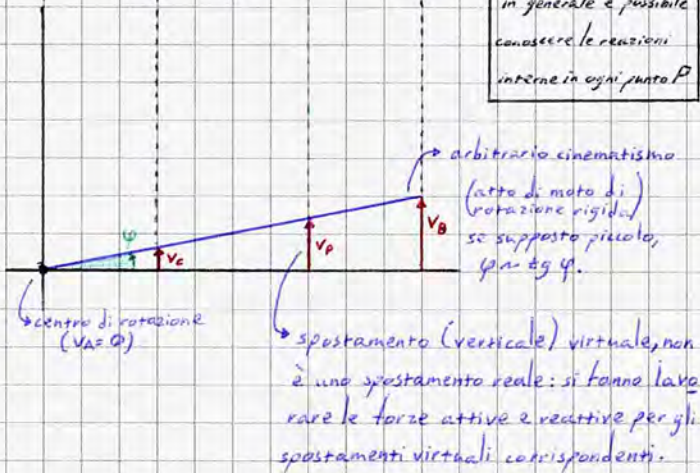
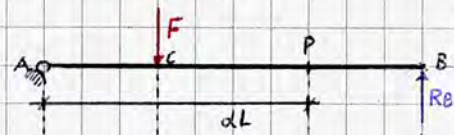
$$L_v = 0 \Rightarrow -F v_c + R_B v_B = 0;$$

in generale è possibile conoscere le reazioni interne in ogni punto P

$$-F(\varphi \cdot a) + R_B[\varphi \cdot (a+b)] = 0, \forall \varphi;$$

$$R_B = \frac{F \cdot a}{L} \quad \text{principio della leva: } R_A = \frac{F \cdot b}{L}$$

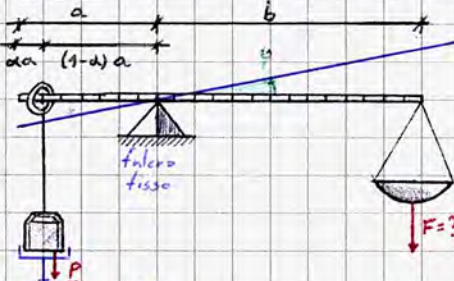
essendo lo spostamento virtuale, la relazione deve valere $\forall \varphi$ (piccolo).



Dal punto di vista storico due scuole di pensiero giunsero contemporaneamente a formulazioni simili: la scuola pre-lagrangiana sul PLV e quella delle carrucole di Stevino; tali idee precedono la teoria sulla linea elastica di Eulero (1744), e risalgono per certi versi all'antica Grecia quando si si interrogava su come verificare l'equilibrio, cosa fosse esattamente: in ambito fisico era considerato causa della "stabilizzazione" di un sistema; ovvero che se una struttura permane nel suo stato di quiete allora c'è equilibrio.

Non si riuscì ad effettuare una schematizzazione matematica del fenomeno fino all'introduzione del PLV, che essenzialmente è una trasposizione generalizzata del principio della bilancia ad aste.

fenomeno fino all'introduzione del PLV, che essenzialmente è una trasposizione generalizzata del principio della bilancia ad aste.



Per il principio della leva, si ha equilibrio se $P a = F b$ "VF": poiché ciò è fisicamente un assurdo si individua l'unica forza che verifica l'equilibrio. Il sistema infatti è labile; spostando il peso di una certa lunghezza da si applica una coppia che equilibra la struttura; le graduazioni sull'asta della bilancia permettono di leggere il peso.

$$L_v = 0 \Rightarrow \bar{P} \cdot \varphi \cdot a(1-d) - F \varphi \cdot b = 0, \forall \varphi;$$

$$\bar{P} a(1-d) = F \cdot b \Rightarrow 1-d = \frac{F b}{\bar{P} a} \Rightarrow d = 1 - \frac{F \cdot b}{\bar{P} \cdot a}$$

Peso noto, mobile implica l'applicazione di coppie differenti.

Analogamente, si può trovare F sapendo che $\bar{P} a(1-d) = F \cdot b$, trovando d empiricamente. (applicazioni usate dal Functivendolo)

Alcune scuole ritengono che da questi primi studi siano discese le ECS e le equazioni differenziali all'equilibrio, derivanti infatti da una labilizzazione totale della struttura. Da ciò ovviamente si è poi generalizzato al caso di sistemi deformabili con legami costitutivi arbitrari.

Generalizziamo ora il procedimento al continuo; per farlo è necessario un teorema che preveda di coinvolgere le azioni e reazioni sia esterne che interne (il tensore di Cauchy infatti schematizza le azioni mutue in ideali sezioni di taglio); per farlo è naturale considerare il tensore di deformazione (infinitesima) $\underline{\underline{E}}$:

$$\underline{\underline{E}} = E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \text{sym}(\text{grad } \underline{u}) = \frac{1}{2} (\text{grad } \underline{u} + (\text{grad } \underline{u})^T) = \frac{1}{2} [\underline{u} \otimes \nabla + \nabla \otimes \underline{u}] \quad (\text{recap. } \underline{\underline{E}})$$

coincidente con lo spostamento lineare dell'elemento trave; il campo di spostamenti - deformazioni interne dunque "spiega" il campo di deformazioni complessivo.

⚠ La labilizzazione fittizia - operazione necessaria per applicare il PLV - non permette alcuna valutazione sul legame di causa-effetto (legame costitutivo) tra azioni e risposta deformativa (sia essa in termini di curvatura o di spostamento), poiché la relazione imposta vale $\forall \varphi$ arbitraria. principale vantaggio del PLV: non dipende dal materiale!

Analogamente, l'applicazione del PLV al continuo impiega $\underline{\underline{I}}$ reali e deformazioni - spostamenti virtuali: in caso contrario il PLV perderebbe di generalità.

Una grandezza virtuale non è necessariamente finta: "virtuale" si riferisce ad un universo esteso di eventualità, di cui la realtà è un caso particolare.

$$\int_{\Omega} \underline{\underline{T}} \cdot (\nabla \otimes \underline{u})^T + \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{\underline{T}}) \cdot \underline{u} dV = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{u}) d\Omega = \int_{\partial \Omega} \underline{\underline{T}} \cdot \underline{n} \cdot \underline{u} dS \rightarrow p. 39$$

Nel continuo invece di φ consideriamo come campo di prova un campo di spostamenti/deformazioni non legato alle azioni (\underline{t} , \underline{b}), indicato con un asterisco per sottolineare la natura di prova del campo.

$$\{ \underline{u}^*, \underline{\underline{E}}^* \} \text{ campo di spostamenti-deformazioni "test"}$$

Logicamente, si si aspetta la presenza di un lavoro virtuale "esterno", dovuto alle azioni e reazioni, e un lavoro virtuale "interno" dovuto alle forze interne. Otterremo infatti che:

$$L_{v,ext} = L_{v,int} \quad L_{v,E} = L_{v,I}$$

Esistono vari procedimenti per dimostrare questa condizione; una volta noto il meccanismo ed acquisita la padronanza dello strumento matematico conviene utilizzare il metodo più rapido, semplice e lineare (effettuare un parallelismo con il principio della bilancia ad aste sarebbe eccessivamente lungo e complesso).

Sapendo che l'obiettivo in questo caso è una formulazione generalizzata del principio dei lavori virtuali, noti i protagonisti delle sollecitazioni interne grazie alle equazioni indefinite dell'equilibrio e che spostamenti e deformazioni virtuali derivano da un campo definito, si cerca la strada più naturale per procedere.

Per modellizzare il lavoro virtuale, essendo coinvolte funzioni distribuite, è naturale intervenire tramite un integrale. Ricordiamo che, per l'ipotesi di piccoli spostamenti e deformazioni, la configurazione iniziale è circa pari a quella finale, ovvero: $\Omega^* \sim \Omega$.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{u}^*) dV \Rightarrow \text{Forze "test"}$$

vettore privo di significato fisico: la componente di lavoro è $\underline{G} \cdot \underline{E}$, non $\underline{G} \cdot \underline{u}$.

$$\Rightarrow \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{u}^*) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{u}^*) \cdot \underline{n} dS \Rightarrow$$

vettore scalare scalare

L'applicazione del teorema di Gauss informa che anche senza conoscere ciò che accade all'interno del continuo è possibile determinare il fenomeno complessivo mediante un'analisi di ciò che accade sulla frontiera: la somma degli effetti interni è pari a una conseguenza sulla frontiera. Per meglio comprendere il concetto, si consideri l'esperienza di quando si provano sensazioni intime e profonde: le azioni interne vengono nascoste, ma provocano inevitabilmente degli effetti visibili all'esterno.

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} (\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dS \quad \text{ricordiamo che } \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$$

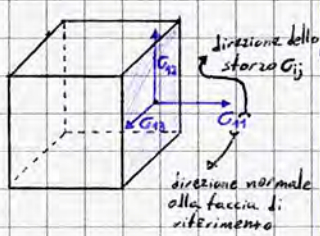
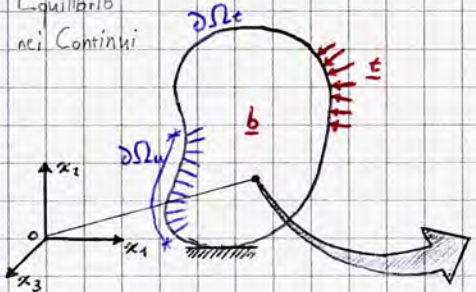
Applicazione della regola di Leibniz:
 $\frac{\partial (f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + f \frac{\partial g}{\partial x}$ (derivata del prodotto)

$$\text{Oppure, } \int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{u}^*) dV = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{\underline{T}}^T) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\Omega} \underline{\underline{T}}^T \cdot (\nabla \otimes \underline{u}^*) dV$$

somma dei prodotti delle componenti simmetriche = $G_{11} E_{11}^* + G_{12} E_{12}^* + \dots + G_{33} E_{33}^*$ (generalizzazione del prodotto scalare)

Uguagliando i due termini si ottiene l'identità fondamentale

Equilibrio nei Continui



Osservazione: si generano due sistemi di equazioni da dover rispettare
 ① → (come nel caso della trave, con le equazioni indefinite - per le differenziali - dell'equilibrio e le condizioni di equilibrio al contorno, che in una trave coincide coi suoi estremi).
 ② →

Equazioni indefinite (forma scalare)

$$\begin{cases} \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \\ \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{32}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \\ \frac{\partial G_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \end{cases} \quad \nabla \cdot \underline{\underline{T}}^T = -\underline{b}$$

$G_{ij} = G_{ji}(x_k) \Rightarrow$ equazioni indefinite con derivate parziali

In forma compatta, $\text{div } \underline{\underline{T}}^T = -\underline{b}$

Ricordando che $\text{div } \underline{w} = \frac{\partial w_1}{\partial x_1} + \frac{\partial w_2}{\partial x_2} + \frac{\partial w_3}{\partial x_3}$ e che $\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix}$, la divergenza del tensore coincide con la divergenza delle colonne

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3}$$

Osservazione: esiste anche la notazione $\nabla \cdot \underline{\underline{T}}^T = -\underline{b}$ (+usata e facile)

② Le equazioni al contorno (che in questo caso coincide con la frontiera) si possono scrivere come:

$$\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{n} = \underline{t} \quad \forall Q \in \partial\Omega_t$$

normale uscente

porzioni della frontiera in cui sono applicate le trazioni (eventualmente nulle), non gli spostamenti.

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{T}^T \cdot \underline{u}^*) dV, \forall \underline{u}^* \in C^2(\Omega) \Rightarrow \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{T}^T) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\Omega} \underline{T}^T : (\nabla \otimes \underline{u}^*) dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot \underline{n}) \cdot \underline{u}^* dS \Rightarrow$$

$$\Rightarrow - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{T}^T) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega} \underline{T} : \text{sym}(\nabla \otimes \underline{u}^*) dV$$

Il simbolo sym indica la generalizzazione del prodotto scalare; poiché $\underline{T} = \underline{T}^T$, nel prodotto scalare generalizzato in questo procedimento si può selezionare $\text{sym}(\nabla \otimes \underline{u}^*)$, poiché la parte emisimmetrica non interviene nel prodotto.

Ricordando che $-(\nabla \cdot \underline{T}^T) = \underline{b}$,

$$\int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{E}^* dV, \forall \underline{u}^*$$

$$dV = dA \cdot dx; \quad \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS \Rightarrow L_{v, \text{int}}$$

$L_{v, e}$
carichi agenti moltiplicati scalarmen-
te per \underline{u}^* sommati all'intero volume
o superficie interessata dalla specifica
forza di natura compatibile.
Se il continuo è un corpo rigido, tale
contributo viene posto ≈ 0 . (spost. null)

$L_{v, i}$
se il campo di spostamenti è rigido, la parte traslatoria è nulla così
come quella asimmetrica (rotatoria); si applica dunque il PLV ai
sistemi rigidi.

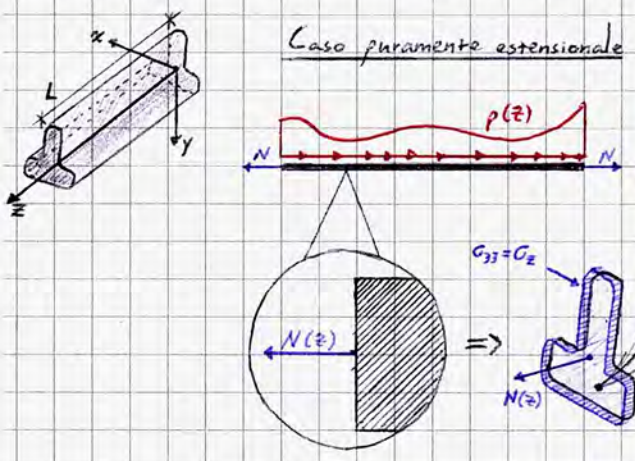
Questa formulazione ha la forza (anche se non è altro che una prova, dunque non restituisce informazioni sul vero \underline{E} e il legame tra \underline{G} ed \underline{E} , o se \underline{T} è in equilibrio con \underline{t} e \underline{b} senza divergenza) di definire una relazione valida indipendentemente dalla natura del corpo, sia esso solido, viscoso, incoerente, isotropo, elastico, ^{sc}dissipi energia, se cioè sottoposto a rottura... Il requisito suddetto è sempre valido per l'equilibrio.

Principio dei Lavori Virtuali per Sistemi Strutturali (formati da travi piane)

Presenta due differenti applicazioni:

- Formulazione per cercare spostamenti (rotazioni etc. generalizzati), valido solo su strutture isostatiche;
- Formulazione per cercare reazioni iperstatiche [indeterminate] su strutture iperstatiche.

Particolareggiamo la formulazione generica del Principio dei Lavori Virtuali dal continuo al solido trave:



Inizio \Rightarrow legge generale \Rightarrow idem per il momento

Le forze volumetriche hanno parallelismi con i carichi di tipo p (caso estensionale) o q (caso flessionale) delle travi.

Ad esempio,

$$p(z) \left[\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right] \frac{F}{L} \Rightarrow \underline{b} \equiv \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{matrix} = \begin{matrix} \text{(in questo caso)} \\ 0 \\ 0 \\ P/A \end{matrix} \Rightarrow b_3 \neq 0$$

Da ciò otteniamo che, ricordando $\int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{E}^* dV, \forall \underline{u}^* :$

Ricordiamo che possiamo considerare $\sigma_z = \frac{N}{A}$ e $\underline{E}_z^* = \frac{\partial u^*}{\partial z} = \frac{du^*}{dz} = \underline{u}^{*'} (solo su z!)$

$$\int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV = \int_0^L \frac{p}{A} \cdot u_3^* \cdot A dz$$

$$\int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS = \sum_{k=1}^n \underline{E}_k \cdot \underline{u}^* k$$

\rightarrow anche momenti
 $\rightarrow k$ punti estremi della trave: dS è costituita dagli estremi della struttura.

$$\int_{\Omega} \underline{T} : \underline{E}^* dV \Rightarrow \int_0^L \sigma_z \cdot \underline{E}_z^* A dz = \int_0^L N u^{*'} dz$$

licca@poli.mi.polimi.it

Il PLV applicato a strutture formate da travi piane dunque diventa:

$$\int_0^L \frac{p}{A} \cdot u_3^* \cdot A dz + \sum_{k=1}^n F_k \cdot u_k^* = \int_0^L N u_1^* dz$$

ovviamente in \bar{z}

Nelle travi di Eulero-Bernoulli il lavoro del taglio non viene considerato, a differenza del modello di Timoshenko in cui il taglio per scorrimento è apprezzabile, essendo travi "torte":

$$\int_0^L T \cdot \gamma^*$$

↳ derivata di v + componente rotazionale propria della sezione

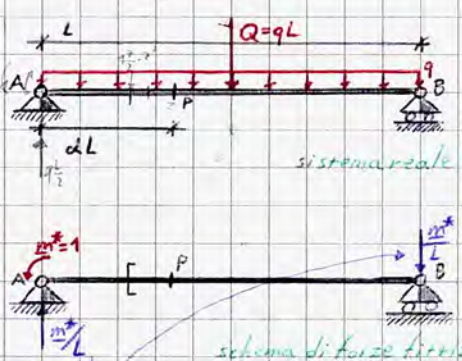
Più in generale, includendo il caso flessionale, si ottiene che:

$$\int_0^L p u^* dz + \int_0^L q v^* dz + \sum_{k=1}^n F_k \cdot s_k = \int_0^L N u_1^* dz + \int_0^L M v_1^* dz$$

↳ curvatura linearizzata χ^*

↳ $\begin{bmatrix} 0 \\ v^*(z) \\ u^*(z) \end{bmatrix}$

Formulazione per una struttura isostatica



Le reazioni vincolari sono note grazie alle ECS. L'applicazione del PLV ci permette di valutare, ad esempio, φ_A o v_P (ricordiamo che la struttura è deformabile).

⚠ Poiché cerchiamo degli spostamenti reali, occorre riscrivere il passaggio dalla formulazione reale a quella virtuale: una parte dello spostamento è dovuta al carico, un'altra invece è causata dalla curvatura χ ; ricordando che il legame costitutivo è elastico sfruttiamo il teorema dei lavori virtuali introducendo l'elasticità - che sottolineiamo essere una specializzazione del teorema, e non un requisito necessario. Fatto ciò si applica la legge più calzante rispetto all'incognita: nel caso di φ_A considereremo la legge del momento.

Nello schema fittizio resta invariata la geometria dei vincoli e il legame costitutivo; si considera la struttura scaria e si applica l'ente statico duale alla deformazione di nostro interesse, equilibrandola con opportune reazioni.

caso reale $M(z) = +q \frac{L}{2} z - q \frac{z^2}{2}$

sistema fittizio $M^* = \frac{m^* z}{L} - m^*$

Applichiamo ora il PLV: $L_{ve} = L_{vi}$

$$L_{ve} = m^* \varphi_A = \int_0^L \frac{M^*}{EI} \cdot \chi^* dz$$

↳ spostamento reale in A

Non scriviamo m^*/L in A e in B poiché, non essendo supposti cedimenti vincolari, $\underline{L^*} = 0$; analogamente non essendo carichi ripartiti nel sistema fittizio non esiste una \underline{b} "equivalente".

$$L_{vi} = \int_0^L M^* \cdot \chi^* dz = \int_0^L m^* \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \cdot \left[\frac{qz(L-z)}{2} \right] dz$$

↳ $\frac{M^*}{EI}$

In questo caso il PLV si attua applicando le forze fittizie al sistema reale, ovvero coppie e reazioni vincolari.

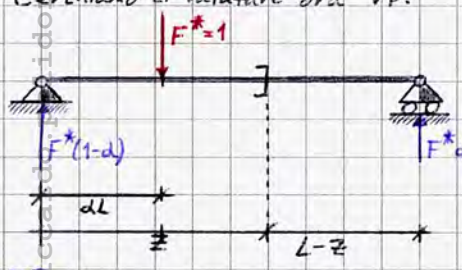
$$L_{ve} = L_{vi} (\Leftrightarrow) m^* \varphi_A = \frac{m^*}{EI} \int_0^L \left[\frac{qz^2}{2} - \frac{qz^3}{2L} - \frac{qz}{2} L + \frac{qz^2}{2} \right] dz = \frac{m^*}{EI} \left[\frac{qz^3}{6} - \frac{qz^4}{8L} - \frac{qz^2}{4} L + \frac{qz^3}{6} \right]_0^L$$

$$= \frac{m^*}{EI} q \left(\frac{L^3}{3} - \frac{L^3}{8} - \frac{L^3}{4} \right) = \frac{m^*}{EI} q L^3 \left(\frac{8-3-6}{24} \right) = \frac{m^*}{EI} \left(-\frac{qL^3}{24} \right), \quad \forall m^* (=1)$$

↳ avendo posto $m^*=1$ lo si può elidere: in generale non è possibile semplificare poiché esiste il caso $m^*=0$ (ad esempio).

Ne segue che $\varphi_A = -\frac{qL^3}{24EI}$

Cerchiamo di valutare ora v_P :



⚠ Consideriamo AP e PB come tratti di continuità poiché in P è presente una discontinuità dovuta alla forza concentrata F.

leggi del momento (fittizio)

AP: $\begin{cases} M^* = F^*(1-d) \cdot z \\ \end{cases}$

PB: $\begin{cases} M^* = F^* d (L-z) \\ \end{cases}$

La valutazione va effettuata analogamente per il momento reale in modo tale da svolgere l'integrale del lavoro interno.

$$L_{ve} = L_{vi}$$

$$L_{ve} = F \cdot v_p$$

$$L_{vi} = \int_{\text{struttura intera}} M^* \frac{M^{\text{reale}}}{EI} dz = \int_0^L (F^*(1-d)) z \frac{qz(L-z)}{EI} dz + \int_{dL}^L F^* d(L-z) \cdot \frac{qz(L-z)}{EI} dz =$$

$$= \frac{F^* q}{EI} \left[\left[(1-d) \frac{z^3 L}{6} - (1-d) \frac{z^4}{8} \right]_0^L + \left[\frac{d z^3 L}{6} - \frac{d z^4}{8} \right]_{dL}^L \right] =$$

$$= \frac{F^* q}{EI} \left[(1-d) \left(\frac{d^3 L^4}{6} - \frac{d^4 L^4}{8} \right) + \left[-\frac{dL}{6} (-L^3(1-d)^3) - \frac{d}{8} L^4 (1-d)^4 \right] \right] = \dots$$

Consideriamo
 $L-z = z_1$ (z greco);
 $z = L - z_1$; $dz_1 = -dz$

Supponiamo ora che i vincoli esterni siano cedevoli:



I vincoli cedevoli vanno considerati nel lavoro virtuale esterno come spostamenti reali; ricordando il caso $m^* \leftrightarrow \varphi_A$ abbiamo che:

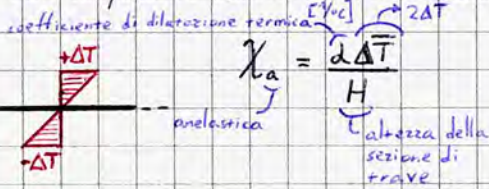
$$L_{ve} = m^* \varphi_A - \frac{m^* \Delta}{L} + \frac{m^* \cdot v_B^{\text{reale}}}{L} = m^* \varphi_A - \frac{m^* \Delta}{L} + \frac{m^* q}{2k}$$



reazione discorda
 allungamento

la reazione vincolare è verso l'alto, v_B verso il basso \Rightarrow concorde con la forza fittizia.
 In particolare, $v_B^{\text{reale}} = \frac{qL}{2k}$ (Legge di Hooke)

Supponendo sia presente anche una deformazione dovuta ad una variazione di temperatura,



$$\chi_a = \frac{\alpha \Delta T}{h}$$

è ovviamente una deformazione reale, supponendo $\Delta T > 0$ sopra allora $\chi_a < 0$ (curvature concave)

Il problema è lineare; si può considerare la sovrapposizione degli effetti dovuti a distorsioni e $\chi_{elastica}$

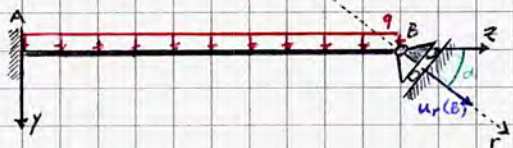
Ne segue che $L_{vi} = \int_0^L M^* \chi^{\text{reale}} dz = \int_0^L M^* \left[\frac{M^{\text{re}}}{EI} - \frac{\alpha \Delta T}{h} \right] dz$

Più in generale, $L_{vi} = \int_{\text{struttura}} M^* \frac{M^{\text{reale}}}{EI} dz - \int_{\text{struttura}} M^* \frac{\alpha \Delta T}{h} dz + \int_{\text{struttura}} N^* \frac{N^{\text{reale}}}{EA} dz$; $L_{ve} = \sum F^* \cdot s^{\text{reale}}$

Formulazione per strutture iperstatiche

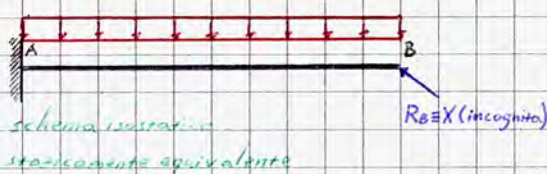
(l'obiettivo è la ricerca di specifiche reazioni iperstatiche)

La formulazione è sempre del tipo $L_{ve} = L_{vi}$; nelle strutture iperstatiche si scriverà un numero di equazioni di questo tipo quante saranno le incognite iperstatiche.



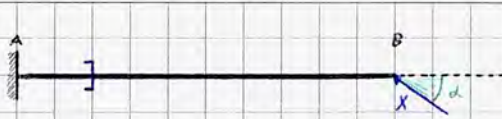
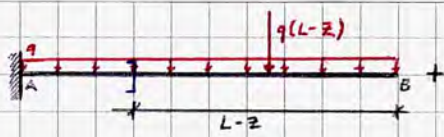
1 incognita iperstatica.

Si realizza uno schema isostatico staticamente equivalente, sostituendo alla condizione di vincolo rimossa una reazione incognita.



Per procedere e determinare univocamente le reazioni cercate bisogna separare lo schema isostatico in due ulteriori schemi, uno costituito dalle sollecitazioni note ed uno formato dalle incognite. Su questi schemi si leggeranno gli spostamenti - deformazioni reali, sottoclasse di quelli virtuali.

In questa applicazione considereremo un'ideale sezione di taglio mobile sui due schemi, in maniera tale da determinare R tramite il contributo delle caratteristiche della sollecitazione.

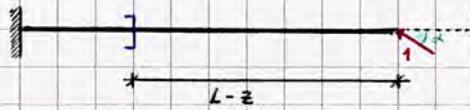


Schemi su cui leggerò gli spostamenti-deformazioni reali, sottoclasse di quelli virtuali.

schema isostatico - sulle reazioni note

schema isostatico - reazioni ignote

Occorre considerare inoltre uno schema di forze fittizio affinché ci sia equilibrio; per farlo applichiamo al sistema "scarico" una forza unitaria in luogo della reazione X incognita, legata all'iperstaticità della struttura.



A differenza del caso isostatico, la scelta dello schema di forze fittizio non è dettata da forze duali allo spostamento cercato: si sostituiscono forze di intensità unitaria in luogo del vincolo. Procediamo nello studio delle reazioni reali:

Schema di forze fittizie in equilibrio

Valgono le relazioni $M^r = M^o + M^i X$; $N^r = N^o + N^i X$, da cui è evidente la praticità operativa nel considerare gli schemi appena rappresentati.

M^o = momento dovuto all'incognita iperstatica;
 M^i = momento dovuto alla forza unitaria dello schema di forze fittizie in equilibrio

contributo al momento dovuto ai carichi noti

solli. 1 => carichi oz!

Otteniamo che:

$$\begin{cases} N^i = -1 \cos \alpha \\ M^i = +1 \sin \alpha (L-z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N^r = 0 - X \cos \alpha = -X \cos \alpha \\ M^r = -q \frac{(L-z)^2}{2} + X \sin \alpha (L-z) \end{cases}$$

Sapendo che $L_{VE} = L_{Vi}$,

$$L_{VE} = 1 \cdot u_{rB} + 0 = 0$$

spostamento reale, nullo perché il vincolo è fisso, non implica un'incognita di spostamento (e infatti la struttura è iperstatica!)
 Il prodotto è sempre $1 \cdot 0$ o $1 \cdot 0$, con 0 cedimento noto.

sistema di forze fittizie lavorante sullo schema degli spostamenti reali.

$$L_{Vi} = \int_0^L N^i \frac{N^r}{EA} dz + \int_0^L M^i \frac{M^r}{EI} dz = \int_0^L \frac{+ \cos^2 \alpha X}{EA} dz + \int_0^L \sin \alpha (L-z) \frac{[-q \frac{(L-z)^2}{2} + X \sin \alpha (L-z)]}{EI} dz = 0$$

Assumiamo: $\frac{L-z}{2} = z$
 $z=0 \Rightarrow z=L$
 $z=L \Rightarrow z=0$
 $dz = -dz; z=L-z$

$$\int_0^L \sin \alpha z \frac{[-q \frac{z^2}{2} + X \sin \alpha z]}{EI} (-dz) = \int_0^L \sin \alpha z \frac{[-q \frac{z^2}{2} + X \sin \alpha z]}{EI} dz \Rightarrow \frac{X \cos^2 \alpha L}{EA} + \frac{1}{EI} \left[\sin^2 \alpha X \frac{L^3}{3} - q \sin \alpha \frac{L^4}{8} \right] = 0$$

$$L_{VE} = L_{Vi} \Rightarrow 0 = X \left(\cos^2 \alpha \frac{L}{EA} + \sin^2 \alpha \frac{L^3}{EI} \right) - q \sin \alpha \frac{L^4}{8EI} \Rightarrow X = \frac{q \sin \alpha \frac{L^4}{8EI}}{\cos^2 \alpha \left(\frac{L}{EA} + \sin^2 \alpha \frac{L^3}{3EI} \right)}$$

Δ In esercizi di questo tipo, è frequente trascurare alcune grandezze nei passaggi... Primo elemento di controllo in questi casi è un'analisi dimensionale del risultato ottenuto; se il risultato non corrisponde dimensionalmente a quanto fisicamente richiesto lo svolgimento è errato!

Nei casi limite dell'angolo α , abbiamo che:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} X = \frac{0}{L/EA} = 0 \quad \text{caso analogo alla trave a mensola}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} X = \frac{\frac{qL^4}{8EI}}{\frac{L^3}{3EI}} = \frac{3}{8} qL$$

Si impiega l'operazione di limite a livello formale per evitare di considerare condizioni di discontinuità.

Talvolta nelle strutture si trascura il contributo estensionale (N) rispetto a quello flessionale: confrontando i termini L/EA ed L^3/EI otteniamo infatti:

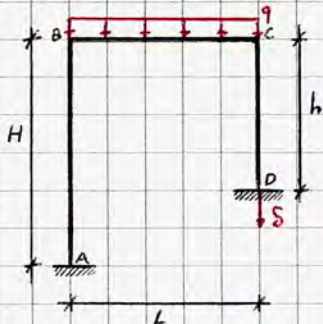
$$\frac{L/EA}{L^3/EI} = \frac{I/A}{L^2}$$

ma essendo $I = \int_A y^2 dA$ si ottiene $\frac{I^2 A/A}{L^2} \sim (d/L)^2$
 $\rho^2 A$, con ρ raggio giratore d'inerzia; ha ordine di grandezza pari a quello del diametro caratteristico della sezione di trave.

Poiché nelle travi $d/L \ll 1$, il contributo estensionale nel PLV è trascurabile.

⚠ L'impatto del contributo estensionale ha entità differenti tra statica e cinematica: in statica è trascurabile se c'è flessione nell'analisi del regime deformativo, non per quanto riguarda l'analisi delle tensioni!

Strutture più volte iperstatiche



Il sistema è 3 volte iperstatico, con un cedimento anelastico. Si osserva come sia necessario costruire uno schema di forze fittizie a partire dallo schema isostatico staticamente equivalente per ogni incognita iperstatica:

Logicamente, lo schema isostatico staticamente equivalente per essere isostatico non deve avere al lineamento dei centri di istantanea rotazione dei vincoli labilizzati. In questo modo, si può adattare il sistema come schema di spostamenti su cui far lavorare le forze fittizie e applicare il PLV.

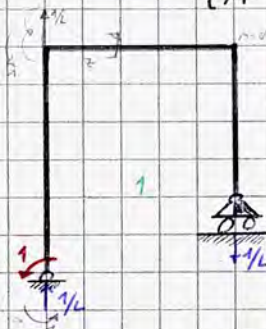
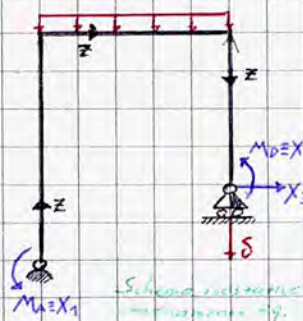
Essendovi 3 tratti, occorre scrivere 3 equazioni di sforzi, secondo il sistema di riferimento assunto nello schema isostatico staticamente equivalente a quello reale.

$$\textcircled{I}: \begin{cases} N^0 = -qL/2 \\ M^0 = 0 \end{cases} \quad 0 \leq z \leq H$$

$$\textcircled{II}: \begin{cases} N^0 = 0 \\ M^0 = q \frac{L}{2} z - q \frac{z^2}{2} \end{cases} \quad 0 \leq z \leq L$$

$$\textcircled{III}: \begin{cases} N^0 = -qL/2 \\ M^0 = 0 \end{cases} \quad 0 \leq z \leq h$$

Si osserva che nel caso di molte incognite iperstatiche il metodo non è conveniente; essendo però le operazioni iterate e meccaniche è utile per scrivere un programma di controllo e risoluzione delle strutture.



$$1: \textcircled{I}: \begin{cases} N^I = -qL \\ M^I = -1 \end{cases} \quad \text{si guarda sempre da sinistra a destra (lungo l'asse } z); \text{ il momento è orario ma tende le fibre superiori.}$$

$$\textcircled{II}: \begin{cases} N^I = 0 \\ M^I = \frac{1}{L} z - 1 \end{cases}; \quad \textcircled{III}: \begin{cases} N^I = +qL \\ M^I = 0 \end{cases}$$

$$2: \textcircled{I}: \begin{cases} N^{II} = -qL \\ M^{II} = 0 \end{cases}; \quad \textcircled{II}: \begin{cases} N^{II} = 0 \\ M^{II} = \frac{1}{L} z \end{cases}; \quad \textcircled{III}: \begin{cases} N^{II} = +qL \\ M^{II} = +1 \end{cases}$$

$$3: \textcircled{I}: \begin{cases} N^{III} = \frac{H-h}{L} \\ M^{III} = 1z \end{cases}; \quad \textcircled{II}: \begin{cases} N^{III} = 1 \\ M^{III} = -\frac{H-h}{L} z + 1 \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} \text{contributo della reazione} \\ \text{unitaria} \end{array} \right) \quad z=L \Rightarrow M=1$$

$$\textcircled{III}: \begin{cases} N^{III} = -1(H-h)/L \\ M^{III} = 1(h-z) \end{cases}$$

equilibrano l'eccentricità della forza unitaria e la relativa reazione

Applichiamo la relazione $L'_{vi} = L'_{vi}$:

$$L'_{VE} = \frac{1}{L} \cdot S$$

unica sol. fittizia in corrispondenza dell'unico spost. reale presente.

$$L'_{vi} = \int_0^H \underbrace{-\frac{1}{L} \left(-q \frac{z}{2} - \frac{1}{L} X_1 - \frac{1}{L} X_2 + \frac{H-h}{L} X_3 \right)}_{N'} dz + \int_0^H \underbrace{-1 \left(0 - 1 X_1 + 0 X_2 + 1 z X_3 \right)}_{M'} \frac{1}{EI} dz + \text{I tratto}$$

$$+ \int_0^L 0 dz + \int_0^L \left(\frac{z}{L} - 1 \right) \frac{\left[q \frac{z}{2} - q \frac{z^2}{2} + \left(\frac{z}{L} - 1 \right) X_1 + \frac{z}{L} X_2 + \left(-\frac{H-h}{L} z + H \right) X_3 \right]}{EI} dz + \text{II tratto}$$

$$+ \int_0^h \frac{1}{L} \frac{\left(-q \frac{z}{2} + \frac{1}{L} X_1 + \frac{1}{L} X_2 - \left(\frac{H-h}{L} \right) X_3 \right)}{EA} dz + \int_0^h 0 dz \text{ III tratto}$$

$L'_{VE} = L'_{vi} \rightarrow f(X_1, X_2, X_3; q, S, \dots)$ eguagliando i due termini si otterrà una funzione lineare nelle incognite X_1, X_2, X_3
 ↳ lineare

Procedendo analogamente, si costruisce il sistema

$$\begin{cases} L'_{VE} = L'_{vi} \\ L''_{VE} = L''_{vi} \\ L'''_{VE} = L'''_{vi} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \\ p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{cases}$$

$$L''_{VE} = \frac{1}{L} S$$

$$L''_{vi} = \int \text{sistema di forze lavoranti (termine uguale per tutti i tratti)} dz \dots = \dots = g(X_1, X_2, X_3; q, S, \dots) = 0$$

$$L'''_{VE} = -\frac{(H-h)}{L} S$$

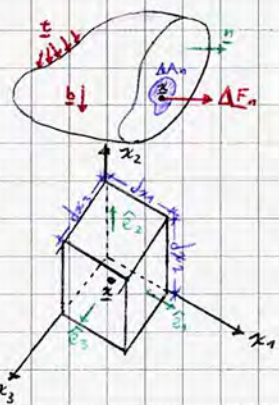
$$L'''_{vi} = \dots = p(X_1, X_2, X_3; q, S, \dots) = 0$$

È evidente come per più tratti di continuità o incognite iperstatiche il PLV sia meno conveniente, pur essendo una strategia "automatica".
 vedi le pagine di esercitazione per una conferma!

