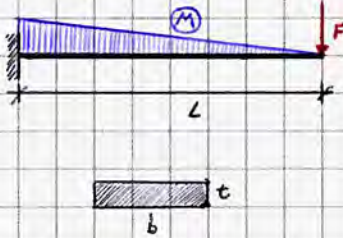


Evoluzione della progettazione strutturale

Nel 1638 vengono effettuati i primi tentativi di determinare un metodo per il calcolo strutturale, fino a quel momento effettuato per via empirica, grazie ad una geniale intuizione di Galileo Galilei, che osservò l'esistenza di un legame tra la resistenza di un elemento rispetto alle sollecitazioni e la sua geometria (σ è inversamente proporzionale all'inerzia), derivandone una inversa proporzionalità che si tradurrà successivamente nella legge $\sigma = M/W$, in cui:



$$M = F \cdot L$$

W , detto modulo di resistenza a flessione, dipende dal materiale:

$$W = \frac{I}{\text{Distanza tra il bordo superiore (nel caso di sollecitazioni verticali) e il baricentro} \rightarrow t/2} = \frac{b t^3}{6}$$

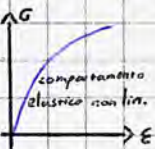
Uno degli aspetti più raffinati e complessi dell'ingegneria strutturale è la deduzione di schemi semplici dal caso reale preso in esame.

Ne segue che σ è maggiormente condizionata dallo spessore t dell'elemento, essendo esso sottoposto a sollecitazione verticale.

Galilei si limitò ad evidenziare l'inversa proporzionalità; fu solo nel 1678 che, grazie a Hooke, fu formulata la legge nella forma $\sigma = E \epsilon$, precursore delle normative: viene introdotto il comportamento elastico lineare, con una costante di proporzionalità che dipende dal materiale (modulo elastico). Fino al 2009 questa legge fu usata in Italia per le verifiche strutturali; essa rappresenta dunque una

delle pietre miliari della storia delle strutture. Il superamento di questo metodo di verifica fu la diretta conseguenza del terremoto a San Giuliano di Puglia del 2002: dal metodo delle tensioni ammissibili si passa dunque all'analisi degli stati limite, garantendo un periodo di transizione tra il 2002 e il 2008 per permettere ai tecnici di adeguarsi alle nuove indicazioni. In realtà, il metodo delle tensioni ammissibili è ancora un ottimo strumento di pre-calcolo, poiché permette un dimensionamento molto speditivo che può essere successivamente affinato.

Nel 1773 Coulomb iniziò a studiare strutture aventi comportamento non elastico lineare, ovvero prive di una diretta proporzionalità tra σ ed E ; tale comportamento è tipico di strutture in muratura o in CLS puro (oggi la norma prevede che il comportamento sia assimilabile a quello elastico lineare per bassi valori di carico). Egli determinò anche le formule di calcolo per la rottura a collasso di archi in muratura.



Nel 1826 Navier codifica il pensiero di Galilei in forma puramente matematica, concretizzando l'intuizione.

Nel 1855 de Saint Venant introduce il concetto $N = \sigma A$ [$M = \sigma W$], riconducendosi allo sforzo normale. Da ciò vengono introdotti i primi criteri di resistenza dei materiali con Tresca (1871), Rankine (1875) e Mohr (1882).

In parallelo sono stati introdotti i primi criteri di risoluzione di strutture iperstatiche grazie a Clapeyron (1852),

Mohr (1860) e Bresse (1865) con il Metodo delle Forze.

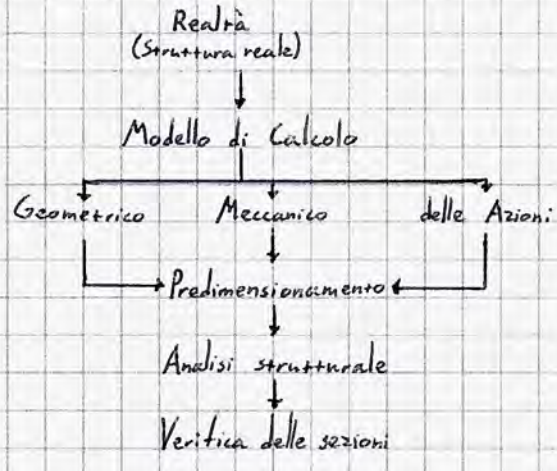
La prima normativa di progettazione strutturale risale al 1906 (in Francia) ed è basata sulla legge di Hooke; in Italia le prime norme tecniche per la progettazione strutturale, basate sul metodo di calcolo delle tensioni ammissibili, vengono adottate nel 1907.

