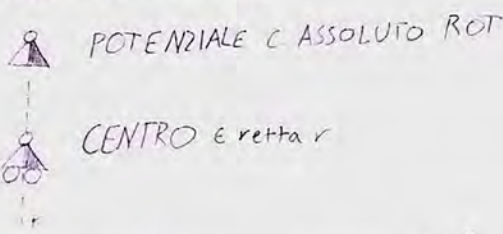


**CENTRI ROTAZIONE**



POTENZIALE C ASSOLUTO ROT

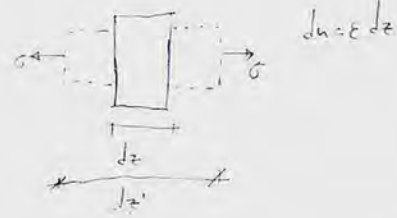
CENTRO E retta r

**LINEA ELASTICA**

Leg. cost.  $\sigma = E \epsilon$

**Tensionale**

$\frac{dN}{dz} = p(z)$  ;  $N = \sigma A \Rightarrow \frac{N}{A} = E \epsilon \Rightarrow N = E A \epsilon$  ;  $\epsilon = \frac{du}{dz}$   
 Eq. equilibrio      Eq. congruenza (leg. costitutiva)      Eq. compat. lit.  $\frac{EA du}{dz}$

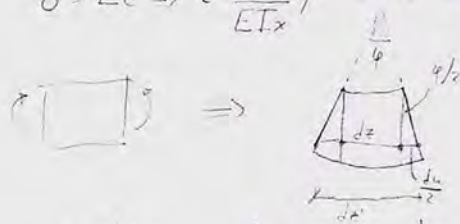


**Flessionale**

$\sigma = ky$

$dM = \sigma dA \cdot y = ky^2 dA \Rightarrow M = k I_x \Rightarrow \sigma = ky = \frac{M}{I_x} y$  **Formula Navier**

$\sigma = E \epsilon \Rightarrow \epsilon = \frac{M}{E I_x} y$  da cui info cinematica.

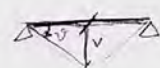


$\epsilon = \frac{dz' - dz}{dz} = \frac{dz + du - dz}{dz} = \frac{du}{dz} = \frac{d\phi \cdot y}{dz}$   
 eg  $\frac{y}{z} = \frac{du}{z/y} = \frac{du}{z y}$

$\epsilon = \frac{d\phi \cdot y}{dz} \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \frac{\epsilon}{y} \Rightarrow \frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{E I_x}$  **LEG COST:  $\phi' = \frac{M}{E I_x}$**

$\Delta$  Piccoli spost  $\Rightarrow$  deformata vincolat, piccole deformazioni  $\Rightarrow v'(z) \ll 1 \Rightarrow \chi \sim v'' \frac{1}{R} \Rightarrow$  eg  $\chi \sim v'' = \phi'$  misura la deform. flex.

Da tutto ciò,  $\frac{dT}{dz} = -q(z)$ ,  $\frac{dM}{dz} = T(z)$ ,  $\chi = \frac{d\phi}{dz} = \phi' = \frac{M}{EI}$ ;  $\frac{dv}{dz} = -\phi$  (eg  $\chi \sim v''$ )

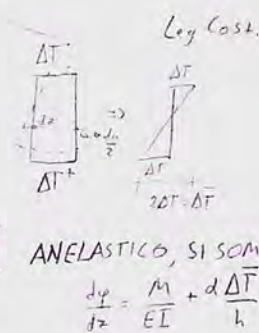


**Temperatura**

Dilat term  $\Rightarrow \Delta T \rightarrow \epsilon = \alpha \Delta T$

$\Delta T(y) = \frac{\Delta T}{h} y = \frac{\Delta \bar{T}}{h} y$

$\chi^a = \frac{\Delta T}{y} = \frac{\epsilon}{y} = \frac{\alpha \Delta \bar{T} y}{h y} = \frac{\alpha \Delta \bar{T}}{h}$



Leg Cost.

Eq. compat.

derivando può legare le altre  
 $v'' = -\phi' = -\frac{M}{EI}$   
 $v''' = -\phi'' = -\frac{1}{EI} M' = -\frac{T}{EI}$   
 $v'''' = -\frac{1}{EI} T' = \frac{q}{EI}$

ANELASTICO, SI SOMMA A FLESSIONALE DOVE PRESENTE

$\frac{d\phi}{dz} = \frac{M}{EI} + \frac{\alpha \Delta \bar{T}}{h}$

**CONTINUO DI CAUCHY - GENERALITÀ**

Regione  $\Omega \in \Sigma(\mathbb{R}^3)$ , solidatura oggetti 3D. 3 sottoteorie  $\left\{ \begin{array}{l} \text{deform} \\ \text{tens} \\ \text{LC} \end{array} \right.$

Prop. Continua:  $\forall P \exists \rho(x) > 0 \Rightarrow$  no pori/buchi, insieme denso  $\Rightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0} \rho(\delta)$

$\partial\Omega$  gen. regolare  $\Rightarrow F$  sup stampabili in tg/ $\perp$ ,  $\exists!$   $n_i$  a piano tg tramite i pti

$\partial\Omega$  orientabile  $\Rightarrow$  distingu. IN/OUT e convenzione delle forze

**TEORIA DELLA DEFORMAZIONE**

Fig  $\Rightarrow$  Suit,  $\forall P \exists \underline{x}(P) = (x_1, x_2, x_3) \wedge \rho(\underline{x}) = \frac{dm}{dV}$

contig. inif./finale, no hp tempo perché intermedio non interessa

$\Downarrow \underline{u} = \underline{x}' - \underline{x}$  vettore spost.  $\exists \forall P \in \Omega: \forall Q, H, Q+H. \exists Q', H': \underline{u}_Q \neq \underline{u}_H$  gen.;  $\underline{u}_i \in C^2(\Omega) \Rightarrow$  no dis. (bucce)

$\underline{x}'_i(\underline{x}) = \underline{x}_i + \underline{u}_i(\underline{x}) \quad \forall i=1,2,3$  **NO INFO DEFORM**  $\Rightarrow \underline{\mathbb{I}} \quad d\underline{x}'_i(\underline{x}) = d\underline{x}_i + d\underline{u}_i(\underline{x}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} dx'_1 \\ dx'_2 \\ dx'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix}$

$d\underline{u} = \text{grad } \underline{u} \, d\underline{x} \Rightarrow d\underline{x}' = \underline{\mathbb{I}} \, d\underline{x} + \text{grad } \underline{u} \, d\underline{x} = d\underline{x} (\underline{\mathbb{I}} + (\nabla \otimes \underline{u})^T) = d\underline{x} \underline{\mathbb{E}}$

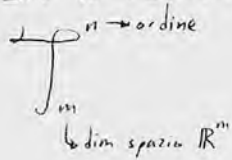
grad. deform.

informa su variaz. fibre  $\Rightarrow \exists$  rotaz. rigide ancora in  $\underline{\mathbb{E}}$   $\hookrightarrow$  indice:  $dx'_i = F_{ij} dx_j \quad j=1,2,3$

$\delta_{ij} + \frac{du_i}{dx_j}$



**Info sui TENSORI**



Noi  $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$

$\int_3^0$  scalare  $\equiv$  sno invariante

$\int_3^1$  vettore  $\Rightarrow$  invariante = modulo

$\int_3^2$  + usati  $\Rightarrow$  max. 3 invar.  $\left\langle \begin{matrix} \text{tr } A \text{ (a } \sum a_{ii}) \\ \text{somma min princ. } (|\begin{smallmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{smallmatrix}| + |\begin{smallmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{smallmatrix}| + |\begin{smallmatrix} \cdot & & \\ & \cdot & \\ & & \cdot \end{smallmatrix}|) \\ \text{det } A \end{matrix} \right.$

no invarianti = rango della forma matriciale del tensore

**OPERAZIONI PRINC. MEC CONT**

Assegnato  $\underline{u}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2, x_3) \\ u_2(\dots) \\ u_3(\dots) \end{bmatrix}$ ,

$\text{div } \underline{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (\Sigma) = \nabla \cdot \underline{u} = \nabla^T \underline{u} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$

$\text{rot } \underline{u} = \nabla \times \underline{u} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix}$

$\text{grad } \underline{u} = (\nabla \otimes \underline{u})^T = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}^T$  Da 2 vett 1 tens  $\Rightarrow$  prod. tensoriale

**TEORIA DEL I GRADIENTE (come  $u' \Rightarrow$  Linea el.estens. ma in continuo?)**

$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} \xrightarrow{\text{continuo}} \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\underline{u} = u(\underline{x}))$   $\xrightarrow{\text{moduli (invarianti!)}}$

Si considera la fibra (el. infimo LINEARE)  $\Rightarrow \varepsilon = \frac{|dx'|^2 - |dx|^2}{|dx|^2}$   $\xrightarrow{\text{misura EUCLIDEA DI DEFORM. (basata su distanze } \Rightarrow \text{moduli)}}$

Espliciti i termini  $\Rightarrow |dx|^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = dx^t dx = dx^t \underline{I} dx$

$|dx'|^2 = dx'^t dx' = dx^t \underline{E} dx \quad \underline{E} = \underline{F}^t \underline{F}$

Sostituendo in  $\varepsilon = \dots = \frac{dx^t (\underline{E} - \underline{I}) dx}{|dx|^2} \quad \underline{D} = \frac{1}{2} (\underline{F}^t \underline{E} - \underline{I})$  **Tensore delle DEFORMAZIONI FINITE**

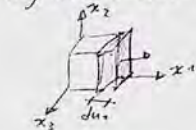
Ricordando  $\underline{E} = \underline{I} + (\nabla \otimes \underline{u})^T$   $\Rightarrow 2\underline{D} = \dots = \underbrace{(\nabla \otimes \underline{u})^t (\nabla \otimes \underline{u})}_{\text{lineare risp. } \underline{u}} + \underbrace{(\nabla \otimes \underline{u}) (\nabla \otimes \underline{u})^t}_{\text{non lin. risp. } \underline{u}}$   $\xrightarrow{\text{Hp piccole def } \Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1}$

Dunque  $\underline{D} \sim \frac{1}{2} [(\nabla \otimes \underline{u})^T (\nabla \otimes \underline{u})] =: \underline{E}$  **TENSORE DELLE DEF. INFINITESIME** *inf. per le deform.*

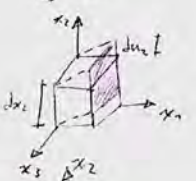
$\underline{E}$  ha carattere LOCALE ( $\underline{E} = \underline{E}(\underline{x}) \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\underline{x})$ ) ed è SIMMETRICO:  $\underline{E} \equiv \text{sym}(\nabla \otimes \underline{u})^T = \text{sym}(\text{grad } \underline{u})$

$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ ;  $\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$

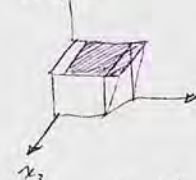
Significato delle componenti di  $\underline{E}$ :



$\varepsilon$  è dovuta a un  $du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3 \Rightarrow \frac{du_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \varepsilon_{11}$  esplicita le def. delle fibre //  $x_1$  (DIAG. PRINC)



$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)$   $\text{tg } \alpha = \frac{du_2}{dx_1} = \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3 \right) \Rightarrow \text{tg } \alpha = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \ll 1 \Rightarrow \frac{du_2}{dx_1} \sim \alpha$

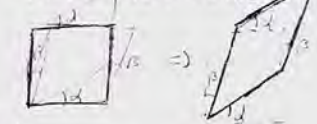


$\varepsilon_{13} = \varepsilon_{31} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)$   $\text{tg } \beta \approx \beta = \frac{\partial u_3}{\partial x_1}$

Scopos. matrice in sym e skew (antisym)

sym	skew
$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{A} + \frac{1}{2} \underline{A}$	$\underline{A} = \frac{1}{2} \underline{A} + \frac{1}{2} \underline{A}^t + \frac{1}{2} \underline{A} - \frac{1}{2} \underline{A}^t$ [for skew]
	$\underline{L} = \underline{0}$

CON SOVRAPP EFFETTI (piccole def  $\Rightarrow$  sovrapp su deform) HAI INFO COMPLESSIVE DI DEFORMAZIONE



La def. complessiva può però essere vista anche come pura distorsione angolare + pura rotazione



Equaz. diff. equilibrio:  $\frac{dN}{dz} = -p(z)$ ;  $\frac{dT}{dz} = -q(z)$ ;  $\frac{dM}{dz} = T(z)$

LCEL Travi:  $\frac{dv}{dz} = -\varphi$ ;  $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} + \frac{d\Delta T}{h}$ ;  $\frac{dN}{dz} = -p(z)$ ;  $\frac{dT}{dz} = -q(z)$ ;  $\frac{dM}{dz} = T(z)$

$\frac{dN}{dz} = -p(z) \Rightarrow N = EA \epsilon_z = EA \frac{du}{dz} \Rightarrow EA u'' = -p(z) \Rightarrow p(z) = -EA u''$

$\frac{dT}{dz} = -q(z) \Rightarrow T = -EI v'''$

$\frac{dM}{dz} = T(z) \Rightarrow M = -EI v''$

$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M}{EI} + \frac{d\Delta T}{h} \Rightarrow \varphi = -v'$

$\frac{dv}{dz} = -\varphi \Rightarrow v = -\int \varphi dz$

$\frac{dN}{dz} = -p(z) \Rightarrow N = EA \epsilon_z = EA \frac{du}{dz} \Rightarrow EA u'' = -p(z) \Rightarrow p(z) = -EA u''$

$\int p(z) dz = -EA u' \Rightarrow N = EA u'$

$\int \int p(z) dz dz = -EA u \Rightarrow u$

Eq. INDEFINITE DI EQUILIBRIO SPECIALIZZATE AL LCEL

Equaz. LINEA ELASTICA:  $\begin{cases} M = -EI v'' \\ N = EA \epsilon_z = EA u' \end{cases}$

Dalle eq. generiche, introducendo le cond. al contorno (estremi trave) si ottengono i dati.

Δ Dualità stat. cin ⇒ 2 sistemi:

$\begin{cases} M \\ T \\ N \end{cases}; \begin{cases} \varphi \\ v \\ u \end{cases}$

eventualmente trov. relazioni tra le CDS:  $R \neq 0 \Rightarrow R_y = R_x \tan \alpha$ ;  $S = 0 \Rightarrow v = -u \cot \alpha$ ;  $\frac{dy}{dx} = z$

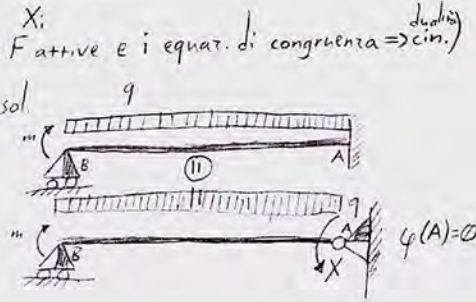
Metodo delle Forze

Consideri un numero di forze pari a i come incognite ⇒ Schema isostatico stat. eq. (con inc. come F attive e i equaz. di congruenza ⇒ cin.)

Th. Kirchoff: 2 sist. strutt. continui hanno stesse caratt. stat. e cin ⇒ equivalenti, stessa sol.

Eq. congr. per linearità può sovrapp. effetti:  $\varphi(A) = \varphi_A(q) + \varphi_A(m) + \varphi_A(X) = 0$

RISOLVI (⇔) SCHEMI NOTEVOLI ottenuti appl. la linea elastica allo schema.



①  $\varphi_A = -\varphi_B = -\frac{qL^3}{24EI}$ ,  $v_m = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$

②  $\varphi_A = -\frac{M_B L}{6EI}$ ,  $\varphi_B = \frac{M_B L}{3EI}$

③  $\varphi_A = -\varphi_B$ ,  $v_m = \frac{FL^3}{48EI}$

$\Rightarrow \varphi_A = -\frac{qL^3}{24EI} + \frac{mL}{6EI} - \frac{XL}{3EI} = 0 \Rightarrow X$

$\varphi_A(q), \varphi_A(m), \varphi_A(X)$

Nota X risolv. l'eq. dello schema isostatico e tracci i diag. delle CDS, ⇒ all'iper per Kirchoff

Statica Grafica (ISOSTATICHE)

- ① Verifica ISOSTAT
- ② Trova tratto IPER-SCARICO o ISO-CARICO
- ③ Reazioni concorrono in un punto ⇒ poligono forze ⇒ altri tratti
- ④ Rvine note ⇒ DIAG CDS: scopri andam. M e punti NULLO (n rette vinc - struttura e prolung.). Utile progredire per sezione mobile che guarda indietro. In tratti continuità nodali solitamente  $M^E = M^II$ . SEMBRA conveniente partire da M.

CONTINUO - Teoria della deform. p.2

$\begin{cases} x+w=d \\ x-w=\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{d+\beta}{2} \\ w = \frac{d-\beta}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \epsilon = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) = \epsilon_{12} = \epsilon_{21} \\ \omega = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \text{componente } \omega \text{ di skew}((\nabla \otimes u)^T) \end{cases}$

$\text{sym}(\text{grad } u) \Rightarrow \underline{\underline{\epsilon}}; \text{skew}(\text{grad } u) \Rightarrow \underline{\underline{\omega}} \Rightarrow \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\epsilon}} + \underline{\underline{\omega}}$

$\underline{\underline{\omega}} = \underline{\underline{\Omega}}$  TENSORE DELLE ROT. RIGIDE  $\omega_{ij} = \Omega_{ij}$

componenti rot. sono componenti di rotazione del cinematico

Rot. rigide locali ⇒ rot. rig. tra punti (1D descrive con curvatura); 3D considera gradiente del vettore di rot.  $\omega = \nabla(\nabla \otimes u)$  NO OGGETTO STUDI

$\epsilon_{ii} = \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$  ha un significato importante: considera  $\Omega_0 \subset \Omega$ ;  $\text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = c = \frac{\Delta(\Delta V)}{\Delta V}$  con  $\Delta V = \text{vol}(\Delta \Omega) \Rightarrow$  deforma localmente il coeff. di volum.

Dim:  $\Delta \Omega_0$  regolare;  $u(x) \Rightarrow$  deform. vol.  $(u(x) \cdot n) \perp \Delta \Omega_0 \Rightarrow \Delta V = \int_{\Delta \Omega_0} u(x) dx = \int_{\Delta \Omega_0} \text{div}(u(x)) dx \Rightarrow \lim_{V \rightarrow \Delta V} \frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{V} \int_{\Delta \Omega_0} \text{div}(u(x)) dx = \frac{1}{V} \nabla \cdot u = \nabla \cdot u = \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}}$

$-1 < \text{tr } \underline{\underline{\epsilon}} = c(x) < 1$ ;  $c = \frac{\Delta V}{V} = \frac{V' - V}{V} = \frac{V'}{V} - 1 \Rightarrow V' = (1+c)V, V' > 0 \Rightarrow c$  al più -1 (non può annullarsi il volume per una contratt.)