Meccanica del Continuo ②

Ricapitolando le lezioni precedenti, ricordiamo che:

$$t_n(x) = \lim_{\Delta A_n \rightarrow 0} \frac{\Delta E_n}{\Delta A_n} \quad \text{vettore tensore di Cauchy}$$



dipende da x e dalla giacitura del piano di taglio considerato (e quindi della normale n)

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} \end{bmatrix} \quad \text{tensore delle tensioni}$$

si osserva che, noto \underline{T} , è possibile conoscere tutti i tensori di Cauchy in un dato punto x .
 (Teorema di Cauchy)

$$t_n(x) = \underline{T}(x) \underline{n}, \quad \forall x \in \Omega$$

Riferito a un volume infinitesimo, le condizioni di equilibrio di un corpo sono esplicitate nel seguente sistema. La formulazione è intuitivamente evidente: un corpo in equilibrio soggetto a forze esterne è in equilibrio anche in ogni sua parte, dunque anche in ogni intorno di ogni punto x .

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \underline{T}(x))^T + \underline{b}(x) = 0 \\ \underline{T}(x) = \underline{T}^T(x) \end{cases} \quad \forall x \in \Omega$$

equilibrio alla traslazione
 equilibrio alla rotazione
 ↳ da imporre in particolare su $\underline{T}(x)$

• Equilibrio alla traslazione

$$\textcircled{1} \Rightarrow -G_{11}(dx_2 dx_3) + (G_{11} + dG_{11})(dx_2 dx_3) + \\ -G_{21}(dx_1 dx_3) + (G_{21} + dG_{21})(dx_1 dx_3) + \\ -G_{31}(dx_1 dx_2) + (G_{31} + dG_{31})(dx_1 dx_2) + \\ + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

↑ riferimento concordato a x_1

$$\Downarrow \frac{\partial G_{11} dx_2}{\partial x_1} \quad \frac{\partial G_{21} dx_3}{\partial x_2}$$

$$dG_{11} dx_2 dx_3 + dG_{21} dx_1 dx_3 + dG_{31} dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} + b_1 \neq 0 \quad \text{certamente } \neq 0$$

$$\frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{31}}{\partial x_3} + b_1 \neq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

Analogamente,

$$\textcircled{2} \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{32}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

$$\textcircled{3} \frac{\partial G_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial G_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial G_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad \forall x \in \Omega$$

In forma indiciale (implicita), queste tre condizioni messe a sistema implicano che:

$$\frac{\partial G_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0 \quad \text{oppure} \quad \nabla \cdot \underline{T}(x) + \underline{b}(x) = 0; \quad \forall x \in \Omega$$

operatore che agisce sulle righe del tensore sommando le derivate delle componenti \Rightarrow trasportando \underline{T} nella opera sulle colonne.

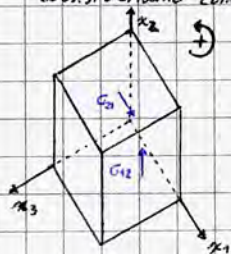
devono essere verificate da \underline{T} in ogni punto affinché il corpo sia in equilibrio.

Dette equazioni si dicono Equazioni indefinite di equilibrio, sono equazioni differenziali lineari omogenee; per ricavare una soluzione definita è necessario includere le condizioni al contorno, ovvero impostare un problema di Cauchy per definire le costanti integrali arbitrarie.

• Equilibrio alla rotazione

Assumiamo trascurabili le variazioni delle G_{ij} e l'entità della forza di volume;

Consideriamo come asse di rotazione l'asse x_3 ; si osserva che le uniche tensioni a determinare una coppia attiva sono G_{12} e G_{21} .



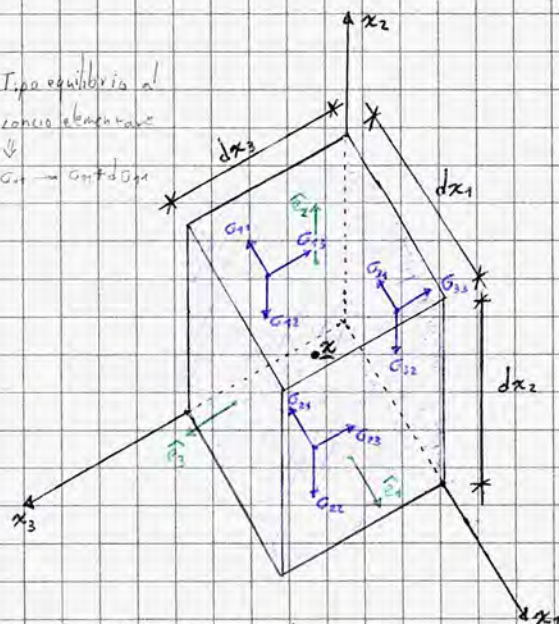
$$G_{12} (dx_2 dx_3) dx_1 - G_{21} (dx_1 dx_3) dx_2 = 0 \Rightarrow G_{12} = G_{21} \quad \textcircled{x_3}$$

Forza braccio

Supponendo di considerare b , sarebbe stata presente una componente b_1 avente contributo non nullo di momento, pari a $b_1 (dx_1 dx_2 dx_3) \cdot dx_2/2$; esso però è un infinitesimo di ordine superiore (IV ordine rispetto al III ordine) ed è dunque trascurabile. Analogamente, i contributi dovuti a dG_{ij} sono del IV ordine.

$$\text{Infatti, } dG_{12} (dx_1 dx_2) dx_3 = \frac{\partial G_{12}}{\partial x_1} dx_1 dx_1 dx_2 dx_3.$$

Tipo equilibrio al cono elementare
 \downarrow
 $G_{ij} \rightarrow G_{ij} + dG_{ij}$



Le facce del volume elementare aventi normale uscente concordano ad uno dei tre assi coordinati si dice faccia incrementale, altrimenti si parla di facce non incrementali.

Gli sforzi G_{ij} sono definiti positivi se orientati concordemente con la normale uscente sulla specifica faccia; se la normale è discorde rispetto a uno dei tre assi coordinati, la relativa terna di sforzi sarà orientata in maniera discorde rispetto agli assi.

Le equazioni a fianco sono costruite assumendo che ad ogni dx_i possa corrispondere una variazione della tensione, ovvero dei termini $G_{ij} + dG_{ij}$ sulle facce incrementali; avendo solo variazione lungo la dx_i il differenziale assume forma esatta: $dG_{11} = \frac{\partial G_{11}}{\partial x_1} dx_1$ etc.

Analogamente,

$$\sigma_{13} = \sigma_{31}$$

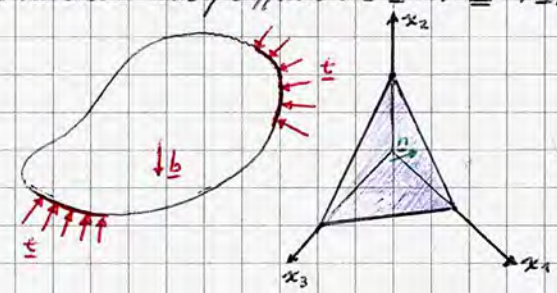
$$\sigma_{23} = \sigma_{32}$$

Messe a sistema, le tre condizioni sono valide se e soltanto se $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, ovvero $\underline{T} = \underline{T}^T \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

Ne segue che
$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{T} = -\underline{b} \\ \underline{T} = \underline{T}^T \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega \implies \nabla \cdot \underline{T} = -\underline{b} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$
 equazione che combina entrambe le equazioni del sistema

Per risolvere completamente il sistema occorre, come anticipato, considerare le condizioni al contorno in maniera tale da determinare le costanti integrali. Oltre alle forze di volume, direttamente incluse nell'equilibrio alla traslazione, occorre considerare le forze di superficie (tractions) \underline{t} : abbiamo distinto la $\partial\Omega_c$ da $\partial\Omega_u$ (spostamenti e vincoli), in cui le curve con $\underline{u} = \underline{0}$ si considerano appartenenti a $\partial\Omega_c: \underline{t} = \underline{0}$. Nei punti in cui sono applicate le \underline{t} , i vettori di tensione proiettati sulla frontiera (considerando \underline{n} la normale alla frontiera) devono rispettare la relazione $\underline{t}_n(\underline{x}) = \underline{t}(\underline{x})$ necessariamente affinché ci sia equilibrio; dal teorema di Cauchy sappiamo che $\underline{t}_n(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}) \underline{n}$, dunque:

$$\begin{cases} \underline{T}(\underline{x}) \underline{n} = \underline{t}(\underline{x}) \\ \nabla \cdot \underline{T} + \underline{b} = \underline{0} \end{cases} \implies \text{eq. complessiva}$$



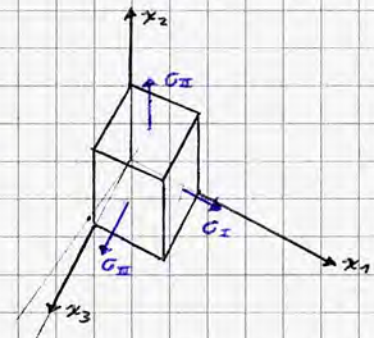
Immaginando di traslare il tetraedro di Cauchy al limite, ovvero con \underline{x} sulla frontiera di Ω , e poiché detta frontiera è per ipotesi generalmente regolare, è possibile approssimare la frontiera di Ω in quel punto (intorno infinitesimo) ad un piano omogeneo (tangente nel punto \underline{x} alla frontiera effettiva): \underline{n} coincide con la normale alla frontiera in quel punto, il piano tangente diventa la faccia del tetraedro di normale \underline{n} e dunque si ricava l'equazione appena scritta, condizione di equilibrio al contorno per determinare le costanti di integrazione che risolvono l'equazione indefinita di equilibrio.

Determinazione delle tensioni principali e le direzioni principali di tensione

Essendo \underline{T} un tensore, la sua rappresentazione matriciale dipende dal sistema di riferimento: comprende le componenti di tensione parallele agli assi cartesiani; ruotando la terna di assi dunque cambiano le giaciture dei piani di sezione ideale, ne segue che le componenti di tensione sono in generale diverse al variare del sistema di riferimento. Le rappresentazioni possibili di \underline{T} sono dunque infinite; tra di esse però ce n'è una in cui \underline{T} ha rappresentazione matriciale diagonale, coincidente con il sistema di riferimento principale per lo stato sollecitativo

$$T_P = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

nel riferimento $\{\hat{e}_I, \hat{e}_{II}, \hat{e}_{III}\}$
direzioni principali (vettori del riferimento principale)
tensioni principali (Δ : sono SCALARI!)



Applicando il teorema di Cauchy,

$$\underline{t}_n(\underline{x}) = \sigma_I \hat{e}_I = \underline{T}_P \cdot \hat{e}_I = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \sigma_I \hat{e}_I \implies \underline{t}_n(\underline{x}) \text{ solo all'incrinatura}$$

\underline{T} intrinsecamente diagonalizzabile!
 $\exists P: P^{-1} \underline{T} P = \underline{T}_P$
 $\underline{T} = P \underline{T}_P P^{-1}$

λ scalare è autovalore di $\underline{T} \iff \exists \underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}: \underline{T} \cdot \underline{v} = \lambda \underline{v}$
 $\underline{T} \cdot \underline{v} - \lambda \underline{v} = \underline{0}$
 $(\underline{T} - \underline{T} \lambda) \underline{v} = \underline{0}$
Ammetto sol. $\iff \det(\underline{T} - \lambda \underline{I}) = 0$ con λ incognita

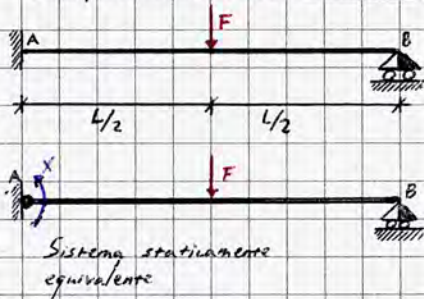
• Autovalori = ordine della matrice
• Matr. geom = Matr. alg. autovalori
Matr. simmetrica SEMPRE DIAGONALIZZABILE

Equilibrio delle strutture ②

Metodo degli spostamenti

È un metodo che, come il metodo delle forze, risolve strutture iperstatiche; il numero di incognite iperstatiche è pari al grado di iperstaticità; il procedimento risolutivo prevede anch'esso la costruzione di un sistema isostatico equivalente allo schema iniziale attraverso l'introduzione di incognite iperstatiche.

Ricapitolazione: metodo delle forze



Una volta realizzato lo schema isostatico staticamente equivalente allo schema di partenza, si utilizza un'equazione di congruenza (nel nostro caso, $\varphi_A = 0$) per restituire anche l'equivalenza cinematica alla struttura, determinando la reazione iperstatica incognita.

Infatti, abbiamo che:

$$\varphi_A = 0 \Rightarrow \varphi_A(X) + \varphi_A(F) = 0 \Rightarrow \frac{XL}{3EI} - \frac{FL^2}{16EI} = 0 \Rightarrow X = \frac{3}{16} FL$$

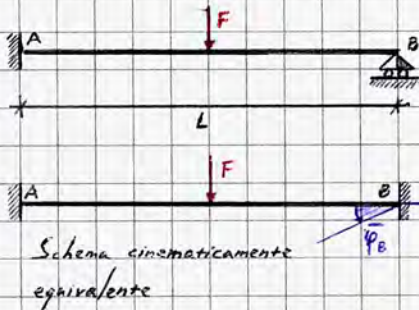
SOVRAPP. EFFETTI

Schemi notevoli:

$\varphi_A = \varphi_B = \frac{qL^3}{24EI}$
 $V_m = \frac{5qL^4}{384EI}$
 $\varphi_A = -\frac{mL}{6EI}$
 $\varphi_B = \frac{mL}{3EI}$
 $\varphi_A = \varphi_B = \frac{FL^3}{16EI}$
 $V_m = \frac{FL^3}{48EI}$

Una volta nota la reazione iperstatica, si risolve la struttura applicando le equazioni indefinite di equilibrio. (Trovare le reazioni restanti sulla struttura e calcoli di conseguenza le (d.s))

Metodo degli spostamenti



Ipotizziamo che lo schema abbia rigidezza assiale infinita; ciò implica che la trave è supposta inestensibile, dunque u_B è trascurabile. Come vedremo, tale ipotesi è in realtà già verificata dalla teoria della trave.

$$EA \rightarrow \infty \Rightarrow u_B \rightarrow 0$$

Sistema cinematicamente equivalente

Nel metodo degli spostamenti, le incognite iperstatiche sono sostituite da spostamenti, non forze. Operazione preliminare nell'applicazione del metodo è la individuazione degli spostamenti nodali incogniti; per realizzare uno schema isostatico cinematicamente equivalente a quello iperstatico si bloccano tutti i gradi di libertà nodali, inserendo cedimenti anelastici laddove gli spostamenti nello schema iperstatico siano liberi.

Spostamenti nodali: $u_A, u_B, v_A, v_B, \varphi_A, \varphi_B$

gradi di libertà liberi \Rightarrow si bloccano per poi imporre dei cedimenti anelastici incogniti

Vincolo "morsetto" impone unicamente $\varphi = 0$

Per garantire anche l'equivalenza statica con lo schema di partenza occorre applicare un'equazione di equilibrio (nel nostro caso, $\sum M_B = 0$), il che permette di determinare la reazione iperstatica incognita.

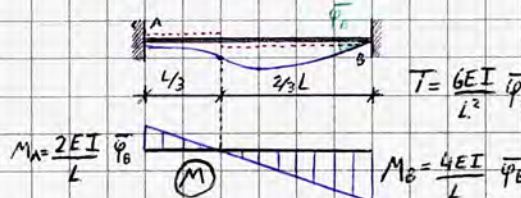
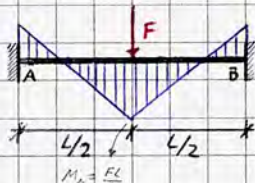
$$\sum M_B = 0 = M_B(F) + M_B(\varphi_B) = -\frac{FL}{8} + \frac{4EI}{L} \varphi_B \Rightarrow \varphi_B = \frac{FL^2}{32EI}$$

SOVRAPP. EFFETTI

Volendo conoscere M_A :

$$M_A = M_A(F) + M_A(\varphi_B) = \frac{FL}{8} + \frac{2EI}{L} \left(\frac{FL^2}{32EI} \right) = \frac{3}{16} FL$$

il che verifica l'equivalenza dei due metodi (vedi p. 24)



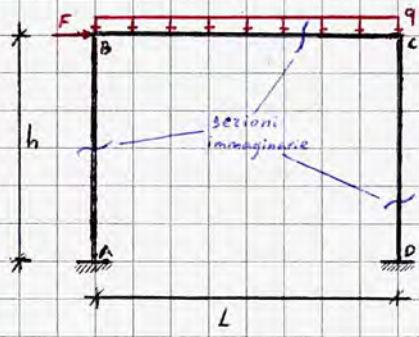
Si consiglia per la risoluzione di verificare il seguente schema notevole:



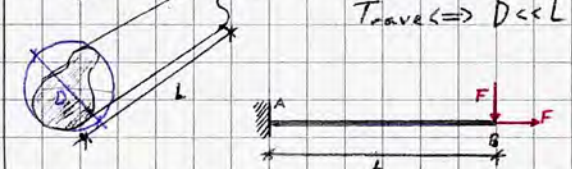
(Schemi notevoli) utilizzati per trovare M_A

L'applicazione di uno dei due metodi rispetto all'altro dipende dallo schema iperstatico di partenza: nel caso di strutture con un elevato grado di iperstaticità (3D-4D incognite iperstatiche o più) può convenire applicare il metodo degli spostamenti, che in alcuni casi riduce sensibilmente il numero di incognite da trovare; l'applicazione si caratterizzerà come preferibile particolarmente nei corsi successivi, come *Tecnica delle Costruzioni*.

Esercizio



Supponiamo valga l'ineestensibilità assiale, ovvero che $EA \rightarrow \infty$. Detta "ipotesi" rappresenta in realtà un naturale corollario delle ipotesi sugli elementi che compongono la struttura, ovvero gli elementi trave:



$T_{trave} \Leftrightarrow D \ll L$ l'elemento è modellizzabile come un segmento, schematizzazione della trave e la relativa sezione.

Consideriamo una trave a mensola con due forze tra loro ortogonali in punta, come in figura; valutiamo u_B/v_B , sapendo - grazie allo schema notevole della trave a mensola con carico concentrato verticale in punta - $\varphi_B = -FL^2/2EI$; $v_B = FL^3/3EI$.

$$\frac{u_B}{v_B} = \frac{FL/EA}{FL^3/3EI} = \frac{1}{A} \cdot \frac{3I_x}{L^2} = 3 \frac{\rho_x^2}{L^2} \ll 1$$

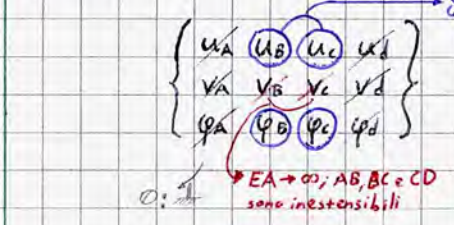
rapporto geometrico

$$I_x = A \rho_x^2; \text{ in una sezione rettangolare } \rho_x^2 = \frac{I_x}{A} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12}$$

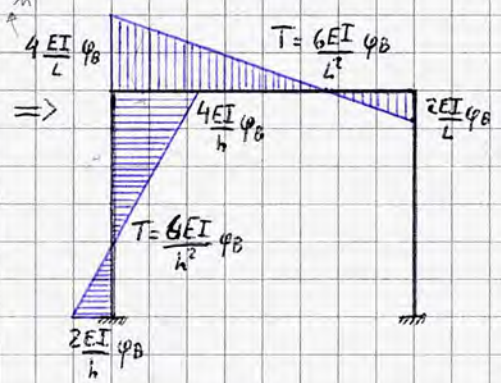
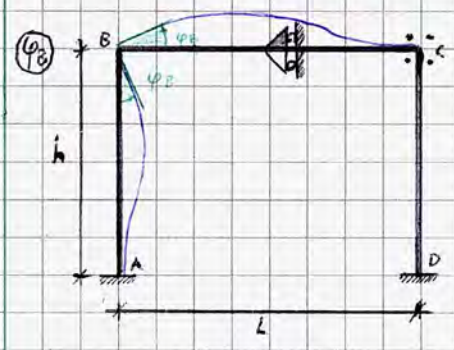
- ① Bloccare tutti i gradi di libertà nodali liberi.
- ② Rilasciare 1 alla volta tali gradi di libertà nodali liberi e sovrapporre gli effetti. \Rightarrow 1 schema Vgll. libero

Da ciò segue che $u_B/v_B \ll 1$, dunque lo spostamento assiale dell'elemento trave è trascurabile rispetto a quello flessionale per le ipotesi della teoria della trave.

Valutiamo i gradi di libertà nodali del sistema, assumendo come riferimento il sistema globale $\begin{matrix} \uparrow v \\ \rightarrow u \end{matrix}$ (che implica che u, v non sono sempre assiali etc.)



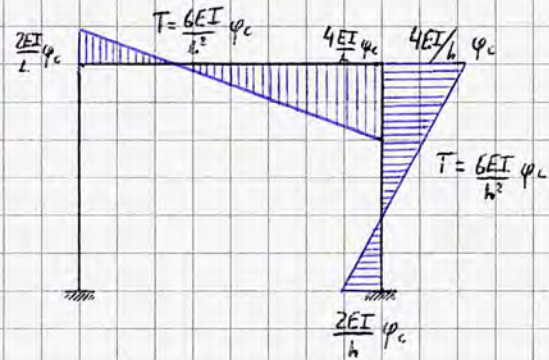
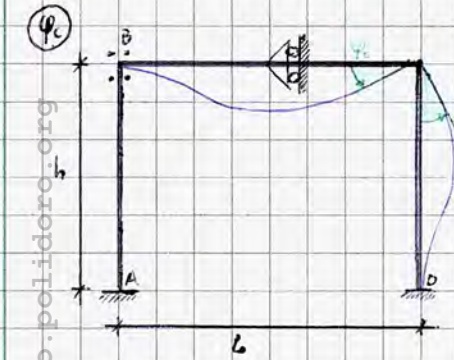
Il problema ha 3 gradi di libertà nodali liberi, di cui 2 rotazionali ed uno traslazionale. Iniziamo a valutare φ_B , ipotizzando un cedimento rotazionale in luogo del morsetto presente in B nella schema cinematicamente equivalente. Si consiglia sempre di ipotizzare cedimenti che rispettino la convenzione positiva del riferimento fissato.



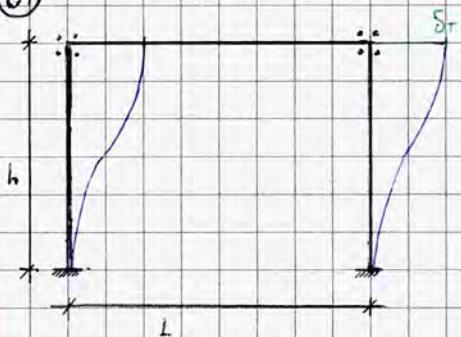
Il nodo in B sembra squilibrato, ma la presenza del vincolo ausiliario garantisce l'equilibrio; occorre dunque impostare un numero di equazioni di equilibrio pari al numero di variabili ausiliarie.

⚠ I valori scritti a fianco si riferiscono unicamente al modulo delle grandezze, non al loro verso!

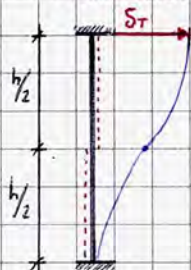
Il verso si introduce in ragione del riferimento fissato.



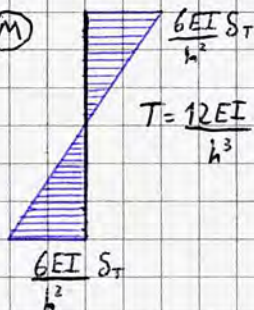
(S)



Schema notevole di riferimento:



(M)



$$T = \frac{12EI}{h^3} S_T$$

Si consiglia di dimostrare il seguente schema come esercizio.

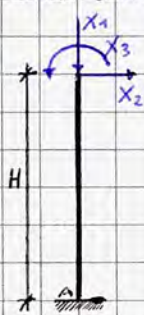
Dimostriamo lo schema notevole impiegato nei casi precedenti:



Lo schema è 3 volte iperstatico; occorre dunque utilizzare le equazioni di equilibrio e un'equazione di congruenza. Tale metodo prescinde dalla presenza di cedimenti o distorsioni elastici o anelastici. Lo schema può essere risolto col metodo delle forze, col metodo degli spostamenti o con le equazioni della linea elastica. Tra questi converrebbe usare il primo o il terzo.

Ricordiamo che un cedimento su una struttura isostatica implica spostamenti senza lo svilupparsi di alcuna caratteristica interna della sollecitazione, a differenza di strutture iperstatiche.

Metodo delle Forze:



$$\text{Eq. di congruenza: } \begin{cases} v_B = 0 \\ u_B = 0 \\ \varphi_B = \bar{\varphi} \end{cases} \dots$$

=> Essendo 2 dei 3 schemi non noti, andrebbero risolti con 2 linee elastiche, dunque il metodo non è conveniente. Essendo EA -> infinity, X2 = 0 (può assumere un qualsiasi valore, la trazione).

Ricordiamo che, considerato un concio infinitesimo,

$$\frac{dN(z)}{dz} = -p(z)$$

$$\frac{dT(z)}{dz} = -q(z)$$

$$\frac{dM(z)}{dz} = T(z)$$

Equazioni della linea elastica: in questo caso, la linea elastica estensionale è trascurabile, poiché si ha sforzo assiale nullo:

$$\begin{aligned} EI v'''' &= q(z) \\ EI v'''' &= -T(z) \\ EI v'' &= -M(z) \rightarrow M(z) = EI \chi'''' \\ EI v' &= -EI \varphi(z) \end{aligned}$$

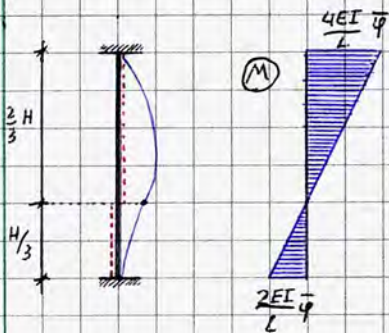
Scrittura Equivalente

Applicate alla trave in esame, si ha che:

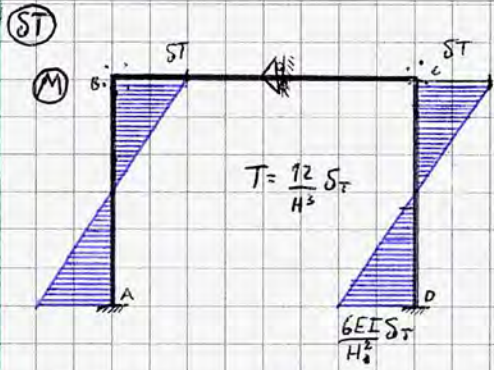
$$\begin{aligned} EI v''''(z) &= 0 \\ EI v''''(z) &= c_1 = -T(z) \\ EI v''(z) &= c_2 z + c_3 = -M(z) \\ EI v'(z) &= c_1 z^2/2 + c_2 z + c_3 = EI(-\varphi(z)) \\ EI v(z) &= c_1 z^3/6 + c_2 z^2/2 + c_3 z + c_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_A = v(z=0) &= 0 \Rightarrow c_4 = 0 \\ \varphi_A = \varphi(z=0) &= 0 \Rightarrow c_3 = 0 \\ v_B = v(z=L) &= 0 \Rightarrow v(L) = c_1 L^3/6EI + c_2 L^2/2EI = 0 \Rightarrow c_2 = -c_1 L/3 \\ \varphi_B = \varphi(z=L) &= \bar{\varphi} \Rightarrow \varphi(L) = \bar{\varphi} = -c_1 L^2/6EI - c_2 L/EI \Rightarrow -c_1 L^2/6EI + c_1 L^2/3EI = \bar{\varphi} \end{aligned}$$

$$\text{Dunque, } c_1 = \frac{6EI \bar{\varphi}}{L^2}; c_2 = -\frac{2EI \bar{\varphi}}{L}; c_3 = c_4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} M(z) = \frac{6EI \bar{\varphi}}{L^2} z - \frac{2EI \bar{\varphi}}{L} \\ T(z) = \frac{6EI \bar{\varphi}}{L^2} \bar{\varphi} \end{cases}$$

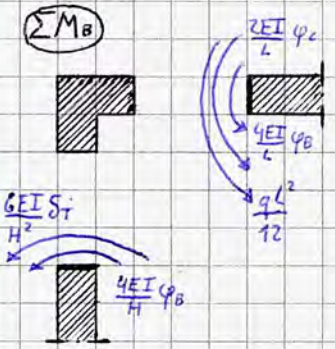


Da cui calcolo M2, M0 => lo schema è dimostrato.

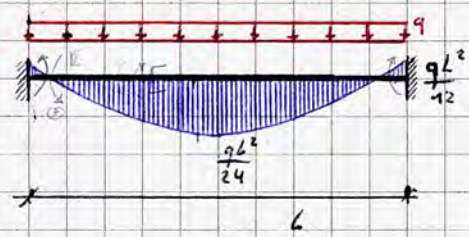


Per ripristinare l'equivalenza statica, applichiamo le equazioni di equilibrio:

$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \\ \sum M_C = 0 \\ \sum F_T = 0 \end{cases} \rightarrow \text{forze nella direzione del traverso}$$



Si sovrappongono gli effetti degli schemi in cui viene liberato uno dei gradi di libertà nodali liberi, leggendo le reazioni applicate sull'elemento astra e non sul nodo!



Schema notevole di riferimento per la valutazione della componente di momento dovuta al carico ripartito.

In questo modo si possono valutare le reazioni che il morsetto in B esercita sugli elementi trave adiacenti (considerando le reazioni opposte invece si può considerare il solo nodo); per l'ipotesi sugli spostamenti nodali liberi occorre applicare alcuni correttivi tramite le equazioni di equilibrio:

Il riferimento è quello globale, non quello delle C.S. ⇒ il segno negli schemi statici non è rilevante.

$$\begin{cases} \sum M_B = 0 \Rightarrow \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \right) \varphi_B + \frac{2EI}{L} \varphi_C + \frac{6EI}{H^2} S_T + \frac{qL^2}{12} = 0 \\ \sum M_C = 0 \Rightarrow \frac{2EI}{L} \varphi_B + \left(\frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \right) \varphi_C + \frac{6EI}{H^2} S_T - \frac{qL^2}{12} = 0 \\ \sum F_T = 0 \Rightarrow \frac{6EI}{H^2} \varphi_B + \frac{6EI}{H^2} \varphi_C + \left(\frac{12EI}{H^3} + \frac{12EI}{H^3} \right) S_T - F = 0 \end{cases}$$

Sistema lineare non omogeneo di tre equazioni linearmente indipendenti in tre incognite ⇒ esiste una e una sola soluzione, non identicamente nulla.

I coefficienti che moltiplicano le incognite dipendono dall'elasticità dell'elemento e dal rapporto geometrico tra L ed H, ciò implica che la matrice dei coefficienti del sistema dipende unicamente dalla geometria della struttura e dal legame costitutivo, NON dalle condizioni di carico!



Il vettore colonna dei termini noti esplica come le condizioni di carico hanno effetto sui gradi di libertà nodali:

Caricando l'entità dei carichi, le distorsioni variano proporzionalmente.

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{u} \quad \underline{u}^T = [\varphi_B, \varphi_C, S_T]$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} -\frac{qL^2}{12} \\ \frac{qL^2}{12} \\ F \end{bmatrix}$$

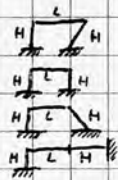
Matrice dei coefficienti, detta matrice di rigidità del sistema: tiene conto delle rigidità (in questo caso solo flessionali) dei vari elementi - informando la forza duale che nasce per un qualunque spostamento generalizzato rispetto cui la forza compie un lavoro - per ogni grado di libertà nodale liberato. Come anticipato, essa dipende solo dalle caratteristiche geometriche della struttura. La matrice di rigidità è:

- simmetrica: $\underline{K} = \underline{K}^T$ (Th. di Betti) (e autovalori > 0)
- definita positiva: ha determinante positivo (il sistema ammette 1 sol.)
- a banda: il peso della matrice è spostato lungo la diagonale.

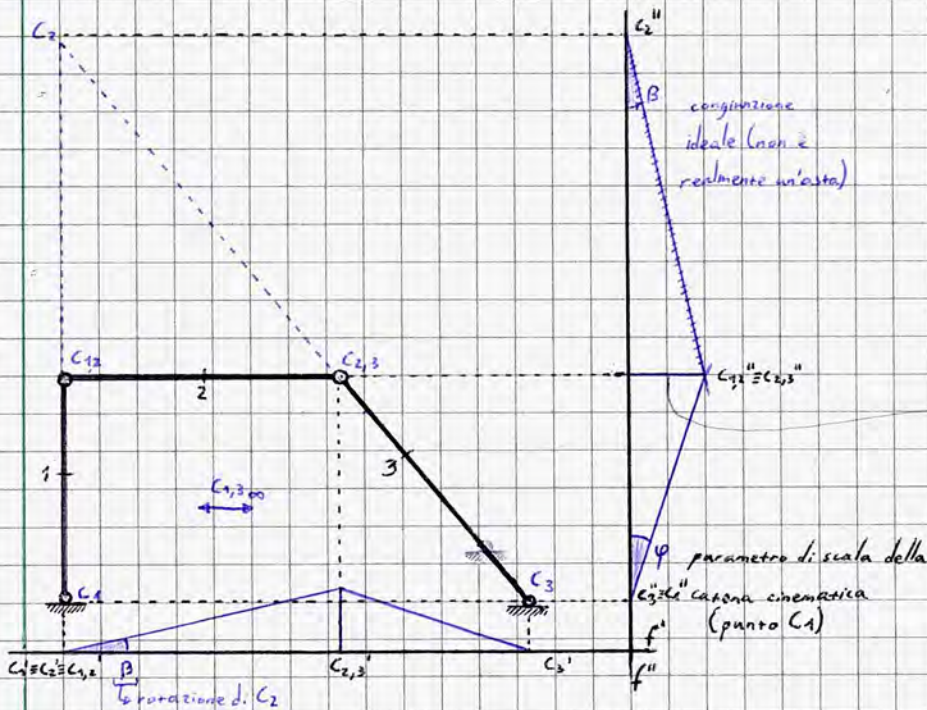
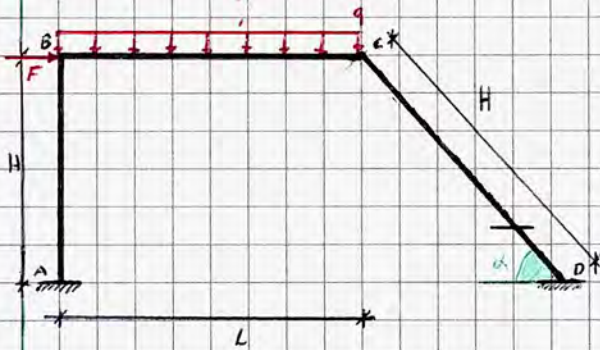
Consideriamo ora un caso più generico, in cui uno dei due predritti è inclinato di un generico angolo di rispetto all'orizzontale. In generale, per determinare i gradi di libertà nodali liberi di un sistema si ipotizza che le rotazioni siano libere dove non esiste ritegno alla rotazione (di facile verifica); problematica più complessa quella della determinazione dei gradi di libertà nodali liberi traslazionali: ci si riferisce a una struttura svincolata in ogni nodo (sostituendovi una cerniera) applicando la condizione $EA \rightarrow \infty$; si determina la labilità del nuovo sistema, la quale coincide esattamente il numero di gradi di libertà nodali traslazionali liberi dello schema iperstatico; se detto schema è isostatico o ancora iperstatico, i gradi di libertà nodali traslazionali non sono liberi.