Il metodo delle tensioni ammissibili si basa sul coefficiente di sicurezza $\nu = \sigma_R / \sigma_E$, con σ_R carico (σ) di rottura e σ_E σ di esercizio: $\sigma_{\text{ammissibile}} = \sigma_R / \nu$. Tra il 1940 e il 1950 viene introdotto il carico a rottura: invece delle σ si calcolano i carichi di esercizio e rottura, focalizzandosi sull'azione; questo metodo avrà però breve vita, susseguito nel decennio successivo dal metodo di calcolo probabilistico e semiprobabilistico, usati ancora oggi come base fondante dell'analisi agli stati limite. Negli anni '60 e '70 vengono inoltre sviluppati dei metodi matriciali, base dei programmi di calcolo strutturale.

La Scienza delle Costruzioni evolve dunque nella Tecnica delle Costruzioni introducendo criteri di resistenza e studio delle proprietà dei materiali; tra il XIX e il XX sec. si assiste ad un'evoluzione molto rapida, che si acuisce ulteriormente con l'avvento dei calcolatori elettronici negli anni '60, che consentono di risolvere grandi operazioni in tempi ridotti e costituiscono un grande vantaggio computazionale. È però di cruciale importanza avere un elevato senso critico e discernimento: ogni dato immesso in un'analisi deve essere scelto attentamente, si ha responsabilità civile e penale sui dati immessi e sull'output conseguente. In effetti, la norma richiede anche una procedura di validazione manuale (tipicamente effettuata con programmi di calcolo più semplici) del modello di calcolo, coincidente con un controllo con consapevolezza del modello, in cui è anche possibile estrapolare il singolo elemento strutturale dal modello.

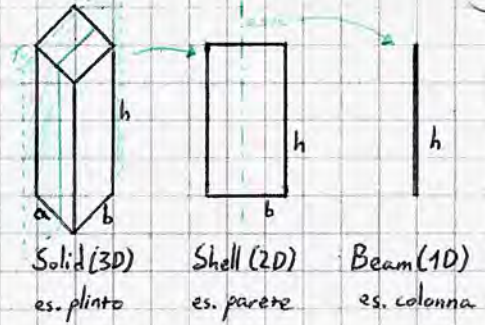
La progettazione strutturale segue un iter complesso da ideogrammare, diviso in fasi che prevedono anche l'uso del PC: la realtà fisica è complessa, va approssimata e modellizzata per permettere un'analisi.

La scelta del modello si basa sulla teoria degli elementi finiti (che fonda su concetti matematici molto complessi e che influisce su ogni branca dell'ingegneria), nella quale gli elementi vengono discriminati nelle seguenti categorie:



- Lineari/monodimensionali
- Shell/gusci/bidimensionali
- Solid/brick/tridimensionali

Evidentemente, il modello di calcolo dipende dalla scelta della natura 1-2-3D degli elementi, spesso suggerito dal numero di dimensioni prevalenti. Un modello 3D logicamente è estremamente dettagliato nell'analisi della risposta della struttura, con risultati molto



Solid (3D) es. plinto
Shell (2D) es. parete
Beam (1D) es. colonna

precisi, ma è anche più complesso; inoltre, richiedendo un maggior numero di dati si è più propensi a commettere errori. Ne segue che la complessità viene aumentata solo nel caso di strutture non semplici.

La normativa richiede obbligatoriamente un modello complesso per le analisi in campo non lineare; mentre il principio è facilmente applicabile a strutture intelaiate (CLS), formate da elementi prevalentemente lineari, non vale analogamente per le strutture in muratura.



approssimazione secondo normativa di un elemento in muratura.