Congruenza Inversa

noto  $\underline{\underline{\epsilon}}$  cerchi  $u$ :  $\text{sym}(\nabla \otimes u)^T = \underline{\underline{\epsilon}}$ , 2 cond. NEC (non SUFF.) r.c.  $\exists$  campo  $u$  compatibile con regime deform.

①  $\exists$  sempre:  $f(x)$  continua/regolare ⇒  $\exists \int f(x) dx, \exists F(x) = \int f(x) dx \Rightarrow f(x) = \frac{\partial F}{\partial x} \Rightarrow \int f(x) dx = \int \frac{\partial F}{\partial x} dx = F$ ;  $f(x) dx = \frac{\partial F}{\partial x} dx$  forma diff. esatta

② in deform.  $\epsilon(x) = f(x) \Rightarrow \exists u(x) = \int \epsilon(x) dx, \Leftrightarrow \epsilon(x) = \frac{\partial u}{\partial x}$ ? Sì perché  $\epsilon(x) dx = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx$  ESATTA

In generale,  $f_x(x,y)$  e  $f_y(x,y)$  non coincidono nec. con le der. parz. di F; per verificare  $F = \int dF$  serve che  $f_x$  e  $f_y$  verificano le CONDIZIONI DI SCHWARTZ, ovvero se  $f_{xy} = f_{yx} \Rightarrow \int f_x dx + \int f_y dy$  DIFF. ESATTA ⇒  $dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy; \frac{\partial F}{\partial x} = f_x$

riccardo.polidoro



Sì, IPOTIZZAZIONE  $\exists u \Rightarrow du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ ;  $V_i = 1, 2, 3$ ;  $\forall j = 1, 2, 3 \Rightarrow \exists u_i(x) = \int du_i$

Assegnato  $E$ , le forme diff. sono del tipo  $du_i = \frac{(E_{i1} + W_{i1})}{a} dx_1 + \frac{(E_{i2} + W_{i2})}{b_i} dx_2 + \frac{(E_{i3} + W_{i3})}{c_i} dx_3 = (E_{ij} + W_{ij}) dx_j$   $j = 1, 2, 3$

Der. II miste  $\Rightarrow \frac{\partial a_i}{\partial x_2} = \frac{\partial b_i}{\partial x_1}$ ;  $\frac{\partial b_i}{\partial x_3} = \frac{\partial c_i}{\partial x_2}$ ;  $\frac{\partial a_i}{\partial x_3} = \frac{\partial c_i}{\partial x_1} \Leftrightarrow \nabla \times (\nabla \times \underline{E})^T = \underline{0} \Rightarrow du_i = du_i$

$\frac{\partial^2 E_{ij}}{\partial x_k \partial x_l} = E_{ijk} + E_{lik} = E_{ihk} + E_{jki} \forall x \in \Omega$   $i, j, k, l = 1, 2, 3 \Rightarrow 6$  eq. cong. inversa

Le eq. restringono SOLO  $E$ , non  $W$ :  $\text{Dim } 2D$ :  $\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}$ ;  $\underline{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} \Rightarrow \exists \underline{u} \Leftrightarrow \int_{\Omega} du_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 = \int_{\Omega} du_1$

$du_1 = (E_{11} + W_{11}) dx_1 + (E_{12} + W_{12}) dx_2 = E_{11} dx_1 + (E_{12} + W_{12}) dx_2$   
 $du_2 = (E_{21} + W_{21}) dx_1 + E_{22} dx_2$

$W_{ij}$  è compon. mat SKEW  $\Rightarrow W_{ii} = 0$   
 $W_{ij} = -W_{ji}$

Schwartz:  $\frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial (E_{12} + W_{12})}{\partial x_1} \Leftrightarrow \frac{\partial E_{11}}{\partial x_2} = \frac{\partial E_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial W_{12}}{\partial x_1}$   
 $\frac{\partial (E_{21} + W_{21})}{\partial x_2} = \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} \Leftrightarrow \frac{\partial E_{21}}{\partial x_2} = \frac{\partial E_{22}}{\partial x_1} - \frac{\partial W_{21}}{\partial x_1}$

Comp. inversa (alca interna)  $\Rightarrow$  verifica  $\exists$  config deformata SENSATA noto il regime deformativo:  $\underline{E}$  locale ma interdependente!

**TEORIA DELLA TENSIONE** No cinematica, solo forze  $\Rightarrow$  no interessa config. deform. (dove però Rime ed eq. piccoli spost)

$\left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right| \ll 1 \forall x \in \Omega$  piccoli spost +  $\frac{1}{D} \ll 1 \forall x \in \Omega$  piccoli spost  $\Rightarrow$  det  $\approx$  indet: in trave,  $L' = L \Rightarrow F$  in punta appl. sempre a  $L$ , un  $\phi$   $v \geq 0$  uccv

$\int_{\Omega} \underline{F} \cdot d\underline{\Omega} = \underline{u}(x) \cdot \underline{0}$ , condizione al contorno in eq. d. CONGRUENZA ALLA DEFORM.

$\underline{F} \begin{cases} \text{di sup.} \Rightarrow \underline{t} \text{ (tractions, [Pa])} \Rightarrow \begin{bmatrix} t_a \\ t_b \\ t_c \end{bmatrix}$  non delle 3  $L \cdot d\underline{\Omega}$  altre tg.  
 $\text{di vol.} \Rightarrow \underline{b}$  (body forces, [ $N/m^3$ ]) interne corpo. Noi peso  $\Rightarrow \underline{b}(x) = \rho(x)g$  spesso tenic rispetto a  $F$  di sup.

Interazioni tra  $dV$  per effetto delle  $F \Rightarrow$  tensioni e stress interni  $\sim$  CDS trave,  $\underline{E} \in \underline{0}$ . es:  $\int_{\Omega} \underline{E} \cdot d\underline{\Omega}$

Le solt int hanno  $\Sigma F_{int} = \text{appl. in baricentro } G$ , con compari  $1L$  c'try a sezione +  $3M$  (puoi rapp. con biavvitatore)

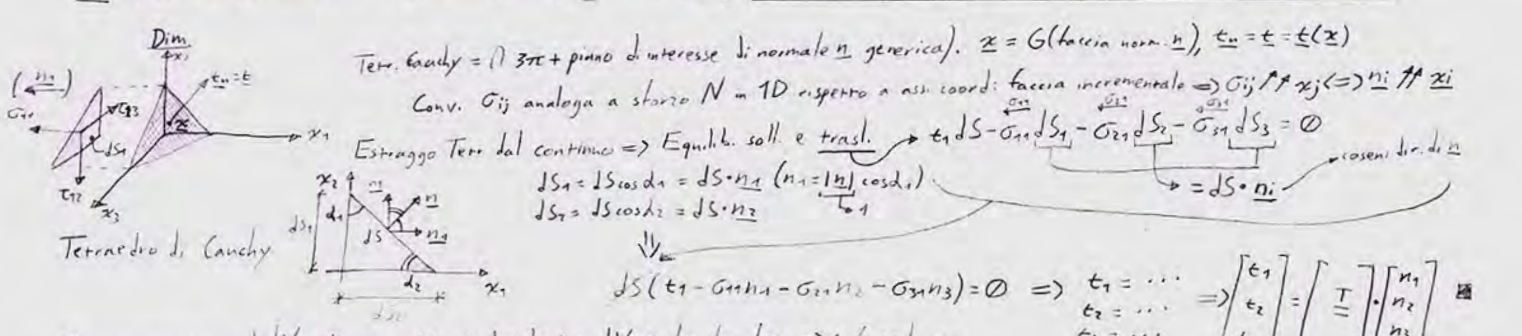
Considerando porzione  $\Delta S$  di sez taglio,  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} =: \underline{t}_n(x)$  VETTORE TENSIONE DI CAUCHY

$\underline{t}_n(x)$  misura sotteranea zona di  $\Omega$  per interaz. f. int

In th. tensione Cauchy,  $\lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta A} = 0$ : trasl. per  $\Delta A \Rightarrow$   $\Delta$  coppie concentrate

Stetto  $\Omega$  con piani  $\parallel \underline{e}_i$ , ottago  $d\underline{\Omega}$  con  $\underline{n}_i \parallel \underline{x}_i$ . Su baricentro  $\exists \underline{t}_i$  con compon.  $t_{ij}, j=1,2,3 \Rightarrow \underline{t}_i = \underline{T}_{ij} \Rightarrow \underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$  LOCALE

**T TENSORE DELLE TENSIONI** //  $\underline{E}$ : noto  $\underline{T}$ ,  $\underline{t}_n(x) = \underline{T}^T(x) \underline{n} = \underline{T}(x) \cdot \underline{n}$  TEOREMA DI CAUCHY



Se aggiungiamo  $\underline{b} dV$  alla eq,  $dS_i \propto dx_j dx_k$ ;  $dV \propto dx_1 dx_2 dx_3 \Rightarrow$  int ord. sup

In ESERCIZI, noto eq. compl, imponendo eq. trasl/rot  $\Rightarrow$  trovi  $\underline{T}$ : eq.

**PLV** Equilibrio  $\Leftrightarrow L_v = 0$  (MR)

so statiche: ECS  $\Rightarrow$  equilibrio. Se serve solo una R, PLV sostituendo R al vinco o imponendo eq.  $\Rightarrow L_v = 0$

Discende da generalizz. princ. leva (bilancia asse): eq  $\Leftrightarrow F_1 a = F_2 b$

Si dice che da PLV discendono ECS e, stabilizzando totalm  $S$  e introd. LCEL, linea elastica.

$F_v + R_v = 0$   
 $F_a + R_a = 0$

**ESTENSIONE AL CONTINUO**

Serve Th per "unire" az e reaz int/ext  $\Rightarrow$  parto da  $\underline{E} = \text{sym}(\nabla \underline{u})^T$

Lablizzazione Fittizia  $\Rightarrow$  PLV; non permette LC: in lablizzare imponi che l'equilibrio vale  $\forall \phi$  virtuale, arbitrariamente piccolo.

In continuo,  $\underline{T}$  reali su  $(E)$   $\underline{E}$  e  $\underline{u}$  virtuali.  $\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} = -b_1 \\ \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \text{div } \underline{T}^T = -\underline{b} \Leftrightarrow \nabla \cdot \underline{T}^T = -\underline{b}$

Si impongono  $\left\{ \begin{array}{l} \text{eq. indefinite di equilibrio} \Rightarrow \dots \\ \text{eq al contorno: } \underline{T} \cdot \underline{n}(Q) = \underline{t}(Q) \forall Q \in \partial \Omega_t \end{array} \right.$



# PLV - Continui

Equilibrio:  $\nabla \cdot \underline{T} = -b$   
 Contorno:  $\forall x \in \partial\Omega_c, \underline{T} \cdot n(x) = \underline{t}(x)$

Campo di spost. virtuali (non legato alle tens. ext) =  $\{ \underline{u}^*, \underline{\epsilon}^* \}$   $\Rightarrow$  campo DI PROVA

$\exists L_v \begin{cases} \text{EXT: dovuto a azioni ext} \\ \text{INT: dovuto a forze int} \end{cases} \Rightarrow \text{PLV} := L_{ve} = L_{vi}$  **TEOREMA DEI LAVORI VIRTUALI**

①  $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{T} \cdot \underline{u}^*) dV = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\Omega} \underline{T}^T \cdot (\nabla \otimes \underline{u}^*)^T dV$   
 (bilineare)  $(\epsilon_{ij}, \epsilon_{ij}^*)$   
 $\frac{\partial(f \cdot g)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} g + \frac{\partial g}{\partial x} f$  **(A) = (B)**  $\blacksquare$

②  $\int_{\Omega} \nabla \cdot (\underline{T} \cdot \underline{u}^*) dV \stackrel{\text{F. distribuite in continuo}}{\approx} \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot n) \cdot \underline{u}^* dS$   $\int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot n) \cdot \underline{u}^* dS$   $(\underline{T} = \underline{T}^T \text{ perché sym})$

Infatti,  $\int_{\Omega} (\nabla \cdot \underline{T}) \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\Omega} \underline{T}^T \cdot (\nabla \otimes \underline{u}^*)^T dV = \int_{\partial\Omega} (\underline{T} \cdot n) \cdot \underline{u}^* dS$

$= \int_{\Omega} \underline{T} : \text{sym}(\nabla \otimes \underline{u}^*) dV = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS$   $\forall \underline{u}^*$

La relazione vale indipendentemente dalla natura del corpo  $\Rightarrow$  puoi sempre appl. per l'eq.

$\int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS$   $\forall \underline{u}^*$

$\int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS$   $\forall \underline{u}^*$

$\int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV + \int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS$   $\forall \underline{u}^*$

## PLV - Sistemi di TRAVI PIANE

2 Appl: Isostatiche  $\rightarrow$  cerchi spostamenti  
 Iperstatiche  $\rightarrow$  cerchi reazioni iperstatiche

Si specializza il PLV da continui:

LE estensionale:  $N = \int_{A} \sigma_z dA$ ;  $f(z) [=] F/L \Rightarrow \underline{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F/A \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{b}_z \neq 0$

PLV estens:  $\int_0^L \frac{F}{A} u_z^* dz + \sum_{k=1}^n E_k u_k^* = \int_0^L N u_z^* dz$

$\sigma_z = N/A$   
 $\epsilon_z = \frac{du_z^*}{dz} = u_z^*$

$\int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u}^* dV = \int_0^L \frac{F}{A} u_z^* A dz$   
 $\int_{\partial\Omega} \underline{t} \cdot \underline{u}^* dS = \sum_{k=1}^n F_k u_k^*$   $\left\{ \begin{array}{l} F \text{ gen esterne} \\ F_k \text{ punti estrom travo} \end{array} \right.$   
 $\int_{\Omega} \underline{T} : \underline{\epsilon} dV = \int_0^L \sigma_z \epsilon_z A dz = \int_0^L N u_z^* dz$

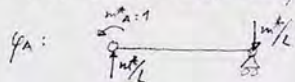
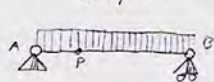
In generale, PLV TRAVI:

$\int_0^L p u_z^* dz + \int_0^L q v^* dz + \sum_{k=1}^n F_k u_k^* = \int_0^L N u_z^* dz + \int_0^L M v''^* dz$

$L_{ve}$   $\left[ \begin{array}{l} 0 \\ v_k \\ u_k^* \end{array} \right]$

### Isostatiche

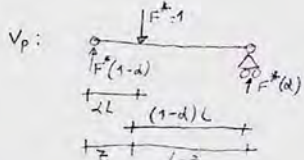
Trovi gli spost. REALI con forze fittizie duali allo spost. cercato:



$L_{ve} = m^* \cdot \varphi_A$

$L_{vi} = \int M^* \frac{v''}{EI} dz$

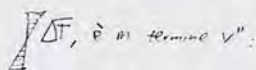
$M^* = -q \frac{z^2}{2} + q \frac{L}{2} z$  (CDS  $\rightarrow$  libbre mt)



$F^*$  implica una DISC. in M  $\Rightarrow$

$L_{vi} = \int_0^d F^*(1-d) z \frac{M^*}{EI} dz + \int_d^L F^* d(L-z) \frac{M^*}{EI} dz$

Se  $\exists$  cedimento su vincoli, sono in  $L_{ve}$ :  $\Delta y$  in A verso la sinistra  $\Rightarrow L_{ve} = m^* \varphi_A - \Delta \frac{m^*}{L}$



IN GENERALE:

$L_{vi} = \int_{\mathcal{S}} M^* \frac{M^{re}}{EI} dz \pm \int_{\mathcal{S}} M^* \frac{|\Delta T|}{h} dz + \int_{\mathcal{S}} N^* \frac{N^{re}}{EA} dz$

$\mathcal{S} \equiv$  struttura



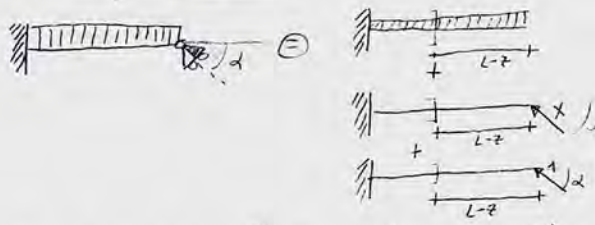
PLV su travi IPERSTATICHE

$i=1$  Tante  $LVE = LVI$  quante inc. iperstatiche

- ① realizzare schema ISO stat. eq. con inc. IPER come attiva
- ② Separi schema ISO in  $\begin{cases} \text{Schema soll. NOTE} \\ \text{Schema INCOGNITE} \end{cases}$
- ③ Scorre sec. ideale lungo  $z \Rightarrow$  CDS aiutano per trovare  $X$
- ④ Schema SCARICO  $H/F=1, E^*$  come INC in luogo del vincolo, postulando eq.
- ⑤ Sovrapp. EFFETTI:  $M^{reale} = M^{NOTE} + M^1 X$

Trucco in INTEGRALI  
 love  $(L-z)$ ,  $L-z = \bar{z} \Rightarrow z=0 \Rightarrow \bar{z}=L$   
 $z=L \Rightarrow \bar{z}=0$   
 $d\bar{z} = -dz$   
 $\bar{z} = L-z$

$\Delta$  Analisi Dimensionale: spesso dimentichi cose



- ⑥  $LVE = LVI$  su spost. REALI.  
 Essendo IPER,  $LVE = 1 \cdot$  spost reale  $\begin{cases} 1 \cdot \delta = 0 \text{ (vincolo)} \\ 1 \cdot \delta = \delta \text{ (cedimento)} \end{cases}$
- $\Rightarrow \begin{cases} M^0 = -q \frac{(L-z)^2}{2} \\ N^0 = 0 \end{cases}; LVE = 1 \cdot u_{VB} = 0$
- $\begin{cases} M^1 = 1 \cdot \text{sen} \alpha (L-z) \Rightarrow M^1 X = X \text{sen} \alpha (L-z) \\ N^1 = -1 \cdot \text{cos} \alpha \Rightarrow N^1 X = -X \text{cos} \alpha \end{cases}$
- $\int y^2 dA = I^2 A, \rho \sim D \ll L$

Ricordiamo  $LVI = \int_0^L N^i \cdot \frac{N^{reale}}{EA} dz + \int_0^L M^i \cdot \frac{M^{reale}}{EI} dz$

SPESO  $N$  E' TRASCURABILE (RISPETTO ALLA FLESSIONE):  $\frac{L/EA}{L^3/EI} = \frac{I/A}{L^2} = \frac{\rho^2}{L^2} = \left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \ll \ll 1 \Rightarrow$  TRAS

$i > 1$   $i=n \Rightarrow X^i, i=1, \dots, n$  in sost. dei vincoli soppressi.