Esistono diversi possibili casi al variare di d :

- $\frac{\pi}{2} < d < \pi$
- $d = \pi/2$
- $0 < d < \pi/2$
- $d = 0$



Per determinare il grado di labilità della struttura rapidamente labilitata rapidamente conviene utilizzare la teoria dei centri di istantanea rotazione: poiché la struttura è composta da più tronchi, il numero di possibili allineamenti dei centri di istantanea rotazione determina il grado di libertà, e di conseguenza il numero di gradi di libertà traslazionali nodali liberi della struttura iperstatica di partenza. In questo caso esiste un unico possibile allineamento dei centri, dunque $L=1$. Si consiglia la verifica dell'asserto tramite la matrice cinematica/statica.



Essendo il sistema una volta labile, è possibile scalare la catena cinematica rispetto ad un unico parametro (in questo caso un angolo φ di rotazione in C_1) da cui si ricava il resto del diagramma. Si osserva che, per effetto della condizione $EA \rightarrow \infty$, nel nodo corrispondente a $C_{2,3}$ si registra uno spostamento verticale oltre al S_T , implicando una particolare configurazione deformata:



Ne segue che la deformata della struttura iperstatica di partenza è:



Nell'applicazione del metodo degli spostamenti si consiglia fortemente di costruire le catene cinematiche delle strutture.

Deformata: sovrapp. effetti delle deformate dei singoli schemi.



Meccanica del Continuo ③

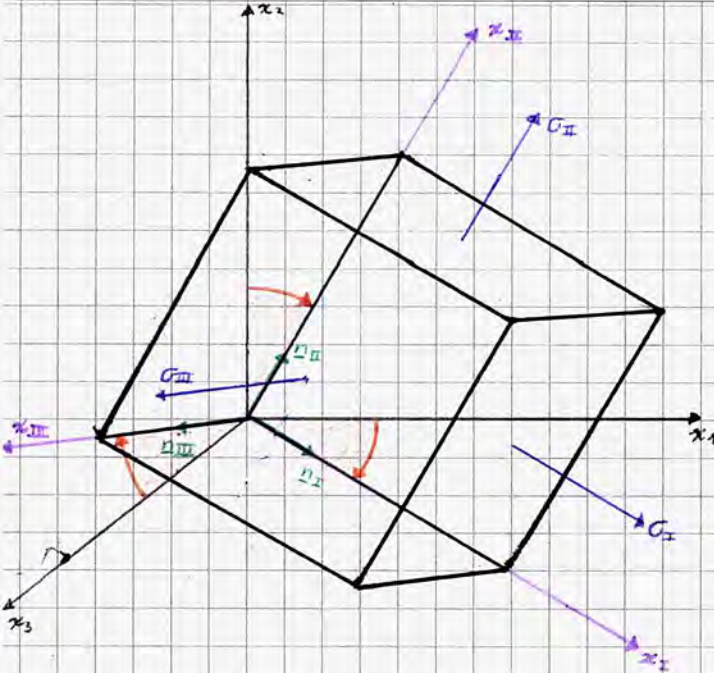
Come sappiamo, a prescindere dal sistema di riferimento esistono tre invarianti che caratterizzano/sono allegati al tensore delle tensioni:

$$\cdot I_1(\underline{T}) = \text{tr}(\underline{T}) = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$\cdot I_2(\underline{T}) = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{11}\sigma_{33} + \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{13}^2 - \sigma_{23}^2$$

$$\cdot I_3(\underline{T}) = \det(\underline{T})$$

invariante quadratico, somma dei minori di ordine 2
invariante cubico



A parità dello stato tensionale insistente sul continuo, esistono infinite rappresentazioni matriciali di \underline{T} al variare del sistema di riferimento; tra queste ne esiste una in cui \underline{T} assume forma matriciale diagonale, in cui le σ_{ii} assumono il nome di tensioni principali:

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Ne segue che anche gli invarianti di \underline{T} nel sistema di riferimento principale assumono forma particolarmente semplice:

$$I_1(\underline{T}) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}$$

$$I_2(\underline{T}) = \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{II} + \sigma_I\sigma_{III}$$

$$I_3(\underline{T}) = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III}$$

Dal punto di vista dell'interpretazione fisica della forma diagonale del tensore delle tensioni si osserva che nel sistema di riferimento principale si ha che sulla faccia di normale \underline{n}_I [II/III] esiste un'unica tensione

σ_I [II/III], ortogonale alla faccia; ne segue che le tensioni sono completamente rivolte lungo la normale, senza componenti tangenziali.

Obiettivo in questo studio è capire come determinare le componenti principali di tensione assegnata la forma matriciale di \underline{T} in un generico sistema di riferimento $\{x_1, x_2, x_3\}$. Inducendo con $\hat{n}_I, \hat{n}_{II}, \hat{n}_{III}$ i versori degli assi x_I, x_{II}, x_{III} , altro problema è individuare i versori del sistema di riferimento principale partendo dal sistema di riferimento generico.

Sappiamo che:

$$\underline{n} = \underline{t}_n = \lambda \underline{n}$$

λ → modulo
 \underline{n} → direzione e verso
 \underline{t}_n → vettore tensione di Cauchy, relativo al singolo piano di taglio

In altre parole, il problema sopracitato si traduce nella ricerca di una terna di normali \underline{n} tali che i vettori di tensione di Cauchy \underline{t}_n siano paralleli ad esse.

In particolare, detto problema si traduce ad esempio nella condizione $\underline{t}_I = \sigma_I \underline{n}_I$, con analoghi risultati per \underline{t}_{II} e \underline{t}_{III} .

In generale, $\underline{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ nel sistema di riferimento di partenza; per il teorema di Cauchy però sappiamo che:

$$\underline{T}\underline{n} = \lambda \underline{n}$$

Il problema, nelle incognite $\{n_1, n_2, n_3, \lambda\}$, è un problema di autovettori (\underline{n} , direzioni principali di tensione) e autovalori (λ , moduli delle tensioni principali).

Il problema ammette certamente una soluzione: \underline{T} è una matrice reale e simmetrica, dunque diagonalizzabile; il problema ammette sempre una soluzione, in parti-

colare in \mathbb{R}^3 ammette certamente tre coppie $\sigma_i n_i, i \in \{I, II, III\}$. Infatti:

$$\underline{T}\underline{n} - \lambda \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow (\underline{T} - \lambda \underline{I})\underline{n} = \underline{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0 \\ \sigma_{12}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0 \\ \sigma_{13}n_1 + \sigma_{23}n_2 + (\sigma_{33} - \lambda)n_3 = 0 \end{cases}$$

Se $\det[\underline{T} - \lambda \underline{I}] \neq 0$, $\exists!$ soluzione se $\underline{n} \equiv \underline{0}$, non ammissibile fisicamente sappiamo infatti che $\|\underline{n}\| = 1 = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$; la soluzione non banale e accettabile esiste se e soltanto se $\det[\underline{T} - \lambda \underline{I}] = 0$.

Si ha dunque un'equazione in λ ; una volta determinati gli autovalori si determinano n_1, n_2, n_3 .

EsPLICITANDO la condizione $\det[\underline{T} - \lambda \underline{I}] = 0$ infatti si ha che:

$$(\sigma_{11} - \lambda)[(\sigma_{22} - \lambda)(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}^2] - \sigma_{12}[\sigma_{12}(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{13}\sigma_{23}] + \sigma_{13}[\sigma_{12}\sigma_{23} - \sigma_{13}(\sigma_{22} - \lambda)] = \dots$$

$$\dots = \lambda^3 - I_1(\underline{T})\lambda^2 + I_2(\underline{T})\lambda + I_3(\underline{T}) = 0$$

equazione secolare o caratteristica; ammette tre radici reali, indicate con $\lambda_I, \lambda_{II}, \lambda_{III} \in \mathbb{R}$ e che rappresentano esattamente le tensioni principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$.

Essendo tutte reali, è possibile ordinare le tensioni principali tale che $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$; ciò consente oltre a ridurre l'onere computazionale di effettuare diverse interpretazioni fisiche del fenomeno: le tensioni massime (σ_I) e minime (σ_{III}) rappresentano infatti i valori massimo e minimo che ogni componente di tensione può assumere, qualunque sia il sistema di riferimento: in ogni riferimento e nell'intorno di ogni punto si ha che $\forall \sigma_{ij} \rightarrow \sigma_I \geq \sigma_{ij} \geq \sigma_{III}$.

In relazione all'equazione caratteristica, si osserva che i coefficienti dipendono dagli invarianti; ne segue che l'equazione non dipende dal sistema di riferimento, il che permette di valutare le componenti del tensore principale delle tensioni per un qualsiasi sistema generico.

Trovati gli autovalori λ_i , li si sostituisce nel sistema di partenza $(\underline{\underline{I}} - \lambda_i \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}}$ per determinare - in corrispondenza di ogni autovalore - gli autovettori corrispondenti. Ad esempio:

$$(\underline{\underline{I}} - \sigma_I \underline{\underline{I}}) \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{0}} \quad \text{troviamo } n_{I1}, n_{I2}, n_{I3}, \text{ coseni direttori nel sistema di riferimento di partenza}$$

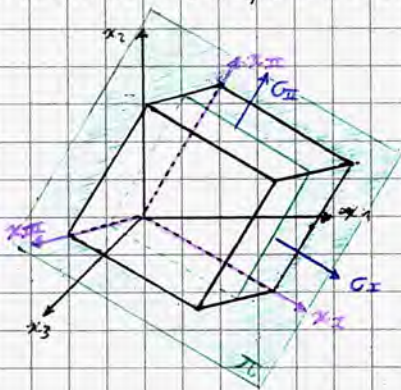
$$\begin{cases} (G_{11} - \sigma_I) n_{I1} + G_{12} n_{I2} + G_{13} n_{I3} = 0 \\ G_{12} n_{I1} + (G_{22} - \sigma_I) n_{I2} + G_{23} n_{I3} = 0 \\ G_{13} n_{I1} + G_{23} n_{I2} + (G_{33} - \sigma_I) n_{I3} = 0 \end{cases}$$

Sapendo che il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è nullo, certamente una delle equazioni è linearmente dipendente dalle altre, dunque è eliminabile e il sistema è una volta indeterminato. Consideriamo come esempio che la terza equazione dipenda dalle altre; considerando la relazione $n_{I1}^2 + n_{I2}^2 + n_{I3}^2 = 1$ si ripristina la compatibilità del sistema e si trova esattamente il vettore cercato.

A seconda del valore assunto dai tre autovalori, lo stato tensionale si classifica in:

- Stato tensionale triassiale $\Leftrightarrow \nexists \lambda = 0$, ovvero $\sigma_i \neq 0 \forall i \in \{I, II, III\}$
- Stato tensionale biassiale o piano $\Leftrightarrow \exists! i: \sigma_i = 0 \forall i \in \{I, II, III\}$ un'unica direzione principale nulla $\equiv I_3(\underline{\underline{I}}) = 0, I_2(\underline{\underline{I}}) \neq 0$
- Stato tensionale monoassiale $\Leftrightarrow \exists! i: \sigma_i \neq 0 \forall i \in \{I, II, III\}$ due autovalori nulli $\equiv I_3(\underline{\underline{I}}) = I_2(\underline{\underline{I}}) = 0$

Consideriamo come esempio uno stato tensionale biassiale:



Supponiamo che $\sigma_{III} = 0$; non vi sono dunque componenti di tensione sulla faccia di normale n_3 . Indipendentemente dal sistema di riferimento, il generico vettore di tensione $\underline{\underline{t}}_n(\underline{\underline{x}})$ giace sempre nel piano individuato da σ_I e σ_{II} , detto piano delle tensioni (T_{II} in figura).

Per la condizione citata precedentemente, sappiamo che l'equazione caratteristica si semplifica, poiché $I_3(\underline{\underline{I}}) = 0$. Ne segue che l'espressione dell'equazione secolare è:

$$\lambda [\lambda^2 - I_1(\underline{\underline{I}})\lambda + I_2(\underline{\underline{I}})] = 0$$

Nel caso di un sistema monoassiale, tutte le componenti di tensione viaggiano nella direzione parallela all'unico autovettore relativo all'autovalore non nullo; si ha che $I_3(\underline{\underline{I}}) = I_2(\underline{\underline{I}}) = 0$ ed è dunque possibile raccogliere λ^2 nell'equazione caratteristica.

Dagli invarianti di $\underline{\underline{I}}$ è dunque possibile comprendere immediatamente lo stato tensionale del sistema.

Un esempio di stato tensionale monoassiale è una trave in pura trazione. Poiché $I_2(\underline{\underline{I}}) = I_3(\underline{\underline{I}}) = 0$, l'equazione caratteristica diventa $\lambda^2(1 - I_1(\underline{\underline{I}})) = 0 \Rightarrow$ la soluzione nulla ha molteplicità 2.

Lo stato tensionale biassiale è caratteristico della teoria della trave di De Saint Venant.

Il caso più generale, ovvero quello secondo cui lo stato tensionale è triassiale, presenta un caso particolare, rilevante nelle applicazioni: si definisce stato di tensione idrostatico uno stato triassiale in cui $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = p$, detta pressione idrostatica. Si ha che:

$$p = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{I}})}{3} = \frac{I_1(\underline{\underline{I}})}{3} \quad \underline{\underline{T}} = p \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

Esempio

Sia $\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & 0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$ il tensore delle tensioni di un sistema in un riferimento generico; si determinino gli autovalori e autovettori di \underline{T} (ovvero le componenti principali di tensione e i coseni direttori dei versori che indicano il sistema di riferimento principale relativamente a questo stato tensionale).

Ricordando che $(\underline{T} - \lambda \underline{I})_{ii} = 0 \Rightarrow \det[\underline{T} - \lambda \underline{I}] = 0 =$ affinché si ottengano soluzioni non banali

$$= \det \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & -\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} - \lambda \end{bmatrix} = -\lambda[-\lambda(\sigma_{33} - \lambda) - \sigma_{23}^2] + \sigma_{13}(\lambda \sigma_{13}) = 0 \Rightarrow \lambda^2(\sigma_{33} - \lambda) + \lambda \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 \sigma_{33} + \lambda \sigma_{23}^2 + \lambda \sigma_{13}^2 = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + \lambda^2 \frac{\sigma_{33}}{I_1} + \lambda \frac{(\sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2)}{I_2} = 0$$

$I_3 = 0 \Rightarrow$ stato tensionale piano

Si verifica facilmente che $\text{tr}(\underline{T}) = \sigma_{33}$ e sommando i minori di ordine 2 si ottiene analogamente che $I_2(\underline{T}) = \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2$.

$I_3(\underline{T}) = \det(\underline{T}) = 0 \Rightarrow$ lo stato tensionale è biassiale.

Si ha quindi che:

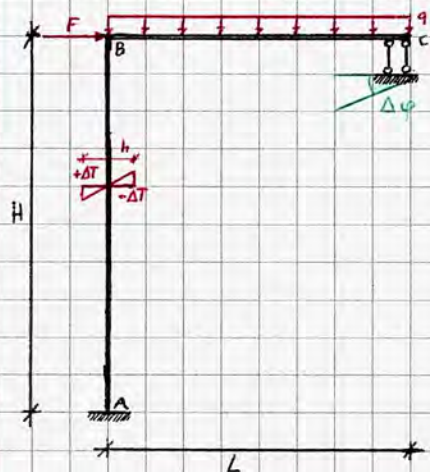
$$\lambda(\lambda^2 - \sigma_{33}\lambda - (\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)) = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = \frac{\sigma_{33} \pm \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}}{2} \end{cases}$$

Supponendo che $\sigma_{33} > 0$, per rispettare le convenzioni sulle tensioni principali osserviamo che la radice è certamente maggiore in valore assoluto, dunque:

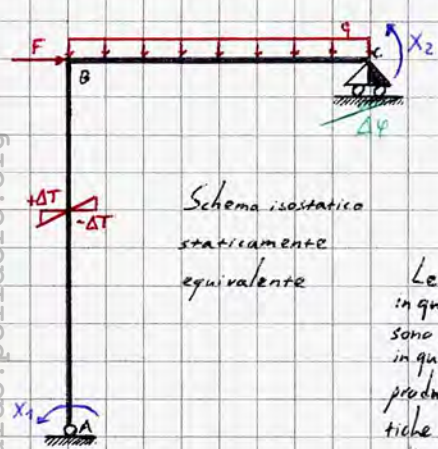
$$\lambda_I = \sigma_{II} = \frac{\sigma_{33} + \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}}{2}; \quad \sigma_{III} = 0; \quad \sigma_{III} = \frac{\sigma_{33} - \sqrt{\sigma_{33}^2 + 4(\sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2)}}{2}$$

Da ciò, sostituendo λ ; $\forall i \in \{I, II, III\}$ alla relazione $(\underline{T} - \lambda \underline{I})_{ii} = 0$ si ottengono gli autovettori corrispondenti alle singole tensioni principali.

Esercizio

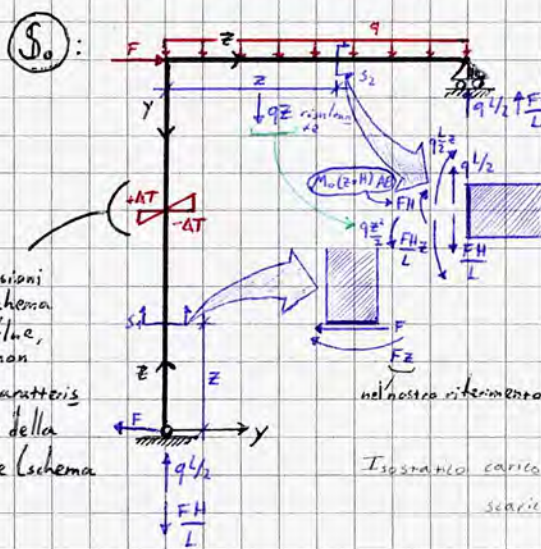


Studiamo la labilità della struttura: $3e - s = l - i \Rightarrow 3 - (3+2); l = 0 \Rightarrow i = 2$
 Volendo risolvere la struttura applicando il PLV, è necessario individuare uno schema staticamente equivalente. L'applicazione del principio logicamente si traduce in un numero di equazioni pari alle incognite iperstatiche, ricordando che $LVE = Lvi \forall dv$ e per ogni sistema fittizio i-mo. Partendo dallo schema isostatico staticamente equivalente, si individua un primo sistema fittizio caratterizzato dallo schema isostatico privato delle reazioni iperstatiche. Successivamente, si individuano ulteriori sistemi fittizi (uno per ogni incognita iperstatica) che compiono lavoro sulla schema reale, introducendo sollecitazioni unitarie duali alle incognite iperstatiche per individuare le caratteristiche della sollecitazione interne in funzione di un'ipotetica ascissa "curvi linea" ξ variabile. Infine, si applicano le leggi del momento/taglio/sforzo normale con il tipico sistema con le equazioni al cono infinitesimo che, integrate, richiedono di specificare tante condizioni al contorno quante sono le incognite iperstatiche, o per via "diretta" analizzando le sollecitazioni interne sezionando una qualsivoglia porzione di trave, per poi esplicitare la relazione $LVE = Lvi$ e risolvere l'esercizio.



Schema isostatico staticamente equivalente

Le distorsioni in questo schema sono superflue, in quanto non producono caratteristiche interne della sollecitazione (schema isostatico)



Individuate le reazioni vincolari e le singole caratteristiche della sollecitazione per la generica sezione ideale, scriviamo le caratteristiche della sollecitazione per ogni tratto di continuità, considerando una ascissa curvilinea che segue l'asse della trave

nel nostro riferimento rende le fibre inferiori, dunque è positivo
 Isostatico carico - r. vinc.
 scarico r. soll. r. vinc.

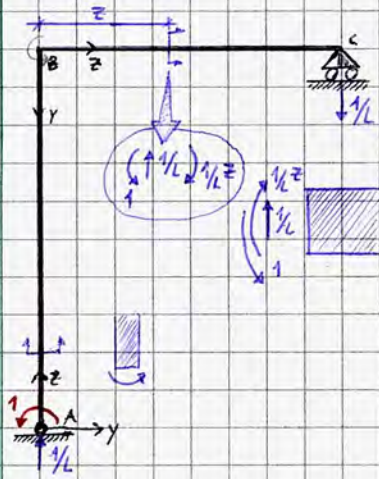
Nel sistema S_0 dunque si ha che:

$(AB): \begin{cases} N_0(z) = -q \frac{L}{2} + \frac{FH}{L} \\ M_0(z) = Fz \end{cases}$

stacco di compressione
tende le fibre inferiori
; $(BC): \begin{cases} N_0(z) = 0 \\ M_0(z) = q \frac{L}{2} z - \frac{FH}{L} z - q \frac{z^2}{2} + FH = -q \frac{z^2}{2} + z \left(q \frac{L}{2} - \frac{FH}{L} \right) + FH \end{cases}$

Ricordiamo che $\frac{dT(z)}{dz} = -q(z) \Rightarrow \frac{d^2 M(z)}{dz^2} = -q(z)$

Consideriamo ora il sistema S_1 , sistema fittizio relativo a X_1 che tiene conto della sola incognita iperstatica:



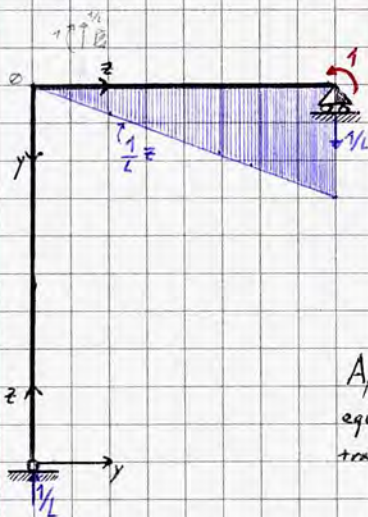
$(AB): \begin{cases} N_1(z) = -1/L \\ M_1(z) = -1 \end{cases}$

tende le fibre superiori

$(BC): \begin{cases} N_1'(z) = 0 \\ M_1'(z) = \frac{1}{2} z - 1 \end{cases}$

notazione: l'apice indica che il sistema considerato è fittizio; il pedice si riferisce all'incognita iperstatica presa in esame.

S_2 : sistema di forze fittizio relativo a X_2



$(AB): \begin{cases} N_2'(z) = -1/L \\ M_2'(z) = 0 \end{cases}$

$(BC): \begin{cases} N_2'(z) = 0 \\ M_2'(z) = \frac{1}{2} z \end{cases}$

Applichiamo ora le leggi del momento/taglio/stacco normale, scegliendo tra le equazioni indefinite di equilibrio e la via diretta ottenuta scrivendo le sollecitazioni interne per generiche sezioni di trave.

I carichi applicati, internano (2)
 Le reazioni (1) (2)
 La distorsione termica concorre al L_{vi}

Si applica dunque la condizione $L_{VE} = L_{vi}$ per ogni sistema fittizio:

$S_1: L_{VE}^{(1)} = 1 \cdot (1)$

forza fittizia del sistema S_1
spostamento reale corrispondente (incastro)

$$L_{vi}^{(1)} = \int_0^L N_1'(z) \left(\frac{N_0}{EA} + X_1 \frac{N_1'}{EA} + X_2 \frac{N_2'}{EA} \right) dz + \int_0^L M_1'(z) \left(\frac{M_0}{EI} + X_1 \frac{M_1'}{EI} + X_2 \frac{M_2'}{EI} \right) dz$$

spostamento assiale

curvatura flessionale, puramente elastica

(nasce solo per effetto delle carat. intrinseche della sollecitazione)

Nel nostro caso è però anche presente un termine di curvatura anelastica χ^a dovuta alla distorsione termica a fessatura, pari a $\chi^a = \frac{d\Delta T}{h} \Leftrightarrow \Delta T = 2\Delta T$. Ne segue che alla formulazione precedente occorre aggiungere un termine dovuto a detta curvatura; ne segue che:

$$L_{vi}^{(1)} = \int_0^L N_1'(z) \left(\frac{N_0}{EA} + X_1 \frac{N_1'}{EA} + X_2 \frac{N_2'}{EA} \right) dz + \int_0^L M_1'(z) \left(\frac{M_0}{EI} + X_1 \frac{M_1'}{EI} + X_2 \frac{M_2'}{EI} + \frac{d\Delta T}{h} \right) dz$$

Sostituendo nell'equazione i dati ricavati in precedenza, si ha che:

$$L_{vi}^{(1)} = \int_0^H M_1'(z) \cdot \frac{d\Delta T}{dz} dz + \int_0^L M_1'(z) \left(\frac{M_0(z)}{EI} + \frac{X_1 M_1'(z)}{EI} + \frac{X_2 M_2'(z)}{EI} \right) dz$$

$\left[\frac{d}{dz} = \frac{1}{L} \right]$
 $\left[dz = \frac{1}{L} dz \right]$

Si consiglia di verificare la bontà dei propri calcoli attraverso un'attenta analisi dimensionale, in particolare nella verifica dell'uniformità tra L_{vi} ed L_{ve}

$L_{vi}^{(1)} = L_{ve}^{(1)} = 0$ Sostituendo i termini si risolve la condizione.

$S_2: L_{ve}^{(2)} = 1 \cdot \Delta\varphi$

$$L_{vi}^{(2)} = \int_0^H N_2'(z) \left(\frac{N_0(z)}{EA} + \frac{X_1 N_1'(z)}{EA} + \frac{X_2 N_2'(z)}{EA} \right) dz + \int_0^L M_2'(z) \left(\frac{M_0(z)}{EI} + \frac{X_1 M_1'(z)}{EI} + \frac{X_2 M_2'(z)}{EI} \right) dz =$$

$$= \int_0^H \frac{1}{L} \frac{-q \frac{z}{2} + \frac{FH}{L}}{EA} + \frac{X_1 (-1/L)}{EA} + \frac{X_2 (-1/L)}{EA} dz + \int_0^L \frac{1}{L} z \frac{-q \frac{z^2}{2} + z \left(\frac{qL}{2} - \frac{FH}{L} \right) + FH}{EI} + \frac{X_1 \left(\frac{1}{L} z - 1 \right)}{EI} + \frac{X_2 \left(\frac{1}{L} z \right)}{EI} dz =$$

$$= \frac{1}{EA} \int_0^H \left[\frac{q}{2} - \frac{FH}{L^2} + \frac{X_1}{L^2} + \frac{X_2}{L^2} \right] dz + \frac{1}{EI} \int_0^L \left[-\frac{q z^3}{2L} + \frac{q z^2}{2} - \frac{FH z^2}{L^2} + \frac{FH z}{L} + \frac{X_1 z^2}{L^2} - \frac{X_1 z}{L} + \frac{X_2 z^2}{L^2} \right] dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{EA} \left(\frac{q}{2} - \frac{FH}{L^2} + \frac{X_1}{L^2} + \frac{X_2}{L^2} \right) H + \frac{1}{EI} \left(-\left[\frac{q}{8} \frac{z^4}{L} \right]_0^L + \left[\frac{q z^3}{6} \right]_0^L - \left[\frac{z^3 FH}{3L^2} \right]_0^L + \left[\frac{FH z^2}{2L} \right]_0^L + \left[\frac{X_1 z^3}{3L^2} \right]_0^L - \left[\frac{X_1 z^2}{2L} \right]_0^L + \left[\frac{X_2 z^3}{3L^2} \right]_0^L \right) = 1 \cdot \Delta\varphi$$

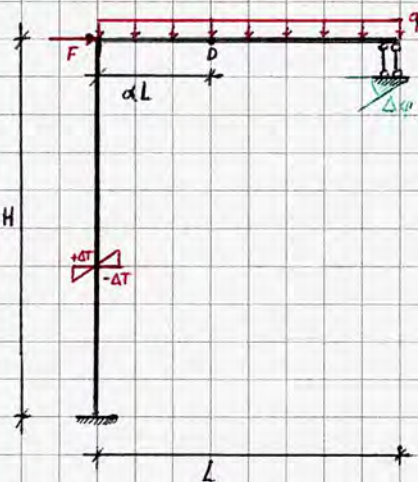
Con le equazioni di congruenza avremmo scritto:

$$\varphi_A = \varphi_A(q) + \varphi_A(F) + \varphi_A(X_1) + \varphi_A(X_2) + \varphi_A(\Delta T) + \varphi_A(\Delta\varphi) = 0$$

+ rapido, noti gli schemi statici di riferimento

Applicandolo in C, si ha che $\varphi_C = \Delta\varphi$

Tornando allo schema iniziale, valutiamo in un punto generico D i valori di v_D e φ_D :

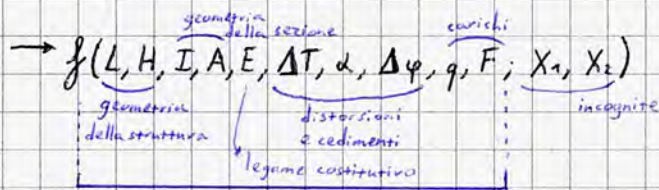


$d \in [0, 1]; \varphi_D, v_D?$

Avendo applicato il PLV precedentemente,

1) $L_{ve}^{(1)} = L_{vi}^{(1)}$

2) $L_{ve}^{(2)} = L_{vi}^{(2)}$

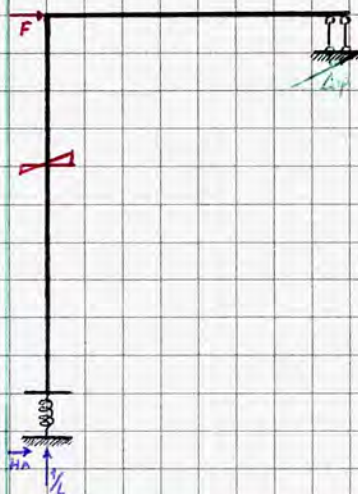


$\Rightarrow [! \text{ sol. } (S) \rightarrow \{X_1, X_2\}$

Considerando il sistema isostatico staticamente equivalente,



Per trovare φ_D e v_D , o di altri nodi, è necessario considerare il Principio dei Lavori Virtuali dove X_1 e X_2 si considerano note e si applica una coppia nel nodo in esame: X_1 e X_2 sono note dal procedimento precedente, per poi calcolare v_D e φ_D dello schema isostatico staticamente equivalente, con X_1 e X_2 note.



Supponiamo che A sia soggetto ad un cedimento elastico, e determiniamo V_A .

$$R_{yA} = V_A^y = (V_A^0, V_A^{(1)}, V_A^{(2)}) ; M_A = \frac{V_A^y}{K}$$

reale
« X » una nota

costante elastica della molla

$$H_A + V_A + 1 \cdot \varphi_A + \frac{1}{L} \cdot M_A = L v_A \quad (1)$$

Il procedimento va iterato per ogni sistema fissato.

(Conclusione esercizio a p. 56)

Avendo impostato le tensioni principali, bisogna determinare ora gli autovettori associati agli autovalori

$$(\underline{T} - \sigma_I \underline{I}) \underline{n}_I = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sigma_I & 0 & \sigma_{13} \\ 0 & -\sigma_I & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & (\sigma_{33} - \sigma_I) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{I1} \\ n_{I2} \\ n_{I3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sigma_I n_{I1} + \sigma_{13} n_{I3} = 0 \\ -\sigma_I n_{I2} + \sigma_{23} n_{I3} = 0 \\ \sigma_{13} n_{I1} + \sigma_{23} n_{I2} + (\sigma_{33} - \sigma_I) n_{I3} = 0 \end{cases}$$

Si vede facilmente che la terza equazione è combinazione lineare delle prime due, la sostituiamo con la condizione $\|\underline{n}_I\|^2 = 1$:

$$\begin{cases} n_{I1} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_I} n_{I3} \\ n_{I2} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_I} n_{I3} \\ n_{I1}^2 + n_{I2}^2 + n_{I3}^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_{I1} = \frac{\sigma_{13}}{\sigma_I (\frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_I^2} + 1)} \\ n_{I2} = \frac{\sigma_{23}}{\sigma_I (\frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_I^2} + 1)} \\ (\frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_I^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_I^2} + 1) n_{I3}^2 = 1 \Rightarrow n_{I3} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma_{13}^2}{\sigma_I^2} + \frac{\sigma_{23}^2}{\sigma_I^2} + 1}} \end{cases}$$

Analogamente per $\underline{n}_{II}, \underline{n}_{III}$.
Volendo, noti \underline{n}_{II} ed \underline{n}_{III} , sappiamo che $\underline{n}_{III} = \underline{n}_{II} \times \underline{n}_{I}$!

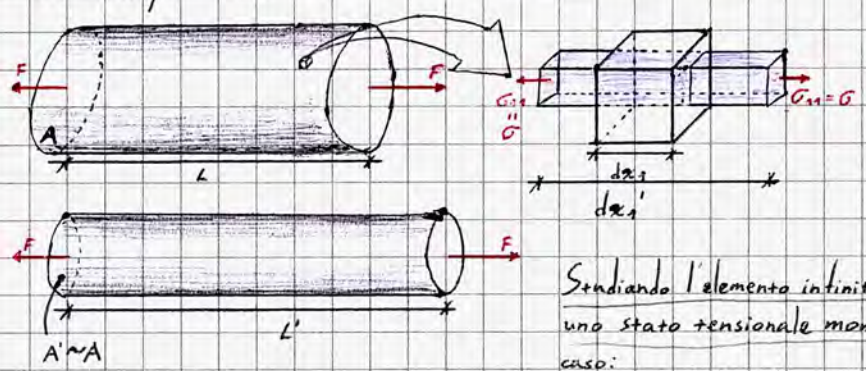
Legami Costitutivi

Punto d'incontro tra le teorie della deformazione e della tensione, implicano la determinazione di legami tra i due fenomeni mediante la modellizzazione di leggi del tipo:

$$\underline{I} = \underline{I}(\underline{E}) ; \underline{E} = \underline{E}(\underline{I}) \quad \left(\sigma = E \epsilon ; \epsilon = \frac{\delta}{L} ; \sigma = \frac{F}{A}, \epsilon = \frac{L' - L}{L} \right)$$

A seconda del sistema in esame è possibile considerare uno dei fenomeni come causa [effetto] dell'altro: fisicamente in ogni corpo deformabile avviene una deformazione se e soltanto se il corpo è soggetto ad uno stato sollecitativo.

Le relazioni suddette dipendono dal materiale di cui è costituito il corpo in esame, oltre al livello di deformazione o tensione che si sviluppa nel materiale stesso (il comportamento può variare al variare dello stato deformativo/tensionale del corpo). Di particolare rilievo per le applicazioni progettuali è il legame costitutivo elastico lineare, in particolare se legato ai materiali isotropi.



Consideriamo un continuo cilindrico soggetto ad una prova di trazione assiale; supponiamo che esso abbia lunghezza iniziale L ed area iniziale A . Per effetto della deformazione, il provino assumerà lunghezza maggiore e area minore. Valendo l'ipotesi di piccole deformazioni e piccoli spostamenti, è lecito supporre che $A' \sim A$. (Regime deformativo)

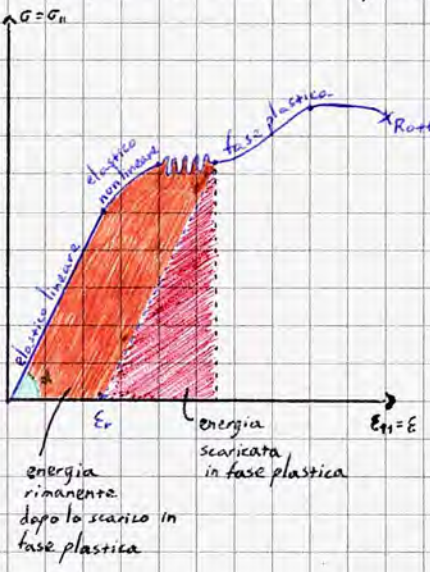
Studiando l'elemento infinitesimo del continuo, si osserva che esso è soggetto ad uno stato tensionale monoassiale, con $dx_1' > dx_1$; ne segue che in questo caso:

$$\epsilon_{11} = \frac{dx_1' - dx_1}{dx_1} = \epsilon$$

Ne segue che, allo stato macroscopico, $\epsilon = \frac{L' - L}{L}$ (deformazione) e $\sigma = \frac{F}{A}$ (stato tensionale)

come noto dalla teoria della prova

Immaginando di effettuare la prova sperimentalmente, è possibile riportare i risultati su un diagramma:



Si osserva che la prima fase del processo deformativo assume forma lineare, modellizzabile secondo la legge:

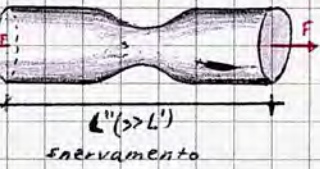
$\sigma = E \epsilon$
 ↳ modulo di Young, anche detto modulo di elasticità longitudinale E è pari a $\frac{F}{A} \cdot \frac{L_0}{\Delta L}$ ed offre informazioni sulla rigidità del materiale, ovvero la misura dello sforzo necessario per produrre una determinata deformazione.