In normativa si è dunque previsto di considerare l'asse degli elementi murari non bucati e la mezzera dell'elemento sovrastante l'architrave; ciò logicamente contraddice la teoria degli elementi finiti, ma evita di svolgere analisi non lineari su elementi 2D, procedimento complesso, lungo e non supportato dai programmi commerciali. Il dibattito è però ancora aperto.

Nella definizione del modello di calcolo sono presenti 3 sottomodelli:

Si definisce momento resistente la capacità di un elemento di resistere a flessione.

- Modello geometrico: deriva da limiti architettonici o urbanistici, sulla base della geometria si possono modellizzare i vari elementi.
- Modello meccanico: è informato dalla scelta dei materiali e, di conseguenza, il comportamento degli elementi.
- Modello delle azioni: include tutte le azioni gravanti sulla struttura, divise a loro volta in:
 - Azioni statiche: l'entità del carico non varia o varia in maniera poco significativa nel tempo
 - Azioni dinamiche: alta variabilità del carico nel tempo.

La classificazione dipende dunque dalla velocità di applicazione del carico; anche le prove attuate su strutture e materiali sono classificate in maniera del tutto analoga.

Una volta definito il modello, si attua un'analisi strutturale, in cui si studiano gli sforzi che si sviluppano nella struttura e si tracciano i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione; da ciò si ricavano le reazioni vincolari e le si confrontano con la massima capacità strutturale degli elementi analizzati.

La verifica delle sezioni serve per conoscere le dimensioni e i materiali degli elementi in risposta alle azioni. Noto il modello di calcolo, in particolare il sottomodulo geometrico, agli elementi strutturali schematizzati secondo la teoria degli elementi finiti si associano delle sezioni di primo tentativo attraverso un predimensionamento, che può avvenire per tentativi o, per essere più efficienti ed accurati, ispirandosi ad esempi già realizzati.

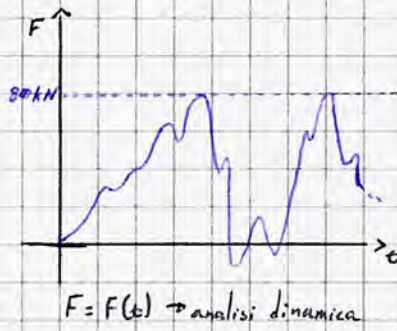
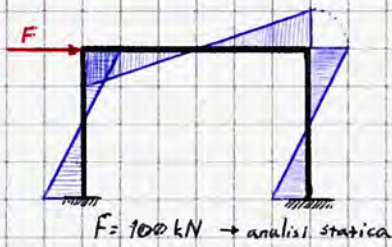
Gli edifici cadono per errori di:

- Progettazione
- Esecuzione
- Manutenzione

Altra causa è l'avvenire di catastrofi che superano le soglie della norma.

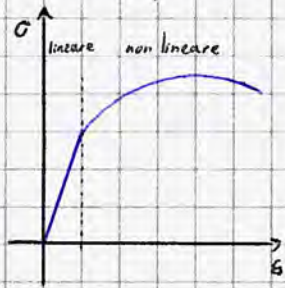
Un predimensionamento ben fatto permette un più rapido procedimento, e si rivela particolarmente utile per stime e valutazioni economiche orientative: si fornisce un tetto massimo per la spesa da sostenere e si giunge al risultato in pochi giorni, permettendo una rapida consegna al cliente. Un metodo alternativo al predimensionamento prevede il calcolo della sezione ottimale in base alle sollecitazioni studiate nell'analisi strutturale, prescindendo da G_1 e definendo una massa orientativa coincidente col peso della struttura oppure calcolando l'area ottimale ipotizzando G_2 nullo e aumentandola tramite un coefficiente.

L'Analisi strutturale può essere condotta sia per via statica che dinamica, considerando ovvero le azioni sulla struttura come statiche o dinamiche.



Gli effetti delle diverse tipologie di sollecitazione sono, chiaramente, diversi; solitamente l'analisi statica viene condotta moltiplicando il massimo valore della sollecitazione registrato nell'analisi dinamica per un coefficiente di sicurezza maggiore di uno in maniera tale da porsi in condizioni a vantaggio di sicurezza: la sollecitazione dinamica ha effetti più gravi!