- ①  $N^0$  tratti  $\Rightarrow n^0$  eq. equilibrio e di s.rif.
- ② SCHEMI: soll. note, 1 schema "unitario"  $\forall X$  con reazioni  $(N^0, M^0)$  per calc.  $N^i, M^i$
- ③ Note  $N^0, N^i, M^0, M^i \forall$  tratto, applico  $LVE = LVI \forall X$  sommando i contributi dei tratti
- ④  $\begin{cases} L'VE = L'VI \\ L''VE = L''VI \\ L'''VE = L'''VI \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 \\ X_2 \\ \dots \\ X_n \end{cases}$

**SE  $i > 1$ , il metodo NON CONVIENE A MANO!**

$LVI = \int \left[ \begin{matrix} \text{sist. forze lavoranti} \\ \text{nel tratto } i \end{matrix} \right] \left( \begin{matrix} \text{termine uguale per} \\ \text{tutti i tratti} \end{matrix} \right) dz = L'VE$

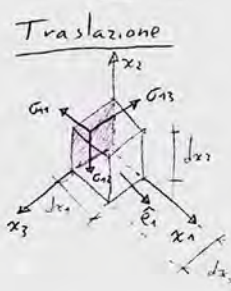
EQUILIBRIO DEI CONTINUI  $\forall \underline{x}$ ,  $\underline{t}_n(\underline{x}) = \underline{T}^T(\underline{x}) \cdot \underline{n}$ ,  $\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \Rightarrow [T]_{ij} = \sigma_{ij}$

$\Omega$  in eq  $\Rightarrow$  in eq ogni sua parte  $\Rightarrow \forall \underline{x}$ .

$$\begin{cases} (\nabla \cdot \underline{T}(\underline{x}))^T + \underline{b}(\underline{x}) = \underline{0} \\ \underline{T}^T(\underline{x}) = \underline{T}(\underline{x}) \end{cases} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$$

equilibrio alla traslazione  
equilibrio alla rotazione

DIM



Traslazione

Direzione 1  $(\hat{x}, \hat{e}_1)$

$$-\sigma_{11} dx_2 dx_3 + (\sigma_{11} + d\sigma_{11})(dx_2 dx_3) + \dots + \sigma_{31} dx_1 dx_2 + (\sigma_{31} + d\sigma_{31})(dx_1 dx_2) + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$d\sigma_{11} dx_2 dx_3 + d\sigma_{21} dx_1 dx_3 + d\sigma_{31} dx_1 dx_2 + b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left( \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + b_1 \right) dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \Leftrightarrow = 0$$

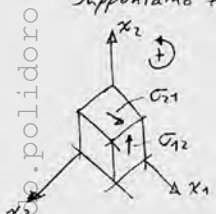
(Si assume che  $\forall dx_i$  varia la tensione, sommando tutte le componenti parallele a  $\hat{x}_i$ )

Analogamente nelle direzioni ② e ③. Messo a sistema, in forma indiciale  $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + b_i = 0 \Leftrightarrow \nabla \cdot \underline{T}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x}) = \underline{0} \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

Queste eq. si dicono equazioni indefinite di equilibrio, sono diff. lineari OMOGENEE  $\Rightarrow$  la soluzione è univoca solo includendo le condizioni al contorno ( $\equiv$  problema di Cauchy per def. le cost. integrali)

Rotazione

Supponiamo trascurabili  $d\sigma_{ij}, b$  (sovrapp. effetti).



Rotaz. intorno  $\hat{x}_3$

$\sigma_{12}, \sigma_{21}$  uniche a generare coppia  $\Rightarrow \sigma_{12} (dx_2 dx_3) dx_1 - \sigma_{21} (dx_1 dx_3) dx_2 = 0 \Rightarrow \sigma_{12} = \sigma_{21}$

Se  $b$  non trascuri,  $\int b_i (dx_1 dx_2 dx_3) dx_1/2 \Rightarrow$  int. IX ord  $\Rightarrow$  trasc (analog.  $\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} (dx_1 dx_2 dx_3)$ )

Analogamente nelle rotazioni  $(\hat{x}_1), (\hat{x}_2) \Rightarrow \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow \underline{T} = \underline{T}^T \quad \forall \underline{x} \in \Omega$

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{T}^T = -\underline{b} \\ \underline{T} = \underline{T}^T \end{cases} \Rightarrow \boxed{\nabla \cdot \underline{T} = -\underline{b}} \quad \text{Eq. COMPLESSIVA che riassume il sistema.}$$

riccardo.polidoro



Risolvere il sistema  $\Rightarrow$  condizioni al contorno.  $\underline{\mathbf{b}}$  già incluse in equilibrio alla trasl.; occorre considerare le TRACTION  $\underline{\mathbf{t}}_i \in \partial\Omega_e$

Equilibrio su frontiera  $\Leftrightarrow \underline{\mathbf{t}}_n(\underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_e) = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}}) \left\langle \frac{\text{Th. Cauchy}}{\text{Th. Cauchy}} \right\rangle \underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}})$

Immaginando di traslare il tetraedro di Cauchy t.c.  $\underline{\mathbf{x}} \in \partial\Omega_e$  ( $\partial\Omega$  gen. reg. per Hp), nell'intorno di  $\underline{\mathbf{x}}$   $\partial\Omega$  è approx. un piano tangente in  $\underline{\mathbf{x}}$  alla frontiera non approssimata  $\Rightarrow \underline{\mathbf{n}}$  tetraedro  $\equiv \underline{\mathbf{n}}$  frontiera in  $\underline{\mathbf{x}} \Rightarrow$  ricavi l'eq. derivata dal Th. Cauchy.

$\underline{\mathbf{T}}(\underline{\mathbf{x}}) \cdot \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{t}}(\underline{\mathbf{x}})$  condizione di EQUILIBRIO AL CONTORNO per det. le  $c_i$  di integr. per risolvere le eq. indef. equilibrio

DETERMINAZIONI TENS. PRINC E DIR. PRINC. TENS.

$\underline{\mathbf{T}}$  tensore  $\Rightarrow$  rapp. matriciale dipende dal s.rif.: conoscere compon. rispetto assi del s.rif.  
 Tra le  $\infty$  rapp.  $\underline{\mathbf{T}}$ , ne  $\exists!$  DIAGONALE, coincidente con la rapp. mat di  $\underline{\mathbf{T}}$  nel s.rif. princ. di tens. per lo stato sollecitativo.

$\underline{\mathbf{T}}_P = \begin{bmatrix} C_I & 0 & 0 \\ 0 & C_{II} & 0 \\ 0 & 0 & C_{III} \end{bmatrix}$  nel r.f.  $\hat{\underline{\mathbf{e}}}_I, \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{II}, \hat{\underline{\mathbf{e}}}_{III}$  Applicando il Th. Cauchy,  
 $\underline{\mathbf{t}}_I(\underline{\mathbf{x}}) = \sigma_I \hat{\underline{\mathbf{e}}}_I = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$   
 $\hookrightarrow$  tens. princ. (sono SCALARI)

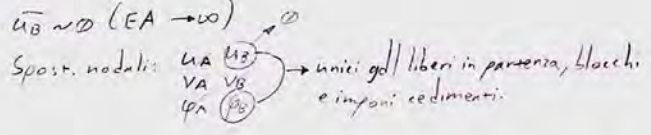
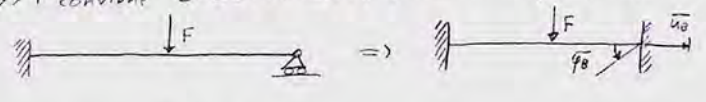
METODO DEGLI SPOSTAMENTI

Come metodo forze, risolve iperstatiche: n° X pari a grado iperstat, con costr. schema ISO stat equiv con X come soll. attive.  
 Spesso puoi Hp rig. destra assiale  $\infty \Rightarrow \underline{\mathbf{u}}$  trascurabile (verificata da Th. trave);  $EA \rightarrow \infty \Rightarrow u_B \rightarrow 0$

Le inc. iperstat sono SPOSTAMENTI, non forze.  $\Rightarrow$  Gli schemi sono CINEMATICAMENTE equivalenti.

- ① Individua spost. nodali. INCOGNITI.
- ② Blocchi tutti gradi libertà nodali, inserendo cedimenti anelastici dove gli spost. nello schema iper sono liberi.
- ③ Applica le dovute eq. di equilibrio per determ. la reaz. iperstatica incognita.
- ④ Rilasci 1 alla volta i gdl nodali liberi e ne sovrapponi gli effetti.

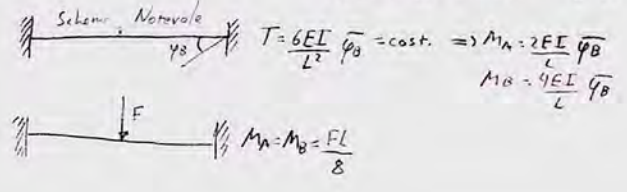
Dove  $i \gg 1$  conviene SPOSTAMENTI (riduce n° incognite) rispetto a FORZE



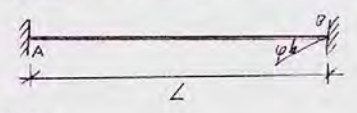
$\varphi_B$ : imponi anche  $\sum M_B = 0 \Rightarrow$  equiv. statica

$\hookrightarrow M_B(F) + M_B(\varphi_B) = 0 = -\frac{FL}{8} + \frac{4EI}{L} \varphi_B \Rightarrow \varphi_B = \frac{FL^2}{32EI}$  cond. al contorno, puoi conoscere  $M(z) = M_B^F + M(z)^{\varphi_B}$  etc.

IN SEZIONI A + TRATTI CONVIENE UN UNICO RIFERIMENTO GLOBALE



DI M SCHEMI NOTEVOLI MDS



$i=3 \Rightarrow$  Eq. equilibrio + eq. congruenza. La dim. PRESCINDE DA CED/DISTORS. Risoluzione o con MIF o LElastica.



$\begin{cases} v_B = 0 \\ u_B = 0 \\ \varphi_B = \bar{\varphi} \end{cases}$   
 $\begin{cases} v_A = 0 \\ u_A = 0 \\ \varphi_A = 0 \end{cases}$

$EIV''''(z) = q(z) = 0$   
 $EIV'''(z) = -T(z) = C_0$   
 $EIV''(z) = -M(z) = C_0 z + C_1$   
 $EIV'(z) = -EI\varphi(z) = C_0 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2$   
 $EIV(z) = C_0 \frac{z^3}{6} + C_1 \frac{z^2}{2} + C_2 z + C_3$

$\begin{cases} v_A = v(z=0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \\ \varphi_A = \varphi(z=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0 \\ v_B = v(z=L) = \frac{C_0 L^3}{6} + \frac{C_1 L^2}{2} = 0 \\ \varphi_B = \varphi(z=L) = \frac{C_0 L^2}{2} + \frac{C_1 L}{1} = \bar{\varphi} \end{cases}$

$\begin{cases} C_1 \frac{L}{EI} = \bar{\varphi} - \frac{C_0 L^2}{2EI} \Rightarrow C_1 = +\frac{EI}{L} \bar{\varphi} - \frac{C_0 L}{2} = \left( \frac{EI}{L} - \frac{3EI}{L} \right) \bar{\varphi} = -\frac{2EI}{L} \bar{\varphi} \\ C_0 \frac{L^3}{6EI} + \left( -\frac{EI}{L} \bar{\varphi} - \frac{C_0 L}{2} \right) \frac{L^2}{2EI} = 0 \Rightarrow C_0 \left( \frac{L^3}{6EI} - \frac{L^3}{4EI} \right) = \bar{\varphi} \frac{L}{2} \left( -\frac{12EI}{L^3} = \frac{6EI}{L^3} \bar{\varphi} \right) \end{cases}$

$\frac{2-3L^3}{12EI}$

$T = \frac{6EI}{L^2} \bar{\varphi} \text{ cost.}$   
 $M = +\frac{6EI}{L^2} \bar{\varphi} z + \frac{2EI}{L} \bar{\varphi}$



In una qualsiasi appl. del MdS, il no. di gdl nodali liberi = i. I gdl si valutano a partire dagli schemi notevoli (Da cui si ricavano T, M) per poi postulare l'equilibrio con un sistema di eq. di equilibrio ( $\sum F = 0, \sum MA = 0, \sum MB = 0$  ...) da cui si ottiene una forma matriciale del tipo:

$$\underline{F} = \underline{K} \cdot \underline{u}$$

↳ cedimenti ipotizzati in luogo dei gdl nodali liberi

soll. note

↳ **MATRICE DI RIGIDEZZA**: ha le rigidezze dei vari elementi rispetto alla soll. duale cercata, che nasce compiendo un lavoro sullo spostamento (cedimento).

- $\underline{K} = \underline{K}^T$  (Th. Betti) (simm)
- $\underline{K}$  def. positiva:  $\det |\underline{K}| > 0$ , autovalori  $> 0$
- $\underline{K}$  a BANDA: "peso" su diag princ.

**GDL LIBERI** → Rot: dove  $\nabla$  ritengo a rotazione  
 → Trasl: si svincola ogni nodo (sost. cerniera),  $EA \rightarrow \infty$  e analizzo  $\ell$ :  $\ell = \text{no gdl trasl liberi}$

In metodo spost. è utile costruire le **CATENE CINEMATICHE DELLE STRUTTURE**

MECCANICA CONTINUO - TENSIONI PRINC. E STATI TENSIONALI

$$I_1(\underline{T}) = \text{tr}(\underline{T}); I_2(\underline{T}) = \sum(|I| + |I| + |I|); I_3(\underline{T}) = \det \underline{T}; \quad |$$

S. Princ:  $\underline{T} = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix} \Rightarrow I_1(\underline{T}) = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}; I_2(\underline{T}) = \sigma_I \sigma_{II} + \sigma_I \sigma_{III} + \sigma_{II} \sigma_{III}; I_3(\underline{T}) = \sigma_I \sigma_{II} \sigma_{III}$

$\forall n \exists ! \sigma \perp n \Rightarrow$  le  $\sigma$  sono tutte complementari, rivolte lungo la normale,  $\nabla$  componenti, tog.

Nota  $\underline{T}$  generico, cerco le  $\sigma$  o le  $n$ . Cerchiamo quindi  $n: t_n = \lambda n \Rightarrow$  cerco 3 normali  $n$  t.c. i  $t_n$  siano  $\parallel$  a essi

Es:  $t_n = \sigma n$

$n_{gen} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ ; Da Cauchy  $\underline{T} n = \lambda n \Rightarrow$  problema di autovettori ( $n$ ) e autovalori ( $\lambda$ ).  $\underline{T} = \underline{T}^T$  reale  $\Rightarrow$  sempre diagonalizzabile

$$\underline{T} n - \lambda n = 0 \Rightarrow (\underline{T} - \lambda \underline{I}) n = 0 \Rightarrow \left( \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ & & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (\sigma_{11} - \lambda)n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 = 0 \\ \sigma_{21}n_1 + (\sigma_{22} - \lambda)n_2 + \sigma_{23}n_3 = 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + (\sigma_{33} - \lambda)n_3 = 0 \end{cases}$$

$\det(\underline{T} - \lambda \underline{I}) = 0$  NEC (se no si ha per forza  $n = 0$  ASSURDO)  $\Rightarrow$  esplicito, il det e imponi = 0. Si ha che:

$$\boxed{\lambda^3 - I_1(\underline{T})\lambda^2 + I_2(\underline{T})\lambda + I_3(\underline{T}) = 0 \quad \text{EQ CARATT/SECOLARE}}$$

$\lambda \equiv \sigma$ ; per conv. si ordinano  $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$ .  $\sigma_I$  e  $\sigma_{III}$  sono il max e min valore  $\forall \sigma$  gen.

Sostituendo i  $\lambda$  trovo le  $n$  corrisp. rispetto al s.vit. gen (coseni direttori)  $\Rightarrow$  risolvo  $1 \{ \forall n, 1 \text{ delle eq è dip ma } \sum_{i=1}^3 n_{II}^2 = 1$

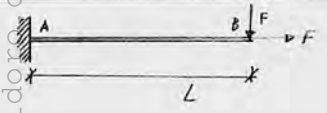
Stato tensionale  $\begin{cases} \rightarrow$  TRIASSIALE:  $\nabla \lambda = 0$   
 $\rightarrow$  BIASSIALE:  $\exists ! i: \sigma_i = 0 \forall i \in \{I, II, III\} \Rightarrow I_3(\underline{T}) = 0 \Rightarrow t_n(x) \in \pi$  PIANO DELLE TENSIONI  
 $\rightarrow$  MONOASSIALE:  $\exists ! i: \sigma_i \neq 0 \forall i \in \{I, II, III\} \Rightarrow I_3(\underline{T}), I_2(\underline{T}) = 0$

Nota:  $I_i(\underline{T}) \forall i=1,2,3$  sa lo STATO TENS. DEL SISTEMA e come si specializza l'eq. caratt (raccogli  $\lambda/\lambda^3$ ).

STATO BIASSIALE  $\Rightarrow$  TEORIA di DE SAINT VENANT.

MONOASSIALE  $\Rightarrow$  trave in pura trazione

TRIASSIALE  $\Rightarrow$   $\exists$  caso part. IDROSTATICO:  $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} = p = \frac{\text{tr}(\underline{T})}{3} \Rightarrow \underline{T} = p \underline{I}$  ↳ pressione idrostatica



Valuto  $\frac{u_B}{v_B}$ : Schema notevole trave mensola  $\Rightarrow \varphi_B = -\frac{FL^2}{2EI}; v_B = \frac{FL^3}{3EI}$

$$\frac{FL/EA}{FL^3/3EI} = \frac{1}{A} \cdot \frac{3EI}{L^2} = \frac{3\rho^2 x}{L^2} = 3\left(\frac{\rho}{L}\right)^2 \ll 1 \quad I_x = A\rho^2 x$$

SPOST. ASSIALI TRASCURABILI IN TEORIA DELLA TRAVE!

**SOLO NELLO STUDIO DEL REGIME DEFORMATIVO NON NELL'ANALISI DELLE TENSIONI  $\sigma_z$  (DSV)**

riccardo.polidoro.org



CONTINUI - LEGAMI COSTITUTIVI

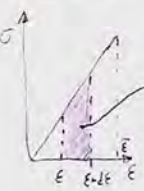
Th Tensione / Th Deformazione  $\Rightarrow$  Leggi di tipo  $\underline{T} = \underline{T}(\underline{E})$  o  $\underline{E} = \underline{E}(\underline{T})$ : a seconda del S puoi vedere uno come causa/eff. altro

Le rel. dipendono dal materiale e da entità tens/def.

Noi LCEL, specie ISOTROPO.