$E [\frac{N}{m^2}] = Pa$, è caratteristica del materiale (Acciaio: $E = 200 \text{ GPa}$)

La relazione $\sigma = E \epsilon$ coincide con il legame costitutivo elastico lineare monodimensionale: essendo presente un'unica componente di sforzo essa si lega necessariamente alla deformazione che avviene nella stessa direzione.

Il legame si dice elastico perché nel caso di un processo di scarico in seguito ad una prova di carico il provino torna alle condizioni iniziali.

In seguito alla fase elastica non lineare, il materiale subisce uno snervamento, coincidente con l'inizio della fase plastica: si determina una deformazione irreversibile, che implicherà sempre una deformazione residua ϵ_r nel processo di scarico. Proseguendo nella prova, si giunge eventualmente alla rottura del materiale.

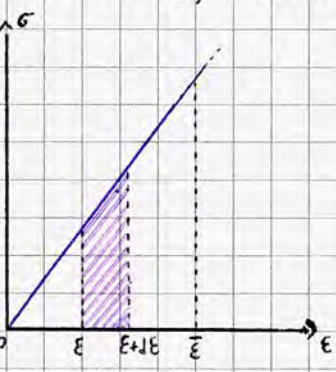


Come anticipato nel diagramma, l'area sottesa dalla curva sforzo-deformazione rappresenta l'energia accumulata: le tensioni all'interno del provino compiono un lavoro che si traduce in una energia di deformazione che si accumula all'interno del provino.

Durante la fase elastica lineare, sia la deformazione che l'energia sviluppata vengono integralmente restituite: il processo è reversibile e dunque conservativo. \rightarrow vi si può associare un potenziale.

Vale il medesimo discorso nella fase elastica non lineare: le aree sottese dalla curva nel processo di carico e scarico coincidono; ciò vale anche per la deformazione ma secondo una legge non lineare.

Nella fase plastica le energie in fase di carico differiscono da quelle dovute allo scarico: l'energia accumulata durante la fase di scarico è minore, pari all'area sottesa dalla curva di scarico; il processo è irreversibile e dissipativo.



Sapendo che $\sigma = E \epsilon$, valutiamo il lavoro infinitesimo svolto per unità di volume: di cui costruisco U

$$dL = \sigma d\epsilon \quad [N/m^2] \cdot [m] = \frac{N \cdot m}{m^3} = \frac{J}{m^3}$$

L'area sottesa dalla curva $\epsilon \sigma$ nel tratto infinitesimo nel diagramma è pari a $dL = \sigma(\epsilon) d\epsilon$; sommando tutte le aree siffatte nell'intero dominio $\epsilon - \bar{\epsilon}$ di riferimento si ha che:

$$\int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma \epsilon d\epsilon = \int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma(\epsilon) d\epsilon = \phi(\bar{\epsilon})$$

densità di energia di deformazione elastica o potenziale elastico; naturalmente $\phi(0) = 0$.

Dimensionalmente, $\phi(\epsilon)$ è equivalente a dL ($[J/m^3]$); essa rappresenta la primitiva di $\sigma(\epsilon)$.

Ne segue che $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$ e che $U = \int \phi dV$ (energia complessiva accumulata dal corpo) Energia Potenziale Elastica Accumulata

$\sigma d\epsilon = \delta \phi \equiv d\phi \Leftrightarrow \phi = \int d\phi$ motiviamo analiticamente la validità della forma differenziale esatta:

$$\sigma = E \epsilon \Rightarrow \exists \phi: \phi(\bar{\epsilon}) = \int d\phi = \int \sigma d\epsilon = \int_0^{\bar{\epsilon}} E \epsilon d\epsilon = \frac{1}{2} E \bar{\epsilon}^2 = \frac{1}{2} (E \bar{\epsilon}) \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \sigma \bar{\epsilon} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon} = \left(\frac{1}{2} \sigma(\epsilon) \right)' = \left(\frac{E \epsilon^2}{2} \right)' = E \epsilon = \sigma$$

poiché $\sigma d\epsilon \equiv d\phi$, $\exists \phi = \int \sigma d\epsilon \rightarrow \oint \sigma d\epsilon = 0$ poiché esiste la primitiva della funzione scalare di una variabile reale.

L'integrale lungo un cammino chiuso di detta funzione dunque è nullo.

Detta condizione assume due possibili interpretazioni:

$$\int_{E_1}^{E_2} \sigma dE = \phi(E_2) - \phi(E_1) = 0 \Leftrightarrow E_1 = E_2, \text{ come in ogni percorso chiuso (di carico e scarico)}$$

$$\oint \sigma dE = \int_0^E \sigma dE + \int_E^0 \sigma dE = \phi(E) - \phi(E) = 0 \quad \text{il percorso di carico e scarico è chiuso}$$

Da ciò si dimostra la reversibilità e, di conseguenza, l'elasticità del legame. Ne segue che $\phi(E)$ è una funzione di stato.

Riassumendo,

Legame Costitutivo Elastico Lineare 1D

$$\sigma = E \epsilon; \exists \phi(E) = \int \sigma dE; \sigma = \frac{\partial \phi(E)}{\partial E}$$

Tentiamo ora di esplicitare analiticamente il medesimo legame costitutivo nel caso tridimensionale.

Legame Costitutivo Elastico Lineare 3D

Occorre stabilire una relazione tra σ_{ij} e $\epsilon_{ij} \forall i, j$; ciò si attua con la legge di Hooke generalizzata, esplicitata di seguito in forma indiciale (sottintendendo $\sum_{h,k}$):

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{hk} \quad i, j, h, k \in \{1, 2, 3\}$$

\leftarrow costanti elastiche [di rigidezza] del corpo, generalizzazione del modulo di Young; si misura infatti in Pascal.

Anche in questo caso si conserva la linearità.

Verifichiamo in esplicito per σ_{11} la forma di detta espressione:

$$\sigma_{11} = C_{1111} \epsilon_{11} + C_{1112} \epsilon_{12} + C_{1113} \epsilon_{13} + \dots + C_{1133} \epsilon_{33} \quad \text{in tutto 9 addendi.}$$

Essandovi 9 addendi per 9 componenti di tensione, si osserva che sarà necessario calcolare 81 costanti elastiche, raggruppabili in un tensore di ordine 4 (ricordando che $3^m =$ numero di componenti del tensore con $m =$ ordine del tensore) detto tensore delle costanti elastiche e indicato con \underline{C} , in maniera tale da poter scrivere la relazione in forma tensoriale:

$$\underline{\sigma} = \underline{C} : \underline{\epsilon} \Rightarrow \underline{\sigma} = \underline{C} \underline{\epsilon}$$

\leftarrow contrazione (op. tensoriale)

σ_{11}	C_{1111}	C_{1122}	\dots	C_{1121}	ϵ_{11}
σ_{22}	C_{2211}	\dots	\dots	C_{2221}	ϵ_{22}
σ_{33}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{33}
σ_{23}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{23}
σ_{13}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{13}
σ_{12}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{12}
σ_{32}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{32}
σ_{31}	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	ϵ_{31}
σ_{21}	C_{2111}	\dots	\dots	C_{2121}	ϵ_{21}
	9×1	9×9		9×1	

Detta forma matriciale si dice notazione di Voigt: $\underline{\sigma}$ ed $\underline{\epsilon}$ assumono forma di vettori colonna 9×1 invece che di matrice 3×3 .

Tornando al caso 1D, si osserva che: $\sigma dE = d\phi = d\phi$.

Ciò si traduce al caso tridimensionale:

$$d\phi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_{11} d\epsilon_{11} + \sigma_{22} d\epsilon_{22} + \dots + \sigma_{33} d\epsilon_{33} = \sigma_{11}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \dots, \epsilon_{33}) d\epsilon_{11} + \sigma_{22}(\epsilon_{11}, \epsilon_{12}, \dots, \epsilon_{33}) d\epsilon_{22} + \dots + \sigma_{33}(\epsilon_{11}, \epsilon_{21}, \dots, \epsilon_{33}) d\epsilon_{33}$$

\leftarrow tutte le componenti di tensione sono funzione di ogni ϵ_i !

Condizione necessaria affinché ciò avvenga è la condizione di Schwarz sull'uguaglianza delle derivate seconde miste:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \epsilon_{12}} = \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial \epsilon_{11}}; \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial \epsilon_{33}} = \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial \epsilon_{11}}; \dots \quad \text{in generale, } \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{hk}} = \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial \epsilon_{ij}} \quad \forall i, j, h, k \in \{1, 2, 3\}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial E_{lk}} = \frac{\partial C_{ijkl}}{\partial E_{ij}} \Rightarrow \frac{\partial (C_{ijkl} E_{hk})}{\partial E_{hk}} = \frac{\partial (C_{hki}j E_{ij})}{\partial E_{ij}} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{hki}j \Rightarrow \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{C}}^T \quad \text{simmetria maggiore}$$

Se la condizione di simmetria maggiore è verificata, il materiale è elastico e nella relazione espressa in notazione di Voigt sono presenti 45 componenti effettive ($9 + \frac{36-9}{2} = 36 + 9 = 45$)

Altra condizione importante è la simmetria minore:
 $C_{hki}j = C_{ijhk} = C_{jikh}$

Equilibrio delle strutture ③

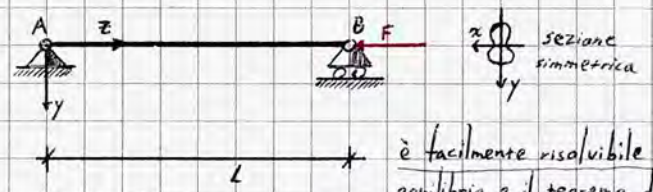
Oltre al metodo delle forze e il metodo degli spostamenti, esistono dei metodi energetici: il metodo dell'energia potenziale totale (analogo al metodo degli spostamenti) e il metodo dell'energia complementare (analogo al metodo delle forze). Pur essendo utilizzati nella risoluzione di strutture - ragionando in termini di energia - non verranno trattati in questo corso a causa di motivazioni temporali, oltre all'equivalenza con i metodi già studiati.

Problemi di Stabilità dell'Equilibrio

Porto Tacoma: elemento snello entrato in risonanza a causa del vento.

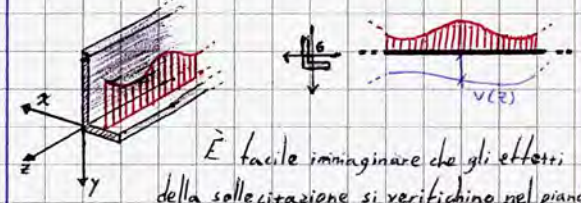
Legati anche nelle applicazioni al carico critico euleriano, espressione per determinare i valori che determinano particolari condizioni sugli elementi snelli.

Ci si soffermerà su problemi in cui le strutture possano essere soggette ad una biforcazione dell'equilibrio, in cui la configurazione di equilibrio possa mutare da un caso di linea elastica estensionale ad uno di linea elastica flessionale. Detto fenomeno, apparentemente illogico, si basa in realtà su un paradigma ben noto anche nella pratica: comprimendo un elemento snello (ad esempio uno spaghetti) si ha una prima fase di compressione assiale dopo la quale la struttura sbanda, portandosi su una configurazione variata. La teoria del solido trave non è in grado di motivare il passaggio da un puro caso estensionale ad un elemento che sviluppa un'inflessione.



Sappiamo determinare facilmente le reazioni vincolari ($R_A z = F$); la struttura è facilmente risolvibile con le equazioni indefinite di equilibrio e il teorema della linea elastica; il vero problema è legato alla biforcazione (soluzioni multiple) dell'equilibrio.

⚠ Una deformazione flessionale non avviene necessariamente nel piano in cui si verificano le sollecitazioni! Si veda il seguente esempio:



È facile immaginare che gli effetti della sollecitazione si verificano nel piano in cui essa si sviluppa, in realtà però è necessario effettuare delle considerazioni di geometria delle masse: in questo esempio infatti lo spostamento si verifica in un piano non parallelo a quello della sollecitazione, con effetto anche torsionale.

Per verificare efficacemente la struttura diventa necessario orientare la sezione di riferimento secondo le direzioni principali di inerzia e ragionare per componenti vere dovute alla determinazione del piano di spostamento o si prevede che la sollecitazione avvenga fuori dal piano di riferimento applicando i dovuti correttivi. Se la sezione di trave è almeno simmetrica rispetto al piano di riferimento xyz è principale d'inerzia, il che implica che le sollecitazioni si sviluppano nel piano di riferimento.

$$\frac{dN}{dz} = 0 \Rightarrow N = N_0 \quad \text{costante}; \quad \frac{du}{dz} = \frac{N}{EA} = \frac{N_0}{EA} \Rightarrow u = \frac{N_0}{EA} z + u_0$$

$$A \left\{ \begin{array}{l} u(A) = 0 \Rightarrow u_0 = 0 \\ N(L) = -F \Rightarrow N_0 = -F \end{array} \right. \Rightarrow N = -F \quad \forall z \in (0, L); \quad u(z) = -\frac{F}{EA} z$$

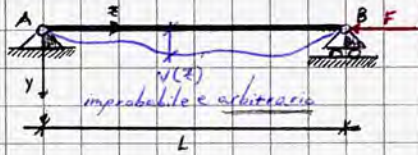
Nel caso di elementi snelli esiste però un carico dopo cui si sviluppa un evento critico, che determina un'inflessione e uno scatto dell'elemento, con parziale perdita del controllo del sistema.

Partendo dalla teoria della linea elastica, Eulero ammise la non misurabilità della causa di un evento simile pur osservando che in ogni elemento snello il fenomeno si verificava, dunque a prescindere dalle imperfezioni del materiale esiste una predizione di configurazione (più conveniente dal punto di vista energetico) valida unicamente per travi particolarmente snelle: strutture che verificano la teoria della trave possono collassare prima di dettare.

Nell'ambito della meccanica delle strutture sono state osservate la non linearità cinematica (che coinvolge gli spostamenti del secondo ordine) e la non linearità costitutiva (dovuta a legami costitutivi non lineari), trascurate in virtù dell'ipotesi di piccoli spostamenti per poter scrivere relazioni differenziali di equilibrio indipendentemente dalla deformazione che subisce un corpo (si veda l'esempio della trave a mensola a p. 16: se l'equilibrio dipende dallo spostamento in quanto L è variabile allora il problema non è lineare).

In questa sezione ci occuperemo invece di identificare una configurazione di equilibrio su una deformata diversa dall'originale e generica, in un modello in cui non vale l'ipotesi di piccoli spostamenti.

Consideriamo come esempio la struttura del caso precedente:



$$N = -F \cos \varphi$$

$\cos \varphi = 0$ nella configurazione rettilinea o dove $w' = 0$, ovvero la tangente alla deformata è nulla.
 $\cos \varphi$ in termini di tangente $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 \varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(v')^2}}$

Nota lo sforzo normale, si ottiene che:

$$M = F \cdot v$$

cambia la posizione rispetto alla deformazione!

dovuto all'eccentricità tra il punto di applicazione di F e il baricentro della sezione ideale attratta, esattamente pari a v .

Si osserva dunque come a causa della rimozione dell'ipotesi di piccoli spostamenti si sviluppi una componente flettente ove si ritiene ammissibile una deflessione non nulla (malgrado il puro regime estensionale); si mantengono valide le ipotesi di debole curvatura ($\chi \approx -v''$) e di legame costitutivo elastico lineare ($M = EI \chi = -EI v''$); l'unica non linearità dunque si verifica nel campo degli spostamenti a causa della rimozione dell'ipotesi precedentemente menzionata.

Valendo il legame elastico lineare, si ha che:

(LCEL \Rightarrow Linea Elastica)

$$F \cdot v = -EI v'' \Rightarrow EI v'' + Fv = 0$$

$$v'' + d^2 v = 0; \quad d^2 = \frac{F}{EI}$$

$$v''(z) + d^2 v(z) = 0; \quad v \propto e^{\lambda z} \Rightarrow v' = \lambda e^{\lambda z}; \quad v'' = \lambda^2 e^{\lambda z}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda z} + d^2 e^{\lambda z} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + d^2 = 0; \quad \lambda^2 = -d^2; \quad \lambda = \pm i d$$

reale e positiva per ipotesi.

molteplicità 2 \Rightarrow 2 coefficienti distinti.

Ne segue che $v = a \sin d z + b \cos d z$ (verificabile ricordando che $v' = a d \cos d z - b d \sin d z$; $v'' = d^2(-v) = -a d^2 \sin d z + b d^2 \cos d z$)

Imponiamo ora le condizioni al contorno sullo spostamento flessionale:

$$A \{ v(0) = 0 \Rightarrow a \sin d \cdot 0 + b \cos d \cdot 0 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow v = a \sin d z$$

$$B \{ v(L) = 0 \Rightarrow a \sin d L = 0$$

$a = 0 \Rightarrow v(z) = 0 \quad \forall z \in (0, L)$ la trave non sbanda, caso estensionale
 $\sin d L = 0 \Rightarrow d L = 0 + k \pi, k \in \mathbb{Z}$

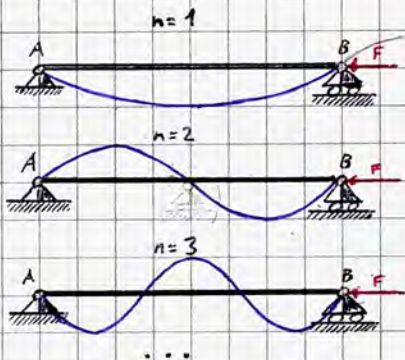
\triangle Si ricorda che la struttura non è soggetta a carichi ortogonali all'asse della trave, la deformazione flessionale è indotta unicamente da un carico assiale.

Trascurando il caso elementare, si ha che $d L = 0 + n \pi, n \in \{1, 2, \dots, N\}$, da cui:

$$\forall a \in \mathbb{R}, d = \frac{n \pi}{L}$$

- $n=1$ semiperiodo pari a L
- $n=2$ semiperiodo pari a $L/2$
- $n=3$ semiperiodo pari a $L/3$
- ...

Si trovano infinite forme, dette modi deformativi della struttura.



Se non si sceglie la soluzione banale, è possibile comprendere i modi deformativi ma non le ampiezze di v ; in altre parole, l'attivazione di un certo modo flessionale non consente di ricavare l'ampiezza della variazione posizionale delle configurazioni prese in esame.

Ciò è dovuto al fatto che l'amplificazione del fenomeno è catastrofica e non determinata. Si osserva inoltre che esiste un numero infinito e numerabile di modi deformativi.

Sapendo che $d^2 = n^2 \pi^2 / L^2 = F / EI$, è possibile ricavare i carichi che attivano detti meccanismi deformativi in una struttura, detti carichi critici:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} n^2$$

- $F_{cr,1} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$
- $F_{cr,2} = \frac{4 \pi^2 EI}{L^2}$
- $F_{cr,3} = \frac{9 \pi^2 EI}{L^2}$
- ...

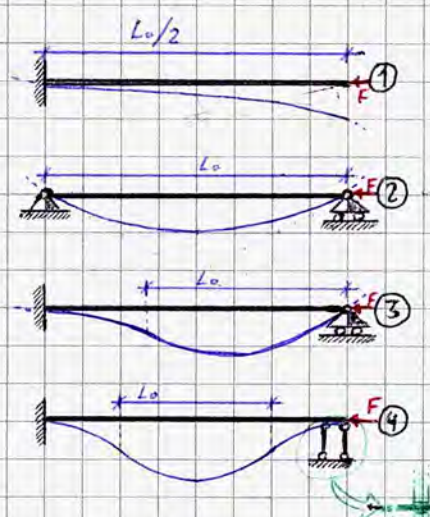
il carico critico dipende da tutti i dati caratteristici della trave.

In realtà non si conosce neanche da che parte sbanda la struttura: la deformata rappresentata e la sua inversa sono equivalenti!

Immaginando di aumentare progressivamente il carico cui è soggetta la struttura a partire da una sollecitazione nulla, si osserva che $F_{cr,1}$ è il primo ~~carico~~ carico critico raggiunto. Detto valore di sollecitazione è denominato carico critico euleriano, carico di punta critico o, nel caso della letteratura anglosassone, buckling load (flessionale).

$$F_{cr,c} = \min_{i \in \mathbb{N}} \{F_{cr,i}\} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$$

La quantificazione di questo carico permette di anticipare o evitare il verificarsi del fenomeno critico e il conseguente collasso della struttura: con l'inizio del fenomeno cresce il momento, implicando un aumento della curvatura che a sua volta causa un aumento di v , grandezza da cui dipende il momento, che cresce ulteriormente autoalimentando il fenomeno fino al collasso (a meno che la struttura non venga immediatamente decompressa).



L'inerzia del sistema può essere rilevante a seconda della sezione; potrebbe variare nell'attuarsi del meccanismo deformativo così come la lunghezza utile della trave nell'esplicitarsi del fenomeno; occorre dunque una generalizzazione della formulazione del carico critico, che assume la seguente espressione:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_0^2}$$

L_0 è la lunghezza libera di inflessione, distanza tra due punti di flesso successivi nella deformata flessionale (pari a L nel caso del carico critico di Eulero, $L/2$ per $n=2$, $L/3$ per $n=3$... nel caso della struttura usata come esempio).

I_{min} è il momento d'inerzia minimo: lo svergolamento tende ad avvenire nel momento corrispondente alla inerzia minima (ricordiamo che il carico critico euleriano è il minimo carico critico possibile per la struttura); per le proprietà di estremo degli autovalori si registra l'inerzia minima in corrispondenza del minimo degli autovalori del tensore d'inerzia nel riferimento principale;

Caso	L_0	F_{cr}
①	$2L$	$\frac{\pi^2 EI_{min}}{4L^2}$
②	L	$\frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2}$
③	$L/\sqrt{2}$ (non L)	$\frac{2\pi^2 EI_{min}}{L^2}$
④	$L/2$	$\frac{4\pi^2 EI_{min}}{L^2}$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{yx} & I_y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} I_I & 0 \\ 0 & I_{II} \end{bmatrix}$$

tensore d'inerzia

giacitura particolare dunque occorre determinare gli assi principali, diagonalizzando la forma matriciale del tensore d'inerzia e determinando l'inerzia principale minore.

⚠ Se la sezione della struttura in esame possiede più di due assi di simmetria materiale si hanno infiniti assi principali d'inerzia, e le inerzie sono tra loro uguali a prescindere dalla giacitura del piano.

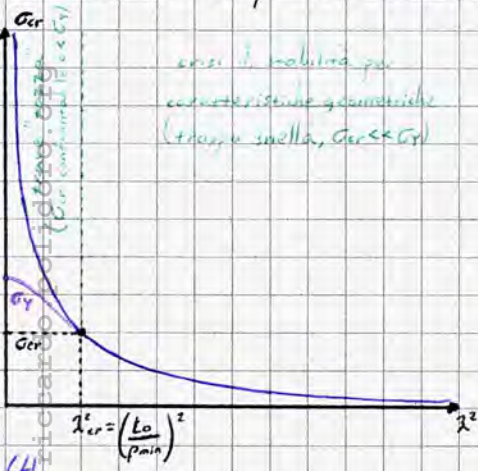
Come è possibile osservare dagli schemi notevoli esemplificati a fianco, l'iperstaticità della struttura aumenta il livello del carico critico riducendo la probabilità di buckling della struttura. Ad esempio, immaginando di porre un carrello in mezz'aria nella schema ① si otterrebbe $L_0 = L/2$ e una formulazione di F_{cr} equivalente a quella dello schema ④.

Scrivendo la formulazione del carico critico in funzione della tensione è possibile ottenere la tensione critica:

$$F_{cr} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{AL_0^2} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E p_{min}}{L_0^2} \sim \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

ricordiamo infatti che $I_{min}/A = p_{min}$, con p_{min} raggio di inerzia minimo (raggia giratore), parente del diametro della sezione retta di trave.

La grandezza λ , detta snellezza della trave, è pari a $\lambda = L_0/p_{min}$, dunque parente (in misura minore) del rapporto L/D , con D diametro caratteristico della struttura. Si osserva dunque che tali tensioni critiche assumono valori confrontabili con altri sforzi deformativi solo nel caso di elementi particolarmente snelli.



Nel diagramma a fianco è possibile osservare che per snellezze maggiori del valore esplicitato si verificano condizioni per cui le travi possono collassare per effetto del peso proprio a causa delle caratteristiche geometriche della struttura.

Viceversa, per valori di snellezza minori $\sigma_{cr} \rightarrow \infty$, dunque il motivo del collasso di strutture simili è progressivamente più da imputare al materiale.

Solitamente alla curva ideale del rapporto tra le due grandezze (indicata in blu) si applica una curva correttiva che tiene conto del carico di rottura σ_Y .

Detto grafico viene definito iperbole di Eulero, permette di comprendere se le crisi della struttura sono dovute al materiale (collegate al raggiungimento delle resistenze limite del materiale) o per motivi geometrici (snellezza).

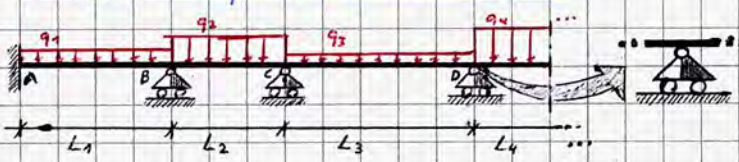
Da queste considerazioni deriva il metodo ω di progettazione delle strutture: si considera un coefficiente di sicurezza $\omega > 1$ tale che $\omega|\sigma| < \sigma_{ammisibile}$, in maniera tale da tener conto delle possibili deformazioni per motivi geometrici.

Nella pratica, è possibile comprendere quale carico critico attiva il meccanismo deformativo in due diversi modi:

- Nei punti in cui è nulla la deformata è presente un vincolo.
- Il carico raggiunge l'intensità di un carico critico "maggiore" più velocemente della propagazione dell'onda elastica nella struttura.

Metodo dell'equazione dei tre momenti

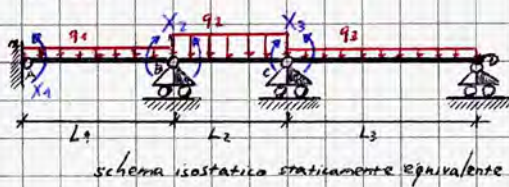
applicazione del metodo delle forze



Consideriamo una struttura composta da un unico tratto di trave incastrata su più appoggi che però non compaiono la continuità del tratto (come visibile nell'ingrandimento a fianco).

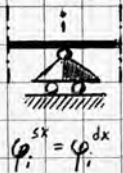
Questa tipologia di trave - detta trave continua su più appoggi e di frequente applicazione in ambito civile, come intuibile considerando gli impalcati dei viadotti (su più piloni), o i solai (e le relative travi) negli edifici per civile abitazione - è logicamente n volte iperstatica, con n pari al numero di appoggi.

Dal punto di vista didattico, si è già in possesso degli strumenti necessari per risolvere una simile struttura, e ad esempio col metodo delle forze, considerando come sistema isostatico staticamente equivalente un sistema svicolato in corrispondenza dei carrelli aggiungendo cerniere interne alla struttura che rompono la continuità della struttura ma permettano di ricondursi ad un'applicazione degli schemi notevoli, aggiungendo come incognite iperstatiche le duali alla rotazione in corrispondenza dei vincoli:



schema isostatico staticamente equivalente

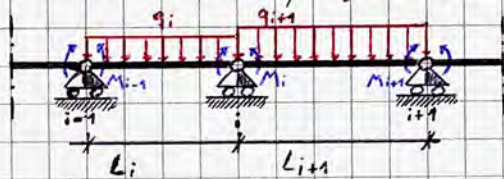
Per ripristinare l'equivalenza cinematica si scrivono delle equazioni di congruenza che impongano le condizioni della struttura originale. Si osserva che nel caso in cui si scegliesse come schema isostatico staticamente equivalente uno schema di trave a mensola con reazioni iperstatiche pari alle reazioni dei carrelli soppressi nello schema sarebbe necessario imporre un abbassamento nullo in corrispondenza dei punti di applicazione delle incognite per ripristinare l'equivalenza cinematica, scrivendo tre equazioni di congruenza ($V_B = 0; V_C = 0; V_D = 0$) tutte dipendenti dai contributi delle reazioni incognite ($X_1; X_2; X_3$) e dalle condizioni di carico note ($q_1; q_2; q_3$) - oltre che dalle caratteristiche materiali e geometriche della struttura che costituiscono una configurazione non riconducibili ad uno schema notevole in maniera elementare: le sollecitazioni non sono applicate né sugli estremi né in punti notevoli dello schema a mensola, rendendo necessaria l'integrazione delle equazioni di equilibrio della linea elastica, procedimento rigoroso e corretto ma numericamente oneroso.



Considerando lo schema isostatico effettivamente diagrammato, si osserva che per un qualunque nodo i gravato dalla presenza di un carrello per ripristinare l'equivalenza cinematica della struttura occorre imporre che $\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx}$, come intuibile dall'ingrandimento a fianco dello schema originale. Nel caso della struttura con 3 carrelli, si ottiene:

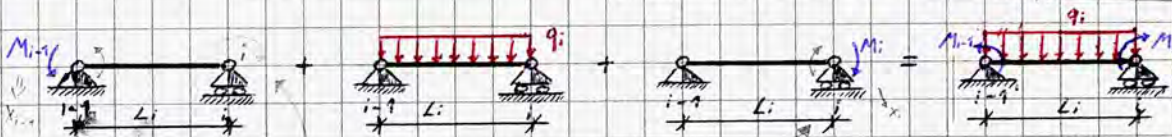
$$\begin{cases} \varphi_A = 0 \\ \varphi_B^{sx} = \varphi_B^{dx} \\ \varphi_C^{sx} = \varphi_C^{dx} \end{cases} \dots$$

Tornando ad un caso più generale, consideriamo il nodo i -mo e i nodi immediatamente adiacenti:



Valutiamo singolarmente φ_i^{sx} e φ_i^{dx} , sapendo che $\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx} \forall i$.

φ_i^{sx} : Per la linearità del problema di equilibrio elastico e l'ipotesi di piccoli spostamenti, lo schema è ottenuto dalla sovrapposizione dei seguenti schemi notevoli:



Ne segue che $\varphi_i^{sx} = -\frac{M_{i-1}}{6EI} L_i + \frac{q_i L_i^3}{24EI} - \frac{M_i L_i}{3EI}$; Analogamente, $\varphi_i^{dx} = \frac{M_{i+1}}{3EI} L_{i+1} - \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24EI} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6EI}$

instaura una rotazione oraria sul nodo i!

$\varphi_i^{sx} : - + -$ $\varphi_i^{dx} : + +$

Essendo $\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx}$,

$$-\frac{M_{i-1} L_i}{6EI} + \frac{q_i L_i^3}{24EI} - \frac{M_i L_i}{3EI} = \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{3EI} - \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24EI} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6EI} \Rightarrow \frac{M_{i-1} L_i}{6} + \frac{M_i L_i}{3} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{3} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6} = \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24} + \frac{q_i L_i^3}{24}$$

Si osserva che nel caso in cui non siano presenti distorsioni o cedimenti elastici/anelastici nella struttura è possibile elidere il termine relativo alla rigidità flessionale (essendo la struttura originaria iperstatica, la presenza di cedimenti deterringi non la svincolano dalle caratteristiche interne della sollecitazione).

È possibile tradurre l'insieme di queste equazioni di congruenza V_i in un sistema, lineare data la linearità del problema in sé:

$$\begin{matrix} M_1 & M_2 & \dots & M_{i-1} & M_i & M_{i+1} & \dots & M_n \\ \textcircled{1} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \textcircled{i} & 0 & 0 & \dots & L_i/6 & \frac{L_{i+1}+L_i}{3} & L_{i+1}/6 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \textcircled{n} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \begin{matrix} M_1 \\ \vdots \\ M_i \\ \vdots \\ M_n \end{matrix} = \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ q_{i+1} \frac{L_{i+1}^3}{24} + q_i \frac{L_i^3}{24} \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix}$$

$\underline{A} (n \times n)$ $\underline{X} (n \times 1)$ $\underline{q} (n \times 1)$
 matrice incognite carichi noti

ovvero $\underline{AX} = \underline{q}$. L'intero sistema ha al più tre incognite ~~per~~ per ogni equazione, ovvero i momenti nei nodi immediatamente adiacenti e il nodo i -mo; la singola relazione si dice equazione dei tre momenti. Il tutto deriva dalle equazioni di Müller-Breslau-Thurgau.

\underline{A} si dice matrice a dominanza diagonale poiché gli elementi non nulli tendono a concentrarsi in prossimità della diagonale principale.

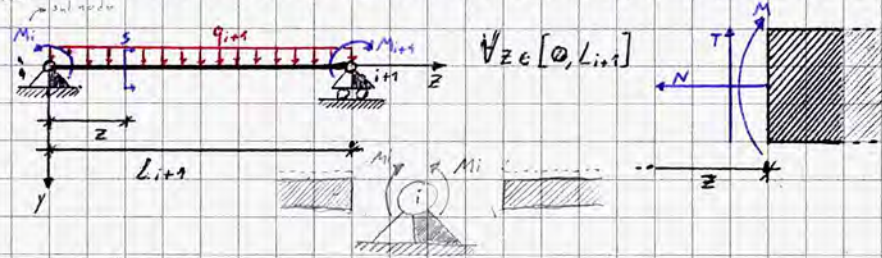
Il problema dunque è in n equazioni linearmente indipendenti e in n incognite; ne segue che la matrice dei coefficienti ha $r(\underline{A}) = n$ e $\det(\underline{A}) \neq 0$ ed è dunque invertibile. Il sistema inoltre è non omogeneo, essendo la struttura soggetta a condizioni di carico non nulle, da cui per il teorema di esistenza e unicità di Kirchhoff si ha che esiste una e una sola soluzione, non nulla, del sistema.

Essendo \underline{A} invertibile, $\underline{AX} = \underline{q} \Rightarrow (\underline{A}^{-1})(\underline{AX}) = \underline{A}^{-1}\underline{q} \Rightarrow \underline{X} = \underline{A}^{-1}\underline{q}$

essendo il sistema lineare, esso è risolvibile con i vari metodi appresi nel corso di Algebra e Geometria, come il metodo di Cramer o la diagonalizzazione della matrice \underline{A} . Nelle applicazioni - e in sede di esame - vengono solitamente richiesti 2-3 incognite iperstatiche, permettendo l'utilizzo del primo dei metodi citati; per strutture con iperstaticità maggiore si tende ad utilizzare programmi informatici.

La principale potenzialità di questo metodo è la possibilità di conoscere automaticamente il valore delle caratteristiche interne della sollecitazione in corrispondenza dei nodi una volta note le incognite iperstatiche, senza dover scrivere le equazioni di equilibrio della struttura: sono noti i valori assunti dal momento in corrispondenza degli appoggi e i carichi applicati alla struttura!

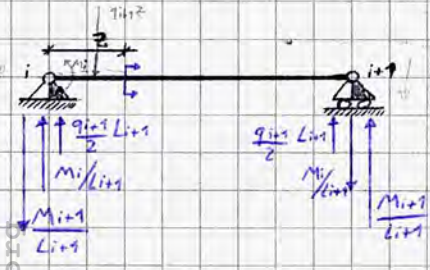
Leggendo la struttura facendo scorrere una sezione ideale da sinistra a destra:



Dal calcolo del taglio è possibile conoscere le reazioni vincolari dovute ai carrelli nello schema originale, pari esattamente al salto del taglio tra i tratti sinistro e destro della trave rispetto al vincolo. Calcoliamo dunque la componente destra del taglio in prossimità del nodo i , iterando il procedimento nel resto della struttura.