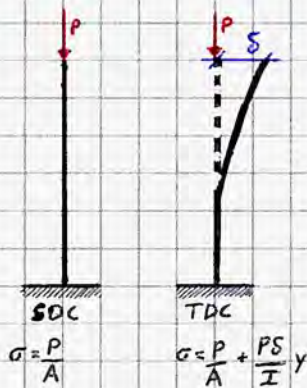
Entrambe le analisi possono essere condotte in campo lineare o non lineare (eventualmente multilineare/lineare per tratti); disordine è la proporzionalità tra σ ed ϵ .



In base alla linearità cambia il tipo di analisi.

Combinando entrambe le tipologie, si ottengono 4 possibili approcci all'analisi strutturale; evidentemente, l'analisi statica lineare è la più semplice mentre quella dinamica non lineare è la più complessa. La scelta della tipologia di analisi si discrimina in base alla complessità della struttura e le finalità dello studio.

Il concetto di non linearità non interessa unicamente il materiale di un elemento strutturale, ma anche la sua geometria: la Tecnica delle Costruzioni tiene conto delle inevitabili imperfezioni dovute alla lavorazione delle aste, che non sono mai perfettamente rettilinee: la norma pone infatti determinati limiti per garantire sicurezza.



P = carico verticale

δ = spostamento in testa, è funzione dell'imperfezione geometrica

Si determina un effetto del secondo ordine, detto effetto P- δ , dovuto all'imperfezione geometrica della trave; il calcolo delle σ segue la formula:

$$\sigma = \frac{P}{A} + \frac{PS}{I} y = \frac{P}{A} + \frac{M}{W}$$

dove $\cdot PS =$ Momento flettente
 $\cdot I/y = W$ modulo di resistenza a flessione

La norma dunque limita il δ che, se molto piccola, implica un effetto P- δ trascurabile. Nei casi in cui l'effetto non è trascurabile, si effettuano i calcoli con la formula di pressoflessione o si considera il carico P aumentato di un coefficiente litrizio che tiene conto della minor resistenza dell'elemento strutturale.

Il ragionamento è del tutto analogo per gli elementi trave:



In zona sismica, oltre ai carichi ripartiti occorre considerare una forza orizzontale N , cui si potrebbe aggiungere un momento flettente $N \cdot v$ in aggiunta a quello dovuto ai carichi ripartiti.

Detti effetti sono da considerare nel caso di elementi particolarmente snelli, altrimenti (come nel CLS) gli elementi risentono in maniera significativamente minore di detti fenomeni.

Si è dunque osservato come nella realtà i carichi siano variabili (anche oltre i valori della norma!), così come le caratteristiche di resistenza del materiale, che variano da punto a punto e che possono anche essere significativamente abbattute a causa di imperfezioni.

Per cautelarsi e progettare strutture sicure si utilizzano diversi coefficienti moltiplicativi: quelli relativi alle proprietà del materiale ad esempio dipendono dal tipo di materiale e da come viene lavorato (un materiale prodotto in maniera industriale tende a lavorare più vicino ai valori teorici rispetto ad un materiale confezionato in cantiere); si tende dunque a ridurre la resistenza teorica del materiale e aumentare il carico teorico applicato alla struttura, inducendo un aumento delle sezioni resistenti di progetto.

Cenni di Statistica

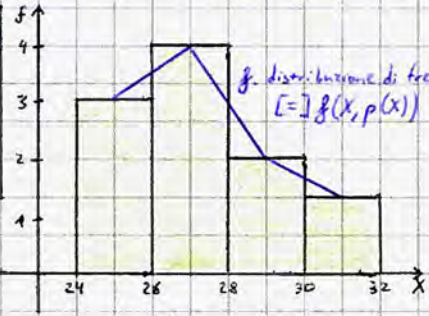
Per quantificare coefficienti di sicurezza, valori di resistenza e carichi applicati è necessario servirsi di strumenti di statistica, complessa branca della matematica. In particolare, risulta fondamentale la funzione gaussiana.

Dicesi variabile aleatoria X una variabile NON determinabile a priori (ad esempio, la resistenza del materiale: bisogna effettuare una prova per conoscerla, prima è indeterminata).