Esi:  $\Omega$  continuo cilindrico in trazione (F)  $\Rightarrow \sigma_{11} \equiv F/A$ , piccole def/post  $\Rightarrow A \approx A'$  (no strizione).  
 dV soggetto a  $\underline{T}$  monoassiale  $\Rightarrow \epsilon_{11} = \frac{dx_1' - dx_1}{dx} \equiv \epsilon = \frac{L' - L}{L}$ ;  $\sigma = F/A$   
 MACROSCOPICO

Valutiamo il Lavoro Infinitesimo per Unità di Volume ( $\int \sigma(\epsilon) d\epsilon$ )



$dL = \sigma d\epsilon$   
 $dL = \sigma(\epsilon) d\epsilon \Rightarrow L = \int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma(\epsilon) d\epsilon = \phi(\bar{\epsilon})$  POTENZIALE ELASTICO (o densità di energia elastica)  $\Rightarrow \phi(\bar{\epsilon})$   
 $\sigma = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon}$ ;  $U = \int_{\Omega} \phi dV$  ENERGIA ACCUMULATA NEL CORPO

**LCEL 1D**  
 $\sigma = E\epsilon$   
 $\int \phi(\epsilon) = \int \sigma d\epsilon = \sigma \frac{\partial \phi(\epsilon)}{\partial \epsilon}$

Dim analitica  $S\phi = \sigma d\epsilon \equiv d\phi$  (ovvero  $\phi = \int d\phi$ ):

$\sigma = E\epsilon \Rightarrow \exists \phi: \phi(\bar{\epsilon}) = \int d\phi = \int \sigma d\epsilon = \int E\epsilon d\epsilon = E \frac{\bar{\epsilon}^2}{2} = \frac{1}{2} E \bar{\sigma} \bar{\epsilon} \Rightarrow \sigma d\epsilon = \phi, \int \phi = \int \sigma d\epsilon \rightarrow \int \sigma d\epsilon = \phi$   $\exists$  primitiva  $\phi$  scalare in 1 var reale

Da cui si ha che:  $\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma d\epsilon = \phi(\epsilon_2) - \phi(\epsilon_1) = 0 \Leftrightarrow \epsilon_1 = \epsilon_2$ ;  $\int_0^{\bar{\epsilon}} \sigma d\epsilon + \int_{\bar{\epsilon}}^0 \sigma d\epsilon = \int_0^0 \sigma d\epsilon = 0 = \phi(\bar{\epsilon}) - \phi(\bar{\epsilon})$

Quindi il legame è elastico e REVERSIBILE

**LCEL 3D**

Relazione  $\forall \sigma_{ij} = E_{ij} \Rightarrow$  Legge di Hooke generalizzata  $\sigma_{ij} = \sum_{h,k} C_{ijkl} E_{hk}$   $ij, hk \in \{1,2,3\}$

Es.  $\sigma_{11} = E_{1111} \epsilon_{11} + C_{1112} \epsilon_{22} + \dots + C_{1133} \epsilon_{33} \Rightarrow$  9 addendi  $\forall$  componente  $\Rightarrow$  81 cost rigid.

$\underline{T} = \underline{C} : \underline{E} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} \\ C_{1122} & C_{1123} & C_{1133} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{32} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{31} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} \end{bmatrix}$  Nota: VOIGT

Traduciamo  $\sigma d\epsilon = S\phi \equiv d\phi$  in 3D

$S\phi = \sigma_{ij} d\epsilon_{ij} = \sigma_{11}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \dots, \epsilon_{33}) d\epsilon_{11} + \dots + \sigma_{33}(\epsilon_{11}, \epsilon_{22}, \dots, \epsilon_{33}) d\epsilon_{33}$   $\sigma_{ij}$  dipende  $\forall E_{hk}$ !

$d\phi = \int \sigma d\epsilon = \int d\epsilon \Leftrightarrow$  Cond. di SCHWARTZ sulle der II miste  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \epsilon_{hk}} = \frac{\partial \sigma_{hk}}{\partial \epsilon_{ij}} \forall ij, hk \in \{1,2,3\}$

DA CUI SI OTTIENE  $\underline{C} = \underline{C}^T$  SIMMETRIA MAGGIORE

$\frac{\partial (C_{ijkl} E_{hk})}{\partial E_{hk}} = \frac{\partial (C_{khij} E_{ij})}{\partial E_{ij}} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{khij}$   
 $\underline{C} = \underline{C}^T$

Simm magg  $\Rightarrow$  Materiale ELASTICO; per Voigt calcoli solo 45 costanti

$\underline{T} = \frac{\partial \phi}{\partial \underline{E}} \xrightarrow{\text{ind.}} \sigma_{ij} = \frac{\partial \phi}{\partial \epsilon_{ij}}$

$\underline{C}$  però lega tra loro 2 tensori simmetrici:

$\begin{cases} \underline{T} = \underline{T}^T \\ \underline{E} = \underline{E}^T \end{cases} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} \text{ SIMMETRIA MINORE}$

Dim: impoti:  $E_{hk} = E_{kh} / \sigma_{ij} = \sigma_{ji}$  nelle relazioni, espliciti  $C_{ij}$  e  $C_{ji}$  e dimostri:  $\sigma_{ij}$  è clin dello spazio  $E_{hk}$ , LC vale  $\forall \underline{E}$ .

La Simm minore porta Voigt a 36

SIMM MAG + MIN  $\Rightarrow$  21 costanti elastiche indipendenti, è il MASSIMO numero di cost. indep. (Stato materiale triclini, max anisotropia)

$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1112} & C_{1113} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2111} & C_{2112} & C_{2113} & C_{2123} & C_{2113} & C_{2112} \\ C_{3111} & C_{3112} & C_{3113} & C_{3123} & C_{3113} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1212} & C_{1213} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \\ C_{2211} & C_{2212} & C_{2213} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3211} & C_{3212} & C_{3213} & C_{3223} & C_{3213} & C_{3212} \\ C_{1311} & C_{1312} & C_{1313} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{2311} & C_{2312} & C_{2313} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{3311} & C_{3312} & C_{3313} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$  Simm MAG  $\Rightarrow \underline{C} = \underline{C}^T \Rightarrow n^*$  componenti indep =  $\frac{(6 \times 6) - 6}{2} + 6 = 21$  fuori diag.  
 TRICLINI  $\Rightarrow$  21 cost.  
 ORTOTOPI  $\Rightarrow$  9 cost. (3 piani di simm. materiale)  
 TRASVERS. ISOTROPI  $\Rightarrow$  5 cost. (uniforme in un piano, diverso in direz. ortogonale come legno)  
 ISOTROPI  $\Rightarrow$  2 costanti;  $\underline{C}$  invariante per rotazione (nesso comport.)

ricardo.polidoro.org

ETEROGENEI:  $\underline{C} = \underline{C}(\underline{x})$ . In nostre appl. MAT OMOGENEO  $\Rightarrow \underline{C} = \text{cost.}$



Essendo il LCEL per def. reversibile, è NEC definire un potenziale in 3D.

Si può dim che, analogamente a 1D,  $\phi = \frac{1}{2} T : \underline{\underline{E}} \Rightarrow \frac{1}{2} (C : \underline{\underline{E}}) : \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{E}} : C : \underline{\underline{E}}$  Definito positivo!

$\Downarrow$   
 $\phi_{,ij} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}$  indiciale      Elastico  $\Rightarrow \delta \phi = d\phi = T : d\underline{\underline{E}}$

Dal PV fisico,  $\phi$  è En. INT. ELASTICA  $\Rightarrow \forall$  stato deformativo  $\Rightarrow C$  NEC det pos!

Spieghiamo in 1D un'implicazione di  $C$  def pos:  $\phi = \frac{1}{2} E \epsilon^2 > 0 \Rightarrow E > 0$  (tensione  $\Rightarrow$  dilatazione, se no a un  $T$  tensionale  $\Rightarrow E$  contrazione)

Inoltre,  $C > 0 \Rightarrow \det C > 0$  ovvero  $\neq 0 \Rightarrow C$  INVERTIBILE  $\Rightarrow T = C E$ ;  $\exists C^{-1} = S : E = S T$

Quindi  $\exists T \leftrightarrow E$  attraverso  $C$  ed  $S$

$\downarrow$   
 tensore delle cedevolezza

LCEL ISOTROPO

Essendo isotropo, il continuo ha lo stesso comportamento  $\forall \underline{\underline{u}}$ . Inoltre,  $\phi$  è uno scalare e non varia al variare del riferimento  $\Rightarrow$  considerando  $\phi$  e  $\phi'$  in 2 rif. si ha che  $\phi = \phi' \forall \underline{\underline{E}} \Rightarrow C_{ijkl} \epsilon_{hk} \epsilon_{ij} = C'_{ijkl} \epsilon'_{hk} \epsilon'_{ij} \forall \underline{\underline{E}}$ .

Isotropo  $\Rightarrow C_{ijkl} = C'_{ijhk}$ ; variano le  $E$ .

$\phi$  però non varia  $\Rightarrow$  occorre scriverlo in  $f(I_1(\underline{\underline{E}}), I_2(\underline{\underline{E}}), I_3(\underline{\underline{E}})) \Rightarrow \phi = A(I_1(\underline{\underline{E}})^2) + B I_2(\underline{\underline{E}})$

cubico,  $\phi = f(\epsilon^3)$

Descrivono il pot. el. e quindi il LC ( $T = \frac{\delta \phi}{\delta E}$ )

$A, B$  misurate con prove meccaniche:  $A \equiv E$  I modulo tecnico  $\Rightarrow$  risposta assiale a trazione ( $\sigma = E \epsilon$  lineare per piccole deform.)  
 $B \equiv \nu$  II modulo tecnico  $\Rightarrow$  coefficiente di contrazione trasversale

$\nu = -\frac{\epsilon_t}{\epsilon}$

$\epsilon_t = \frac{R' - R}{R}$

contraz. trasversale (NO PUOI ELIDERE IN REGIME DEFORM.)  
 (in tens. diciamo  $A' \nu A$ )

così la cost. è positiva nei casi classici

$E, \nu$  sono caratteristiche proprie del materiale specifico  $\Rightarrow$  nota  $E, \epsilon_t = -\nu E$

Noti  $E$  e  $\nu$ , in un mat. isotropo conosci SEMPRE  $C, S$ :

$\underline{\underline{E}} = S \underline{\underline{T}} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\nu\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\nu\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix}$

$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  PRIMA COSTANTE DI LAMÉ  
 Modulo di Taglio/Elasticità tg.

$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{22} + \sigma_{33})$ ;  $\epsilon_{23} = \frac{\sigma_{23}}{2\mu}$

$\epsilon_{11} = \sigma_{11} \left( \frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \Rightarrow \sigma \epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} tr(\underline{\underline{T}}) \Rightarrow \epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - S_{ij} \frac{\nu}{E} I_1(\underline{\underline{T}})$

Leggi generali del LCEL-I

$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2\mu} \underline{\underline{T}} - \frac{\nu}{E} (I_1(\underline{\underline{T}})) \underline{\underline{I}}$

$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$  SECONDA COSTANTE DI LAMÉ

Anche qui, esplicitando le  $\sigma$  normali e tg si ottiene una legge generale:

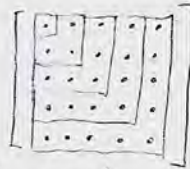
$\sigma_{11} = (2\mu + \lambda) \epsilon_{11} + \lambda (\epsilon_{22} + \epsilon_{33})$   
 $\sigma_{23} = 2\mu \epsilon_{23}$

$\underline{\underline{T}} = 2\mu \underline{\underline{E}} + \lambda (I_1(\underline{\underline{E}})) \underline{\underline{I}}$

Le due coppie di relazioni rispettano per Hp le condizioni di simmetria maggiore e minore.

Bisogna però imporre  $C, S$  definite positive.

$\forall$  mat  $\square$  simmetrica, è det. pos  $\Leftrightarrow$  i suoi minori principali in ordine crescente sono  $> 0$



Minori principali in ordine crescente

ord 1  $\Rightarrow 1/E > 0 \Leftrightarrow E > 0$  (matrice  $\equiv$  tensione monoassiale)

ord 2  $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow -1 < \nu < 1$

ord 3  $\Rightarrow \begin{vmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E \end{vmatrix} > 0 \Leftrightarrow -1 < \nu < 1/2$

$\Rightarrow$  Imporre  $C[S]$  definita positiva implica dei limiti sulle costanti elastiche e, quindi, sui moduli tecnici. Ciò si riflette sulle cost. Lamé!



Al variare di  $\nu$  si ha che:

- $0 < \nu < 1/2$  mat. convenzionali  $\epsilon_t = -\nu \epsilon \Rightarrow \epsilon > 0 \Leftrightarrow \epsilon_t < 0$
- $\nu = 0$  " caso ideale "  $\epsilon_t = 0 \forall \epsilon$
- $-1 < \nu < 0$  mat. auxotici  $\epsilon > 0 \Leftrightarrow \epsilon_t > 0$
- $\nu \rightarrow 1/2$  mat. incompressibili  $\epsilon_t = \frac{1}{2} \epsilon \Rightarrow \forall \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{C}} = \nabla \cdot \underline{\underline{u}} = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = 0 \Rightarrow \Delta V = 0$

$\nu \rightarrow 1/2 \Rightarrow \Delta V = 0$ : Dim.

$$\underline{\underline{C}} = \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \xrightarrow{\text{LCEL-I}} \frac{1}{2\mu} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) - \frac{3\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \left( \frac{1}{2\mu} - \frac{3\nu}{E} \right) \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \xrightarrow{\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}} \frac{1-2\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})$$

$$\epsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{2\mu} - \frac{\nu}{E} \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}})$$

$$\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}(\underline{\underline{\epsilon}}) \Rightarrow \forall \underline{\underline{\epsilon}}, \underline{\underline{C}} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \nu \rightarrow 1/2$$

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$  Modulo di compressibilità  
MODULO DI BUCK

$$\underline{\underline{C}} = \frac{1}{K} \left( \frac{\text{tr}(\underline{\underline{T}})}{3} \right)$$

$$p: \underline{\underline{T}}^H = p \underline{\underline{I}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^H + \underline{\underline{T}}^D$$

parte idrostatica      parte deviatorica

Mat incompressibili  $\Rightarrow \underline{\underline{C}} = 0 \forall p \Rightarrow \nu \rightarrow 1/2 \Leftrightarrow K \rightarrow \infty$

$$\text{tr}(\underline{\underline{T}}^H) = \text{tr}(\underline{\underline{T}}) \stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} p = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{T}})}{3} \Leftrightarrow p = K \underline{\underline{C}}$$

$$\text{tr}(\underline{\underline{T}}^D) = 0$$

### CONTINUI - PROBLEMA DI EQUILIBRIO ELASTICO

Sappiamo dal precedente che:

①  $\underline{\underline{\epsilon}} = \text{sym}[(\nabla \otimes \underline{\underline{u}})^T]$  EQUAZIONE DI CONGRUENZA  
 $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$  indeliciale  
 $\forall P \in \Omega$  e in part.  $\underline{\underline{u}} \equiv \underline{\underline{u}}_0 \forall Q \in \partial\Omega_u$  condizione al contorno

②  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{T}}^T$  equilibrio a istruzione EQUAZIONI DI EQUILIBRIO  
 $\nabla \cdot \underline{\underline{T}} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \forall P \in \Omega$  eq. di campo del problema di equilibrio  
 $\underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{n}} = \underline{\underline{t}} \forall H \in \partial\Omega_t$  condizione al contorno  
 $\partial\Omega$  può essere caricata e vincolata ( $\Rightarrow$ ) il carico non interferisce con la condizione di vincolo, altrimenti  $\nexists$  soluzione GENERALE del problema ma occorre specializzarlo.

③  $\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}$  (LCEL)  
 $\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl}$  indeliciale LEGAME COSTITUTIVO  
 $\underline{\underline{T}} = 2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}}$  (LCEL-I)  
 $\left( \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \right)$

①+②+③ = Problema di Equilibrio Elastico (P.E.E.)

$$\nabla \underline{\underline{T}}^T \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \xrightarrow{\frac{\text{LCEL-I}}{\underline{\underline{T}} = \underline{\underline{C}} : \underline{\underline{\epsilon}}}} \nabla \cdot (2\mu \underline{\underline{\epsilon}} + \lambda \text{tr}(\underline{\underline{\epsilon}}) \underline{\underline{I}}) \cdot \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} = \nabla \left\{ 2\mu \left( \frac{1}{2} (\nabla \otimes \underline{\underline{u}})^T + (\nabla \otimes \underline{\underline{u}}) \right) + \lambda (\nabla \cdot \underline{\underline{u}}) \right\} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow \dots$$

$$\dots \Rightarrow \mu \underbrace{\nabla^2 \underline{\underline{u}}}_{\text{Laplaciano}} + (\lambda + \mu) \underbrace{\nabla(\nabla \cdot \underline{\underline{u}})}_{\text{grad}(\text{div}(\underline{\underline{u}}))} + \underline{\underline{b}} = \underline{\underline{0}} \quad (\Rightarrow) \underline{\underline{u}} \text{ che risolve il problema, con 3 eq. scalari per } u_1, u_2, u_3$$

Per Th. unicità sol. P.E.E. (Kirchhoff),  $\{ \}$  è a coeff. cost. lineari (mat. omog. e isotropo)  $\Rightarrow$  eq. diff. con der. parz., termini tutti a I potenza complessa l'esistenza delle soluzioni



# TEOREMI DI BETTI / DI RECIPROCIITÀ

Partono da TLV → reciprocità tra 2 sistemi, senza richiedere legame  $\underline{T} - \underline{E}$  puoi studiare l'equilibrio

2 continui identici con LCEL (no omog, no isot); hanno diverse  $\underline{t}$ , diversi  $\underline{u} \in \Omega_u$  ma stessa  $\mathcal{C}$

Applico il TLV ai due per trovare i campi  $\underline{u}$  che risolvono l'eq. elastico:

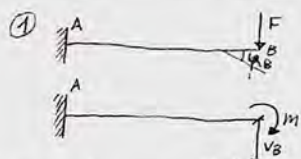
$$LV_E^{\text{I}} = L_{1 \rightarrow 2}^E = \int_{\Omega_1} \underline{t}_1 \cdot \underline{u}_2 dS + \int_{\Omega_1} \underline{b}_1 \cdot \underline{u}_2 dV = LV_{E_{1 \rightarrow 2}} \quad (\text{TLV})$$

spost. 2, virtuali per 1

$$L_{1 \rightarrow 2}^I = \int_{\Omega} \underline{T}_1 : \underline{E}_2 dV \stackrel{\text{LCEL}}{=} \int_{\Omega} \mathcal{C} : \underline{E}_1 : \underline{E}_2 dV \stackrel{\text{simmetria}}{=} \int_{\Omega} \mathcal{C} : \underline{E}_2 : \underline{E}_1 dV = \int_{\Omega} \underline{T}_2 : \underline{E}_1 dV = L_{2 \rightarrow 1}^I \stackrel{\text{TLV}}{=} L_{2 \rightarrow 1}^E$$

$$L_{2 \rightarrow 1}^E = \int_{\Omega_2} \underline{t}_2 \cdot \underline{u}_1 dS + \int_{\Omega_2} \underline{b}_2 \cdot \underline{u}_1 dV = L_{2 \rightarrow 1}^I \quad \square$$

Utile in risoluzione di travi e altri schemi statici:



$$L_{1 \rightarrow 2} = L_{2 \rightarrow 1} \Rightarrow F V_B = m F_B \Leftrightarrow \frac{F}{m} = \frac{F_B}{V_B}$$

NOTO

$$\frac{F}{m} = \frac{F_B}{V_B}$$

Nota uno dei due schemi puoi automaticamente conoscere l'altro:  $F_B = \frac{F}{m} V_B^m$   
 $(V_B^m = \frac{m L^2}{2EI})$

BETTI velocizza i calcoli ed è alla base dello studio delle linee d'influenza per i carichi viaggianti.