Assumendo che dall'equazione matriciale emergano grandezze coerenti con quanto rappresentato graficamente, si ha che:

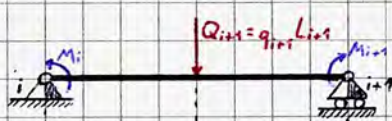
$T_i^{dx} = q_{i+1} \frac{L_{i+1}}{2}$



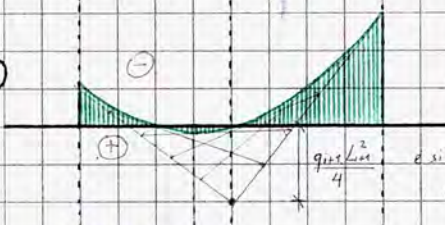
$\forall z \in [0, L_{i+1}]$, si ha che $M(z) = -\frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} z + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} z - M_i$

$T(z) = \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} - \frac{M_i}{L_{i+1}} - q_{i+1} z$

Operando per tutti gli $n-1$ tratti, è possibile ottenere immediatamente i diagrammi della sollecitazione interna per tutti i tratti, come è possibile osservare alla pagina successiva.

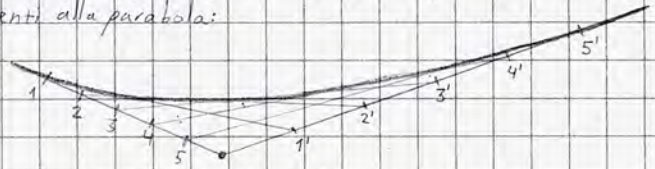


(M)

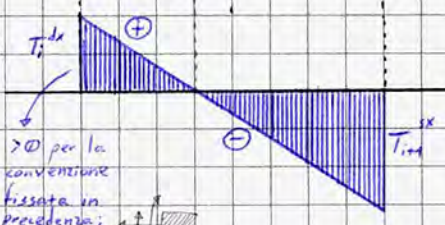


supponiamo $|M_{i+1}| > |M_i|$ e supponiamo che entrambi i momenti tendano le fibre superiori della struttura

si dividono le tangenti in un numero di parti uguale, congiungendo i punti in maniera tale da delineare le tangenti alla parabola:



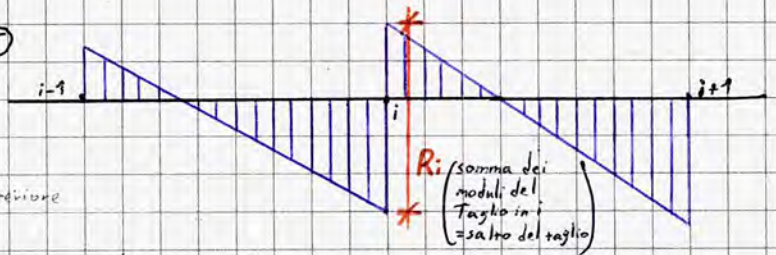
(T)



> 0 per la convenzione fissata in precedenza; il primo tratto ha pendenza prima positiva, poi negativa.

Supponendo di aver effettuato la medesima operazione per ogni tratto, è possibile ricavare le reazioni verticali dal diagramma del taglio, come nel seguente esempio:

(T)

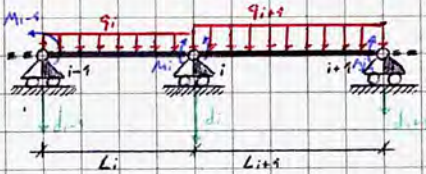


Il taglio è lineare in x poiché il momento è parabolico.

$$R_i = \text{Incognita iperstatica ulteriore}$$

Ipotizziamo ora che si verificano dei cedimenti anelastici all'interno della struttura;

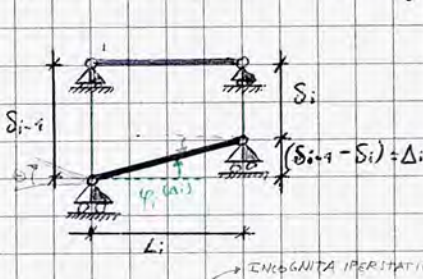
dal punto di vista fisico il caso è molto frequente nelle applicazioni pratiche: una trave su più appoggi (come un solaio o un viadotto) può essere soggetta ad azioni anelastiche (solitamente in fondazione) o elastiche (dovute ad esempio alla rigidezza assiale degli elementi schematizzati come appoggi).



Essendo la struttura iperstatica, i cedimenti determinano delle caratteristiche interne di sollecitazione (anche in assenza di carichi!). Scrivendo l'equazione di congruenza, si ha che:

$$\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{(M_{i-1})} + \varphi_i^{(q_i)} + \varphi_i^{(M_i)} + \varphi_i^{(\Delta_i)}$$

Nel caso di cedimenti differenziali (stesso verso, modulo differente) bisogna ipotizzare quale assuma valore maggiore. Supponendo $|\delta_{i-1}| > |\delta_i|$ si ottiene la configurazione in figura:



$$\varphi_i^{(\Delta_i)} = \frac{\delta_{i-1} - \delta_i}{L_i} \sim \text{eg } \varphi_i^{\Delta_i}$$

Analogamente, supponendo $\delta_i > \delta_{i-1}$ nel secondo tratto, si ha che:

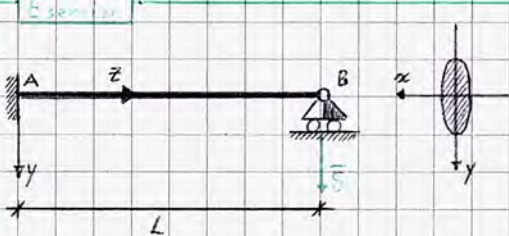
$$\varphi_i^{(\Delta_{i+1})} = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{L_{i+1}}$$

La generica $x_i = \alpha_i q_i L$ ora ha componenti distorsionali; l'equazione di congruenza diventa:

$$\frac{M_{i-1} L_i}{6EI} - \frac{M_i L_i}{3EI} + \frac{q_i L_i^3}{24EI} + \frac{\delta_{i-1} - \delta_i}{L_i} = \frac{M_i L_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6EI} - \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24EI} + \frac{\delta_i - \delta_{i+1}}{L_{i+1}}$$

Ne segue che in presenza di cedimenti $x_i = f(q_i, L_i, E, I, \delta_i)$.

$$\varphi_i \text{ dovuto a distorsione} = \frac{\Delta \text{ cedimento}}{\text{Lunghezza tratto}} \quad \text{perché siamo in Hp piccoli spost e deform} \Rightarrow \text{praty p}$$



Poss. considerare $EA \rightarrow \infty \Rightarrow$ Non deformabile

Integriamo l'equazione della linea elastica:

$$EI v'''' = q = 0;$$

$$EI v''' = C_0 = -T(z)$$

$$EI v'' = C_0 z + C_1 = -M(z)$$

$$EI v' = \frac{C_0}{2} z^2 + C_1 z + C_2 = EI(-\varphi(z))$$

$$EI v = \frac{C_0}{6} z^3 + \frac{C_1}{2} z^2 + C_2 z + C_3$$

Si osserva come la struttura, essendo iperstatica, sviluppa caratteristiche interne della sollecitazione per effetto del solo cedimento. Si provi per esercizio a risolvere la struttura con una cerniera in A.

Consideriamo le condizioni al contorno:

$$\varphi(z=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$v(z=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$$

$$v(z=L) = \bar{\delta} \Rightarrow \frac{C_0}{6EI} L^3 + \frac{C_1}{2EI} L^2 = \bar{\delta} \Rightarrow C_0 \left(\frac{L^3}{6EI} - \frac{L^3}{2EI} \right) = \bar{\delta} \Rightarrow C_0 = -\frac{3EI\bar{\delta}}{L^3}$$

$$M(z=L) = 0 \Rightarrow -C_0 L - C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_0 L = \frac{3EI\bar{\delta}}{L^2}$$

essendo B un carrello esterno, si ha che, essendo $\varphi_B \neq 0$, $M(z=L) = 0$.

Ne segue che:

$$T(z) = \frac{3EI\bar{\delta}}{L^3}$$

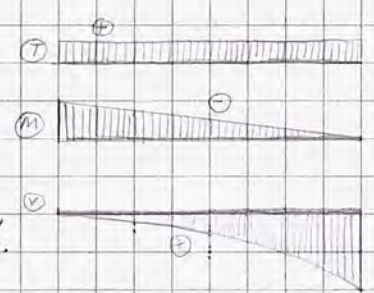
costante e positivo

$$M(z) = \frac{3EI\bar{\delta}}{L^3} z - \frac{3EI\bar{\delta}}{L^2}$$

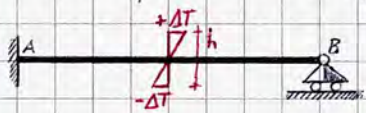
negativo in $z=0$, lineare e nulla per $z=L$.

$$v(z) = -\frac{3EI\bar{\delta}}{6EIL^3} z^3 + \frac{3EI\bar{\delta}}{2L^2EI} z^2 + \dots$$

lo spostamento, non influenzato da carichi e compatibile coi vincoli, non dipende dalla rigidità za a differenza delle caratteristiche di sollecitazione!



Si risolva per esercizio la seguente struttura, sostituendo successivamente una cerniera in A:



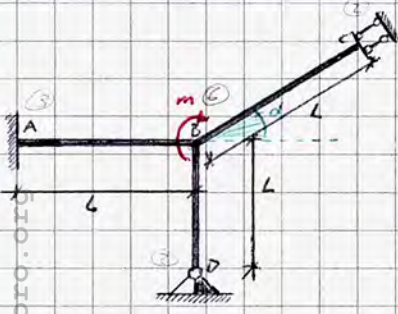
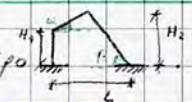
Si ricordi che in questo caso la curvatura totale è pari alla differenza $\chi^{el} - \chi^{an}$, con $\chi^{an} = \frac{\alpha \Delta T}{h}$

△ Nell'equazione della linea elastica, $M(z) = EI(-v'')$

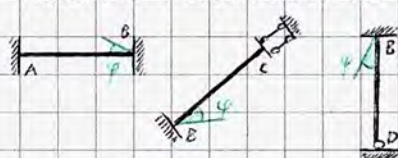
χ^{el} , si ottiene integrando $M(z) = (\chi^{tot} - \chi^{an})EI$

si ricordi dunque di considerare la curvatura totale come incognita, altrimenti si incorre in errori. (sommi all'equazione della linea elastica il termine $\frac{\alpha \Delta T}{h}$)

Si consideri la seguente applicazione del metodo degli spostamenti; ricordando la risoluzione per strutture del tipo



La struttura è 4 volte iperstatica. Conservando l'ipotesi di inestensibilità assiale, si ha un unico grado di libertà nodale libero, ovvero la rotazione in B: riconducendoci agli schemi notevoli intatti otteniamo che



Se applicassimo il MdE, avremmo:

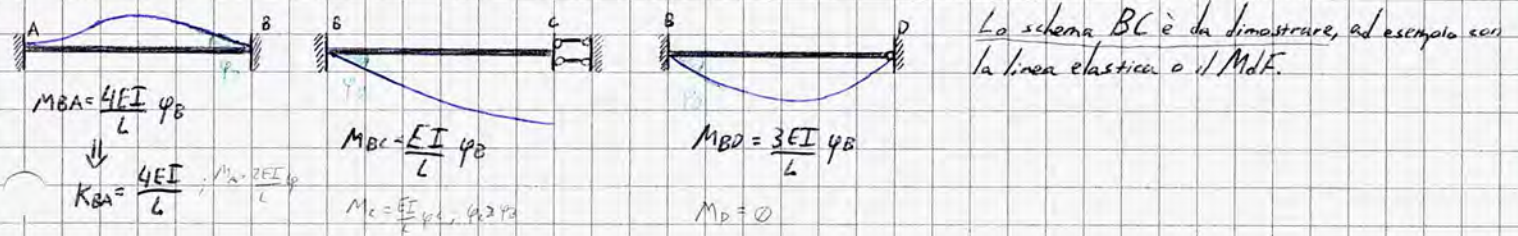
Schemi non notevoli il che comporterebbe un onere computazionale significativo.

Per la congruenza, si ha che $\varphi_{BA} = \varphi_{BD} = \varphi_{BC} = \varphi_B$.

Per l'equilibrio, $\sum M_B = 0 \Rightarrow M_{BA} + M_{BC} + M_{BD} - m = 0 \Rightarrow (K_{BA} + K_{BC} + K_{BD}) \varphi_B = m \Rightarrow \sum_i k_i \varphi_B = m$

Consideriamo degli schemi notevoli per determinare le k_i :

Rigidità flessionali



Lo schema BC è da dimostrare, ad esempio con la linea elastica o il MdF.

Dunque, $\left(\frac{4EI}{L} + \frac{EI}{L} + \frac{3EI}{L}\right) \varphi_B = m \Rightarrow \varphi_B = \frac{mL}{8EI}$

Risolvere la struttura significa individuare reazioni vincolari e Caratti della Sol. (C.S)

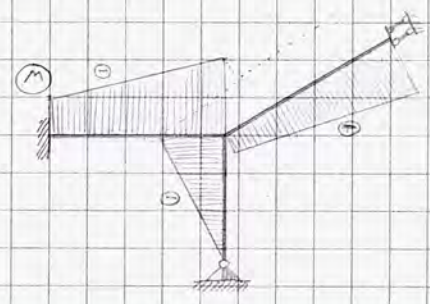
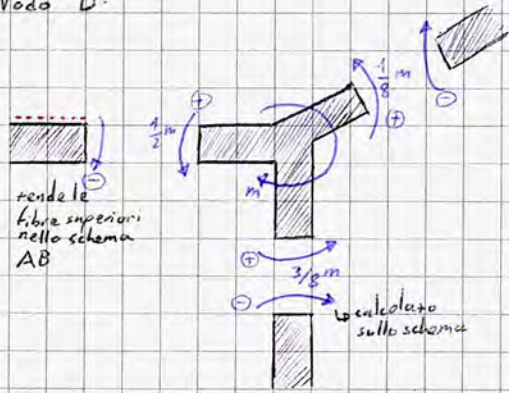
Da cui, $M_{BA} = K_{BA} \frac{m}{\sum k_i} = \frac{K_{BA}}{\sum K_i} m = \frac{\frac{4EI}{L}}{\frac{8EI}{L}} m = \frac{1}{2} m$

il momento si distribuisce in frazione delle rigidità flessionali (K) dei singoli tratti: a parità di lunghezza, essendo il tratto AB più rigido a causa dell'incastro esso assorbe una quota maggiore di momento. Si ottiene infatti che: $M_{BC} = \frac{1}{8} m$, $M_{CD} = \frac{3}{8} m$.

$\frac{K_i}{\sum_{i=1}^n K_i} = \tau_i$; coefficiente di ripartizione; $\tau_{BA} = \frac{1}{2}$. Si ha che $\sum \tau_i = 1$.

Nodo B:

$\sum m_{iB} = -m + \frac{1}{2}m + \frac{3}{8}m + \frac{1}{8}m = 0$



Meccanica del Continuo ④

Ricapitolando, il legame costitutivo elastico lineare si specializza come segue:

1D: $\sigma = E \cdot \epsilon$
 E: modulo di Young, rappresenta la rigidezza del materiale

La legge, avente formulazione analoga alla legge di Hooke, presenta una forma differenziale $\sigma d\epsilon$ automaticamente esatta, dunque esiste un potenziale ϕ , che dal punto di vista fisico rappresenta una densità di energia elastica - ovvero una energia interna - nell'intorno di un generico punto tale che:

$\exists \phi = \frac{1}{2} \sigma \epsilon = \frac{1}{2} E \epsilon^2 \Rightarrow \sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$ ciò assicura la reversibilità del processo deformativo.

3D: $\underline{T} = \underline{C} : \underline{E}$ è il prodotto tra il tensore delle rigidità/costanti elastiche (del IV ordine, ovvero con potenzialmente 81 costanti linearmente indipendenti), per il tensore delle deformazioni. L'esistenza del potenziale ϕ si verifica imponendo la condizione di Schwarz sulla forma differenziale $\sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \underline{T} : d\underline{E}$, affinché il legame costitutivo sia lineare si ha inoltre che $\underline{C} = \underline{C}^T \Rightarrow C_{ijkl} = C_{klij}$, condizione di simmetria maggiore.

$\underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{E}} \xrightarrow{\text{forma indiciale}} \sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}}$ Essendo \underline{C} un tensore del IV ordine, per la simmetria maggiore si passa da 81 a 45 costanti elastiche linearmente indipendenti, come leggibile nell'esemplificazione in notazione di Voigt fatta in precedenza.

Il tensore \underline{C} deve però rispettare anche altre condizioni, dette di simmetria minore, poiché lega due tensori simmetrici:

$\left\{ \begin{array}{l} \underline{T} = \underline{T}^T \\ \underline{E} = \underline{E}^T \end{array} \right. \Rightarrow \text{simmetria minore, ovvero: } \underline{C}_{ijkl} = \underline{C}_{jikh} = \underline{C}_{ijlk}$
deriva da $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$
deriva da $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

riccardo.polidoro.org

• $C_{ijhk} = C_{jihk} \Leftrightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$\sigma_{ij} = C_{ij11} \epsilon_{11} + C_{ij12} \epsilon_{12} + \dots + C_{ij33} \epsilon_{33}$

$C_{ji} = C_{ji11} \epsilon_{11} + C_{ji12} \epsilon_{12} + \dots + C_{ji33} \epsilon_{33}$

essendo per definizione le due componenti di tensione combinazione lineare delle stesse componenti di deformazione, e poiché il legame costitutivo vale per ogni regime deformativo ($\forall \underline{\epsilon}$), si ha necessariamente che $C_{ij11} = C_{ji11}; \dots$, ovvero che, in generale, $C_{ijhk} = C_{jihk} \square$

• $C_{ijhk} = C_{ikhj} \Leftrightarrow \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$

$\sigma_{ij} = C_{ij11} \epsilon_{11} + C_{ij12} \epsilon_{12} + \dots + C_{ij21} \epsilon_{21} + \dots + C_{ij33} \epsilon_{33}$

$\sigma_{ji} = C_{ji11} \epsilon_{11} + C_{ji12} \epsilon_{12} + \dots + C_{ji21} \epsilon_{21} + \dots + C_{ji33} \epsilon_{33}$

analogamente al caso precedente, si ha che $C_{ij12} \epsilon_{12} = C_{ji21} \epsilon_{21}; \dots$, ovvero che, in generale, $C_{ijhk} = C_{ikhj} \square$

Le condizioni di simmetria minore dunque riducono sensibilmente il numero di costanti elastiche linearmente indipendenti, come leggibile in notazione di Voigt scrivendo solo le componenti indipendenti:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & \dots & C_{1112} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & C_{2211} & C_{2222} & \dots & C_{2212} \\ & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & C_{3311} & C_{3322} & \dots & C_{3312} \\ & & & & & \ddots & & \vdots \\ & & & & & & C_{1211} & C_{1222} & \dots & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

$\underline{T} \quad \underline{C} \quad \underline{E}$

in questo modo vengono automaticamente rimosse le costanti elastiche ripetute: la simmetria minore in sé determina una forma matriciale di \underline{C} costituita da 36 elementi. Introducendo la simmetria maggiore le costanti si riducono ulteriormente:

$\frac{36 \text{ (totali)} - 6 \text{ (diag. princ.)} + 6}{2} = 21$ (massima numero di costanti elastiche indipendenti)

costanti indipendenti fuori diagonale

non sono considerate le costanti dipendenti

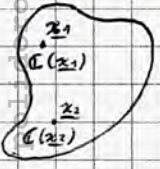
Un materiale avente tutte le 21 costanti elastiche tra loro indipendenti si dice triclinico; esso possiede il massimo grado di anisotropia.

Estraendo un volume infinitesimo da un continuo infatti in alcuni casi è possibile leggere risposte deformative e rigidzze differenti a parità di sollecitazioni applicate unicamente a causa della diversa direzione di applicazione: nel campo pratico, a seconda della direzione di una prova - ad esempio di trazione - su un determinato provino di un certo materiale è possibile ottenere valori generalmente diversi di E .

Questo fenomeno è detto anisotropia, proprietà caratteristica di ogni materiale che implica un diverso comportamento del materiale in base alla direzione di applicazione della forza dovuta alla microstruttura del materiale che in virtù di simmetrie ed altre proprietà geometriche determina risposte differenti in determinate direzioni alla scala infinitesima macroscopica: all'aumentare del grado di simmetria della microstruttura corrisponde una diminuzione del grado di anisotropia e una conseguente diminuzione del numero di costanti elastiche indipendenti: i materiali ortotropi (con 3 piani di simmetria) ad esempio presentano 9 costanti elastiche indipendenti, mentre i materiali trasversalmente isotropi presentano uno stesso comportamento in un piano, mentre in un asse ortogonale al piano il comportamento è differente (ad esempio come i tronchi degli alberi); sono governati da 5 costanti elastiche.

Il caso più semplice, nonché quello maggiormente approfondito nel corso, è quello di un materiale isotropo: rispetto alla elasticità non varia in comportamento in base alla direzione della prova; le costanti elastiche indipendenti diventano 2, \underline{C} è invariante per rotazione del sistema di riferimento.

Oltre all'anisotropia, i materiali possono anche essere eterogenei (caratteristica complementare all'anisotropia), ovvero la loro risposta elastica può dipendere dal punto in cui viene effettuata la misura: in generale si ha $\underline{C}(\underline{x}_1) \neq \underline{C}(\underline{x}_2)$, ovvero $\underline{C} = \underline{C}(\underline{x})$; un materiale omogeneo è invece caratterizzato dalla relazione $\underline{C} = \underline{C} \forall \underline{x}$.



Essendo il legame costitutivo elastico lineare un legame che garantisce reversibilità del fenomeno, anche nel caso 3D ($\underline{T} = \underline{C} \underline{E}$) occorre definire un potenziale; si può dimostrare che:

$\phi = \frac{1}{2} \underline{T} : \underline{E}$ essendo elastico, si ha forma differenziale esatta $d\phi = \underline{T} : d\underline{E}$

In forma indiciale, $\phi = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \Rightarrow \frac{1}{2} (\underline{C} : \underline{E}) : \underline{E} = \frac{1}{2} \underline{E} : \underline{C} : \underline{E} > 0$ il prodotto scalare è commutativo anche in forma tensoriale

Δ definito positivo $\Rightarrow \forall (A \cdot v) > 0 \forall v$

Come anticipato, dal punto di vista fisico Φ è energia interna elastica, dunque necessariamente > 0 indipendentemente dallo stato deformativo ($\forall \underline{\underline{E}}$); ciò implica necessariamente che il tensore $\underline{\underline{C}}$ sia definito positivo (come imposto in precedenza).

Dal punto di vista fisico, il fatto che $\underline{\underline{C}}$ sia definito positivo ha un'interpretazione di facile lettura nel caso 1D, comunque interessante:

$$\phi = \frac{1}{2} E \epsilon^2 > 0 \Leftrightarrow E > 0$$

||
 $\underline{\underline{C}}$ definito positivo

se $E < 0$, ad una tensione che mette il corpo in trazione corrisporrebbe un regime deformativo di contrazione.

$\underline{\underline{C}}$ definito positivo $\Rightarrow \det(\underline{\underline{C}}) > 0$; in particolare $\neq 0 \Rightarrow \underline{\underline{C}}$ è invertibile, ovvero:

$$\exists \underline{\underline{C}}^{-1} = \underline{\underline{S}} : \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{S}} \underline{\underline{T}}$$

si instaura una relazione biunivoca tra $\underline{\underline{E}}$ e $\underline{\underline{T}}$ attraverso $\underline{\underline{C}}$ ed $\underline{\underline{S}}$.
 $\underline{\underline{S}}$ tensore della cedevolezza, con componenti parenti di $1/E$, inverso della rigidità.

Legame Costitutivo Elastico Lineare Isotropo

$$\{x_1, x_2, x_3\}: \phi = C_{ijkl} E_{hk} E_{ij}$$

$$\{x'_1, x'_2, x'_3\}: \phi' = C'_{ijkl} E'_{hk} E'_{ij}$$

Consideriamo la densità di energia elastica di uno stesso corpo in un sistema di riferimento generico e un riferimento ruotato rispetto al precedente.

Essendo ϕ uno scalare, nonché una densità di energia, non ha alcun senso fisico che la sua entità nell'intorno di uno stesso punto vari ruotando il sistema di riferimento; ne segue necessariamente che $\phi = \phi' \forall \underline{\underline{E}}$.

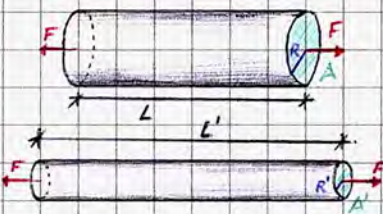
Ne segue che $C_{ijkl} E_{hk} E_{ij} = C'_{ijkl} E'_{hk} E'_{ij} \forall \underline{\underline{E}}$, ma poiché in un materiale isotropo $C_{ijkl} = C'_{ijkl}$, le uniche variabili nella relazione sono le E ; ne segue che non occorre individuare una combinazione di E da verificare la relazione per ogni singolo stato deformativo: l'unico modo tale che ϕ sia invariante e di facile dimostrazione è esprimere ϕ attraverso gli invarianti di $\underline{\underline{E}}$, ovvero:

$\phi = \phi(I_1(\underline{\underline{E}}), I_2(\underline{\underline{E}}), I_3(\underline{\underline{E}}))$; essendo però ϕ combinazione quadratica di E si elide l'invariante cubico. In particolare, si ha che:

$$\phi = A [I_1(\underline{\underline{E}})]^2 + B I_2(\underline{\underline{E}})$$

A, B costanti che descrivono il potenziale elastico e dunque il legame costitutivo in sé, data che $\underline{\underline{T}} = \frac{d\phi}{d\underline{\underline{E}}}$

Le due costanti sono particolarmente semplici da ricavare, essendo misurabili tramite prove meccaniche sui materiali; difatti esse vengono definite rispettivamente come primo [secondo] indice tecnico, e coincidono con il modulo di Young (E) e il coefficiente di Poisson (ν), entrambi misurabili già con una semplice prova di trazione monoassiale.



Il modulo di Young informa sulla risposta assiale del provino: nella legge $\sigma = E \epsilon$ esplicitando le componenti si ottiene $F/A = E(L'-L/L)$; in regime di piccole deformazioni tale relazione assume caratteristica di linearità, con dipendenza data dal coefficiente E , misurato in Pascali. Il modulo di Young, anche detto modulo elastico longitudinale per motivi intuitivi dall'esplicitazione della relazione, è il primo modulo tecnico per caratterizzare il legame costitutivo elastico lineare isotropo.

Se dal punto di vista tensionale è stata trascurata la variazione di area in nome di una descrizione più semplice e parsimoniosa dei fenomeni di stress, tale semplificazione non è attuabile nell'analisi del regime deformativo del corpo: un provino sottoposto a trazione si contrae trasversalmente, implicando una deformazione trasversale E_t regolata dalla legge:

$$E_t = \frac{R' - R}{R}$$

Per definire efficacemente il comportamento del materiale si introduce il coefficiente di Poisson, anche noto come coefficiente di contrazione trasversale o secondo modulo tecnico:

$$\nu = - \frac{E_t}{E}$$

se $E > 0$, $E_t < 0 \Rightarrow$ si introduce il - per rendere la costante positiva nei casi classici.

Il modulo di Poisson mostra quale sia il valore della deformazione trasversale per ogni deformazione assiale, è una caratteristica propria del materiale: nota E , $E_t = -\nu E$.

Noti E e ν dunque è sempre possibile conoscere le caratteristiche della deformazione, da cui è possibile scrivere la forma completa delle forme matriciali di \underline{C} ed \underline{S} di un materiale isotropo.

Scriviamo il legame in termini di $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{S} : \underline{\underline{\tau}}$ in notazione di Voigt:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & & & \\ \nu/E & 1/E & -\nu/E & & & \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & & & \\ & & & 1/2\mu & & \\ & & & & 1/2\mu & \\ & & & & & 1/2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$$

\underline{S}
(materiale isotropo)

Elast. $\epsilon_{ij} \Rightarrow DSV$
 con $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, detta prima costante di Lamè / modulo di taglio / modulo di elasticità tangenziale.

La notazione a fianco mostra la dipendenza tra le 3 componenti assiali di deformazione e le tre componenti normali di tensione e tra le tre componenti di scorrimento angolare e le tre componenti tangenziali di tensione. Ad esempio:

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$$

dipende da tutte e tre le componenti normali di tensione

$$\epsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}$$

dipende unicamente dalla componente angolare di tensione tangenziale.

Riscriviamo la determinazione in esplicito di ϵ_{11} aggiungendo e sottraendo $(\nu/E)\sigma_{11}$, in maniera tale da poter giungere ad una forma più generale:

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} + \frac{\nu}{E} \sigma_{11} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}})$$

$\frac{\sigma_{11}(1+\nu)}{E} = \frac{\sigma_{11}}{2\mu}$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Ne segue che, in generale, $\epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\tau}}) \delta_{ij}$; in forma tensoriale, $\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{\tau}} - \frac{\nu}{E} (\text{tr}(\underline{\underline{\tau}})) \underline{\underline{I}}$

Sapendo che $\underline{\underline{\tau}} = \underline{C} : \underline{\underline{\epsilon}}$, con $\underline{C} = \underline{S}^{-1}$, in notazione di Voigt si ha che:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & 2\mu + \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda & 2\mu + \lambda & & & \\ & & & 2\mu & & \\ & & & & 2\mu & \\ & & & & & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$$

con $\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$, detta seconda costante di Lamè.

μ è detta anche modulo di taglio perché instaura una relazione diretta tra gli scorrimenti angolari e le componenti di tensione tangenziali.

normali e tangenziali di tensione:

$$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda)\epsilon_{11} + \lambda(\epsilon_{22} + \epsilon_{33}) = 2\mu\epsilon_{11} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})$$

$$\sigma_{23} = 2\mu\epsilon_{23}$$

in generale, $\sigma_{ij} = 2\mu\epsilon_{ij} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \delta_{ij}$
 in forma tensoriale, $\underline{\underline{\tau}} = 2\mu\underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}}$

Le scritture appena esplicitate rispettano sia la simmetria minore (6 componenti) che la simmetria maggiore (matrici \underline{C} , \underline{S} simmetriche), occorre però garantire che \underline{C} ed \underline{S} siano entrambi definiti positivi. Per farlo, si stenta un criterio secondo cui una qualsiasi matrice quadrata simmetrica è definita positiva se i suoi minori principali (sulla diagonale principale) in ordine crescente (in questo caso da 1 a 6) sono tutti > 0 .

ord. 1: $|a_{11}| = 1/E > 0 \Leftrightarrow E > 0$ coincide con ciò che accade nel caso degenero di tensione non assiale, è l'unico elemento $\neq 0 \Rightarrow \sigma_{11} = E\epsilon_{11}$ è una forma cui è sempre possibile ricorrendo se si ha tensione lungo un'unica direzione

ord. 2: $\begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow -1 < \nu < 1$ primo limite sul coefficiente di Poisson: impone che \underline{C} sia definito positivo implica dei limiti sui valori delle costanti elastiche

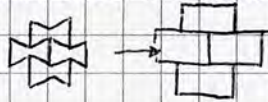
ord. 3: $\begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow -1 < \nu < 1/2$ dai limiti su modulo di Young e coefficiente di Poisson si determinano analoghe limitazioni su μ e λ (anch'essi misurati in Pascal).

Si determinano dunque diverse condizioni al variare di ν .

$0 < \nu < 1/2$: $\epsilon_t = -\nu \epsilon \Rightarrow \epsilon > 0 \Leftrightarrow \epsilon_t < 0$ materiali convenzionali

$-1 < \nu < 0$: $\epsilon > 0 \Leftrightarrow \epsilon_t > 0$ materiali auxetici, in generale non esistenti in natura, ottenuti attraverso microstrutture chirali o rientranti; come ad esempio strutture a papillon:

$\nu = 0 \Rightarrow \epsilon_t = 0 \forall \epsilon$



$\nu \rightarrow 1/2$: materiali incompressibili, in cui $V = \text{cost.}$ (ad esempio, le gomme). Infatti:

$\epsilon_t = -\frac{1}{2} \epsilon \Rightarrow \nabla \cdot \underline{\underline{E}} = 0, C = \nabla \cdot \underline{\underline{u}} = \text{tr}(\underline{\underline{E}}) = 0$
 ΔV dell'elemento infinitesimo

Dimostrazione: $C = \text{tr}(\underline{\underline{E}}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = \frac{L \text{Cost}}{E L I} \frac{1}{2\mu} (\text{tr} \underline{\underline{T}}) - \frac{3\nu}{E} (\text{tr} \underline{\underline{T}}) = \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{3\nu}{E} \right) \text{tr} \underline{\underline{T}} =$
esplicitiamo μ

$= \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{T}})$

Per il legame costitutivo elastico lineare isotropo, $E_{ij} = \frac{G_{ij}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{T}})$

Se $\nu \rightarrow 1/2$, $(1-2\nu) \rightarrow 0 \forall \underline{\underline{T}}$; essendo $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{E}})$ si ha che $\forall \underline{\underline{E}}, C \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nu \rightarrow 1/2$

Si definisce $\frac{3(1-2\nu)}{E} = \frac{1}{k}$: $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di comprimibilità/di Buck

il modulo di Buck è una costante avente significato autonomo, tale che:

$C = \frac{1}{K} \left(\frac{\text{tr} \underline{\underline{T}}}{3} \right)$

$\rightarrow p$ (pressione idrostatica), identico stato tensionale puramente normale rispetto ai 3 assi.

$\underline{\underline{T}}^H = p \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$

In generale, $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^H + \underline{\underline{T}}^D$

parte idrostatica

parte deviatorica

$\text{tr}(\underline{\underline{T}}^D) = 0$

$\text{tr}(\underline{\underline{T}}^H) = \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} p = \frac{\text{tr} \underline{\underline{T}}}{3}$

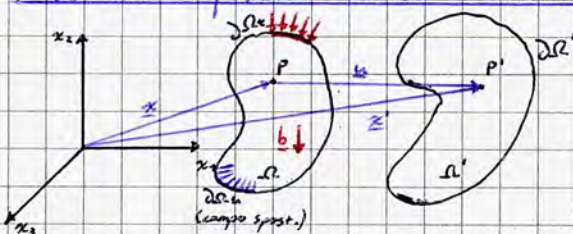
Ne segue che $p = KC$

Nel caso di materiali incompressibili, $C = 0$ indipendentemente dal valore assunto da p ; ne segue che se $\nu \rightarrow 1/2$, $K \rightarrow \infty$: dal punto di vista fisico servirebbe una pressione infinita per registrare una deformazione volumetrica del materiale.

Può essere interessante sostituire, nella formula del parente $\phi = \frac{1}{2} \underline{\underline{I}} \cdot \underline{\underline{E}}$, $\underline{\underline{I}} = 2\mu \underline{\underline{E}}$.

Problema di equilibrio elastico - Teoremi di Betti e di Clayperon

equazioni di Navier - Cauchy



$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{\underline{u}})^T + (\nabla \otimes \underline{\underline{u}})] = \text{sym} [(\nabla \otimes \underline{\underline{u}})^T] \quad \forall P \in \Omega$
grad u
 equazione di congruenza
 in forma indiciale, $E_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
 Con $\underline{\underline{u}} \equiv \underline{\underline{u}}_0$ su $\partial \Omega_D$
 ($\underline{\underline{E}} = \text{grad } \underline{\underline{u}}$)

$[\underline{\underline{T}}] = \sigma_{ij} \Rightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$ equilibrio alla rotazione del volume elementare $\equiv \equiv \equiv$ $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ indiciale

$\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{b}} = 0 \quad \forall P \in \Omega$ equazione di campo del problema di equilibrio

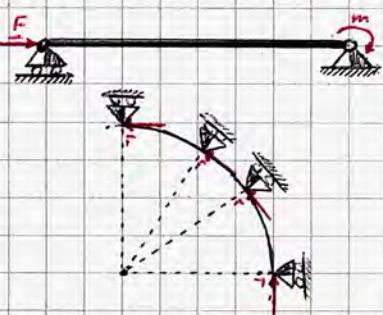
$\text{div } \underline{\underline{T}} = \text{div } \underline{\underline{T}}$

$\underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{t}} \quad \text{su } \partial \Omega_N = \partial \Omega - \partial \Omega_D$

normale uscente alla frontiera \rightarrow trazioni

equazioni di equilibrio
 (interno + contorno)

In un solido trave sembrerebbe possibile contraddire l'ultima condizione in quanto è possibile applicare carichi in porzioni della frontiera appartenenti a $\partial\Omega_u$; per dualità è però possibile applicare sforzi effettivi solo nelle direzioni ortogonali a quanto concesso dal vincolo; se il carico non interferisce con le condizioni di vincolo si può conoscere sia la statica che la cinematica dell'elemento.