## TEOREMA DI CLAYPERON

Dal TLV, afferma che il L di un  $\{$  Forze conservative su spost. corrisp è  $= 1/2 L$  esterno di stesse F in campo spost.



$$L^E = \underline{F} \cdot \underline{v}_B$$

$$d\phi = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \stackrel{\text{LCEL}}{=} C_{ijkl} \varepsilon_{lk} \cdot d\varepsilon_{ij}$$

$$\phi = \int_{\Omega} \bar{\varepsilon}_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{lk} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left[ C_{ijkl} \varepsilon_{lk} \varepsilon_{ij} \right]_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \right]_0^{\bar{\varepsilon}_{ij}}$$

$$\text{En. ELASTICA del } \{ : U = \int_{\Omega} \phi dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} dV \stackrel{\text{TLV}}{=} \frac{1}{2} \left[ \int_{\Omega} \underline{b} \cdot \underline{u} dV + \int_{\partial\Omega_t} \underline{t} \cdot \underline{u} dS \right]$$

(immagino virtuali)

deriva dal potenziale  $\Rightarrow$  solo forze conservative

$$\Rightarrow U = \frac{1}{2} LV_E \quad \text{esempio } \frac{F^2 L^3}{6EI}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{1}{EI} \chi^2 dz = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{M^2}{EI} dz = \dots$$

CLAYPERON informa sull'energia dissipata:  $\Delta E = \Delta U + \Delta K = \begin{cases} \emptyset & \text{conservativo} \\ L_{nc} & \Rightarrow \text{dissipazione} \end{cases}$

## STABILITÀ DELL'EQUILIBRIO

In appl. legato a CARICO CRITICO EULERIANO (particolari condizioni su el. snelli)

Fenomeno insidioso di collasso per strutture snelle, in particolare se sottoposti a compressa Galileo effetto scala: + grande = + fragile (cosa elefante vs gatto)   
 UT TENSIO, SIC VIS   
 Anne TACOMA   
 vibraz. venoz.  $\Rightarrow E$

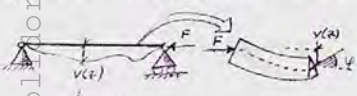
Ci soffermiamo su problemi di BIFORCAZIONE DELL'EQUILIBRIO: da LE esterni.

si può passare a LE flessionale: compress. el snello  $\Rightarrow$  sbandamento.  $\hat{A}$  in teoria trave una simile previsione.



$$\text{Forze verticali: } u = \frac{N_0}{EA} z + c_0 \Rightarrow \begin{cases} u(A) = 0 \Rightarrow c_0 = 0 \\ N(B) = -F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N = -F \forall z \in [0, L] \\ u(z) = -\frac{F}{EA} z \end{cases}$$

In travi SNELLE, E carico critico di inflessione con perdita di controllo del sistema. Eulero non trova cause ma vede che si verifica  $\Rightarrow$  E predilezione di config. se SNELLE   
 Abbiamo visto che  $\nabla$  NON LINEARITÀ cinematica e costitutiva, trasl. x PICCOLI SPOST. Ora invece studiamo deform. generica  $\Rightarrow$  NON PIÙ:



$$N = -F \cos(\varphi(z)) = -F \sqrt{1 + \tan^2 \varphi} \Rightarrow N = -F \sqrt{1 + (v')^2}; M = F \cdot v(z)$$

Deflessione non nulla dovuta a spost non piccoli  $\Rightarrow M \neq 0$ . Restano HP PICCOLE DEFORMI ( $\chi \sim v$ ) e LCEL ( $M = EI \chi = -EI v''$ )

$$LCEL \Rightarrow Fv = -EI v'' \Rightarrow EI v'' + Fv = 0 \Rightarrow v'' + \alpha^2 v = 0 \quad (\alpha^2 = F/EI; v \propto e^{\alpha z} \Rightarrow v' = \alpha e^{\alpha z}, v'' = \alpha^2 e^{\alpha z})$$

$$\rightarrow \alpha^2 e^{2\alpha z} + \frac{F}{EI} e^{2\alpha z} = 0 \Rightarrow \alpha^2 + d^2 = 0 \Rightarrow \alpha^2 = -d^2 = \pm id \Rightarrow v = a \sin dz + b \cos dz \quad (v'; v'' \text{ e verticali})$$

$$\begin{cases} v(A) = 0 \Rightarrow a \sin 0 + b \cos 0 = 0 \Rightarrow b = 0 \\ v(B) = 0 \Rightarrow a \sin dL + b \cos dL = 0 \Rightarrow a \sin dL = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow v(z) = 0 \forall z \text{ (trave non sbanda)} \\ \sin dL = 0 \Leftrightarrow dL = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow dL = \eta\pi \end{cases}$$

riccardo polini



$dL = n\pi \Rightarrow n=1$  semiperiodo  $= L$   
 $n=2$  "  $= L/2$   
 $n=3$  "  $= L/3$   
 $d = \frac{n\pi}{L}$

MODI DEFORMATIVI DELLA STRUTTURA  
 $n=1 \Rightarrow F_{cr,1} = \pi^2 EI/L^2$   
 $n=2 \Rightarrow F_{cr,2} = 4\pi^2 EI/L^2$

Comprendi modi deformativi, ma NON ampiezze di v: il fenomeno ha amplificazione CATASTROFICA e indeterminata  
 $F_{cr}$  DIPENDE da tutti i dati caratteri della TRAVE.  
 Se I varia nelle sezioni di trave si considera  $I_{min}$ .

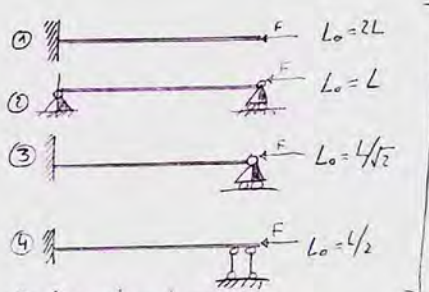
CARICHI CRITICI:  $F_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} n^2$

$F_{cr,1} = F_{cr,2} = \min \{ F_{cr,i}, i=1, \dots, n \}$  = Carico critico EULERIANO, carico di punta critica, BUCKLING LOAD

L'attivazione del fenomeno  $\Rightarrow M$  cresce  $\Rightarrow \chi$  cresce  $\Rightarrow v$  cresce  $\Rightarrow M$  cresce  $\Rightarrow \dots \Rightarrow$

Generalizzando,  $F_{cr,2} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L_0^2}$

$L_0 \equiv$  lunghezza minima di inflessione = distanza tra 2 p. flesso successivi in deformata  
 $(L \Leftrightarrow n=1, L/2 \Leftrightarrow n=2 \dots)$ ; varia a seconda delle condizioni di vincolo!



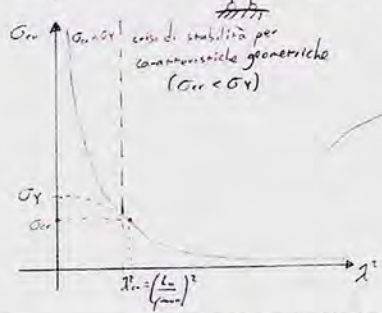
$I_{min}$   $\equiv$  momento inerzia minimo; svergolamento tende in zona con minima inerzia; per prop. di estremo degli autov. lor.  $I_{min} = \min \{ I_x, I_y \}$ ,  $J = \begin{bmatrix} I_x & I_{xy} \\ I_{xy} & I_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_x & \\ & I_y \end{bmatrix}$   $\rightarrow$  rit. princ.

Iperstaticità  $\Rightarrow$  aumenta  $F_{cr}$ , buckling  $\leftarrow$ . Es, se in ④ metti carrelli sotto mezzera,  $L_0 = L/2 \Rightarrow F_{cr,1} = F_{cr,2}$

$F_{cr} \Rightarrow \sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 E}{L_0^2} \frac{I_{min}}{A} = \frac{\pi^2 E \rho^4_{min}}{L_0^2} \sim \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$   $\rightarrow$  SNELLEZZA  $\lambda = L_0/\rho_{min} \sim L/D$

Ne segue che  $\sigma_{cr}$  è confrontabile  $\Leftrightarrow$  trave molto snella

Iperbole di Eulero  $\Rightarrow$  metodo  $\omega$  prog. strutture:  $\omega > 1: \omega / \sigma < \sigma_{ammisibile}$   
 $\hookrightarrow$  dip. materiale e snellezza, tiene conto deform. motiv. geom.

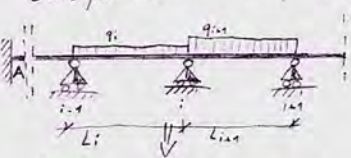


METODO EQ. 3 MOMENTI Appl. M.d.F

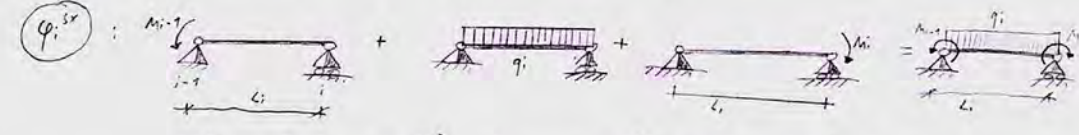
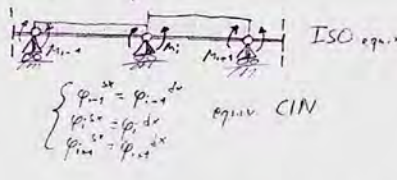
Utile per travi continue su piú appoggi/travi gerber

La struct. è n ( $\sum_i$ ) volte iperstatica perché ha n carrelli.

Schema ISO star eq  $\Rightarrow$  metto cerniere int e impango  $\varphi^{sx} = \varphi^{dx}$ : considerare  $R_i$  e  $v_i = 0$  ha necessitá di integrare zioni della linea elastica perché sono in punti non notevoli della trave di lunghezza  $\xi L_i$ .



Studio  $\varphi_i^{sx}$  e  $\varphi_i^{dx}$  ( $\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx} \forall i \Rightarrow$  risolvo!)



$\varphi_i^{sx} = -\frac{M_{i-1} L_i}{6EI} + \frac{q_i L_i^3}{24EI} - \frac{M_i L_i}{3EI} \Rightarrow \varphi_i^{dx} = \frac{M_i L_{i+1}}{3EI} - \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24EI} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6EI}$

$\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx} \Rightarrow \frac{M_{i-1} L_i}{6} + \frac{M_i L_i}{3} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6} = \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24} + \frac{q_i L_i^3}{24}$

Se # cedimenti/distors, le X non dipendono da EI

$$\begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_{i-1} & M_i & M_{i+1} & \dots & M_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & L_i/6 & L_{i+1}/3 & L_{i+1}/6 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ \vdots \\ M_{i-1} \\ M_i \\ M_{i+1} \\ \vdots \\ M_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24} + \frac{q_i L_i^3}{24} \\ \dots \\ \dots \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \underline{A} \underline{X} = \underline{q}$ ;  $\exists \underline{A}^{-1} \Rightarrow \underline{X} = \underline{A}^{-1} \underline{q}$   
 $\downarrow$  Matr. a diagonale dominante

Note le X conosci automaticamente le CDS Vnodo:

$M(z = z(i)) = M_i$   
 $T(z = z(i)) = T_i^{sx} + T_i^{dx}$   
 $M(z) = -\frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} z + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} z - M_i$   
 $T(z) = \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} + \frac{M_i}{L_{i+1}} - q_{i+1} z$

ri.ricardo.polidoro.org

CEDIMENTI  $\downarrow d_i$

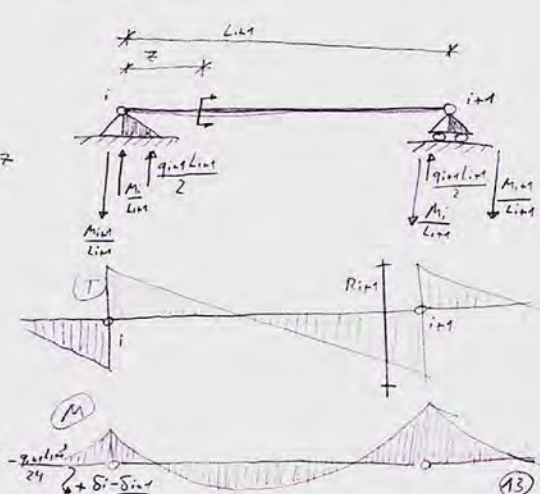
$\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{(i-1)} + \varphi_i^{(i)} + \varphi_i^{(i+1)} + \varphi_i^{(A)}$

Se CED DIFFERENZIALI ( $\downarrow d_i$ ) si deve assumere quale è maggiore  $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi_i^{(A)} = \frac{\delta_{i-1} - \delta_i}{L_{i+1}} \sim \frac{\delta_i}{L_{i+1}}$  ( $16:1 > 18:1$ )

Quind.  $\underline{x}_i = d_i L$  ha conyon distors:

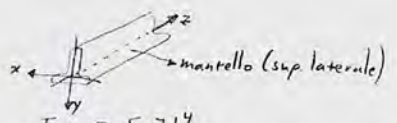
$-\frac{M_{i-1} L_i}{6EI} - \frac{M_i L_i}{3EI} + \frac{q_i L_i^3}{24EI} + \frac{\delta_{i-1} - \delta_i}{L_i} = \frac{M_i L_{i+1}}{3EI} + \frac{M_{i+1} L_{i+1}}{6EI} - \frac{q_{i+1} L_{i+1}^3}{24} + \delta_i - \delta_{i+1}$





# TEORIA DEL DE SAINT VENANT

In Hp solido trave ( $D/L \ll 1$ , solido prismatico retto). Permette un dimensionamento degli el. strutturali



Sist. rif. PRINCIPALE d'inertzia  $\Rightarrow J\{x,y\} = \begin{bmatrix} I_x & 0 \\ 0 & I_y \end{bmatrix}$   $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $I_y = \int_A x^2 dA$ ,  $I_{xy} = 0 = \int_A xy dA$   $I_x, I_y > 0$ ,  $[E] = L^4$

Se l'asse simm, esso è un asse princ. inertzia  $\Rightarrow$  il sist. è definito ( $O=G$ ,  $G \in$  asse simm), se no è problema autovalori/autovettori

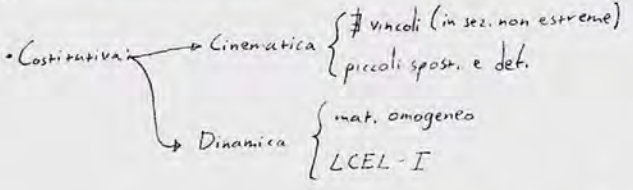
$\exists$  PRONTUARI per inertie tipiche.

- Hp Th DSV:
- Geom:  $D/L \ll 1$
  - Carichi:  $\partial\Omega$ 
    - basi esterne:  $\exists$  carichi applicati
    - mantello: SCARICO

; FORZE DI VOLUME NULLE (peso proprio e carichi ripartiti ripartente trascurabili rispetto ad altri carichi)

## POSTULATO DI DSV

$\forall$  solido trave, a una certa dist dalle basi ( $\sim D$ ), detta dist. DI ESTINZIONE, gli stati  $\underline{T}$  e  $\underline{E}$  dipendono solo da RESULTANTI e MOMENTI RESULTANTI appl alle basi, a prescindere dalla distribuzione delle tractions.



• Stato tensionale: è piano  $\Rightarrow \underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \underline{T}^T \Rightarrow \det(\underline{T}) = 0 \Rightarrow \exists n: [\underline{T}]_{ij} \in \pi_n \forall i,j = 1,2,3$

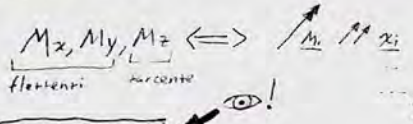
Int. eq.  $\text{div } \underline{T}^T = b = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_z}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - b_1 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - b_2 = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - b_3 = 0 \end{cases}$

$\tau_{xz} = f(x,y)$  perché  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$   
 $\tau_{yz} = f(x,y)$  " " " " " "  
 Rimuovo dall'eq.  $\Rightarrow \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = b = \text{cost} \Rightarrow \sigma_z$  ha andamento al più lineare

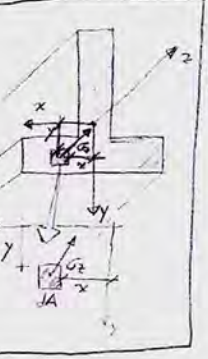
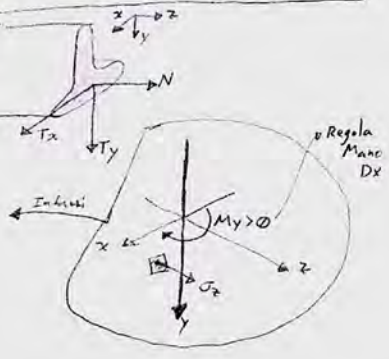
da eq. equilibrio e eq. comp.  $\begin{cases} \tau_{xz} = \tau_{xz}(x,y) \\ \tau_{yz} = \tau_{yz}(x,y) \\ \sigma_z = \sigma_z(x,y) = (a+bx+cy)_z + a_1 + b_1x + c_1y \end{cases}$

DA QUI IN POI STO CONSIDERANDO UN'UNICA SEZIONE  $\Rightarrow z = \text{cost.}$

MANTELLO SCARICO  $\Rightarrow$  esula dalle Cond al Contorno



$\exists$  2 componenti di taglio ind. ( $\tau_x, \tau_y$ )  
 1 compon. di sforzo normale ( $N$ )



$N = \int_A \sigma_z dA$ ;  $M_x = \int_A \sigma_z dA \cdot y$ ;  $M_y = - \int_A \sigma_z dA \cdot x$

Le  $\sigma$  producono momento anche trasversalmente a  $M_x$ !  
 Nell'esempio, la specifica  $\sigma$  produce  $M_y < 0$ .

Sapendo  $\sigma_z$  al più lineare  $= (a+bx+cy)_z + a_1 + b_1x + c_1y$ ,  $\Rightarrow$  cost. perché siamo su una sola sezione

$N = \int_A \sigma_z dx dy = \int_A (a_1 + b_1x + c_1y) dA = a_1 A + b_1 S_y + c_1 S_x \equiv a_1 A \Rightarrow a_1 = N/A$   
 (Momi. statici risp. asse  $y[x]$ ,  $= 0$  in rif. baricentrico)

$a_1 = N/A, S_x = S_y = 0 \Rightarrow \sigma_z = \frac{N}{A}$  diventa unicamente allo sforzo normale!