Ne segue che la frontiera può essere sia caricata che vincolata, posto che non sia caricata nella direzione dei vincoli; detta semplificazione è necessaria per la risoluzione in generale del solido trave, altrimenti occorre effettuare le dovute precisazioni.

Legame Costitutivo Elastico Lineare:

condizioni sulla notazione di Voigt
 C definita positiva e con simmetria maggiore e minore

$$\underline{T} = \underline{C} : \underline{E} \stackrel{\text{indiale}}{=} \sigma_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

matrice di rigidità, in notazione di Voigt è 6×6 approfittando della reale indipendenza delle variabili.

legame costitutivo

$E_{acc} \approx 200 \text{ GPa}$
$E_{acc} \approx 200 \text{ GPa}$
$\nu_{acc} \approx 0,15 - 0,20$
$\nu_{acc} \approx 0,3$

Sollecitazioni compatibili con le condizioni alla pagina precedente.

Se isotropo, si ha inoltre che: $\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \epsilon_{kk} \stackrel{\text{tr } \underline{E}}{=} \underline{T} = 2\mu \underline{E} + \lambda (\text{tr } \underline{E}) \underline{I}$

Stress del campo di spostamento

$\sigma_{11} = 2\mu \epsilon_{11} + \lambda \text{tr } \underline{E}$
 $\sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12}$

I due coefficienti di Lamé sono legati ad E, ν tramite le relazioni: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$

con $E > 0$, $-1 < \nu < 1/2$

$E = \text{sym}(P_{ijkl})$ CONSERVATIVA
 $\nu = \frac{b}{2} \frac{\nabla \cdot \underline{u}}{\text{tr } \underline{\epsilon}}$ EQUILIBRIO
 $\underline{T} = \underline{C} \underline{E}$ LCEL

Il problema di equilibrio elastico consiste nel mettere a sistema i tre set di equazioni studiati in precedenza e appena richiamati:

$$\underline{\nabla} \underline{T} + \underline{b} = \underline{0} \xrightarrow[\text{L.C.E.L.I.}]{\text{introducendo il}} \underline{\nabla} \cdot [2\mu \underline{E} + \lambda (\text{tr } \underline{E}) \underline{I}] + \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\nabla} \cdot \{ 2\mu [\frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{u}) + (\nabla \otimes \underline{u})^T]] + \lambda (\nabla \cdot \underline{u}) \underline{I} \} + \underline{b} = \underline{0}$$

CONSERVATIVA
 $\text{div } \underline{u} = \nabla \cdot \underline{u} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$
 $\text{div } \underline{u}$

$$= \dots = \mu \Delta \underline{u} + (1 + \mu) \nabla (\nabla \cdot \underline{u}) + \underline{b} = \underline{0}$$

Laplaciano di \underline{u} (∇^2)
 gradiente della divergenza di \underline{u}

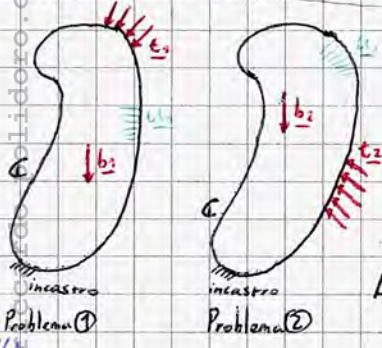
Da cui è possibile ricavare un campo di spostamento che risolve il problema; analogamente alla relazione $EAu'' = p$ nel regime monoassiale ($u'' = \text{derivata seconda dello spostamento}$, $p = \text{forze di volume}$) si ottengono 3 equazioni scalari nelle incognite u_1, u_2, u_3 .

⚠ Teorema di unicità delle soluzioni del problema di equilibrio elastico (dovuto a Kirchhoff): di semplice dimostrazione, che però risulta dagli scopi di questo corso in quanto la modellazione fisica non ha seguito di pari passo la schematizzazione matematica, sottolinea come il sistema sia a coefficienti costanti (se il materiale non è omogeneo, bisogna considerare la derivabilità di μ dall'inizio: come nel caso di $(EAu'')' = p$, se E ed A sono costanti escono dalla derivata, altrimenti restano in $\nabla \cdot [\dots]$), in particolare essendo il materiale omogeneo e isotropo si tratta di un problema di equazioni differenziali con derivate parziali, a coefficienti costanti e lineare (i termini sono sempre alla prima potenza).

Di più complessa trattazione è il teorema di esistenza.

Con le equazioni di Mitchell-Beltrami è possibile risolvere il problema di equilibrio elastico nelle σ_{ij} invece che in \underline{u}

Particolarmente interessanti, oltre che utili nelle applicazioni, sono i due Teoremi di Betti (Teoremi di reciprocità), che con un'elegante trattazione parte dal teorema dei lavori virtuali per dimostrarne la reciprocità. Dimostreremo i teoremi al caso più generale di due continui di Cauchy; principale forza della trattazione è che non serve un esplicito legame tra tensioni e deformazioni.



Consideriamo due solidi continui identici caratterizzati dal legame costitutivo elastico lineare (il materiale non è necessariamente omogeneo né isotropo).

Applicando il teorema dei lavori virtuali ai due solidi, è possibile ricavare i campi di spostamento che rispondono alle specifiche condizioni di carico dei due problemi.

Lavoro Esterno = $L_{1 \rightarrow 2}^e = \int_{\Omega_1} \underline{t}_1 \cdot \underline{u}_2 \, dS + \int_{\Omega_1} \underline{b}_1 \cdot \underline{u}_2 \, dV$ per il teorema dei lavori virtuali, $L_{1 \rightarrow 2}^e = L_{2 \rightarrow 1}^e$

utilizzano gli spostamenti del problema 2 come virtuali nella configurazione 1

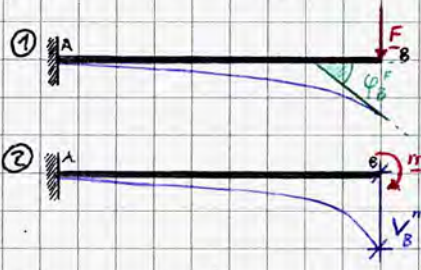
$$L_{1 \rightarrow 2} = \int_{\Omega} \underline{T}_1 \cdot \underline{E}_2 dV \xrightarrow{\text{LCEL}} \int_{\Omega} \underline{C} : \underline{E}_1 \cdot \underline{E}_2 dV \xrightarrow{\text{simmetria degli operatori}} \int_{\Omega} \underline{C} : \underline{E}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = \int_{\Omega} \underline{T}_2 \cdot \underline{E}_1 dV = L_{2 \rightarrow 1}$$

Applicando il teorema dei lavori virtuali,

$$L_{2 \rightarrow 1}^i = L_{2 \rightarrow 1}^e = \int_{\partial\Omega_2} \underline{t}_2 \cdot \underline{u}_1 ds + \int_{\Omega_2} \underline{b}_2 \cdot \underline{u}_1 dV$$

Ne segue che il teorema di Betti, sfruttando il TLV e l'elasticità lineare permette di affermare con ipotesi molto generiche che $L_{1 \rightarrow 2} = L_{2 \rightarrow 1}$.

Il risultato è particolarmente elegante ed utile, come intuibile dall'esempio di seguito (in cui il teorema viene applicato ad una trave):



per il teorema di Betti, $L_{1 \rightarrow 2} = L_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow \underline{F} v_B^m = m \phi_B^F$

essendo sia F che m sollecitazioni applicate, e dunque note, è possibile ottenere banalmente che $F m = \phi v$.

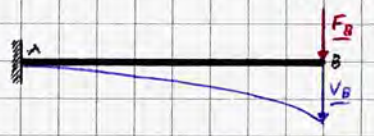
Se però uno dei due schemi è già completamente noto, ad esempio uno schema notevole, il teorema permette di risolvere lo schema restante con estrema rapidità e semplicità.

Ad esempio, sapendo che $v_B^m = \frac{m L^2}{2EI}$, $\phi_B^F = \frac{F}{m} v_B^m = \frac{F}{m} \frac{m L^2}{2EI} = \frac{F L^2}{2EI}$ rotazione nota senza dover risolvere l'equilibrio elastico dello schema (2).

Oltre ad un'estrema velocizzazione computazionale basata sul PLV nella risoluzione di schemi statici, il teorema di Betti è alla base dello studio delle linee d'influenza, utilizzate nell'analisi dell'effetto di carichi viaggianti su determinate strutture (come schematizzazioni di viadotti), permettendo di individuare e verificare le sezioni critiche e delineare strategie per risolvere le sezioni più sollecitate in funzione dei carichi viaggianti.

MMMMM... TLV + $\phi \Rightarrow U = \frac{1}{2} L_{ext} \text{ per } U = L_{int} \text{ se } F \text{ conservativo}$

Teorema di Clapeyron: sfruttando il TLV permette di affermare che il lavoro compiuto da un sistema di forze conservative sul sistema di spostamenti corrispondente è pari a metà del lavoro esterno compiuto dalle stesse forze nel campo di spostamenti (dipende ancora dall'elasticità):



$$L^{ext} = \underline{F} \cdot \underline{v}_B$$

$$d\phi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} \stackrel{\text{LCEL}}{=} \frac{1}{\sigma_{ij}} C_{ijkl} E_{kl} \cdot d\epsilon_{ij}$$

$$\phi = \int_0^{\epsilon_{ij}^{\text{max}}}$$

→ valore massimo ammissibile di ϵ_{ij}

$$\phi = \int_0^{\epsilon_{ij}^{\text{max}}} \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \int_0^{\epsilon_{ij}^{\text{max}}} C_{ijkl} E_{kl} d\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} [C_{ijkl} E_{kl} \epsilon_{ij}]_0^{\epsilon_{ij}^{\text{max}}} = \frac{1}{2} [\sigma_{ij} \epsilon_{ij}]_0^{\epsilon_{ij}^{\text{max}}}$$

→ come la legge di Hooke $k \cdot x \cdot dx$

Energia elastica del sistema: $U = \int_{\Omega} \phi dV = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \stackrel{\text{TLV}}{=} \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u} dV + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} ds \right]$

→ sempre considerabili virtuali

Lavoro esterno effettivo

Ne segue che l'energia interna del sistema è pari a metà del lavoro virtuale esterno $\Rightarrow U = \frac{1}{2} \underline{F} \cdot \underline{v}_B = \frac{1}{2} L$

Il teorema viene spesso applicato per conoscere la quota di energia dissipata in un sistema dissipativo:

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K$$

○ sistema conservativo

Wnc sistema con dissipazione

Se non si applicasse il teorema, occorrerebbe procedere come di seguito:

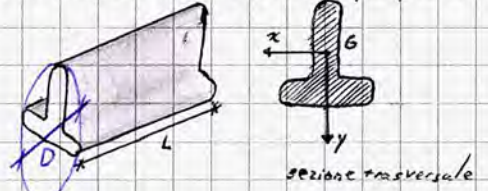
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L M \chi dz = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dz \stackrel{\text{in questo esempio}}{=} \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(-FL + Fz)^2}{EI} dz = \dots = \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

(calcolato direttamente col teorema)

Teoria del de Saint Venant

Con gli studi effettuati fino ad ora non è stato mai possibile controntarsi con il dimensionamento di una struttura (pur potendo ricavare le σ).

La teoria introdotta di seguito lavoro, come intuibile, nelle ipotesi del solido trave, ovvero l'ipotesi geometrica $D/L \ll 1$ associata alla concezione di trave come un solido prismatico retto (con eventuali modeste variazioni di sezione retta lungo l'asse z , oltre che eventualmente di curvatura geometrica - non di carico - entrambe ordinariamente assunte nulle).



Si consideri un riferimento $\{x, y, z\}$ principale d'inerzia, ovvero tale per cui il tensore d'inerzia presenta inerzie centrifughe nulle ($I_{xy} = I_{yz} = 0$):

$$J_{\{x,y,z\}} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad I_x = \int_A y^2 dA ; \quad I_y = \int_A x^2 dA ; \quad I_{xy} = \int_A xy dA$$

$$\frac{I_x}{I_y} > 0 ; \quad [I] L^4$$

Un sistema di riferimento principale d'inerzia è univocamente definito se la sezione trasversale del solido trave presenta almeno un asse di simmetria: detto asse è logicamente baricentrico, ed è un asse principale; l'altro asse coinciderà con la retta orientata ortogonale all'asse suddetto e passante per il baricentro. Se non sono presenti assi di simmetria, la determinazione di un riferimento principale si traduce in un problema di autovalori e autovettori.

Tipicamente, i valori delle inerzie delle sezioni di trave più utilizzate nelle applicazioni pratiche sono tabellati (soprattutto per profilati rispondenti a specifiche norme).

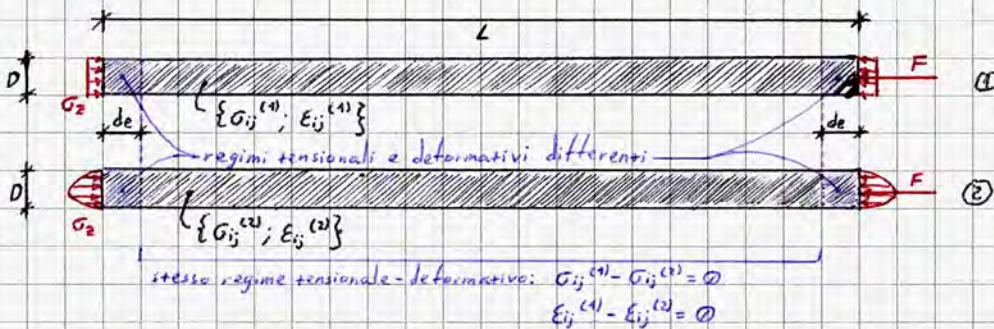
La teoria del Saint Venant opera sotto le seguenti ipotesi:

- Geometrica: $D/L \ll 1$

- Carichi: consideriamo la frontiera della trave, suddivisa in
 - basi estreme: ci sono carichi applicati
 - mantello (frontiera laterale): scarico

le forze volumetriche sono anch'esse scariche (ipotesi dimostrata dal fatto che il peso proprio della struttura, così come per carichi ripartiti di vario genere, sono di norma trascurabili rispetto alle entità di altri carichi agenti).

(Ex) Postulato di Saint Venant: ad una certa distanza dalle basi estreme (uniche aree in cui sono applicati i carichi), controntabile con il diametro caratteristico della sezione ($d \sim D$) e detta distanza di estinzione, gli stati tensionali e deformativi dipenderanno unicamente dalle risultanti e dai momenti risultanti applicati alle basi, a prescindere dalla distribuzione degli sforzi (tractions).



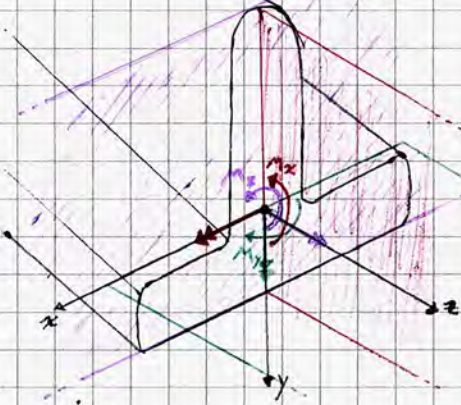
- Ipotesi di carattere costitutivo:
 - cinematiche: assenza di vincoli (interessa le sezioni non estreme, è però equivalente: cambia la strategia risolutiva)
 - costitutiva: il materiale è omogeneo e ha comportamento elastico lineare isotropo

- Ipotesi sullo stato tensionale: lo stato tensionale è piano.

$$\underline{I} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underline{I}^T \Rightarrow \det \underline{I} = 0 \Rightarrow \text{esiste almeno una direzione rispetto alla quale è possibile costruire il piano normale ad essa nel quale si sviluppano tutte le tensioni.}$$

In particolare, $\tau_{xz} = \tau_{zx}(x,y)$
 $\tau_{yz} = \tau_{zy}(x,y)$
 $\sigma_z = (a + bx + cy)z + a_1 + b_1x + c_1y$ forma lineare in x, y, z } nascono dalle equazioni di equilibrio e le equazioni di compatibilità, come meglio intuibile (in esplicito) di seguito:

$$\text{div } \underline{T} - \underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = f(x,y) \text{ (non dipende da } z) \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \tau_{zy} = f(x,y) \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - b = 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = b \Rightarrow \sigma_z \text{ ha andamento lineare} \end{cases}$$

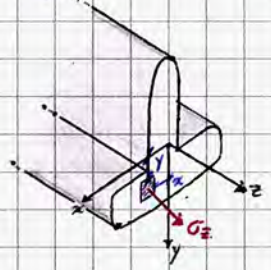


I tre momenti (M_x, M_y, M_z) per essere positivi devono avere il proprio vettore (avente direzione parallela all'asse cui si riferisce nell'indicazione del momento) concorde con l'asse corrispondente del riferimento.

Nelle condizioni al contorno non si considererà il mantello in quanto è scarico per ipotesi!

Di questi tre momenti, M_x ed M_y sono momenti flettenti, mentre M_z è detto momento torcente, e agisce nel piano della sezione trasversale retta della trave.

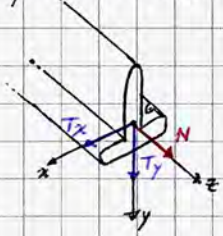
Per quanto riguarda le ^{altre} caratteristiche della sollecitazione, nel riferimento tri-dimensionale saranno presenti due componenti indipendenti di taglio (τ_x, τ_y) ed un'unica componente di sforzo normale N :



$$N = \int_A \sigma_z dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_z dA y$$

$$M_y = - \int_A \sigma_z x dA$$



Si osserva dunque che le σ_z producono momento anche nella direzione ortogonale al momento flettente "tradizionale"; pur nel rispetto della convenzione positiva inoltre si osserva che la σ_z produce un

momento $M_y < 0$:

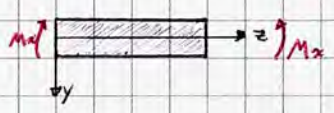
Ipotezzando che la σ_z abbia espressione lineare, del tipo $\sigma_z = (a + bx + cy)z + a_1 + b_1x + c_1y$,



$$N = \int_A a_1 + b_1x + c_1y dA = a_1 A + b_1 S_y + c_1 S_x = a_1 A \Rightarrow a_1 = \frac{N}{A} \text{ (in un riferimento bari-centrico, } S_x = S_y = 0)$$

Ne segue che $\sigma_z = \frac{N}{A}$, è dovuta unicamente allo sforzo normale. Detta espressione coincide con la formula standard per distribuzioni uniformi.

Analogamente,

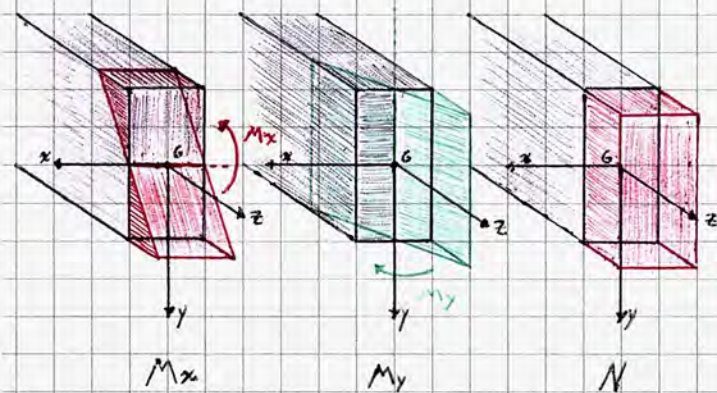


$$M_x = \int_A y \sigma_z dA = \int_A a_1 y + b_1 xy + c_1 y^2 dA = a_1 S_y + b_1 I_{xy} + c_1 I_x \Rightarrow c_1 = \frac{I_x}{M_x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \text{ formula di Navier (componente dovuta al solo } M_x)$$

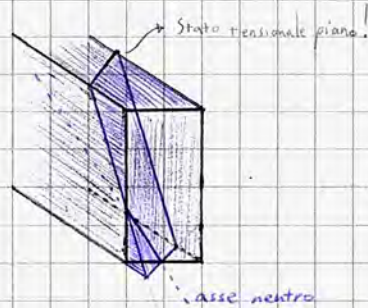
Dualmente, $M_y = - \int_A \sigma_z x dA \Rightarrow \dots \Rightarrow b_1 = - \frac{M_y}{I_y} \Rightarrow \sigma_z = - \frac{M_y}{I_y} x$ formula di Navier specializzata a un momento agente su y .

Si osserva che le distribuzioni degli sforzi dovute al momento variano linearmente con la variabile, portando a configurazioni a farfalla come negli esempi di seguito:



Più in generale, si determina una distribuzione piana con asse neutro:

Non si sa necessariamente la trave, dunque non è detto che parzializzi la sezione retta in esame.



La formula più generale per descrivere la distribuzione degli sforzi σ_z in una determinata sezione trasversale retta è dunque:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x \quad \text{formula di presso [tenso] flessione deviate}$$

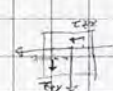
La formula è detta deviate poiché sono presenti entrambi i contenuti x ed y del momento; se uno di detti contributi è nullo si ottiene la formula di presso [tenso] flessione retta.

Le tensioni τ offrono contributo nullo a sforzo normale, M_x ed M_y .

Osservazione: $T_x = \int_A \tau_{xz} dA$; $T_y = \int_A \tau_{yz} dA$; $M_z = \int_A (\tau_{xy} x - \tau_{yx} y) dA$

TORCENTE

dM_z in funzione delle tensioni tangenziali



Non è possibile ricavare formule più esplicite: a differenza di σ_z non è possibile determinare un'effettiva e universale dipendenza da x e y : il problema dipende dalla specifica geometria della sezione retta, e richiede una trattazione approssimata per la risoluzione.

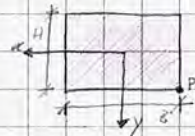
Avendo ricavato esplicitamente le caratteristiche della sollecitazione avvalendosi della teoria della trave, si ricavano le tensioni corrispondenti per poi confrontare i valori ottenuti con determinati valori limite ricavati dal diagramma sforzo-deformazione del materiale che si ipotizza di utilizzare nel progetto.

Uno dei valori di riferimento in questo senso è lo yield stress (σ_Y), solitamente nell'ordine di 10^3 E (modulo di Young) nei materiali poco deformabili come ClS, acciaio, legno.

Una volta individuata l'espressione delle sollecitazioni nella sezione retta, si individua il punto più sollecitato e la corrispondente $|\sigma_z| = |\sigma_z \max|$, da confrontare con i valori limite.

In una sezione rettangolare di base b e altezza h avente momenti positivi,

$$\sigma_z \max = \frac{N}{bh} + \frac{M_x}{\frac{bh^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{M_y}{\frac{b^3h}{12}} \left(\frac{b}{2}\right) = \sigma_z(P)$$



Da cui si verifica che $|\sigma_z(P)| \leq \frac{\sigma_Y}{s}$

s → coefficiente di sicurezza, sempre > 1 : evita di permettere lo svilupparsi di tensioni troppo prossime al valore limite, tenendo conto di eventuali imperfezioni nel materiale: il ClS gettato in opera ha infatti $s \approx 3$ per la sua elevata artigianalità e la conseguente incertezza sulla resistenza effettiva.

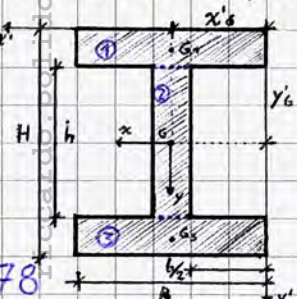
Nel caso di verifiche strutturali, tutti i dati sono noti. In un progetto, viceversa, si determina una variabile in funzione degli altri dati, fissati.

Tenso- e pressoflessione deviate

Iniziamo con una ricapitolazione di geometria delle masse:

$$I_x = \int_A r^2 dA \quad I_x = \int_A y^2 dA$$

$$S_x = A \cdot d_x$$



Determinazione del baricentro $G \equiv (x'_G = S'_1/A, y'_G = S'_x/A)$

Il calcolo dell'area può essere effettuato per pezzi: $A = A_1 + A_2 + A_3 = 2B \left(\frac{H-h}{2}\right) + (B-b)(H-h) =$
 $= B(H-h) + (B-b)(H-h) = (H-h)(2B-b) = BH - Bh + B_h - bh = BH - bh$

Calcoliamo le coordinate del baricentro, trascurando considerazioni di simmetria.

Metodo dei baricentri

$$y'_G = \frac{S'_x}{A} = \frac{A_1 y'_{G1} + A_2 y'_{G2} + A_3 y'_{G3}}{A} = \frac{B \left(\frac{H-h}{2}\right) \left(\frac{H-h}{4}\right) + (B-b)(H-h) \frac{H}{2} + B \left(\frac{H-h}{2}\right) \left(H - \frac{H-h}{4}\right)}{BH - bh} = \dots = \frac{H}{2}$$

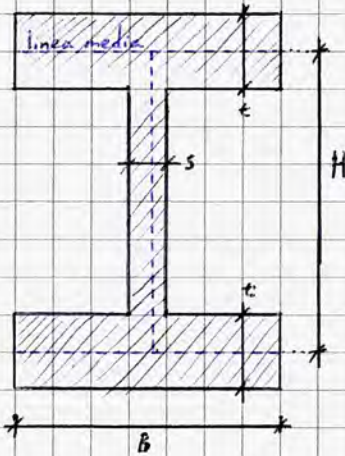
analogamente, $x'_G = \frac{B}{2}$

Considerando il riferimento principale baricentrico, per il teorema del trasporto si ha che:

$$I_x = (I_{x_{0,1}} + A_1 \cdot y_{G1G}^2) + (I_{x_{0,2}} + A_2 \cdot y_{G2G}^2) + (I_{x_{0,3}} + A_3 \cdot y_{G3G}^2) = \left[\frac{B}{12} \left(\frac{H-h}{2}\right)^3 + \frac{B(H-h)}{2} \cdot \left(H - \frac{H-h}{4}\right)^2 \right] + \left[\frac{(B-b)h^3}{12} + 0 \right] + \left[\frac{B}{12} \left(\frac{H-h}{2}\right)^3 + \frac{B(H-h)}{2} \left(H - \frac{H-h}{4}\right)^2 \right] = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12} + 2 \left[h \left(\frac{b}{2}\right)^3 + (b-h) \frac{b}{2} \left(\frac{B-b}{2}\right)^2 \right]$$

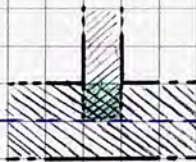
analogamente, $I_y = \dots = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12}$

Sezioni con parete sottile



Sono sezioni tali per cui $t/B \ll 1$; $s/B \ll 1$ (con $B < H$ per ipotesi), condizioni che permettono di semplificare le formule ottenute in precedenza. Nei casi applicativi, come i profilati IPE, HE etc, si ha solitamente che $t > s$, in rapporti pari a circa $3/2 \rightarrow 2$.

La semplificazione sta nel considerare una quota d'area infinitesimalmente maggiore (dunque trascurabile) per semplificare i termini $\frac{H-h}{2}$, come in figura:
 \rightarrow perché $H=h$



Con questa schematizzazione si ha infatti che:

$$I_x = 2 \left[\frac{Bt^3}{12} + Bt \left(\frac{H}{2}\right)^2 \right] + sH^3 = \frac{Bt^3}{6} + \frac{BtH^2}{2} + \frac{sH^3}{12} \Rightarrow I_x \approx \frac{BtH^2}{2} + \frac{sH^3}{12}$$

trascurabile ($t^3 \rightarrow 0$)
 $\ll \min\{B, H\}$

Analogamente, $I_y = \frac{2tB^3}{12} + \frac{Hs^3}{12} \approx \frac{tB^3}{6}$

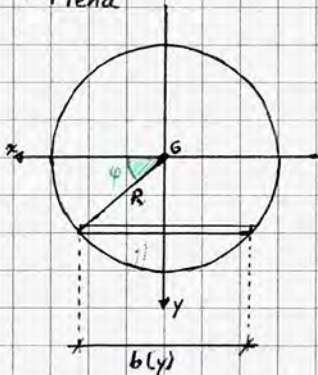
$A = 2Bt + sH$

$$I_x = \frac{tBH^2}{2} + \frac{sH^3}{12}$$

$$I_y = \frac{tB^3}{6}$$

Sezioni circolari (o loro porzioni)

• Piena



applicando la definizione, $I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-R}^R y^2 b(y) dy \Rightarrow$ attraverso la trasformazione in coordinate polari, si ha che:

$$\Rightarrow I_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \sin^2 \varphi \cdot 2R \cos \varphi \cdot R \cos \varphi d\varphi = 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi$$

$\rightarrow b(y)$ è la base, variabile su tutta la h della sezione, di un rettangolo infinitesimo

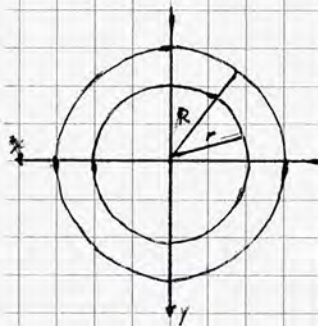
Ponendo $2\varphi = d$, $\Rightarrow I_x = \frac{R^4}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{4} \sin^2 d dd = \frac{R^4}{4} \left[-\cos d \sin d - \int -\cos d \cos d dd \right] = \frac{R^4}{4} \left[-\cos d \sin d + \int \cos d \cos d dd \right]$

$$= \frac{R^4}{4} \left[-\sin d \cos d - \int \sin^2 d dd \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{R^4}{4} \left[\frac{-\sin d \cos d + d}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{R^4}{8} (2\pi) = \frac{R^4 \pi}{4}$$

Trasformazione in coordinate polari: $y = R \sin \varphi$; $x = R \cos \varphi$

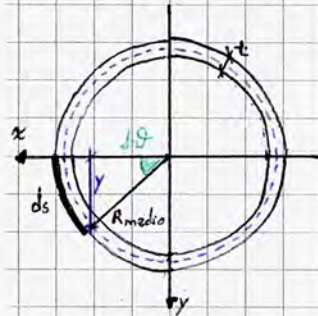
$dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = R \cos \varphi d\varphi$; $dx = \frac{\partial x}{\partial \varphi} d\varphi = -R \sin \varphi d\varphi$; $b(y) \rightarrow b(\varphi) = 2R \cos \varphi$

• Cava: si struttura il teorema del trasporto



$$I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$$

• Cava a parete sottile: sono sezioni tali per cui $t/R_{medio} \ll 1$. Si ha che:



$$ds = R_{medio} d\theta \Rightarrow dA = t ds = t R_{medio} d\theta$$

$$y = R_{medio} \sin \theta \Rightarrow I_x = \int \frac{R_{medio}^2 \sin^2 \theta}{y^2} \cdot \frac{t R_{medio} d\theta}{dA} = t R_{medio}^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta =$$

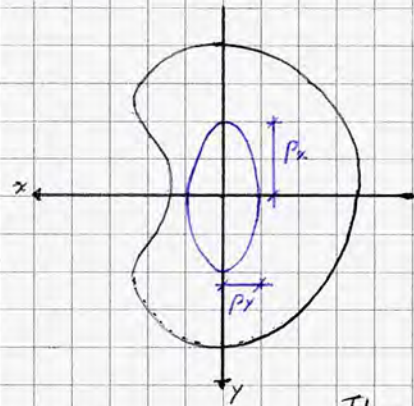
$$= t R_{medio}^3 \pi \quad I = t R_{medio}^3 = t \pi R_{medio}^3$$

In geometrie di natura circolare, aventi infiniti assi di simmetria, spesso è più conveniente considerare l'inerzia polare, invariante e pari alla traccia del tensore d'inerzia:

$$I_G = I_x + I_y = \int_A r^2 dA$$

$r^2 = x^2 + y^2$

Ellisse e nocciolo d'inerzia



$$p_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; p_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

coincidenti con i semiasse dell'ellisse di inerzia, permettono di identificare l'asse neutro di una sezione retta, ovvero il luogo dei punti in cui il diagramma bilineare delle tensioni si annulla in una data combinazione di tenso- e pressoflessioni.

Esiste una relazione di polarità tra il centro di flessione [tensione] C e l'asse neutro, luogo geometrico sul piano della sezione retta della trave associato a valori nulli di σ_z ; ne segue che C coincide con il centro relativo dell'asse neutro C_m .

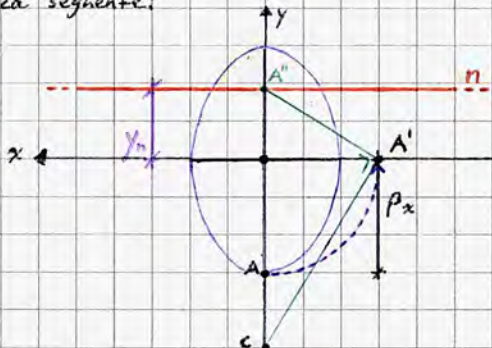
$$\text{In generale, } C \equiv \frac{M}{N}$$

Il rapporto M/N corrisponde all'eccentricità (ovvero la posizione rispetto all'asse centrale, nel grafico a fianco l'asse x) di M, tale per cui migrando N di una data distanza si ottiene una coppia equivalente.

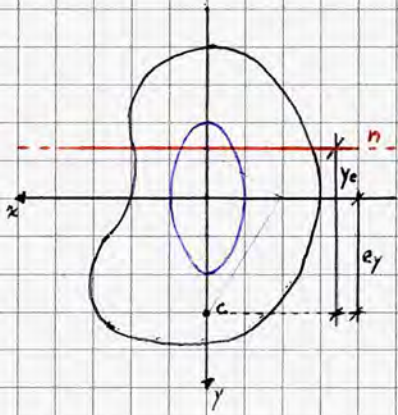
$$e_y = \frac{M_x}{N} ; e_x = \frac{M_y}{N}$$

coordinate di C

Una volta individuato C, antipolo della retta corrispondente all'asse neutro, si effettua la costruzione grafica seguente:



Considerando il centro di pressione sull'asse y, si ottiene inoltre che:



Asse neutro: $I_n = I_x + A y_n^2 = \int_{S_n} y_n^2 dA = \int_{S_n} y_n (y_n - y_n) dA \Rightarrow p_x^2 = y_n (y_n - y_n)$

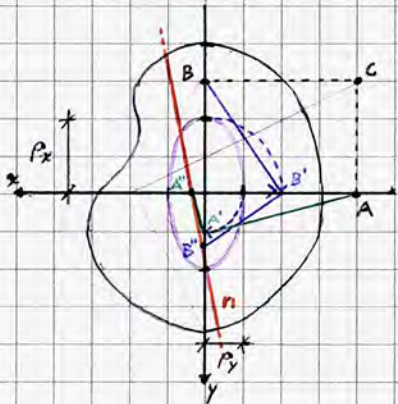
Annotations:
 - I_x : momento d'inerzia rispetto all'asse x
 - $A y_n^2$: teorema di Steiner
 - $\int_{S_n} y_n^2 dA$: momento statico rispetto all'asse n
 - $y_n (y_n - y_n)$: y_n è la distanza dal centro di massa C all'asse n, $(y_n - y_n)$ è la distanza dal punto (x, y) all'asse n.

La costruzione grafica non è che un'applicazione del Teorema di Euclide:

$y_n (y_n - y_n) = p_x^2$

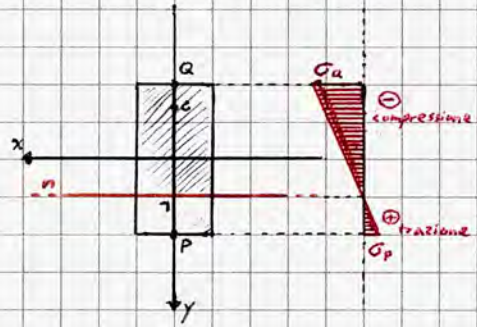
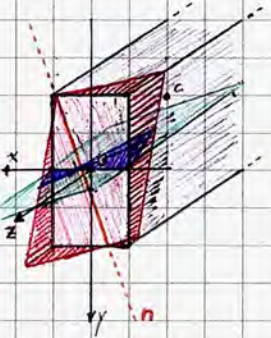
Annotations:
 - y_n : altezza relativa all'ipotenusa
 - $(y_n - y_n)$: (base) cateto 1 e_y
 - p_x : (base) cateto 2 (incognito)

Consideriamo ora il caso di un asse neutro genericamente inclinato rispetto agli assi principali: se il centro C (di pressione o trazione) appartiene all'asse y, l'asse neutro sarà parallelo all'asse x. Se C è centro di pressione, nella porzione di piano della sezione trasversale in cui esso è presente si verificano compressioni, mentre nell'area rimanente - separata dall'asse neutro - si verificano delle trazioni; se invece C è centro delle tensioni il diagramma logicamente si inverte. Come detto, il punto C può assumere posizione generica, anche fuori la sezione retta dell'elemento trave (eccentricità complessiva fuori sezione):



Si effettuano due costruzioni differenti, proiettando il punto C sugli assi principali (nei punti A e B), considerando fittiziamente detti punti come centri relativi, ribaltando il raggio d'inerzia corrispondente all'asse cui appartiene la proiezione ed effettuando la costruzione mostrata alla pagina precedente. L'asse neutro coinciderà con la retta passante per i due punti così individuati.