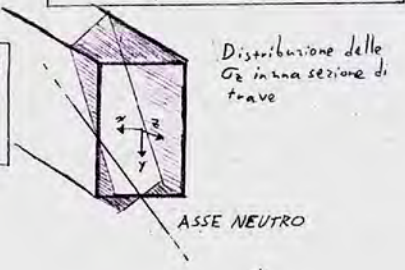
Analogamente,  $M_x = \int_A \sigma_z y dA = \int_A (a_1 + b_1x + c_1y) y dA = a_1 S_{xy} + b_1 I_{xy} + c_1 I_x \Rightarrow c_1 = \frac{M_x}{I_x}$   
 $M_y = - \int_A \sigma_z x dA = \dots \Rightarrow b_1 = -\frac{M_y}{I_y}$

$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y$  Formula di NAVIER  
 $\dots$   
 $\sigma_z = -\frac{M_y}{I_y} x$  specializzato a un momento lungo y

Le distribuzioni di  $\sigma_z$  dovute al momento variano linearmente con  $x[y] \Rightarrow$  distribuzioni a farfalla.

Complessivamente,  $\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$  FORMULA DI PRESSOFLESSIONE DEVIATA [TENSO-]

Deviata  $\leftrightarrow \exists$  termine con  $M_x$  e  $M_y$ , se uno dei 2 è nullo è PRESSOFLESSIONE RETTA [TENSO-]





# PRESSOFLESSIONE DEVIATA

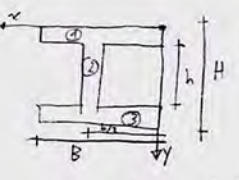
Oss:  $T_x = \int_A \tau_{zx} dA$ ;  $T_y = \int_A \tau_{zy} dA$ ;  $M_x = \int_A \frac{(\tau_{zy} x - \tau_{zx} y)}{dM_x = f(\tau_{zx}, \tau_{zy})} dA$   $\neq$  formule + generali: dipendono dalla specifica SEZIONE!

Note le CDS dalla Th. trave  $\Rightarrow$  tensioni corrispondenti  $\Rightarrow$  confronto dei valori con valori limite, tra cui  $\sigma_Y (\sim 10^3 E)$ . Nota  $\sigma_z$ , si cerca al variare di  $z$  la  $\sigma_z$  MAX in quella sez., da confrontare con i valori limite.

Se sez. rett.  $\square$  di  $h$  e  $M_x, M_y > 0$ ,  $\sigma_{zMAX} = \frac{N}{bh} + \frac{M_x}{\frac{bh^3}{12}} \left(-\frac{h}{2}\right) - \frac{M_y}{\frac{b^3h}{12}} \left(\frac{b}{2}\right) = \sigma_z(P) \Rightarrow |\sigma_z(P)| \leq \frac{\sigma_Y}{\gamma}$   
 $\gamma$  in mat poco deform. (nostri)  
 $\gamma$  coeff. sicurezza,  $> 1$  (CLS ~ 3)

## VERIFICA DI RESISTENZA

## RECAP - GEOMETRIA DELLE MASSE



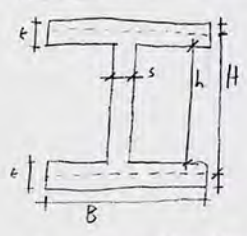
Determ. BARICENTRO

$A = A_{(1)} + A_{(2)} + A_{(3)}$   
 $y_G = \frac{S_x}{A} = \frac{A_{(1)} y_{G(1)} + A_{(2)} y_{G(2)} + A_{(3)} y_{G(3)}}{A} = \frac{H}{2}$ ;  $x_G = \frac{S_y}{A} = \frac{B}{2}$

Determ. Sistema di Rif. Baricentrico

$I_x = (I_{x_{0(1)}} + A_1 y_{G(1)}^2) + (I_{x_{0(2)}} + A_2 y_{G(2)}^2) + (I_{x_{0(3)}} + A_3 y_{G(3)}^2) = \dots = \frac{B^3 H^3}{12} - \frac{b h^3}{12}$

### Se PARETE SOTTILE



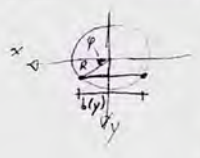
PARETE SOTTILE  $\Leftrightarrow \frac{t}{B} \ll 1$ ;  $\frac{s}{B} \ll 1$ ;  $B < H \Rightarrow t, s$  molto minori della minore delle dim. della sezione.

In appl.,  $t = \left(\frac{3}{2} + 2\right) s$

$t \ll B \Rightarrow$  approssimabile con la sua linea d'asse (per det. H)  $\Rightarrow$   $\frac{H-t}{2} \approx \frac{H}{2}$

Calcolando così, si ha che  $I_x \sim \frac{t B H^3}{2} + \frac{s H^3}{12}$ ;  $I_y = \frac{2 t B^3 s}{12} + \frac{H s^3}{12} \sim \frac{t B^3}{6}$ ;  $A = 2 B t + s H$

### Se CIRCOLARE PIENA



$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-R}^R y^2 (b(y) dy) \xrightarrow{y=R \cos \varphi} I_x = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \sin^2 \varphi (2R \cos \varphi \cdot R \cos \varphi d\varphi) = 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = 2R^4 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin^2 2\varphi}{4} d\varphi$

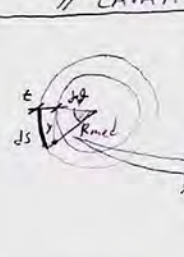
$\left[ \begin{array}{l} 2\varphi = \alpha \\ \alpha = \varphi/2 \\ d\varphi = \frac{d\alpha}{2} \end{array} \right] \Rightarrow I_x = \frac{R^4}{4} \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \alpha d\alpha \Rightarrow \text{PARTI} \Rightarrow I_x = \frac{R^4}{4} \pi$

Trasf. c. polari:  $dy = \frac{\partial y}{\partial \varphi} d\varphi = R \cos \varphi d\varphi$   
 $y = R \cos \varphi$   
 $b(\varphi) = 2R \cos \varphi$

### CAVA:

Th. trasporto  $\Rightarrow I_x = \frac{\pi}{4} (R^4 - r^4)$

### CAVA A PARETE SOTTILE



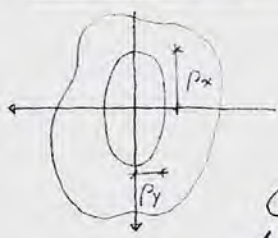
$t/R_{med} \ll 1 \Rightarrow dS = R_{med} d\vartheta \Rightarrow dA = t dS = t R_{med} d\vartheta$   
 $y = R_{med} \sin \vartheta$

$I = \int_A y^2 dA = \int_{d\vartheta} R_{med}^2 \sin^2 \vartheta \cdot t R_{med} d\vartheta = t R_{med}^3 \int_0^{2\pi} \sin^2 \vartheta d\vartheta = \pi t R_{med}^3$

In geom circ. spesso si considera l'INERZIA POLARE  $I_G = I_x + I_y = \int_A r^2 dA$



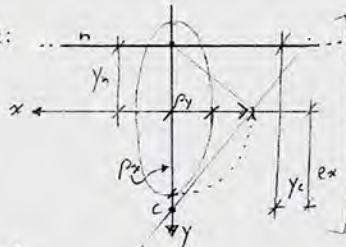
# ELLISSE E NOCCIOLLO D'INERZIA



Semiassi ellisse inerzia (in rit. princ.)  
 $p_x := \sqrt{\frac{I_x}{A}} ; p_y := \sqrt{\frac{I_y}{A}}$

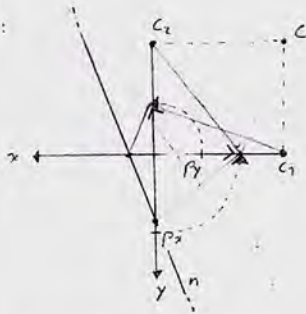
$p_x, p_y \Rightarrow$  ASSE NEUTRO (luogo dei punti con  $\sigma_z = 0$ )  $\Rightarrow C \equiv \frac{|M|}{|N|}$  centro di flessione/tensione e il Centro RELATIVO dell'asse neutro.

$C \equiv$  antipolo n. Graficamente:  
 centro di traz  $\Rightarrow -(\sigma)$   
 Centro di press  $\Rightarrow$  compress in semipiano (da n) con C



$Cey \Rightarrow I_n = I_x + A y_n^2 = A y_n e_x \Rightarrow p_x^2 = y_n \cdot \frac{(y_c - y_n)}{e_x}$   
 è appl. Th. Euclide:  
 $y_n (y_c - y_n) = p_x^2$  H rel. ipotenusa  
 cateto 1 =  $e_x$   
 cateto 2 (inognita)

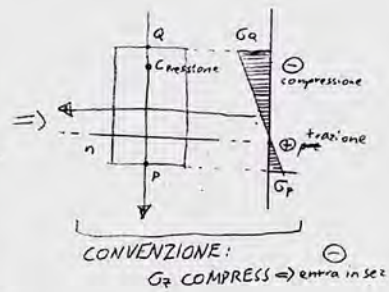
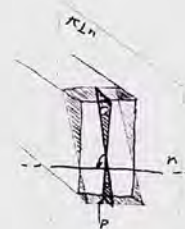
C in posizione generica:



Si compone il procedimento con  $p_x$  e  $p_y$  DOPO AVER PROIETTATO C

IDENTIFICARE ASSE NEUTRO E C  $\Rightarrow$  diagramma 3D qualitativo delle  $\sigma$ .

Se ribalti diag da piano Ln su sez. retta puoi fare studio grafico:

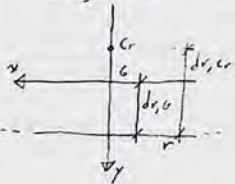


Essendo la distribuzione delle  $G_z$  bilineare, si cerca il  $G_z$  MAX di TUTTA la sezione. Così si possono applicare i CRITERI DI RESISTENZA.

## Nocciolo d'Inerzia

Luogo dei centri relativi delle antipolari che inviluppano la sezione retta (non intersecano alcun punto INTERNO alla sezione).

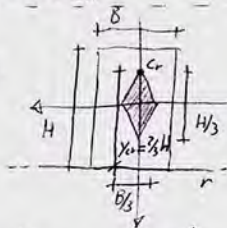
$I_r = \sum r_i \cdot d_{r,i} = A \cdot d_{r,b} \cdot d_{r,c} \Rightarrow d_{r,c} = \frac{I_r}{A d_{r,b}} = \frac{I_{r_0} + A(d_{r,b})^2}{A d_{r,b}} \rightarrow I_{r_0}$



Il nocciolo consente di verificare se si PARZIALIZZA la sezione retta, dividendola in parte traz. + parte comp., SENZA DOVER CALCOLARE L'ASSE: Il nocciolo è TABELLATO e di facile calcolo.

C INTERNO AL NOCCIOLLO  $\Leftrightarrow$  n ESTERNO ALLA SEZIONE RETTA

per il legame di antipolarità, compare a entrambi.



## ① Terzo Medio

Particolarità delle sezioni rettangolari: il nocciolo romboidale ha i vertici a  $2/3 L_i$  e dunque diagonali principali =  $L_i/3$ .

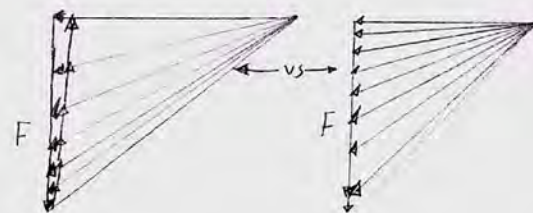
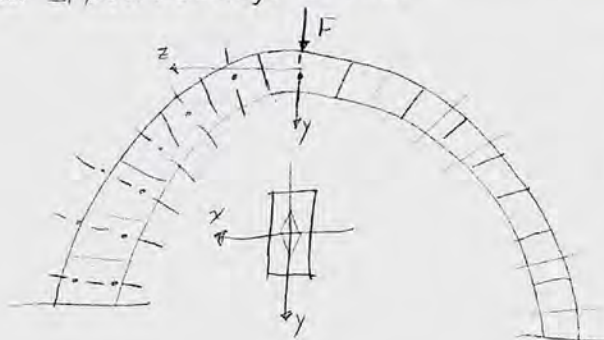
Per avere un regime tensionale non parzializzato basta che C appartenga dunque al TERZO MEDIO.

Applicazione molto utile per le strutture in muratura.

## ② Teorema Statico

Sotto det. Hp, se  $\nabla$  struttura  $\exists$  distribuzione di carichi e soll. interne arbitraria ma  $\Rightarrow$  equilibrio tra CDS e carichi, se con la verifica le tensioni limite non vengono superate allora la struttura NON COLLASSA (a prescindere dall'elasticità)

①+②  $\Rightarrow$  individuazione della spezzata di forze agente su conci lapidei; tra tutte le combo possibili si sceglie quella le cui componenti rientrano nel III medio. Il proc. è analogo nel C.L.S.

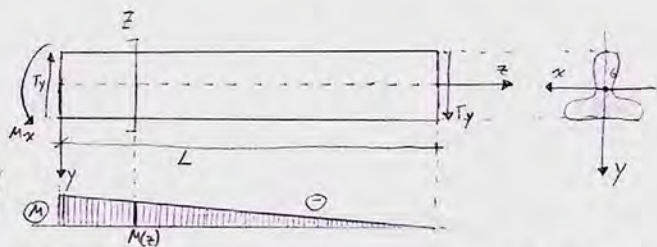




# TAGLIO IN DSV

Studiamo taglio retto: se deviato basta scomporlo in 2 retti  $L$  e in dir. princ. inerzia.

Hp Carichi DSV  $\Rightarrow$  mantello scarico  $\frac{b}{b} = 0$ ;  $\nexists$  vincoli ma  $\exists$  cond. carico duali (NEC. AUTOEQUILIBRATE!) sulle basi.



La trave è autoequilibrata rispetto alle solli, NON rispetto ai momenti  $\Rightarrow$  si applica una coppia in A che determina un momento  $M_x$  e equilibra il tutto.

$\Downarrow$   
Per la cond. di autoequilibrio del solido trave,  $T \Rightarrow M$  tranne in alcuni punti specifici:

$z \in ]0, L[$ ; si osserva che in questo caso  $x \equiv n$ ,  $T$  retto perché  $\parallel y$  (princ. inerzia)  $\Rightarrow yz \equiv$  PIANO DI FLESSIONE (si esplica la fless. trave)

In virtù dello stato solli,  $\sigma_z = f(M_x, \text{eventuali carichi applicati})$ ;  $\tau$  (tens. tangenziali) dipendono anche da compon. torcente,  $q_z = 0$ ; in gen:

$$T_x = \int_A \tau_{zx} dA \quad \Rightarrow \quad M_z = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zy} y) dA = 0 \text{ in questo caso}$$

Considerando una gen. corda  $AB \parallel n$ ,  $\forall AB \exists$  profilo  $\tau_{xy}$  variabile in  $x$ , che varia al variare di  $y$ .

Questa distrib. non ha sol. analitiche tranne per  $\square, \circ, \Delta \Rightarrow$  FORMULAZIONE APPROSSIMATA DEL TAGLIO "ALLA JOURAWSKY".

Sezioniamo il concio con un piano di traccia  $b$ . Per garantire l'equilibrio a rotazione, si ha che:

$$|\tau_{yz}| = |\tau_{zy}| \quad \text{garantito anche da } \underline{T} = \underline{T}^T$$

Le  $\tau$  si ottengono dalle eq. di equilibrio a traslazione lungo  $z$

Immaginiamo ora di considerare il concio di facce  $z$  e  $(z+dz)$ :

$$M(z) = T_y(z) - M_x = T_y(z-L)$$

$$\Downarrow \quad \sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y = \frac{T_y(z-L)}{I_x} y$$

Per l'equilibrio, oltre al taglio sullo faccia del concio sono presenti due coppie:

$$M(z) \left( \square \right) M(z+dz) = M(z) + dM(z)$$

Faccendo tendere  $\Delta z$  a  $dz$ , osserviamo che le  $T_{yz}$  tendono ad agire in una porzione infinitesima  $dA = dx dz$

Consideriamo ora l'eq. alla trasl. lungo  $y$ :

$$-\int_{B^*} \tau_{yz} dA + \int_{A^*} \sigma_z dA - \int_{A^*} \sigma_z + d\sigma_z dA = 0 \quad \tau_{yz} \text{ unica incognita}$$

$$\Downarrow \quad -\int_{B^*} \tau_{yz} dA - \int_{A^*} d\sigma_z dA = 0 \quad \Rightarrow \quad d\sigma_z = \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz = \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{M_x}{I_x} y = \frac{T_y(z-L)}{I_x} y \right) = \frac{T_{yz}}{I_x} dz$$

$$\Rightarrow -\int_{B^*} \tau_{yz} dx dz - \frac{T_y}{I_x} \int_{A^*} y dz dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_A \tau_{yz} dx - \frac{T_y}{I_x} S_x^* = 0$$

$\rightarrow$  dipende dalla forma funzionale di  $\tau_{yz}$

$\tau_{yz}$  in genere non determinabili  $\Rightarrow$  MEDIA INTEGRALE: considerando  $\bar{\tau}_{yz} = \frac{1}{b} \int_A \tau_{yz} dx$ , si ha che:

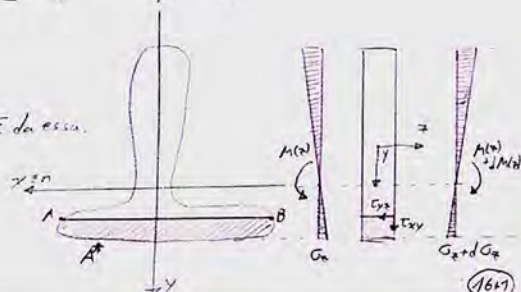
$$\bar{\tau}_{yz} = -\frac{T_y S_x^*(y)}{I_x \cdot b(y)} \quad \text{FORMULA DI JOURAWSKY}$$

$$\underline{T} = \underline{T}^T \Rightarrow \bar{\tau}_{yz} = \bar{\tau}_{zy}$$

Analizziamo i termini:

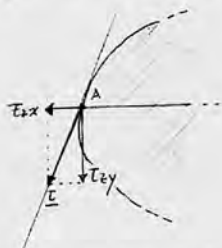
- $T_y$  costante per la specifica  $y$
- $S_x^*(y) = f(y)$ : al variare della corda  $AB$  varia l'area  $A^*$  delimitata SUPERIORMENTE da essa.
- $I_x$  costante: incide su TUTTA la sezione
- $b(y)$  dipende da  $y$

Se  $S_x^* > 0$ , ipotizzando  $T_y > 0 \Rightarrow \tau_{yz} < 0$ , entranti in  $A^*$ ; se  $\tau_{yz} > 0$ , uscenti da  $A^*$ .