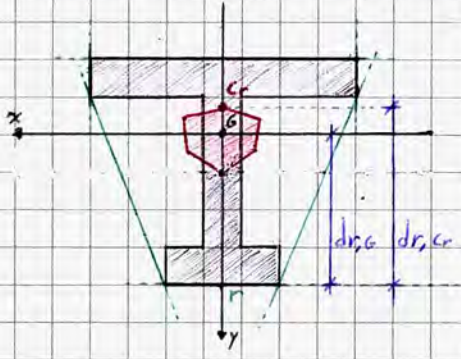
Di norma, l'identificazione dell'asse neutro consente di individuare facilmente un diagramma qualitativo tridimensionale delle tensioni; ribaltando detti diagrammi sul piano della sezione retta con un piano ortogonale all'asse neutro e al piano della sezione retta si ottiene una sezione del diagramma delle σ_z (tipicamente valutato in mezzetta) che, una volta ribaltato sul piano della sezione retta, permette uno studio grafico nel piano:



Per convenzione, nella soluzione grafica le linee entranti nella sezione corrispondono a sforzi σ_z di compressione, il viceversa per la trazione. Essendo la distribuzione delle σ_z tipicamente bilineare, si individua il punto più sollecitato della sezione (in uno degli estremi) per poi applicare un criterio di resistenza o effettuare analisi su altri parametri geometrici.

Il nocciolo d'inerzia, luogo geometrico che descrive un dominio piano convesso il cui bordo è ottenuto

dall'insieme dei centri relativi delle rette che involuppano la sezione retta della trave, ovvero che non intersecano alcun punto interno ad essa, svolge un importante ruolo nella pressa/tensot/lessione:



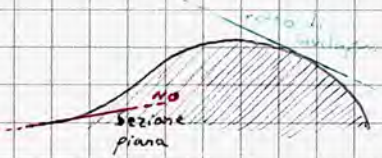
Si ricorda di seguito il calcolo del centro relativo di una generica retta r:

$I_r = \int_{S_r} d_{r,cr} = A \cdot d_{r,g} \cdot d_{r,cr} \Rightarrow d_{r,cr} = \frac{I_r}{A \cdot d_{r,g}} = \frac{I_{r0} + A(d_{r,g})^2}{A \cdot d_{r,g}}$

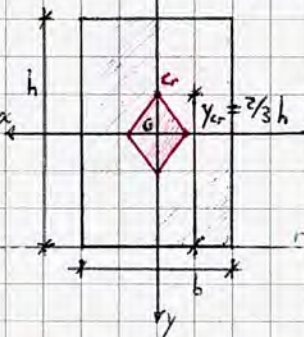
Annotations:
 - I_r : momento d'inerzia rispetto all'asse r (calcolato con Th. del trasporto)
 - $d_{r,g}$: distanza tra l'asse r e il centro di massa G
 - $d_{r,cr}$: distanza tra l'asse r e il centro di pressione/trazione C

La determinazione del nocciolo d'inerzia consente di studiare se l'asse neutro parzializza la sezione retta (ovvero se coesistono regioni soggette a compressione e aree interessate da trazione) senza calcolare esplicitamente l'asse neutro.

Poiché il nocciolo d'inerzia è di più facile e immediata determinazione, essendo tabulato per i principali profilati per applicazioni civili, e sapendo che il legame di polarità tra rette di involuppo e relativi antipoli e tra asse neutro e centro di pressione/trazione è lo stesso, conoscendo il funzionamento del legame di polarità si osserva che se C è interno al nocciolo, n sarà esterna alla sezione, la quale sarà interamente soggetta a sforzi di compressione/trazione, con diagramma delle σ interamente ≥ 0 .



Terzo Medio: come detto, se il centro di pressione è interno al nocciolo, la sezione sarà interamente compressa e non parzializzata. Detto vagliatamente vede la sua naturale applicazione nelle strutture in muratura, in cui si assume che il materiale abbia resistenza nulla a trazione. Considerando un ipotetico conio a sezione rettangolare, si ha che:



$$y_{cr} = \frac{I_x}{A \cdot h/2} = \frac{\frac{bh^3}{12} + bh(\frac{h^2}{4})}{bh(h/2)} = \frac{bh^3/3}{bh^3/2} = \frac{2}{3}h$$

Ciò avviene analogamente e simmetricamente per gli altri centri relativi; ne segue che le diagonali principali del rombo che costituisce il nocciolo d'inerzia hanno dimensioni di $b/3$ e $h/3$. Per questo motivo, per avere un regime tensionale non parzializzato nella sezione è sufficiente che il centro di pressione/trazione si trovi nel terzo medio, ovvero la porzione di $1/3$ della dimensione corrispondente complessiva situata al centro di essa.

⚠ Negli studi sull'analisi limite delle strutture - che si occupa dell'analisi del comportamento post-elastico, in particolare plastico, delle strutture e, ad esempio, le dinamiche che regolano l'evolversi delle configurazioni delle strutture nell'attivazione di fenomeni di collasso strutturale - sono particolarmente impiegati il Teorema Statico e il Teorema Cinematico.

Il primo afferma che, sotto determinate ipotesi, se in una qualsivoglia struttura è possibile costruire una distribuzione di carichi e sollecitazioni interne arbitraria ma tale da avere equilibrio tra le caratteristiche interne della sollecitazione e i carichi esterni applicati alla struttura stessa, se dalla verifica dell'equilibrio emerge che le tensioni limite non vengono superate in alcun punto, indipendentemente dall'elasticità del materiale si è certi che la struttura non collassa.

Attraverso queste due considerazioni è possibile individuare la spezzata di forze agenti in un arco a censi lapidei: tra tutte le combinazioni possibili che restituiscono l'azione risultante si seleziona quella le cui componenti rientrano nel terzo medio. Un analogo procedimento viene applicato nelle strutture in calcestruzzo.

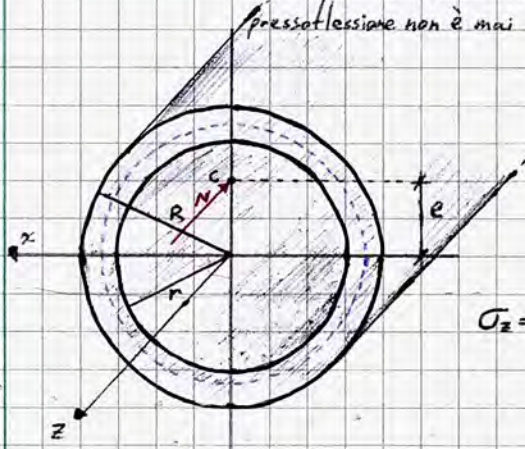


Esercizio

Si consideri un solido trave a sezione circolare cava (ne segue che, essendo ogni asse baricentrico anche principale, la pressoflessione non è mai deviata), tale per cui $r = dR$, $d \in [0, 1[$

$$I_x = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4}$$

In generale, esistono diversi possibili casi applicativi:



① Nota la posizione del centro C attraverso la sua eccentricità e la misura di R (ad esempio vincolata da ragioni architettoniche), assegnato lo sforzo normale N agente sulla sezione, valutiamo la distribuzione delle σ_z :

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{-F}{A} + \frac{F \cdot e}{\frac{I_x}{\pi(R^4 - r^4)}} y \Rightarrow \frac{(1-d^2)(1+d^2)}{\frac{\pi R^4 (1-d^4)}{4}}$$

↳ trasporto dello sforzo normale nella posizione baricentrica attraverso M che ristabilisce l'equilibrio, genera comunque momento nullo lungo y poiché lo sforzo N è applicato sull'asse y (come evidente dalla posizione di C)

$$A = \pi(R^2 - r^2) = \frac{\pi}{4} \pi R^2 (1-d^2)$$

$$\Rightarrow \sigma_z = \frac{-F}{\pi R^2 (1-d^2)} + \frac{F \cdot e \cdot y}{\frac{\pi R^4 (1-d^2)(1+d^2)}{4}} = \frac{F}{\pi R^2 (1-d^2)} \left(-1 + \frac{4 \cdot e \cdot y}{R^2 (1+d^2)} \right)$$

Ricerchiamo l'equazione dell'asse neutro:

$$\sigma_z = 0 \Leftrightarrow \frac{F}{\pi R^2 (1-d^2)} \left(-1 + \frac{4e}{R^2 (1+d^2)} y \right) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{R^2 (1+d^2)}{4e}$$

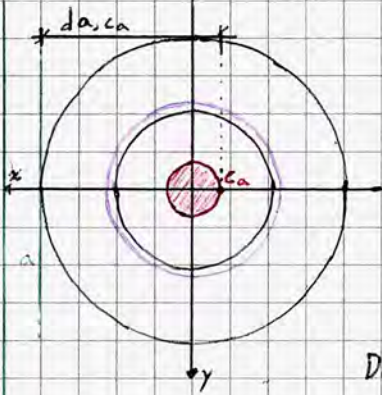
Ad esempio, considerando $d = 1/2$; $e = R/2$, $y = \frac{R^2 (1+1/4)}{4 \cdot R/2} = 5/8 R$

Dunque, nella sezione circolare cava avente raggio interno pari a metà raggio esterno e centro di pressione sulla circonferenza interna, si trova a $5/8 R$ dall'asse x.

Dal procedimento analitico è possibile operare una verifica grafica; Calcoliamo i raggi dell'ellisse d'inerzia:



$$p_x = p_y = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{\pi R^4 (1-d^2)(1+d^2)}{4}}{\pi R^2 (1-d^2)}} = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{1+d^2}{1-d^2}} \Rightarrow p_x \text{ è sempre } > \frac{R}{2} \text{ in sezioni simili!}$$



Determiniamo ora il nocciolo d'inerzia: note le rette di involuppo si applica la definizione, ricordando che:

$$I_a = S_a d_a^2 \quad \text{con} \quad d_a = \frac{I_a}{S_a} \quad \text{con} \quad I_a = \frac{\pi R^4 (1-d^2)(1+d^2)}{4} + \pi R^2 (1-d^2) \cdot R^2$$

$$\text{Dunque, } d_a c_a = \frac{R \left(\frac{1}{4} (1-d^2) + 1 \right)}{1} = R \left(\frac{5-d^2}{4} \right) = \frac{R}{4} (5-d^2)$$

$$\text{Da cui, } r_{\text{nocciolo}} = d_a c_a - \frac{4R}{4} = \frac{R}{4} (5-4-d^2) = \frac{R}{4} (1-d^2)$$

Ottenuti tutti i dati, è possibile effettuare una verifica di un'ipotesica struttura esistente: siamo certi che la σ_{\max} si verifichi nel punto $y = -R$; ne determiniamo il modulo e lo confrontiamo con un valore ammissibile:

$$|\sigma_{\max}| = \frac{F}{\pi R^2 (1-d^2)} \left[-4 - \frac{4e}{R(1+d^2)} \right] = \frac{F}{\pi R^2 (1-d^2)} \left(1 + \frac{4e}{R(1+d^2)} \right) \leq \sigma_{\text{ammissibile}} = \frac{\sigma_y}{S} \begin{cases} \text{Si: verifica soddisfatta} \\ \text{No: riprogettare o rinforzare} \end{cases}$$

In alternativa, nel caso di edifici di nuova costruzione, a seconda degli intenti progettuali è possibile delineare diverse strategie in maniera tale da realizzare strutture rispondenti a requisiti specifici.

Ad esempio, ipotizzando che siano noti $\{F, e, R, \sigma_{\text{ammissibile}}, \sigma_y\}$ è possibile ricavare di:

$$\frac{F}{\pi R^2} \left(\frac{1+4e}{R(1+d^2)} \right) - \sigma_{\text{ammissibile}} (1-d^2) \leq 0; \quad \text{disuguaglianza di II grado}$$

$$\frac{F}{\pi R^2} \frac{R(1+d^2) + \frac{4e}{R} - \sigma_{\text{ammissibile}} (1-d^4) R}{R(1+d^2)} \leq 0; \quad \text{ponendo } d^2 = \beta \text{ ed elidendo il denominatore } (>0)$$

$$\frac{F}{\pi R} + \frac{F}{\pi R} \beta + \frac{4F}{\pi R} \left(\frac{e}{R} \right) - \sigma_{\text{ammissibile}} R + \sigma_{\text{ammissibile}} R \beta^2 \leq 0;$$

$$d^2 = \beta = \frac{-\frac{F}{\pi R} \pm \sqrt{\frac{F^2}{\pi^2 R^2} - 4(\sigma_{\text{ammissibile}} R) \left(\frac{F}{\pi R} + \frac{4F}{\pi R} \frac{e}{R} - \sigma_{\text{ammissibile}} R \right)}}{2 \sigma_{\text{ammissibile}} R} \quad \text{soluzioni } \in [\beta_1, \beta_2], \beta_1 \leq \beta_2$$

Ne segue che $d^2 \in [0, \beta_2] \Rightarrow 0 \leq d \leq \sqrt{\beta_2}$
sezione cava per ipotesi

preghe non siano opposte
 Siamo certi che $\beta_1 \leq 0$ perché è pari a $-\langle \text{numero positivo} \rangle - \sqrt{\langle \text{numero positivo} \rangle}$

Analogamente, noto d ma non il valore di e , è possibile valutare l'eccentricità massima tale che la struttura sia verificata o la sezione sia interamente compressa:

$$e \leq \frac{R}{4} (1-d^2)$$

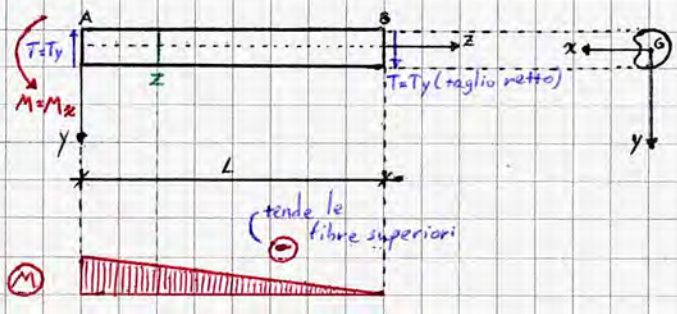
Sollecitazioni di Taglio nella teoria del De Saint Venant

Ci si soffermerà in particolare sul taglio retto, poiché un qualsivoglia taglio deviato è sempre scomponibile in due tagli retti nelle direzioni principali d'inerzia.

Si ricorda che per l'ipotesi sui carichi nella teoria del de Saint Venant è necessario che le forze di volume siano nulle e che il mantello sia scarico; al posto dell'esplicitazione dei vincoli si considerano delle condizioni di carico - necessariamente autoequilibrate - sulle basi.

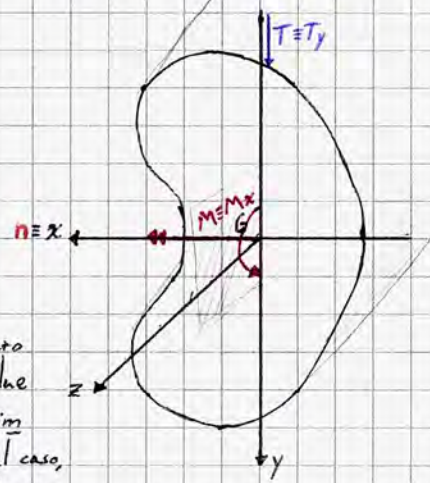
Nell'esempio alla pagina successiva si osserva che la trave è autoequilibrata rispetto alle sollecitazioni, ma non rispetto ai momenti; al fine di rientrare nelle ipotesi del de Saint Venant occorre dunque applicare una coppia (ad esempio nel polo A), che in questo caso determina un momento M_x , diretto lungo l'asse delle ascisse.

Ne segue che per la condizione sull'autoequilibrio del solido le sollecitazioni di taglio implicano un momento tutto salvo che in particolari poli, in cui $M = 0$.

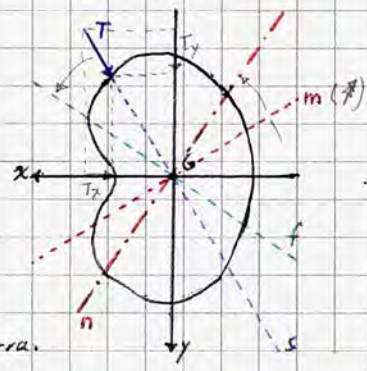


Considerando la sezione retta della trave ad una generica $z \in]0, L[$, si osserva che in questo caso l'asse x coincide con l'asse neutro, il taglio è retto poiché la direzione che lo contiene è parallela ad uno degli assi principali d'inertzia e, di conseguenza, il piano yz coincide con il piano di flessione, in cui si esplica la flessione della trave.

Nel caso in cui fosse applicato un taglio retto $T_x = T_y$, l'asse s di sollecitazione coinciderebbe con l'asse x , l'asse y con l'asse neutro nonché l'asse del bivettore che esplicita il momento, il cui effetto flessionale avviene nel piano xz .



Si ricorda che un sistema è principale d'inertzia se in detto riferimento sono nulli i contributi centrifughi al momento d'inertzia.

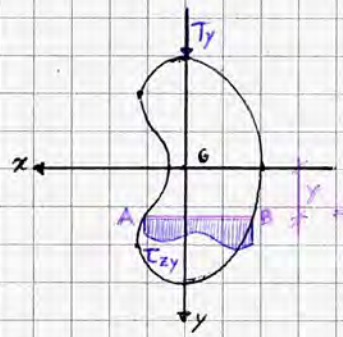


Come anticipato, è possibile che su una struttura sia applicato un taglio deviato, considerabile come la sovrapposizione di due tagli retti e dunque riconducibile ad una loro composizione, implicando unicamente un maggior onere computazionale. In tal caso, gli assi s, m (bivettore), f (flessionale) ed n (neutro) hanno inclinazioni specifiche rispetto al riferimento principale, come riscontrabile nell'esempio in alto a destra.

In virtù dello stato sollecitativo in atto, le σ_z sono funzione del momento e degli eventuali carichi applicati alle basi estreme, mentre le tensioni tangenziali τ - che in generale dipendono anche da una componente torcente di momento, in questo caso nulla per semplicità - seguono la seguente relazione:

$$\int_A \tau_z \frac{x}{[y]} dA = T_x \Rightarrow \int_A \tau_{zy} \frac{x}{T_y} - \tau_{zy} \frac{y}{T_x} dA = M_z = 0$$

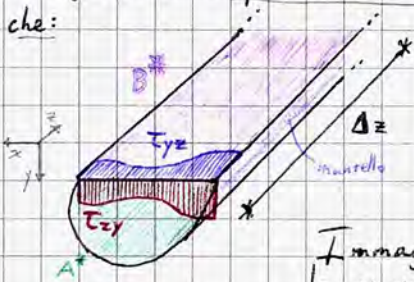
↳ momento torcente



Considerando una generica corda AB parallela all'asse neutro, si osserva che su ogni corda esiste un profilo di τ_{zy} variabile in x (e in y , atteso il variare della corda).

In Scienza delle Costruzioni spesso ci si riferisce a trattazioni approssimate; in quest'ambito ad esempio non ci si interessa della esplicita formula analitica ma della formulazione del taglio alla Jourawsky: la distribuzione delle τ lungo x ed y non presenta soluzioni individuabili analiticamente tranne nel caso di sezioni circolari, ellittiche o a triangolo equilatero; l'approssimazione è logicamente ingegneristicamente accettabile.

Per garantire l'equilibrio a rotazione della sezione, immaginiamo di sezionare la trave con un piano di traccia b . Si osserva che:



$$|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}|$$

per l'equilibrio e la simmetria del tensore delle tensioni (equilibrio a rotazione)

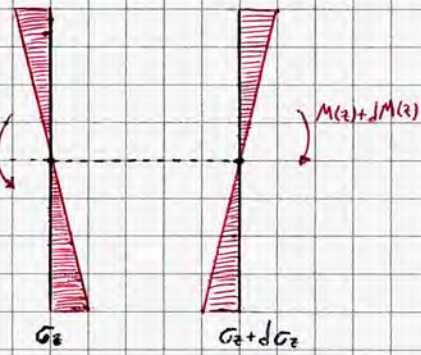
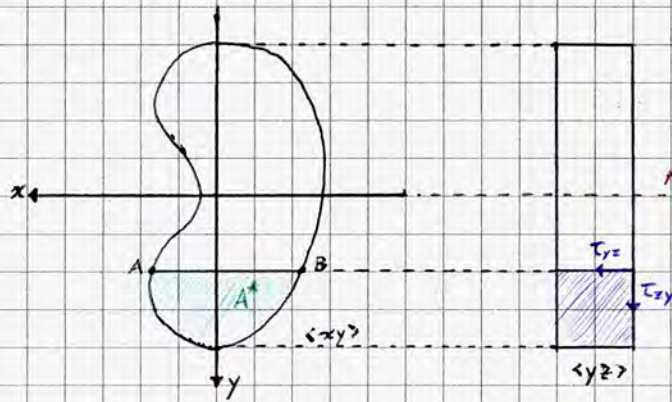
Per ricavare le tensioni τ si scrivono le equazioni di equilibrio alla traslazione lungo z .

Immaginiamo ora di effettuare una sezione ad una generica z del solido trave, a partire dalla quale si stacca un concio infinitesimo di ampiezza dz .

equazione del momento: $M(z) = T_y z - M_x = T_y(z-L) \Rightarrow \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{T_y(z-L)}{I_x} y$

Per l'equilibrio, oltre al taglio sono presenti nel concio infinitesimo 2 coppie applicate:

Valutiamo ora ciò che accade nell'interfaccia ottenuta dalla sezione col piano di traccia $b(y)$: facendo tendere Δz a dz si osserva che le T_{yz} tendono ad agire in una porzione infinitesima $dA = dx dz$.



Da cui è possibile scrivere l'equilibrio alla traslazione lungo la direzione y; assumendo come positiva la direzione e il verso di dx (z del relativo asse) come positiva, si ha che:

$$-\int_{B^*} \tau_{yz} dA + \int_{A^*} \sigma_z dA - \int_{A^*} G_z + dG_z dA = 0$$

\downarrow G_z (faccia dx) \downarrow $G_z + dG_z$ (faccia sx)

in questa equazione è come se l'unica incognita sia costituita dalle tensioni τ_{yz} , da esplicitare.

Per la linearità delle operazioni si ha che:

$$-\int_{B^*} \tau_{yz} dA - \int_{A^*} dG_z dA = 0$$

esplicitiamo ora dG_z , ricordando che $G_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{T_y(z-l)}{I_x} y \Rightarrow \Rightarrow dG_z = \frac{\partial G_z}{\partial z} dz = \frac{T_y \cdot y}{I_x} dz$. Si ha quindi che:

$$-\int_{B^*} \tau_{yz} dx dz - \int_{A^*} \frac{T_y \cdot y}{I_x} dz dA = 0;$$

$$-\int_A \tau_{yz} dx - \frac{T_y}{I_x} \int_{A^*} y dA = 0$$

\leftarrow esteso alla corda $b(y)$ dato il solo dx momento statico S_x^* di A^* rispetto a $y \Rightarrow S_x^*$

Logicamente, in questo caso S_x^* non è nulla (lo sarebbe se e solo se si considerasse l'intera sezione rispetto agli assi principali), ne segue che $S_x^* = S_x^*(y)$; possiamo dunque scrivere:

$$\int_A \tau_{yz} dx - \frac{T_y}{I_x} S_x^* = 0$$

In ragione della generale indeterminabilità delle τ_{yz} , si applica il teorema della media integrale al relativo integrale; si considera infatti che:

$$\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_A \tau_{yz} dx$$

Qualunque sia la funzione delle τ_{yz} , è possibile valutare $\bar{\tau}_{yz}$ ipotizzando che l'andamento della funzione sia lineare ed uniforme in x . In particolare, si ha che:

$$\bar{\tau}_{yz} = - \frac{T_y S_x^*(y)}{I_x \cdot b(y)}$$

formula di Jourawsky

Supposto costante; non vuol dire che sia uniforme nella sezione globalmente; in quel punto è costante ma l'andamento può essere lineare o parabolico.

Per la simmetria del tensore delle tensioni $\underline{\underline{T}}$, si ha che $\bar{\tau}_{xy} = \bar{\tau}_{yz} = - \frac{T_y S_x^*(y)}{I_x \cdot b(y)}$

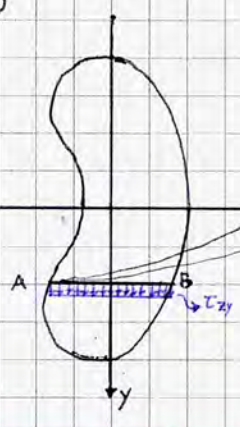
\leftarrow costante (incide su tutta la sezione) \leftarrow dipende da y poiché il variare della corda varia l'area: $S_x^* \neq 0$ a seconda della area A^* delimitata SUPERIORMENTE dalla corda AB; \leftarrow dipende dalla profondità della corda.

Ne segue che, se $S_x^* > 0$, ipotizzando $T_y > 0$ (costante), $I_y > 0$ per definizione, così come $b(y)$; se le τ_{yz} sono < 0 esse saranno entranti nella superficie delimitata superiormente dalla corda AB (area A^*), mentre se $\tau_{yz} > 0$ saranno uscenti dalla medesima area. Logicamente, se $S_x^* < 0$ si invertono i versi delle τ .

Per la condizione sul mantello scarico, $\underline{\underline{t}} = \underline{\underline{T}} \cdot \underline{\underline{n}} = 0$; di conseguenza le τ_z sono sempre tangenti al profilo della sezione, il che implica necessariamente che $\underline{\underline{T}}_z \cdot \underline{\underline{n}} = 0$.

$S_x^* > 0$

Ne segue che se esistono delle τ_{zx} verticali e dirette lungo y , per ripristinare la condizione del de Saint Venant devono esistere delle τ_{zx} tali che la composizione delle τ sia tangente alla frontiera:



$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}$$

utilizziamo l'approssimazione di Jourawsky
è una $f(y)$ perché le x sono costanti.

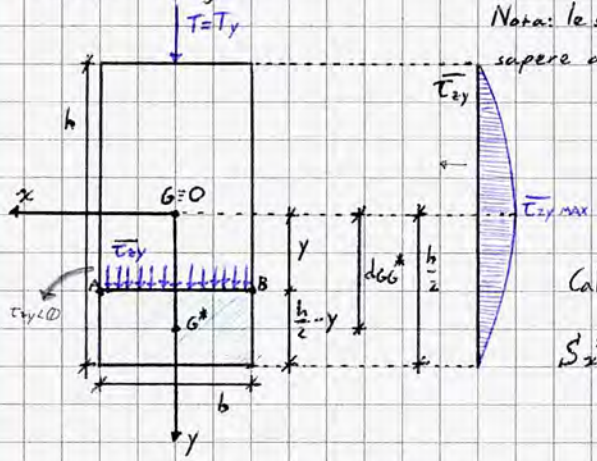
Integrando la relazione si ha che $\tau_{zx} = f(y) \cdot x + c \Rightarrow$ le τ_{zx} evolvono in x in maniera al più lineare.

Esercizi: Taglio Retto lungo l'asse y

• Sezione rettangolare

L'esercizio volge sul trovare rispetto alla sezione assegnata l'entità di $\bar{\tau}$, per poi trovare $\bar{\tau}_{max}$ e confrontarla con la τ ammissibile.

Nota: le seguenti applicazioni sono da considerarsi dimostrazioni di sezioni notevoli, da dover sapere a memoria.



$$\tau_{zy} = \frac{-T_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b}$$

Osservazione: Nella loro variazione in y , le τ dipendono essenzialmente dalla geometria (I_x, b, S_x^*), in particolare, dal profilo della corda (S_x^* , il resto è costante in una data sezione)

Calcoliamo il momento statico S_x^* :

$$S_x^* = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(y + \frac{h}{4} - \frac{y}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h}{2} - y\right) \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

$\propto y^2 \Rightarrow$ andamento parabolico delle τ nella sezione

Ne segue che $\bar{\tau}_{zy} = -\frac{T_y \cdot \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{\frac{bh^3}{12} \cdot b} = -\frac{6T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$

$$\bar{\tau}_{zy} \Big|_{y=-h/2} = 0$$

$$\bar{\tau}_{zy} \Big|_{y=h/2} = 0$$

Dalla valutazione dell'entità delle τ negli estremi noto l'andamento, è possibile effettuare un grafico qualitativo della distribuzione: è sufficiente

identificare il massimo della funzione ($\bar{\tau}_{zy max}$) impostando un problema di stazionarietà:

$$\frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow \frac{-6T_y}{bh^3} (-2y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow \bar{\tau}_{zy max} = \bar{\tau}_{zy} \Big|_{y=0} = -\frac{6T_y}{bh^3} \left(\frac{h^2}{4}\right)$$

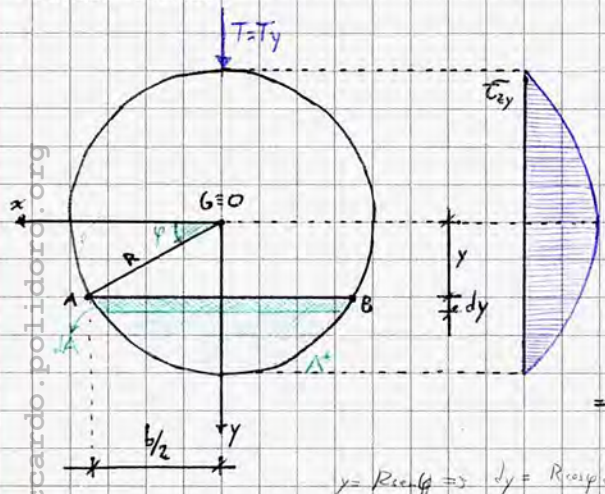
Nell'applicazione di un criterio di resistenza si impone, dopo aver deter-

minato i massimi sforzi normali e tangenziali, che la τ_{max} deve essere minore o uguale ad una tensione τ ammissibile per il materiale, data dal rapporto tra tensione di snervamento e un coefficiente di sicurezza δ_s , strettamente maggiore di 1.

Logicamente, in una sezione rettangolare non emergono $\bar{\tau}_{zx}$: le $\bar{\tau}_{zy}$ sono già tangenti al bordo per la natura della sezione.

• Sezione circolare

In virtù della simmetria radiale della sezione, il taglio è sempre retto. Ricordiamo che $I_x = I_y = I_r = \frac{\pi R^4}{4}$ (ΔE fondamentale conoscere in sede di esame l'inerzia rispetto agli assi principali delle principali sezioni impiegate nelle applicazioni).



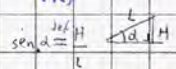
Si osserva che $dA \approx b dy = 2R \cos \varphi \cdot R \cos \varphi d\varphi$
b in coordinate polari

Ne segue che:

$$S_x^* = \int_{A^*} y dA = \int_{\varphi} R \sin \varphi (2R^2 \cos^2 \varphi) d\varphi = 2R^3 \int_{\varphi} \cos^2 \varphi [\sin \varphi d\varphi] = -2R^3 \left[\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right]_{\varphi} = 2R^3 \frac{\cos^3 \varphi}{3}$$

$y = R \sin \varphi \Rightarrow dy = R \cos \varphi d\varphi = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi$

Ne segue che $\bar{\tau}_{zy} = -\frac{T_y (2R^2 \frac{\cos^2 \varphi}{3})}{\pi R^4 (2R \cos \varphi)} = -\frac{4}{3} T_y \cos^2 \varphi \cdot \frac{1}{\pi R^2} = -\frac{4}{3} \frac{T_y \cos^2 \varphi}{\pi R^2} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} (1 - \sin^2 \varphi) = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} \left(\frac{y}{R}\right)^2$

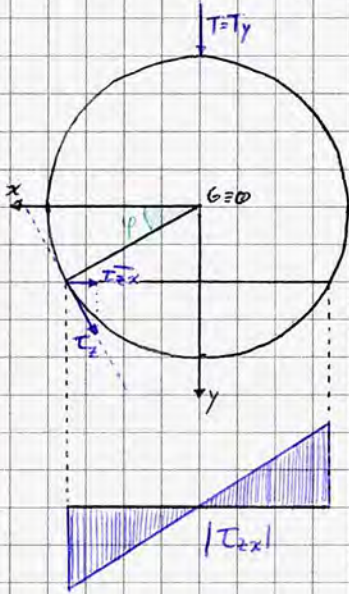


$= -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} (1 - (y/R)^2)$

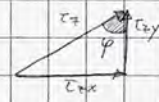
$\begin{cases} y = -R \Rightarrow \bar{\tau}_{zy} = 0 \\ y = R \Rightarrow \bar{\tau}_{zy} = 0 \end{cases}$

$\bar{\tau}_{zy} \text{ max } (\Leftrightarrow) \frac{\partial \bar{\tau}_{zy}}{\partial y} = 0 (\Leftrightarrow) -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} (-2y) = 0 (\Leftrightarrow) y = 0$; $\bar{\tau}_{zy} \text{ max } = \bar{\tau}_{zy} \Big|_{y=0} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2}$

In questo caso però si generano delle $\bar{\tau}_{zx}$: *non nulle!*



$\frac{\bar{\tau}_{zx}}{\bar{\tau}_{zy}} = \tan \varphi \Rightarrow \bar{\tau}_{zx} = \bar{\tau}_{zy} \tan \varphi$

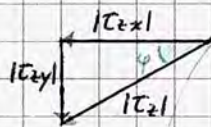


$x = R \cos \varphi \Rightarrow \cos \varphi = \frac{x}{R}$ (analogo per y)

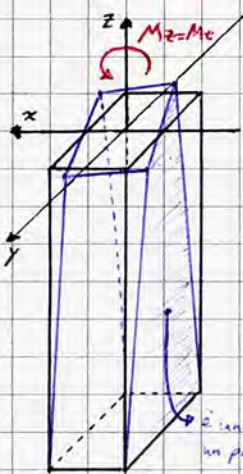
$\bar{\tau}_{zx} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} \left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right) \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} \cos \varphi \sin \varphi =$

$= -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} \cdot \frac{xy}{R^2} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^4} xy$

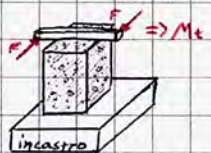
andamento lineare in x e, tipicamente, varia in y per garantire la senza



Torsione

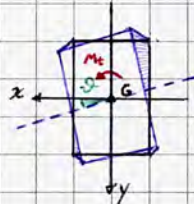


La torsione, tipicamente realizzata in provini sperimentali incastrando una base ed applicando una coppia di forze attraverso un braccio rigido vincolato alla struttura (come nello schema a fianco), dal punto di vista dell'assetto dell'altra base può avere una coppia torcente uguale e opposta a quella applicata sulla prima base.

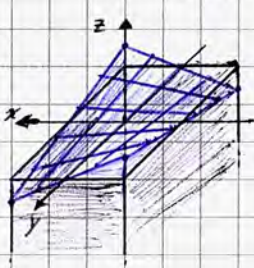


In regime di piccoli spostamenti e deformazioni esistono due effetti, sovrapposti (per la loro linearità) e disaccoppiati, della torsione:

- **Effetto macroscopico:** essendo la base incastrata ferma, e registrando una rotazione della sezione superiore, si verifica una rotazione non rigida, prodotta dalla deformazione della trave.



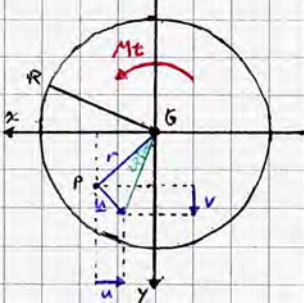
- **Ingobbimento:** per effetto della torsione, soprattutto in sezioni rettangolari, la sezione caricata dal momento torcente si deforma anche al di fuori del piano della sezione, determinando una superficie paragonabile ad un paraboloidi iperbolico.



L'ingobbimento dunque produce uno spostamento $w = w(x,y) = \nabla^2 \omega(x,y)$ nei punti della sezione, coincidente con uno u_z .

In presenza di vincoli, in particolare incastrati, producono tensioni normali (tensioni da torsione secondarie) non legate alla teoria del de Saint Venant ma alle volte significative.

Come vedremo alla pagina successiva, in alcuni casi - come le sezioni circolari - la funzione di ingobbimento è nulla: la simmetria radiale impone l'annullamento della funzione in ogni punto della sezione.



La funzione di ingobbimento, tradizionalmente espressa come $\vartheta'(x, y)$, in una sezione circolare è nulla: le condizioni di emisimmetria, evidenti dall'applicazione della coppia torcente ed esplicitate nella sezione rettangolare (2 forze uguali e opposte implicano cinematici uguali e opposti) associate alla simmetria radiale della sezione escludono la produzione di un ingobbimento: i punti tra loro diametralmente opposti dovrebbero subire spostamenti uguali e opposti, ma poiché una coppia è applicabile su ogni asse principale d'inertzia bisognerebbe soddisfare anche la condizione opposta a quella di partenza. Ne segue che $w = 0$ per ragioni di simmetria della sezione contrapposta all'asimmetria delle coppie torcenti.



ϑ' dipende dalla quota cui si trova la sezione in esame: più si avvicina alla sezione carica più il ϑ' è grande.

Nella rotazione della sezione, si osserva che $\forall P, u \cdot r = 0$ (condizione compatibile con la simmetria della sezione: una rotazione locale rigida è compatibile con ogni condizione di emisimmetria per ogni diametro); ne segue che il campo di spostamento dei punti della sezione nella deformazione presenta sia componente verticale v che componente orizzontale u . Complessivamente, il campo di spostamenti è dato dalle seguenti componenti:

$$\begin{aligned} u &= -\vartheta' y & \text{discorde rispetto all'asse } x \\ v &= \vartheta' x & \text{proiezioni di } r \\ w &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} u &= -\vartheta' z y \equiv u_1 = u(x_1) & \text{curvatura torsionale: } \vartheta' z \text{ è la forma} \\ v &= \vartheta' z x \equiv u_2 = u(x_2) & \text{anisimetrica più semplice per esplicitare la} \\ w &= 0 \equiv u_3 = u(x_3) & \text{variazione di rotazione tra le sezioni esterne.} \end{aligned}$$

In alcuni testi, il modulo al taglio μ viene indicato con G .

È possibile ricavare ora informazioni su tensioni e deformazioni:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0; \quad \epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0; \quad \epsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0; \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

(Note: $\vartheta' z y$ non dipende da x)

In presenza di materiali isotropi e omogenei, si ha che:

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{1}{2} \vartheta' y$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \delta_{ij} \lambda \epsilon_{kk}$$

(in questo caso $\lambda = 0$)

$$\epsilon_{23} = \dots = \frac{1}{2} \vartheta' x$$

→ scontrimenti nel piano y/z / x/z , angolari ⇒ deformazioni deviatoriche, non volumetriche

Ne segue che: $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$

$$\sigma_{12} = 2\mu \epsilon_{12} = 0$$

$$\sigma_{13} = 2\mu \epsilon_{13} = 2\mu \left(-\frac{1}{2} \vartheta' y \right) = -\mu \vartheta' y = \tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\sigma_{23} = 2\mu \epsilon_{23} = 2\mu \left(\frac{1}{2} \vartheta' x \right) = \mu \vartheta' x = \tau_{yz} = \tau_{zy}$$

Verifichiamo i risultati ottenuti in assenza di condizioni di carico e ipotizzando ϑ' costante:

verifica dell'equilibrio e della compattezza di quanto ottenuto con le Hp del DSV.

$$\text{div } \underline{T}^T = \underline{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = 0 & \text{OK} \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} = 0 & \text{OK} \\ \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 & \text{OK} \end{cases}$$

(Note: $\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0; \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$)

Valutiamo ora ciò che accade sulla frontiera, ovvero sulle basi estreme della trave: per la teoria del de Saint Venant le sezioni caricate subiscono azioni in uno stato tensionale piano. Sulla superficie cilindrica, manto della trave, lo stato tensionale è certamente nullo, nelle sezioni rette estreme no:

$I_y, I_x = I_G$, momento d'inertzia polare baricentrico

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \int_A \mu \vartheta' x^2 + \mu \vartheta' y^2 dA = \mu \vartheta' \int_A (x^2 + y^2) dA = \mu \vartheta' I_G = \frac{\mu \vartheta' \pi R^4}{2}$$

In una sezione circolare, $I_G = 2(\pi R^4/4)$; per altre sezioni logicamente il calcolo è differente.

ϑ' è l'unica incognita ⇒ $\vartheta' = \frac{M_t}{\frac{\mu I_G}{2}}$

formula del tutto simmetrica a quella della curvatura flessionale:

$$\varphi' = \chi = \frac{M}{EI}$$

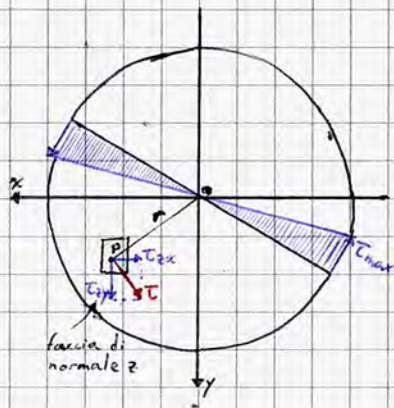
Possiamo dunque conoscere l'espressione delle τ_{xz} e delle τ_{yz} :

$$\tau_{xz} = -\mu \vartheta' y = -\mu \frac{M_z}{\mu I_G} y = -\frac{M_t}{I_G} y$$

formule analoghe a quella di Navier; si osserva che scompare l'effetto del modulo elastico in favore del campo di spostamento elastico.

$$\tau_{yz} = \mu \vartheta' x = \mu \frac{M_z}{\mu I_G} x = \frac{M_t}{I_G} x$$

Attraverso le espressioni appena ricavate è possibile affermare che in ogni punto di una sezione circolare l'azione del momento torcente si esplica attraverso tensioni verticali e orizzontali.



$$|\underline{\tau}| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M_t}{I_G} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_t}{I_G} r$$

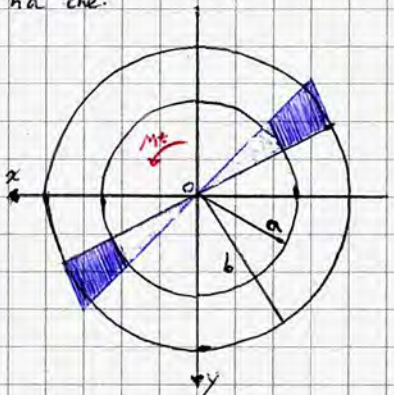
il modulo delle τ cresce linearmente all'aumentare del raggio (analogo alla formula di Navier).

$$\text{Per ogni punto } P, \underline{\tau} \perp \underline{r} \Rightarrow \underline{\tau} \cdot \underline{r} = \tau_{xz} \cdot r_x + \tau_{yz} \cdot r_y = -\frac{M_t}{I_G} yx + \frac{M_t}{I_G} xy = 0$$

Le tensioni tangenziali si sviluppano non come ribaltamenti ma come effettive tensioni con andamento lineare lungo i raggi, nulle per $r=0$ e con valore massimo sugli estremi, con tensioni sventi verso coerente con la coppia torcente.

$$|\tau_{max}| = |\underline{\tau}|_{r=R} = \frac{M_t}{I_G} R = \frac{2M_t R}{\pi R^4} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$$

Nel caso di una sezione cava - non necessariamente sottile - di raggi a e b , attraverso ragionamenti e calcoli del tutto analoghi a quelli effettuati per la sezione circolare "piena" fino alla determinazione delle G , poiché $I_G = \frac{\pi(b^4 - a^4)}{2}$ si ha che:



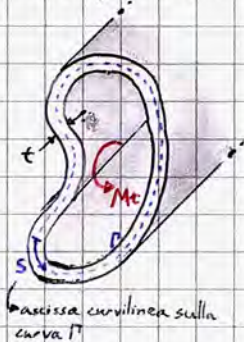
$$\tau_{xz} = -\frac{2M_t}{\pi(b^4 - a^4)} y$$

$$\tau_{yz} = \frac{2M_t}{\pi(b^4 - a^4)} x$$

$$|\tau| = \frac{2M_t}{\pi(b^4 - a^4)} r$$

La posizione della τ_{max} non varia; a numeratore e denominatore sarà però presente b . Logicamente, le tensioni τ si esplicano solo nel profilo della sezione, dunque il diagramma avrà forma trapezoidale.

Più in generale, nel caso di profili cavi sottili con geometria qualsiasi si utilizza la Formulazione di Bredt:



In una generica sezione cava sottile come quella nell'esempio non è possibile effettuare considerazioni geometriche; è necessaria una formulazione approssimata, analogamente a quanto fatto con Jourawsky. In questo caso, $t = t(s) \Rightarrow$ anche lo spessore - sottile - è variabile.

$$\frac{t(s)}{D} \ll 1 \quad \forall s \in \Gamma$$

La formulazione di Bredt nasce dall'analogia idrodinamica: è noto lo spessore t della ^{sezione} sezione, ma non le tensioni che vi si esplicano. Immaginando che lo spessore della sezione sia in realtà cavo, e che le due superfici rimanenti delimitino un fluido immerso all'interno dello spessore e quasi fino al bordo, immergendo una bacchetta e agitando il fluido muovendosi in maniera costante si determinerà un profilo di velocità del fluido variabile, ma con velocità media conoscibile e pari a $v = v(s)$, tangente alla linea media della sezione e variabile in ragione della volontà di imporre una portata costante.

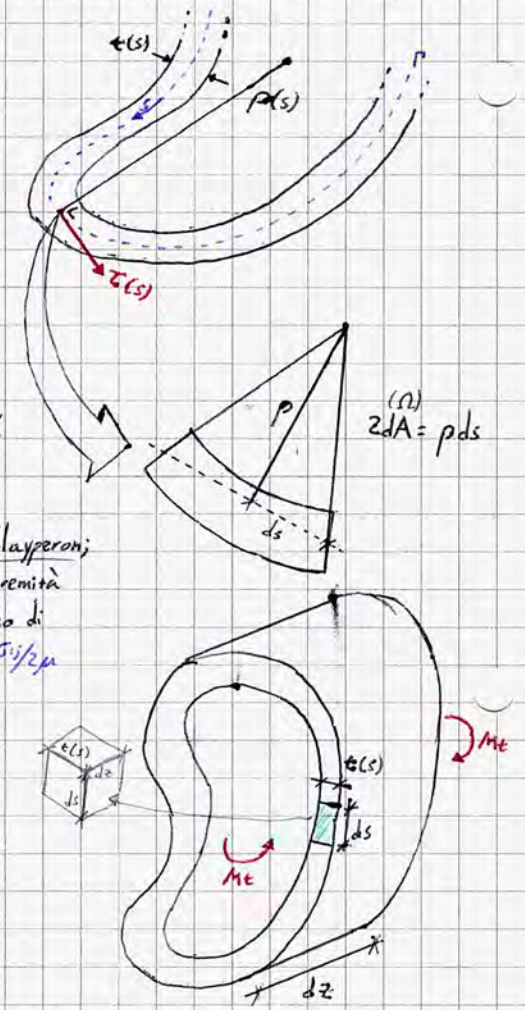
$$P = v \cdot t = \text{cost.}$$

portata (o a parità di profondità)

In sintesi, si determina un'analogia tra le velocità medie e i vettori di tensione tangenziale $\tau(s)$, immaginati costanti in una determinata sezione e tangenti alla linea media; ne segue che $\tau t = \text{cost.}$ (ricordando che $t = t(s)$ e $\tau = \tau(s)$, se $t = \text{cost.}$ allora $\tau = \text{cost.}$)
 In queste ipotesi tutto è semplificato; l'analogia è applicabile solo per sezioni sottili poiché in sezioni più ampie il moto dell' H_2O è caratterizzato da gradienti.

$$M_t = \int_{\Omega} \tau(s) ds \cdot t \cdot \rho(s) = \tau(s) t(s) \int_{\Omega} \rho(s) ds \Rightarrow M_t = 2 \tau(s) t(s) \Omega_m$$

$\int_{\Omega} \rho(s) ds \rightarrow 2 \Omega_m$; Ω_m è l'area racchiusa dalla linea media fino al baricentro.
 essendo il prodotto globalmente costante, è possibile estrarlo dall'integrale.



Da cui si ha che $\tau(s) = \frac{M_t}{2 t(s) \Omega_m}$ prima formula di Bredt

L'idea fondante è che la distribuzione delle τ , avvenendo su di un piccolo spessore, è pressoché approssimabile con una distribuzione uniforme del valore medio.

La Seconda formula di Bredt si deduce dall'applicazione del PLV e del teorema di Clayperon; basterà infatti uguagliare la metà del prodotto della coppia torcente per la rotazione dell'estremità della trave con il potenziale elastico, per poi ricavare ϑ' , il quale fornisce l'angolo specifico di torsione.

$$L_{VE} = \frac{1}{2} M_t \vartheta' dz = L_{vi} = \int \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{dz}{2} \int_{\Omega} \frac{\tau(s)}{\mu} t ds =$$

$$= \frac{dz}{2} \int_{\Omega} \frac{\tau^2(s) t ds}{\mu} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{M_t^2}{4 \Omega_m^2 t^2(s)} t ds = \frac{dz}{2} \frac{M_t^2}{4 \Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds =$$

$$= \frac{dz}{2} \frac{M_t^2}{8 \Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds$$

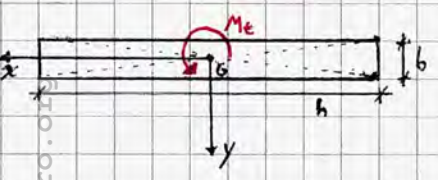
dipende dalla sezione

$L_{VE} = L_{vi} \Rightarrow \frac{1}{2} M_t \vartheta' dz = \frac{1}{8} \frac{M_t^2 dz}{\Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds \Rightarrow \vartheta' = \frac{M_t}{4 \mu \Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds$ seconda formula di Bredt

Torsione in sezioni sottili aperte

Ambito di maggior interesse nelle applicazioni civili, si interessa di profilati rettangolari o ottenuti per composizione di profilati rettangolari. Anche in questo caso viene considerata l'analogia idrodinamica, paragonando il campo delle τ al campo delle velocità tangenziali dei fletti fluidi mossi da un'accelerazione angolare costante; studiando la divergenza del campo delle τz , il campo delle velocità essendo solenoideale avrà divergenza nulla e modulo del rotore costante.

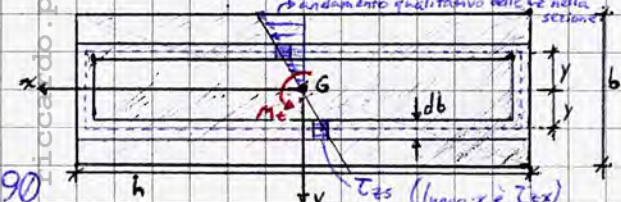
① Sezione (sottile) rettangolare allungata



$b \ll h$; $\begin{cases} \nabla \cdot \underline{\tau z} = 0 \\ |\text{rot } \underline{\tau z}| = \text{cost.} = 2 G \vartheta' \end{cases}$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ [Pa] = μ → modulo di elasticità tangenziale
 ϑ' → angolo unitario di torsione (curvatura torsionale) [1/l]

Immaginiamo ora di considerare la stessa sezione come il risultato della sovrapposizione di sezioni sottili chiuse aventi per linea media quella tratteggiata in figura (variabile a seconda della specifica sezione sottile chiusa).



Poiché $h \gg b$, ipotizzando l'analogia idrodinamica e considerando l'azione del momento torcente è possibile ipotizzare che agiscano delle $\tau = \tau z s$ uniformi. Eccezion fatta per i bordi ($x = \pm h/2$), le τ_{xy} possono essere approssimate a 0 (sezione sottile).

Sulla base dell'approssimazione appena effettuata sulle τ_{xy} , si può affermare che:

$$|\tau_{xy}| = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2G\theta' \quad (\tau_{xy} \rightarrow 0)$$

La trattazione, pur approssimata, risponde in maniera accettabile alla realtà fisica delle applicazioni di interesse.

Ne segue che $\tau_{zx} = -2G\theta' y + C \Rightarrow$ evolvono linearmente in y .

$\int dy$
 μ
 costante assegnata al materiale
 costante assegnata la sezione

Essendo la sezione rettangolare, essa presenta 2 assi di simmetria; è ragionevole dunque considerare che:

$$\tau_{zx}|_{y=0} = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = 2G\theta' y$$

($\tau_{zx}|_{y=0} = 0$ andamento lineare in y)

Per effetto di quanto ricavato in precedenza le τ_{zx} max si sviluppano sul bordo, per $y = h/2$. Esplicitiamo τ_{zx} in funzione di M_t per identificarne il modulo, ricordando la 1^a formula di Bredt e considerando come sezione sottile chiusa quella contenuta nella sezione rettangolare allungata rappresentata alla pagina precedente.

$$\tau_{zs} = \frac{M_t}{2\Omega_m S(s)} \Rightarrow dM_t = 2\Omega_m \tau_{zs} S(s)$$

\int sulla linea media e considerando la direzione dell'ascissa curvilinea
 db , spessore della sezione

media in questo caso $= db = dy$

specializzando

area racchiusa dalla linea media, analiticamente pari all'integrale settoriale di ogni sezione infinitesima sottesa dall'ascissa curvilinea infinitesimale.

$$dM_t = 2(2y \cdot h) (2G\theta' y) dy = 8G\theta' h y^2 dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_t = \int_0^{b/2} dM_t = \int_0^{b/2} 8G\theta' h y^2 dy = 8G\theta' h \int_0^{b/2} y^2 dy = 8G\theta' h \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{b/2} \Rightarrow M_t = G \frac{hb^3}{3} \theta'$$

Analogamente a quanto visto per lo sforzo normale, M_t dipende dalla geometria, dal materiale e dalla curvatura torsionale del materiale:

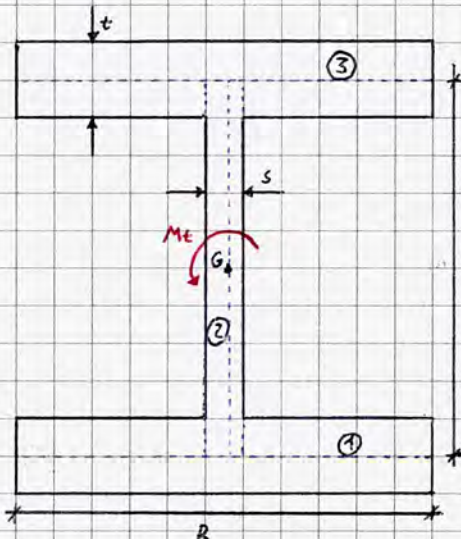
$$M_t = K_t \theta'$$

rigidezza torsionale, dipende dal materiale (G , ovvero $E \nu$) e dalla geometria della sezione (fattore di torsione $J_t = I_t = \frac{hb^3}{3}$). $K_t = G J_t$
 rigidezza flessionale
 Ancora una volta, c'è similitudine con la flessione: $M = E I \chi$

$$\text{Ne segue che } \theta' = \frac{M_t}{G J_t} = \frac{M_t}{G \frac{hb^3}{3}} \Rightarrow \tau_{zx} = -2G\theta' y = -2G \frac{M_t}{G \frac{hb^3}{3}} y \Rightarrow \tau_{zx} = -6 \frac{M_t}{hb^3} y$$

deriva dall'analogia idrodinamica; indica che se $y > 0$ le τ_{zx} sono (-) \oplus e dunque opposte rispetto al riferimento (e viceversa).

2) Composizioni di sezioni rettangolari allungate

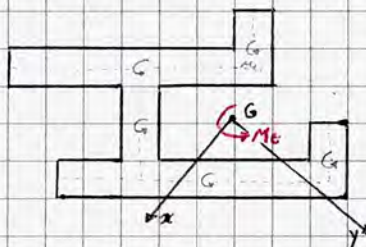


$$t \ll \{H, B\}$$

$$s \ll \{H, B\}$$

Travi aventi sezioni come quella a fianco (così come la quasi totalità dei profilati impiegati nelle applicazioni civili) presentano profili considerabili come una composizione di sezioni rettangolari sottili; il discorso si riflette in ogni sezione, non necessariamente sottile: è sempre possibile ricondursi ad una composizione di sezioni sottili aperte costituite da rettangoli allungati; la loro composizione delinea l'assorbimento complessivo del momento torcente nella sezione.

Considerando un caso generico:



momento assorbito dal singolo rettangolo

$$M_t = \sum M_{t_i} = K_{t1} \theta'_1 + \dots + K_{tn} \theta'_n$$

Per congruenza e per Bredt, $\theta'_1 = \dots = \theta'_n = \theta'$

$$M_{t_i} = K_{t_i} \theta'$$

$$M_t = \sum K_{t_i} \theta' \Rightarrow \theta' = \frac{M_t}{\sum K_{t_i}}$$

Ne segue che $M_{ti} = \frac{K_{ti}}{\sum K_{ti}} M_t$

coefficiente di ripartizione r_i

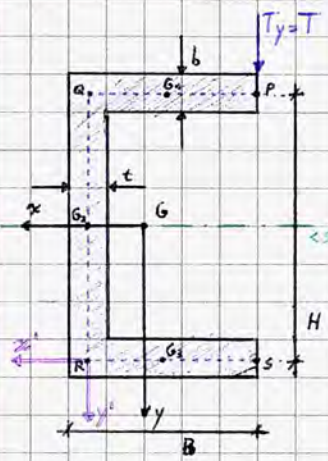
Nota M_{ti} si possono conoscere le τ_z e di conseguenza la $\tau_{z \max}$:

$$|\tau_{z \max}| = \frac{M_t}{J_t} b/2$$



Si osserva che ogni rettangolo allungato assorbe una parte del momento torcente totale in maniera proporzionale al rapporto tra rigidità torsionale parziale e totale (come negli altri problemi di carattere iperstatico: la sollecitazione era assorbita dallo i-mo elemento in rapporto alla sua rigidità rispetto al totale).

Esercizio: Verifica di Resistenza in una sezione rettale aperta con sollecitazioni di taglio e torsione



$$t \ll \{B, H\}; b \ll \{B, H\}; t \neq b$$

Nelle applicazioni precedenti il taglio era sempre applicato in maniera tale da dirigersi nel baricentro della sezione, che a sua volta coincideva con il centro di taglio C, punto del piano della sezione retta della trave - non necessariamente interno ad essa - in cui convergono le direzioni delle risultanti delle tensioni tangenziali τ_{zs} dirette lungo la linea media indotte da sollecitazioni di taglio $T = (T_x, T_y)$.

Ne segue che se l'asse della sollecitazione di taglio passa per il centro C, si è in presenza di taglio puro, non accompagnato da torsione; altrimenti esiste un momento torcente dovuto al braccio esistente tra il punto C e la retta di applicazione del taglio.

Per ragioni geometriche, il centro di taglio si trova sempre sugli assi di simmetria della sezione; ne segue che nel caso in cui siano presenti due assi di simmetria esso coincide col baricentro, così come nei casi di simmetria polare ($C=G$)

Per la verifica di resistenza, si confronta una quantità $G_{id} (G_e, \tau_e) \leq \frac{G_y}{\gamma_s}$. Per un criterio, utilizzato per i materiali duttili, è denominato criterio di resistenza di Hencky von Mises. Le nuove NTC hanno sostituito a questo criterio un metodo alle tensioni ammissibili che agisce unicamente in campo elastico.

Ricapitolazione sul rotore:

$$\tau_z = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rot } \tau_z = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y}$$

In generale, $\text{rot } v = \text{rot } (v_1, v_2, v_3) =$

$$= \nabla \times v = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Nel caso dell'intersezione tra due rettangoli allungati, si ha una composizione tra le linee medie dei due rettangoli:



In una qualunque verifica di resistenza di una sezione è necessario:

- ① definire il punto G
- ② identificare le direzioni principali d'inerzia
- ③ caratterizzare i momenti d'inerzia rispetto alle direzioni principali
- ④ delineare l'andamento delle tensioni tangenziali per un'analisi sulla torsione (Jourawsky/sezioni rettangolari allungate)
- ⑤ applicare il criterio di resistenza e "verificare" la sezione

① Pur essendo in presenza di una sezione con un asse di simmetria, selezioniamo un riferimento arbitrario $y'-z'$ nel punto R a scopi esercitativi.

$$y'_G = -\frac{h}{2} \text{ per ragioni di simmetria}$$

in un momento statico rispetto a due assi, le distanze sono orientate!

$$z'_G = \frac{S'_y}{A} = \frac{S'_{y\text{I}} + S'_{y\text{II}} + S'_{y\text{III}}}{A} = \frac{-Bb \cdot B/2 + 0 - B^2 b/2}{2Bb + Ht} = -\frac{B^2 b}{2Bb + Ht} < 0$$

② Nota G si costruisce il riferimento principale d'inerzia, in questo caso noto per ragioni di simmetria (se no pon. $I_{xy} = I_{yx} = 0$)

$$I_x = I_{x\text{I}} + I_{x\text{II}} + I_{x\text{III}} = 2 \left(\frac{Bb^3}{12} + Bb \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) + \frac{tH^3}{12}$$

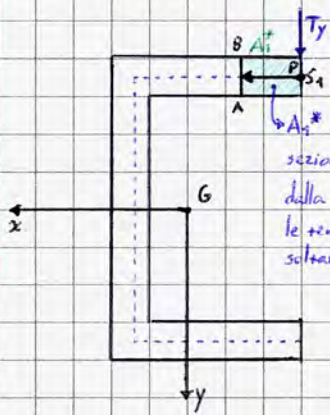
$\hookrightarrow I_{x\text{I}} + A \cdot d^2$ $\hookrightarrow I_{x\text{II}} = I_{x\text{III}}$

I_y si valuta dualmente; il calcolo è rilevante solo in presenza di T_x , dunque verrà omissa per celerità di risoluzione.

④ Analisi delle tensioni tangenziali da taglio e individuazione del centro di taglio CT

Si ricorda che, presa una qualunque corda, $|S_x(A_1^*)| = |S_x(A_2^*)|$

Per Jourawsky, $\bar{\tau}_{zs_1} = -\frac{T_y \cdot S_x^*}{I_x \cdot b}$ \Rightarrow



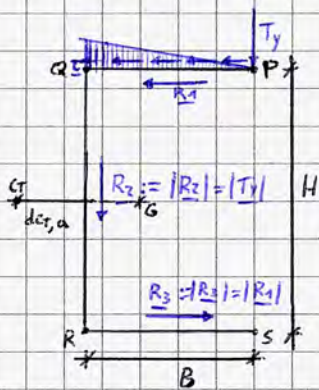
A_1^* è l'area complementare alla sezione delimitata superiormente dalla corda AB, ne segue che le tensioni τ sono positive se e soltanto se sono entranti in A_1^*

Si osserva che è solo il momento statico ad incidere sul segno delle tensioni τ .

$$\bar{\tau}_{zs_1} = \frac{-T_y (-bs_1) \frac{H}{2}}{\left[2 \left(\frac{b^3}{12} + Bb \left(\frac{H}{2} \right)^2 \right) + \frac{tH^3}{12} \right] \cdot b} = \frac{T_y s_1 H/2}{I_x} \propto s_1$$

$\propto s_1$; è una funzione lineare in s_1 e con segno positivo, dunque le τ sono concordi con s_1 .

Studiamo il diagramma delle τ lungo la linea media della sezione: l'andamento si svolge con continuità tra i punti P e Q. Convenzionalmente, il diagramma del modulo delle τ si disegna alla destra rispetto all'andamento delle tensioni, in maniera tale da poter leggere il modulo delle τ al variare della corda AB.



L'individuazione del centro di taglio viene effettuata applicandone la definizione: si identifica no le risultanti del taglio in ogni tratto per poi determinarne la convergenza. Avendo tracciato il diagramma del taglio nel tratto PQ è possibile identificare la risultante R_1 :

$$R_1 = \int_0^B \bar{\tau}_{zs_1} b ds_1 = \int_0^B \frac{T_y s_1 H/2}{I_x} b ds_1 = \frac{b T_y H/2}{I_x} \int_0^B s_1 ds_1 = \frac{T_y H B^2 b}{4 I_x}$$

Le altre condizioni sulle risultanti del taglio, presenti nel diagramma, sono dovute a ragioni di geometria e simmetria.

Il centro di taglio appartiene indubbiamente all'asse di simmetria della sezione a Γ , non è però nota la sua posizione: sono note le forze, ma non il polo. R_1 ed R_3 compengono una coppia di forze (sono sollecitazioni uguali e opposte, parallele tra loro e ad una certa distanza d), dunque prescindono dal polo per definizione. Viceversa, a parità di direzione, R_2 e T_y possono avere diverso segno. Ipotizziamo che il centro CT si trovi a sinistra della sezione a Γ , ad una distanza $d_{CT,a}$:

$R_1 H - R_2 d_{CT,a} = 0$; $R_1 H = R_2 d_{CT,a} \Rightarrow \frac{T_y H^2 B^2 b}{4 I_x} = T_y d_{CT,a} \Rightarrow d_{CT,a} = \frac{H^2 B^2 b}{4 I_x}$ \Rightarrow ipotesi corretta.

d coppia per l'autoequilibrio
 $d_{CT,a}$ modulo della coppia
 $d_{CT,a}$ a SX $\Rightarrow R_2$ crea momento NEGATIVO

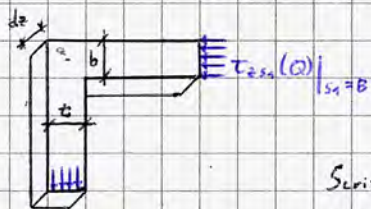
Poiché l'asse della sollecitazione T_y non passa per il centro di taglio, esiste certamente un momento torcente $M_z = T_y (d_{CT,a} + B)$ assiale (concordemente con T_y).

Analizziamo ora il diagramma delle tensioni nel resto della linea media:

$$\bar{\tau}_{zs_1}(Q) = \bar{\tau}_{zs_1} \Big|_{s_1=B} = \frac{T_y H/2 B}{I_x}$$

Nel nodo Q si passa dallo spessore b alla spessore t ; per l'analogia idrodinamica a seconda della relazione d'ordine tra i due spessori si determina l'entità della $\tau(Q)$ nel secondo tratto, secondo la seguente legge di flusso:

$$\bar{\tau}_{zs_1}(Q) \cdot b = \bar{\tau}_{zs_2}(Q) \cdot t \Rightarrow \bar{\tau}_{zs_2}(Q) = \bar{\tau}_{zs_1}(Q) \frac{b}{t}$$

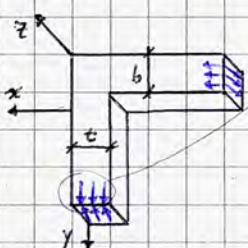


Scriviamo ora l'equilibrio alla traslazione lungo z , analizzando i piani xz, yz di spessore dz :

Per l'equilibrio a rotazione,

$$-\bar{\tau}_{zs_1}(Q) b dz + \bar{\tau}_{zs_2}(Q) t dz = 0$$

Essendo $= 0$ c'è eq. $\Rightarrow \bar{\tau}_{zs_1}(Q) = \dots$



Ne segue che $\bar{\tau}_{zs_2} = \frac{T_y H/2 B b}{I_x t} + \frac{T_y s_2 t \left(\frac{H}{2} - \frac{s_2}{2} \right)}{I_x t}$ (Bredt)

per $0 \leq s_2 \leq H$; occorre conoscerne il segno per tracciare l'andamento delle τ .

Immaginiamo ora di spostarci in un riferimento avente per ascissa curvilinea s_2 . Nel computo dei momenti statici è possibile operare una tra due differenti strategie:

La strategia di più immediata applicazione (ma spesso più onerosa di calcoli) è valutare il momento statico con il suo segno (già noto: è > 0 , non essendovi ulteriori dicamazioni nel nodo); in alternativa, si considera l'area $S_2 t$ come un incremento ΔS^* al momento statico.

Conoscendo elementarmente il momento statico dell'intero rettangolo ① risulta più conveniente calcolare $S_0 + \Delta S^*$.

In particolare,

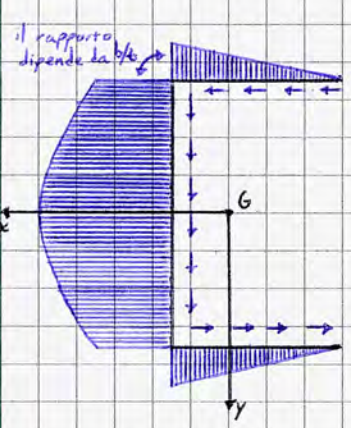
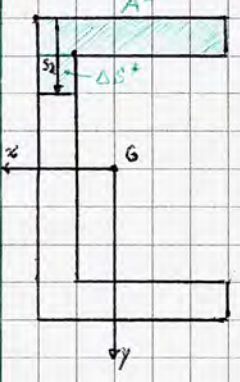
$$\Delta S^* = -s_2 t \left(\frac{H}{2} - \frac{s_2}{2} \right) (< 0)$$

distanza dal baricentro dell'area di ΔS^*

la funzione scala in s^2 è necessario ricercare un punto stazionario per la costruzione del diagramma parabolico su questo tratto:

$$\frac{\partial T_{s_2}}{\partial s_2} = 0 \Leftrightarrow \left(\text{costante} + \frac{T_y s_2 t}{I_{xt}} \cdot \frac{H}{2} - \frac{T_y \frac{s_2^2}{2} t}{I_{xt}} \right)' = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{H/2 T_y}{I_x} - \frac{T_y s_2}{I_x} = 0 \Rightarrow s_2 = \frac{H}{2} \text{ asse baricentrico}; \quad \frac{\partial^2 T_{s_2}}{\partial s_2^2} = -\frac{T_y}{I_x} \Rightarrow \text{il punto è un massimo.}$$



È possibile calcolare esplicitamente l'andamento delle tensioni nel terzo tratto in maniera del tutto analoga a quanto fatto per i primi due tratti, ma è del tutto evidente per la geometria della sezione che le T_{zs} siano uguali e opposte alle T_{sz} .

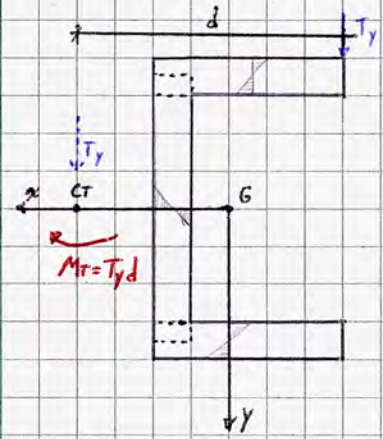
Poiché è possibile scegliere la corda a piacere, nel caso in cui si volesse calcolare esplicitamente le tensioni si può cambiare riferimento, scegliendo una s_3 che parte da S ed è diretta verso R. A prescindere dal riferimento, il momento statico nel tratto 3 risulterà opposto a quello ricavato in 1, determinando un andamento opposto delle tensioni.

⑤ In fase di verifica si confrontano le $T_{z \text{ MAX}}$ nei tre tratti, si seleziona la massima in assoluto e si osserva se è compatibile con la σ ammissibile.

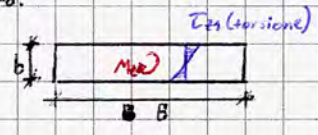
Il raggiungimento della rottura in un solido dipende dalla natura del materiale; per i materiali duttili esiste un criterio di resistenza (criteri che modellizzano i meccanismi di rottura) detto criterio di Hencky-von-Mises, che ipotizza una tensione equivalente $\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_z^2}$ in un solido soggetto ad uno stato di tensione piano, la quale viene poi confrontata con σ_r/γ_s .

τ_z tangenziale e torsionale
 σ_z sforzi di flessione, normali...

4.2) Studiamo in maniera più esplicita il momento torcente:



$M_z = T_y d$, ripartita nelle sezioni ①, ②, ③ in $M_{t,1}; M_{t,2}; M_{t,3}$. In ogni profilo rettangolare allungato:



$$\tau_{z-1}(t)_{\text{MAX}} = \frac{M_{t,1}}{I_{t,1}} b = |\tau_{z3 \text{ MAX}}|$$

fattore di torsione = $\frac{1}{3} B b^3$

Analogamente, $\tau_{z2 \text{ MAX}}(t) = \frac{M_{t,2}}{\frac{1}{3} H t^3}$

Ricordando che $M_{t,i} = \frac{K_{t,i}}{\sum K_{t,i}} M_t$, sono identificate le ripartizioni del momento torcente nella struttura.

fine.

Scienza delle Costruzioni - prof. Massimiliano Fraldi

22.07.2022-28