Essendo il mantello SCARICO  $\Rightarrow \underline{t} = \underline{T}^T \cdot \underline{n} = \underline{0} \Rightarrow T_z$  sempre tangenti al profilo della sezione  $\Rightarrow T_z \cdot \underline{n} = 0$   
 Ciò implica che l'esistenza delle  $T_{zy}$  appena analizzate  $\Rightarrow \exists T_{zx}$  tali per cui  $\underline{T} = (T_{zx}, T_{zy})$  è tangente alla frontiera:

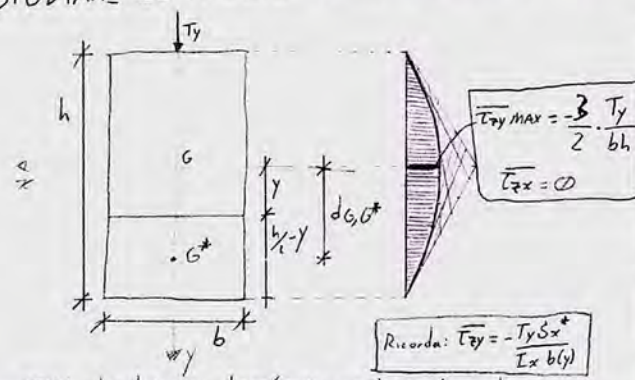


$$\frac{\partial G_z}{\partial z} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial T_{zx}}{\partial x} = - \left( \frac{\partial T_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) \equiv f(y) \text{ perché } z = \text{cost.}$$

$$\Downarrow$$

$$T_{zx} = f(y) \cdot x + C \Rightarrow \text{andamento LINEARE}$$

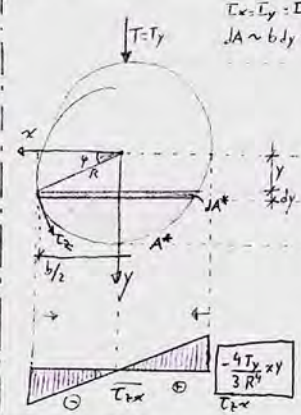
STUDIARE IL TAGLIO RETTO LUNGO Y DELLE SEGUENTI SEZIONI (NOTEVOLI)



$$\overline{T_{zy}}_{MAX} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{T_y}{b \cdot h}$$

$$\overline{T_{zx}} = 0$$

Ricorda:  $\overline{T_{zy}} = -\frac{T_y S_x^*}{I_x b(y)}$



$$S_x^* = \int_{A^*} y dA = \int_0^{\pi/2} \int_0^R 2R \cos \varphi (R^2 \cos^2 \varphi) d\varphi$$

$$\overline{T_{zy}}_{MAX} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2}$$

$$\overline{T_{zx}} = \overline{T_{zy}} \tan \varphi \Rightarrow \overline{T_{zx}} = \overline{T_{zy}} \tan \varphi$$

$$\overline{T_{zx}}_{MAX} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \left( \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R^2}}}{\cos \varphi} \right) \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} = -\frac{4}{3} \frac{T_y}{\pi R^2} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

$$\Rightarrow \overline{T_{zx}} = -\frac{4 T_y}{3 \pi R^2} \cdot \frac{x y}{R^2} = -\frac{4 T_y}{3 R^4} x y \text{ lineare in } x$$

## TORSIONE

Tipicamente appl. su provini sperimentali con coppia e braccio noti, per autoveq.  $\exists$  coppia torcente su altra base.  
 In Hp piccoli spost,  $\exists$  2 effetti sovrapp. e disaccoppiati (lineari)

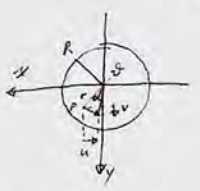
• Macro: rotaz non rigida a causa della deform. della trave



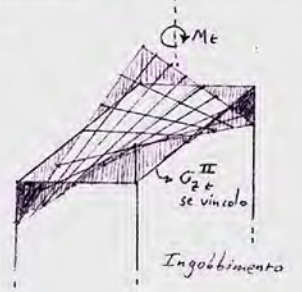
• Ingobbimento: Sezione caricata da Mt si deforma anche fuori dal piano della trave. Si produce uno spostamento  $w(x,y) = w^f(x,y) \equiv u_z(x,y)$

$\Rightarrow$  Se vincoli (es incastr) nascono tensioni  $\sigma$  da torsione secondarie NON SONO DSV ma possono essere significative!

In sez. circ. ingobbimento = 0. Infatti:



La sezione ha simmetria radiale, l'antisimmetria dovuta all'appl. della coppia torcente ( $\vec{M}_t \Rightarrow$  cinematici =  $e \odot$ )  $\Rightarrow$  punti diam. opposti dovrebbero avere cinematici opposti, ma poiché la coppia si applica  $\forall$  rit princ. inerzia si deve soddisfare anche l'opposto  $\Rightarrow 0 = \int \omega(x,y) \Rightarrow \omega = 0$



L'angolo  $\varphi$  di rot. della sezione rispetto alla config. iniziale è  $\varphi = \varphi(z)$ , e aumenta all'avvicinarsi alla coppia torcente.

$\Phi$  Nella rotazione si osserva che  $\forall P, \underline{u} \cdot \underline{r} = 0$  (compatibile con la simm della sezione; la rot. rigida è compatibile con ogni cond. emisimmetria  $\forall$  diametro)

$\Rightarrow$  il campo di spost. in una sez. circolare è:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\varphi' y \quad (R \hat{x}) \\ v &= \varphi' x \quad (R \hat{y}) \\ w &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} u &= -\varphi' z y \equiv u_1 = u(x_1) \\ v &= \varphi' z x \equiv u_2 = u(x_2) \\ w &= 0 \equiv u_3 = u(x_3) \end{aligned} \right\}$$

$\varphi'$  si dice curvatura TORSIONALE, esplica la  $\Delta \varphi$  tra sezioni

Nota il campo di spostamenti possiamo studiare le deformazioni:

$$\left. \begin{aligned} E_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = 0 ; E_{22} = 0 ; E_{33} = 0 && (\text{ingobbimento nullo}) \\ E_{12} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = -\varphi' z + \varphi' z = 0 = E_{21} \\ E_{13} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) = -\frac{1}{2} \varphi' y \\ E_{23} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) = \frac{1}{2} \varphi' x \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{scorrimenti angolari nel piano } yz/xz \Rightarrow \text{deform. DEVIATORICHE, non volumetriche.}$$

CRIT RES NOTI GMAI, TAMA IMPRONI TAMA EMISSIBILE TORSIONE 2



Di conseguenza,  $G_{11} = G_{22} = G_{33} = 0$   
 $G_{12} = G_{21} = 2\mu \epsilon_{12} = 0$   
 $G_{13} = G_{31} = 2\mu \epsilon_{13} = 2\mu \left(-\frac{1}{2} \vartheta' y\right) = -\mu \vartheta' y = \tau_{xz} = \tau_{zx}$   
 $G_{23} = G_{32} = 2\mu \epsilon_{23} = 2\mu \left(\frac{1}{2} \vartheta' x\right) = \mu \vartheta' x = \tau_{yz} = \tau_{zy}$

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\Delta: \text{pencil!})$$

↓

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mu \vartheta' y \\ 0 & 0 & \mu \vartheta' x \\ \mu \vartheta' y & \mu \vartheta' x & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\vartheta' = \text{cost.}]{\text{EQUILIBRIO}} \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ OK} \\ \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ OK} \\ \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \text{ OK} \end{cases}$$

$\downarrow \text{div } \underline{T} - \underline{b} = 0$   
(Hp)

Sulla frontiera (basi caricate) per Hp DSV  $\exists$  stato  $\underline{T} = 0$  Hp, vediamo basi estreme

$$M_t = \int_A (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) dA = \int_A \mu \vartheta' x^2 + \mu \vartheta' y^2 dA = \mu \vartheta' \int_A x^2 + y^2 dA = \mu \vartheta' I_G = \frac{\mu \vartheta' \pi R^4}{2} \quad (I_G = I_{xz} + I_{yz} = 2 \left(\frac{\pi R^4}{4}\right))$$

Da cui, in una TRAVE A SEZIONE CIRCOLARE  $\vartheta' = \frac{M_t}{\mu I_p}$  (simmetrica della curvatura flessionale  $v' = \varphi' = \chi = \frac{M}{EI} \dots$ )

Nota  $\vartheta'$  si possono esplicitare le  $\tau$  in questa specifica sezione:

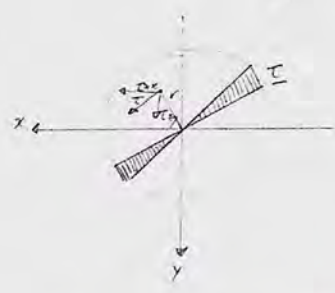
$$\tau_{xz} = -\mu \frac{M_t}{\mu I_p} y = -\frac{M_t}{I_p} y$$

$$\tau_{yz} = \frac{M_t}{I_p} x$$

Analoghe alla FORMULA DI NAVIER  
 scomporre l'effetto di  $\mu$  in favore del campo di spost!

$\forall P \in \text{sez. circ.}, M_t \Rightarrow \underline{\tau} : |\underline{\tau}| = \sqrt{\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{M_t}{I_p} \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{M_t}{I_p} r$

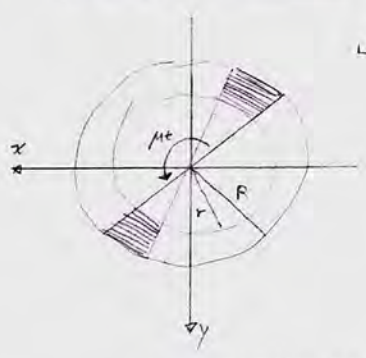
Ne segue che  $|\underline{\tau}|$  cresce all'aumentare di  $r$ , con andamento LINEARE



$\forall P, \underline{\tau} \perp \underline{r} \Rightarrow \underline{\tau} \cdot \underline{r} = 0 = \tau_{xz} \cdot r_x + \tau_{yz} \cdot r_y = -\frac{M_t}{I_p} y \cdot x + \frac{M_t}{I_p} x \cdot y = 0$

$|\underline{\tau}_{max}| = |\underline{\tau}|_{r=R} = \frac{M_t R}{I_p} = \frac{2 M_t R}{\pi R^4} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$  verso coerente con la coppia.

Sezione circolare CAVA



$$I_p = 2 \left( \pi \frac{(R^4 - r^4)}{4} \right) = \frac{\pi (R^4 - r^4)}{2}$$

$$\tau_{xz} = -\frac{2 M_t}{\pi (R^4 - r^4)} y ; \tau_{yz} = \frac{2 M_t}{\pi (R^4 - r^4)} x$$

$\tau_{max}$  non varia in posiz, cambia il modulo:  $|\tau_{max}| = \frac{2 M_t}{\pi (R^3 - r^3)}$

LE TENSIONI SI APPLICANO SOLO NELLA SEZIONE

FORMULAZIONE DI BREDT: SEZIONI SOTTILI CAVE QUALSIASI

Approssimazione come in Jourawsky, considera una sezione di spessore sottile ma VARIABILE nell'ascissa curvilinea  $\Rightarrow \tau = \tau(s); \frac{\tau(s)}{D} \ll 1 \forall s \in \Gamma$ .

La trattazione nasce dall'ANALOGIA IDRODINAMICA: noto spessore  $t$ , non tensioni che si esplicano.  
 Se pensi ad una sezione cava con  $H_2O$  e agiti lungo linea media, crei profilo velocità variabile ma con  $\bar{v} = \bar{v}(s)$  tangente alla linea media e variabile per avere PORTATA COSTANTE

$$P = \bar{v} t = \text{costante}$$

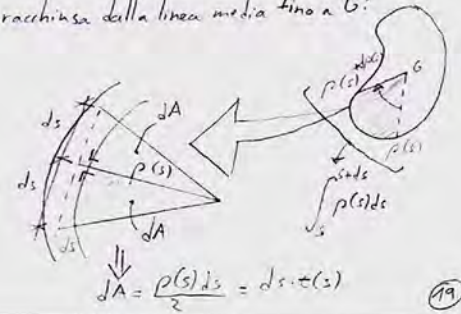
In sez. non sottili  $H_2O$  ha gradienti di  $v \Rightarrow$  no semplice



analogia a  $\underline{\tau}$  tensione tg linea media  $\Rightarrow \underline{\tau} t = \text{costante}$

$$M_t = \int_{\Gamma} \int_r \underbrace{|\underline{\tau} \times \underline{r}|}_{\text{t. braccio}} ds \cdot \underbrace{t \cdot \rho(s)}_{\text{raggio, } \underline{\tau}} = \underline{\tau}(s) t(s) \int_{\Gamma} \rho(s) ds = \underline{\tau}(s) t(s) \cdot 2 \Omega_m$$

Area racchiusa dalla linea media fino a G:



Ne segue che  $\underline{\tau}(s) = \frac{M_t}{2 t(s) \Omega_m}$  PRIMA FORMULA DI BREDT



La matricazione parte dall'idea che essendo  $t(s) \ll D$ , la distribuzione delle  $\tau$  si confonde con una distrib. uniforme di  $\tau$

**SECONDA FORMULA DI BREDT**

Discende da TLV e Th. Clayperon applicati alla sezione:

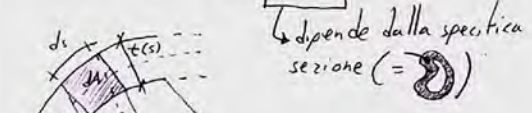
$$L_{VE} = \frac{1}{2} M_t \theta' dz = L_{VI} = \int_{\Omega} \phi dV = \int_{\Omega} G_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_{\Omega} \tau(s) \frac{t(s)}{\mu} ds$$

$\begin{matrix} \tau(s) ds dz \\ \downarrow \\ \tau \\ \downarrow \\ \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} \\ \downarrow \\ \epsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} = \frac{\tau}{2\mu} \end{matrix}$

T. Clayperon: Il lavoro di un sistema di forze conservative sugli spostamenti corrispondenti è pari a 1/2 del lavoro ESTERNO attuato dalle stesse forze nel campo di spostamenti

$$U = \int_{\Omega} \phi dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega} G_{ij} \epsilon_{ij} dV = \frac{1}{2} L_{VE}$$

$$\frac{dz}{2} \int_{\Omega} \frac{\tau^2(s) t(s)}{\mu} ds = \frac{dz}{2} \int_{\Omega} \frac{M_t^2}{4\Omega_m^2 t(s)} t(s) ds = \frac{dz M_t^2}{8\Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds \Rightarrow L_{VE} = L_{VI} \Rightarrow \frac{1}{2} M_t \theta' dz = \frac{1}{8} \frac{M_t^2 dz}{\Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \theta' = \frac{M_t}{2\mu \Omega_m^2} \int_{\Omega} \frac{1}{t(s)} ds \quad \text{SECONDA FORMULA DI BREDT}$$

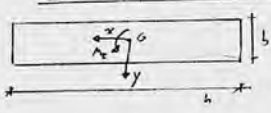
Noti  $\tau(s)$  e  $\theta'$ , si conoscono  $u, v$   $\forall$  sezione oltre alla distribuzione delle tensioni da torsione

**TORSIONE IN SEZIONI SOTTILI APERTE**

Argomento di MASSIMO INTERESSE nelle applicazioni civili: studia composizioni idrodinamica:  $\text{div } \tau_z = 0 = \text{div } v(\nabla \cdot \tau) \Rightarrow \text{rot } v(\nabla \cdot \tau) = \text{const.}$

di PROFILATI RETTANGOLARI SOTTILI tramite l'analogia

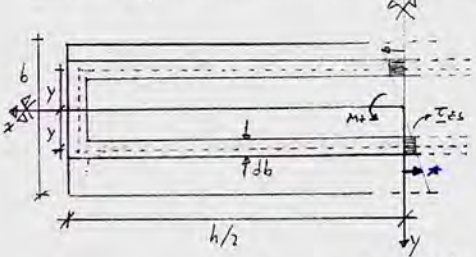
① Sezione sottile rettangolare allungata (UNA SOLA)



$$h \gg b; \begin{cases} \nabla \cdot \tau_z = 0 \\ \text{rot } \tau_z = \text{const.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \tau_z = 0 \\ \text{rot } \tau_z = 2\mu \theta' \end{cases}$$

curvatura torsionale  $[=] 1/L$

La sezione può essere considerata come sovrapposizione di infinite sezioni sottili chiuse con linea media variabile:



$h \gg b$ ; analogia idrodinamica; considerando l'azione di  $M_t$  si può ipotizzare che  $\forall$  sezione sottile  $\tau = \tau_{zs}$  uniforme.  
 Ad eccezione dei BORDI ( $x = \pm h/2$ ),  $\tau_{xy} \sim 0$  (sezione SOTTILE  $\Rightarrow$  si approssima alla linea media)  
 (Appross)  $|\text{rot } (\tau_z)| = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} = 2\mu \theta' \Rightarrow \tau_{zx} = +2\mu \theta' y + c \Rightarrow$  LINEARE  
costante in una sezione in stesso mater. costante in una sez.

La sezione è rettangolare  $\Rightarrow$  ha 2 AXI  $\Rightarrow \tau_{zx}|_{y=0} = 0 \Rightarrow c = 0 \Rightarrow \tau_{zx} = +2\mu \theta' y$  Ne segue che  $|\tau_{zx} \text{ MAX}| = \tau_{zx}|_{y=\pm h/2}$

Esplicitiamo  $\tau_{zx}$  RICORDANDO BREDT sulla sez. sottile:

$$\tau_{zs} = \frac{dM_t}{2\Omega_m t(s)} \Rightarrow dM_t = 2\Omega_m \tau_{zs} t(s) = 2(2y \cdot h) [2\mu \theta' y] \cdot dy = 8\mu \theta' h y^2 dy$$

$$M_t = \int_0^{h/2} dM_t = \int_0^{h/2} 8\mu \theta' h y^2 dy = 8\mu \theta' h \left[ \frac{y^3}{3} \right]_0^{h/2} \Rightarrow M_t = \mu h b^3 \theta' = K_t \theta'$$

Come nello SFORZO NORMALE,  $M = M(\text{geom}, \text{materiale}, \text{curvatura})$

$K_t = \text{RIGIDEZZA TORSIONALE} = \mu \frac{J_t}{L} = M I_t$   
fattore di torsione

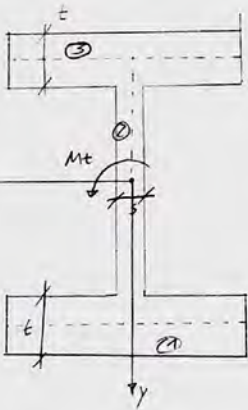
Nota  $M_t, \theta' = \frac{M_t}{K_t} = \frac{M_t}{\mu J_t} = \frac{M_t}{\mu \frac{h b^3}{3}} \Rightarrow$

$$\tau_{zx} = -2\mu \left( \frac{3M_t}{\mu b^3 h} \right) y = -\frac{6 M_t}{b^3 h} y$$

↳ Da ANALOGIA IDRODYN:  $y > 0 \Rightarrow \tau_{zx} \searrow x$



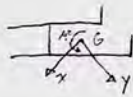
# TORSIONE IN COMPOSIZIONI DI SEZIONI SOTTILI APERTE



$$t \ll \min\{H, B\}$$

Composizioni di sezioni rettangolari sottili, si riflette anche per sezioni non sottili; la composizione di sez. sott. aperte delinea l'assorb. complessiva del mom. torcente della sezione.

In generale,



$$M_t = \sum_i M_{t_i} = K_{t_1} \vartheta_1' + \dots + K_{t_n} \vartheta_n'$$

Per la congruenza e per Bredt,  $\vartheta_1' = \vartheta_2' = \dots = \vartheta_n' = \vartheta'$

Da cui, la quota di momento assorbita dalla singola sezione è  $M_{t_i} = K_{t_i} \vartheta'$

$$\text{Ne segue che } \vartheta' = \frac{M_t}{\sum_i K_{t_i}} \implies M_{t_i} = \frac{K_{t_i}}{\sum_i K_{t_i}} M_t$$

$\implies$  ogni sezione assorbe quota di  $M_t$  in virtù della propria rigidità torsionale rispetto alla rigidità totale.

Nota  $M_{t_i}$ , si può diagrammare  $\forall$  sezione  $\tau_x \implies$  individuare  $\tau_{MAX}$

## CRITERIO DI RESISTENZA DI HENCKY-VON MISES

$$\sigma_{id}(\sigma_z, \tau_x) \stackrel{?}{\leq} \frac{\sigma_Y}{\gamma}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_z^2 + 3\tau_x^2}$$

$\tau_x$  tg e torsionale  
storici di flessione, normali...

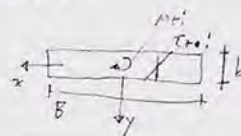
## CENTRO DI TAGLIO

Punto appartenente al PIANO della sezione verta in cui convergono le direzioni delle risultanti delle tensioni tangenziali  $\tau_{TS}$ , dirette lungo la linea media della sezione, indotte da sollecitazioni di taglio  $T = (T_x, T_y)$ .

Se l'asse della soli. di taglio passa per C si parla di cen TAGLIO PURO, altrimenti esiste un MOMENTO  $M_t$  dovuto al braccio tra T e C  $\implies |M_t| = |T| \cdot d(I, C)$  "trasporto del taglio su C"

$$C \in X^1$$

ripartito nelle singole sezioni  $\implies \vartheta_i$



$$\tau_{T_x} (+)_{MAX} = \frac{M_{t_i} b}{I_{t_i}} ; M_{t_i} = \frac{K_{t_i}}{\sum K_{t_i}} M_t$$

## MATRICE DELLE RIGIDENZE

Le equazioni di equilibrio impiegate in un tipico problema con risoluzione tramite il METODO DEGLI SPOSTAMENTI, ottenute dalla sovrapposizione degli effetti degli schemi notevoli sul nodo in esame, possono scriversi anche nella seguente forma matriciale:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F} \implies \text{carichi noti, applicati alla struttura (termini noti delle eq.)}$$

$\hookrightarrow$  gradi di libertà nodali liberi nella struttura

$\hookrightarrow$  matrice di rigidità: tiene conto delle rigidità degli elementi rispetto agli spostamenti liberi (informando di conseguenza la sollecitazione che ne deriva), ovvero uno  $\forall$  gdl nodale libero. I suoi coefficienti dipendono dall'elasticità (EI/EA) e dalla geometria (L/H) del sistema in esame.

$\underline{K}$  è una matrice:

• Simmetrica:

Th. Betti:  $S = \underline{K} \cdot S^{ol}$   
sollecitazione  $\downarrow$  deform. elastica

Considerando 2 strutture aventi LCEI-I, stessa configurazione geom. e stessa  $\underline{K}$ ,  
stat cost

allora  $L_{12} = L_{21}$ : il lavoro virt. delle  $F^{(1)} \cdot S^{(2)} = F^{(2)} \cdot S^{(1)}$ , che implica

$$\underline{K}^{(1)} \cdot S^{(1)} \cdot S^{(2)} = \underline{K}^{(2)} \cdot S^{(2)} \cdot S^{(1)} \quad \text{ma } S^{(1)} = S^{(2)} \implies \underline{K}^{(1)} S^{(1)} = \underline{K}^{(2)} S^{(1)}$$

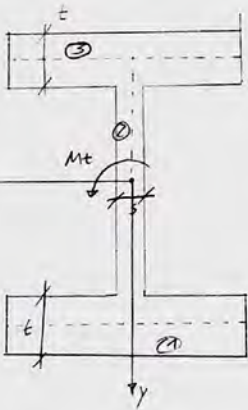
$$\underline{K}^{(1)} \underline{K}^{(2)} S^{(1)} = \underline{K}^{(2)} \underline{K}^{(1)} S^{(1)} \implies \underline{K} = \underline{K}^T$$

• Definita positiva (autovalori positivi)

• Invertibile ( $p = \text{MAX}$ : il sistema ammette 1 e 1 sola soluzione!)



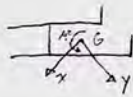
# TORSIONE IN COMPOSIZIONI DI SEZIONI SOTTILI APERTE



$$t \ll \min\{H, B\}$$

Composizioni di sezioni rettangolari sottili, si riflette anche per sezioni non sottili; la composizione di sez. sott. aperte delinea l'assorb. complessiva del mom. torcente della sezione.

In generale,



$$M_t = \sum_i M_{t_i} = K_{t_1} \vartheta_1' + \dots + K_{t_n} \vartheta_n'$$

Per la congruenza e per Bredt,  $\vartheta_1' = \vartheta_2' = \dots = \vartheta_n' = \vartheta'$

Da cui, la quota di momento assorbita dalla singola sezione è  $M_{t_i} = K_{t_i} \vartheta'$

Ne segue che  $\vartheta' = \frac{M_t}{\sum_i K_{t_i}} \implies M_{t_i} = \frac{K_{t_i}}{\sum_i K_{t_i}} M_t$

$\implies$  ogni sezione assorbe quota di  $M_t$  in virtù della propria rigidità torsionale rispetto alla rigidità totale.

Nota  $M_{t_i}$ , si può diagrammare  $\forall$  sezione  $\tau_x \implies$  individuare  $\tau_{MAX}$

## CRITERIO DI RESISTENZA DI HENCKY-VON MISES

$$\sigma_{id}(\sigma_z, \tau_x) \stackrel{?}{\leq} \frac{\sigma_Y}{\gamma}$$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\underbrace{\sigma_z^2}_{\text{storici di flessione, normali...}} + 3 \underbrace{\tau_x^2}_{\text{tg e torsionale}}}$$

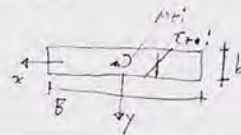
## CENTRO DI TAGLIO

Punto appartenente al PIANO della sezione verta in cui convergono le direzioni delle risultanti delle tensioni tangenziali  $\tau_{TS}$ , dirette lungo la linea media della sezione, indotte da sollecitazioni di taglio  $T = (T_x, T_y)$ .

Se l'asse della soli. di taglio passa per C si parla di cen TAGLIO PURO, altrimenti esiste un MOMENTO  $M_t$  dovuto al braccio tra T e C  $\implies |M_t| = |T| \cdot d(I, C)$  "trasporto del taglio su C"

$$C \in X^1$$

ripartito nelle singole sezioni  $\implies \vartheta_i$



$$\tau_{T_x} (+)_{MAX} = \frac{M_{t_i} b}{I_{t_i}} ; M_{t_i} = \frac{K_{t_i}}{\sum K_{t_i}} M_t$$

## MATRICE DELLE RIGIDENZE

Le equazioni di equilibrio impiegate in un tipico problema con risoluzione tramite il METODO DEGLI SPOSTAMENTI, ottenute dalla sovrapposizione degli effetti degli schemi notevoli sul nodo in esame, possono scriversi anche nella seguente forma matriciale:

$$\underline{K} \underline{u} = \underline{F} \implies \text{carichi noti, applicati alla struttura (termini noti delle eq.)}$$

$\hookrightarrow$  gradi di libertà nodali liberi nella struttura

$\hookrightarrow$  matrice di rigidità: tiene conto delle rigidità degli elementi rispetto agli spostamenti liberi (informando di conseguenza la sollecitazione che ne deriva), ovvero uno  $\forall$  gdl nodale libero. I suoi coefficienti dipendono dall'elasticità (EI/EA) e dalla geometria (L/H) del sistema in esame.

$\underline{K}$  è una matrice:

• Simmetrica:

Th. Betti:  $S = \underline{K} \cdot S^{el}$   
sollecitazione  $\downarrow$  deform. elastica

Considerando 2 strutture aventi LCEI-I, stessa configurazione <sup>geom</sup> e stessa  $\underline{K}$ , <sub>stat</sub> <sub>cost</sub>

allora  $L_{12} = L_{21}$ : il lavoro virt. delle  $F^{(1)} \cdot S^{(2)} = F^{(2)} \cdot S^{(1)}$ , che implica

$$\underline{K}^{(1)} \cdot S^{(1)} \cdot S^{(2)} = \underline{K}^{(2)} \cdot S^{(2)} \cdot S^{(1)} \quad \text{ma } S^{(1)} = S^{(2)} \implies \underline{K}^{(1)} S^{(1)} = \underline{K}^{(2)} S^{(1)}$$

$$\underline{K}^{(1)} \underline{K}^{(2)} S^{(1)} = \underline{K}^{(2)} \underline{K}^{(1)} S^{(1)} \implies \underline{K} = \underline{K}^T$$

• Definita positiva (autovalori positivi)

• Invertibile ( $p = \text{MAX}$ : il sistema ammette 1 e 1 sola soluzione!)



# PROCEDIMENTI

## Metodo delle Forze

- ① Analisi dell'iperstaticità del sistema ( $3t-s=l-i$ )
- ② Determinazione dello Schema ISOstatico equivalente
  - Aggiunta delle reazioni soppresso come soll. attive INCOGNITE
- ③ Introduzione delle equazioni di congruenza per ristabilire l'equivalenza CINematica
- ④ Applicazione del principio di SOVRApposizione degli EFFetti all'espressione del cinematisma soppresso (Es.  $\varphi = \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \varphi^{(AT)} + \varphi^{(X)} + \dots = 0$  perché  $\varphi = 0$  è la ③  $\Rightarrow X$ )
- ⑤ Utilizzo degli SCHEMI NOTEVOLI per individuare i vari contributi
- ⑥ Calcolo conseguente delle CDS e relativi DIAGRAMMI
  - CDS calcolabili sullo schema isostatico, applicando le ECS e introducendo le X.

## PLV

Formula generale:  $\int_0^L p u^* dz + \int_0^L q v^* dz + \sum_k F_k s_k = \int_0^L N u_1^* dz + \int_0^L M v_1^* dz$

## Isostatiche

- ① ECS  $\Rightarrow$  reazioni, vinc.
- ② Schema fittizio scarico con forza duale allo spostamento cercato e unitaria
  - Calcolo delle relative reazioni
- ③ Calcolo della legge della soll. fittizia imposta ( $M, T, N$ )
  - Nel sistema reale
  - Nel sistema fittizio

④  $LVE = Lvi$   
 •  $LVE =$  Forza fittizia  $\cdot$  spost reale cercato  $\stackrel{gen.}{=} \sum M_i^* \cdot \varphi_i + F_{y_j}^* \cdot v_j + F_{z_k}^* \cdot u_k$   
 •  $Lvi = \int_0^L F_{gen}^* \cdot \frac{F_{gen}^{reale}}{EI [EA]} dz \stackrel{gen.}{=} \int_{struttura} M^* \frac{M^{re}}{EI} dz - \int_{struttura} M^* \frac{dT}{h} dz + \int_{struttura} N^* \frac{N^{re}}{EA} dz$   
 $\chi = v^{reale}$

## Iperstatiche

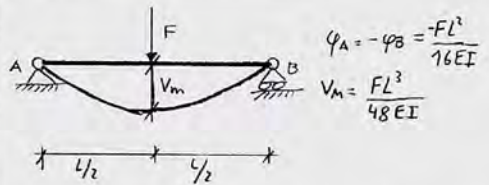
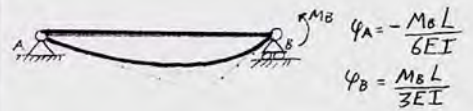
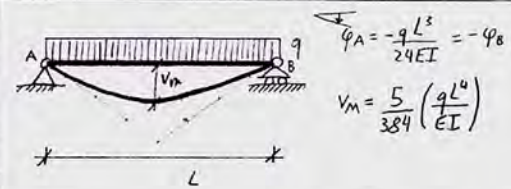
- ①  $3t-s=l-i$
- ② Schema ISO equiv. + INCOGNITE
- ③ Schemi ISO
  - Soll. note (⊙) e reazioni  $\Rightarrow M^{\circ}, N^{\circ}$
  - Reazioni incognite (⊙)
  - Forze fittizie unitarie  $\equiv X_i$  (⊙) e reazioni  $\Rightarrow M^{(i)}, N^{(i)}$
- ④  $M^{re} = M^{\circ} + \sum M^{(i)} X_i$   
 $N^{re} = N^{\circ} + \sum N^{(i)} X_i$   $\Rightarrow$  V tratto, 

TRATTO	$M_0$	$M'$	...	$M^n$
I				
...				
N				

 ; 

TRATTO	$N_0$	$N'$	...	$N^n$
I				
...				
N				
- ⑤  $LVE = Lvi$  1 eq.  $\forall X_i \Rightarrow$  i equazioni da mettere a sistema
  - $LVE =$  Forza fittizia (1)  $\cdot$  spost reale (0 o cedimento) = 0 [ced.]
  - $Lvi = \sum Lvi$  nei tratti =  $Lvi^I + Lvi^II + \dots + Lvi^N$
- ⑥ Identificazione delle X  $\Rightarrow$  ECS sullo schema isostatico per trovare le reazioni rimanenti
- ⑦ Calcolo delle CDS, diagrammi e deformata

## MdF - Schemi Notevoli



Le dimostrazioni degli schemi notevoli si ottengono dall'applicazione della LINEA ELASTICA

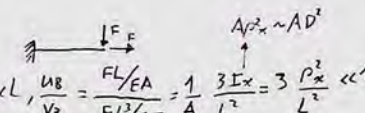
Se  $\nexists$  forze orizzontali, le R vinc orizzontali saranno = 0  
 $\Downarrow$   
 $3t-s=l-i, \exists s$  orizz.  
 Ogni X orizzontale risulterà infatti nulla.

Fisso una z "curvilinea" e determino l'andamento delle CDS  $\forall$  sistema, determinando le funzioni  $M^{\circ}, N^{\circ}, M', N', M'', N'', \dots$

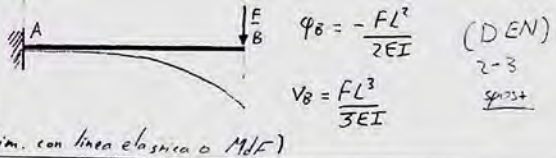
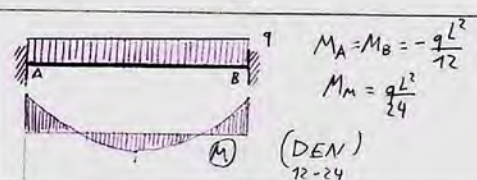
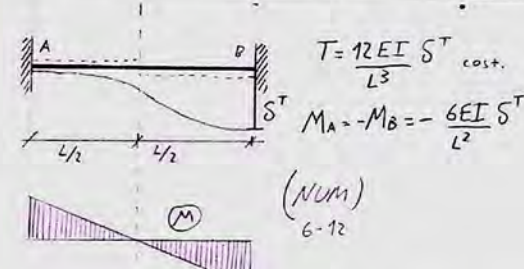
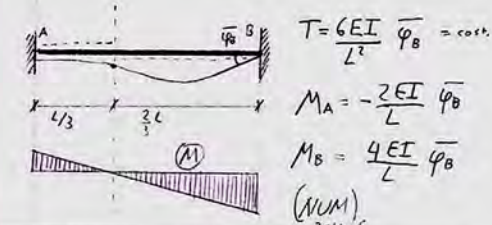
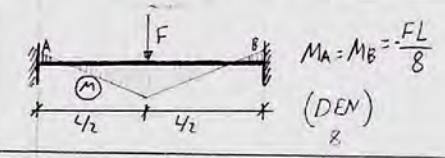


# Metodo degli Spostamenti

- $3t-s=l \cdot i$
- Si ipotizza rigidezza assiale  $\infty \leftarrow EA: D \ll L, \frac{u_B}{v_B} = \frac{FL/EA}{FL^3/EI} = \frac{1}{A} \frac{3Ix}{L^2} = 3 \frac{Ix}{L^2} \ll 1$
- Individuazione degli spostamenti nodali liberi (INCOGNITE iperstatiche)
- Schema cinematicamente equivalente  $\rightarrow$  SCARICO
  - Blocchi tutti i gdl nodali
  - "liberi" le incognite attraverso cedimenti (1 alla volta)
- Equazioni di equilibrio per garantire la congruenza
  - Forze duali agli spostamenti cercati, logicamente = 0 (gdl libero)
  - Sovrapp. effetti come M d F (es.  $M = M^F + M^T = 0$ )  $\Rightarrow$  conosci l'incognita
- SCHEMI NOT per individuare i vari contributi
- CDS e diagrammi V gdl liberato (singoli) con relative deformare
- Noti i contributi alle CDS dei gdl liberi, si mettono a sistema le ⑤
  - Valuta il segno delle singole CDS V tratto

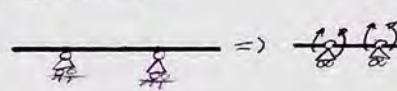


# MDS - Schemi Notevoli

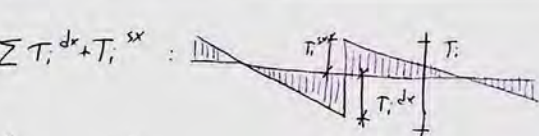


# Equazione dei 3 momenti

- Trave continua su più appoggi,  $3t-s=l \cdot i \Rightarrow i=n-s-3$
- M d F: cerniere interne,  $\varphi_i^{sx} = \varphi_i^{dx}$
- Sovrapp. effetti su  $\varphi_i^{sx}$  e  $\varphi_i^{dx}$ 
  - Schemi notevoli
- $\left\{ \begin{array}{l} \varphi_A = 0 \text{ (fissa)} \\ \varphi_i^{dx} = \varphi_i^{sx} \Rightarrow 3 \text{ momenti incogniti} \Rightarrow 4q. 3 \text{ momenti} \\ \varphi_i^{dx} = \varphi_i^{sx} \end{array} \right. = \underline{AX} = q$   
(Analogo a max. rigidette)



- $M_i$  noti  $\Rightarrow$  CDS (M) nota  $V_i$ 
  - Carichi applicati noti  $\rightarrow$  Diag. momento noto subito
  - Se  $S_i$  trave  $i$  è appl. carico distribuito, ovviamente  $T_i^{dx} = \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2}$   
 $T_i^{sx} = \frac{q_i L_i}{2}$



In genere,  $\forall z \in [0, L_{i+1}]$

$$M(z) = -\frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} z + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} z - M_i$$

$$T(z) = \frac{M_{i+1}}{L_{i+1}} + \frac{q_{i+1} L_{i+1}}{2} - \frac{M_i}{L_{i+1}} - q_{i+1} z$$

Se  $\exists \varphi_i^{(A)} = \frac{\delta_{i-1} - \delta_i}{L_i} \Leftrightarrow$

Lo si somma ai vari  $\varphi_i$