Noti n valori della variabile aleatoria (ad esempio, n valori ottenuti da prove di resistenza del CLS) X_i , è possibile raggrupparli in intervalli di ampiezza fissata. Si definisce frequenza il numero di volte in cui le variabili aleatorie cadono nelle rispettive

X_i : [24; 25; 26] [26,2; 27; 27,5; 27,7] [29; 30] [30; 5] (MPa)
 Classe 1 Classe 2 Classe 3 Classe 4

Classe	Frequenza
1	3
2	4
3	2
4	1



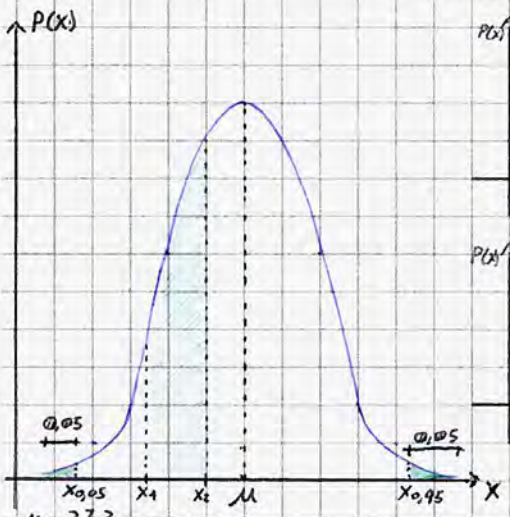
distribuzione di frequenza

classi. Dividendo la frequenza di una classe per la sua ampiezza si ottengono dei valori diagrammabili in una funzione, detta funzione distribuzione di frequenza, che assume forma di spezzata poligonale. Facendo tendere l'ampiezza delle classi a 0 e aumentando le prove meccaniche (e dunque le X_i) la distribuzione diventa una funzione continua che assume forma a campana. Tale curva, detta funzione distribuzione di probabilità [di Gauss] / Gaussiana, descrive molto bene l'andamento statistico di molte grandezze sperimentali utilizzate nelle applicazioni civili.

Matematicamente, per diagrammarla sono sufficienti due valori:

• Valore medio $\mu [X_m] = \sum_{i=1}^n X_i/n$

• Scarto quadratico medio $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}$



$\mu = 27,3$
 $\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 = 39,8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{39,8}{10}} = 1,99$



Per le applicazioni civili è preferibile avere uno scarto quadratico medio piccolo: poiché σ indica di quanto si discostano le variabili aleatorie da μ , esso determina l'ampiezza della curva a campana.

σ piccolo \Rightarrow nel caso dell'analisi della resistenza meccanica, si ha che il materiale si comporta tendenzialmente allo stesso modo in ogni prova e, di conseguenza, l'intera struttura è in linea con le previsioni.

La selezione del valore di resistenza da associare al materiale dopo aver effettuato le prove meccaniche si effettua adottando il seguente criterio: Presi due qualsiasi valori X_1 e X_2 della variabile aleatoria, l'area sottesa dalla gaussiana n nell'intervallo di estremi X_1 e X_2 indica la probabilità che l'estrazione di un nuovo valore della variabile aleatoria cada nell'intervallo suddetto.

La gaussiana si esprime in forma analitica come segue:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu}{\sigma}\right)^2}$$

Noti σ e μ , la scelta del valore da considerare come resistenza del materiale viene attuata in base alla norma, selezionando il frattile al 5%, valore della grandezza aleatoria che ha il 5% [95%] di essere minorato [maggiorato]

$X_{0,05} = \mu - 1,645\sigma$

$X_{0,95} = \mu + 1,645\sigma$

Interessa sia i carichi variabili che i carichi fissi: l'attollamento di un ambiente logicamente varia nel tempo; i carichi fissi variano rispetto ai valori di progetto perché non è possibile essere stochiometricamente precisi in cantiere: lo spessore della soletta in CLS gettato in opera per un solaio non è mai costante \Rightarrow anche i carichi strutturali sono variabili aleatorie!

Classi di resistenza di un CLS

C 12/15 classe minima per opere strutturali:

- resistenza cubica R_c (nuova costruzione)
- resistenza cilindrica f_c (esistente) carichi

$R_c \uparrow f_c$

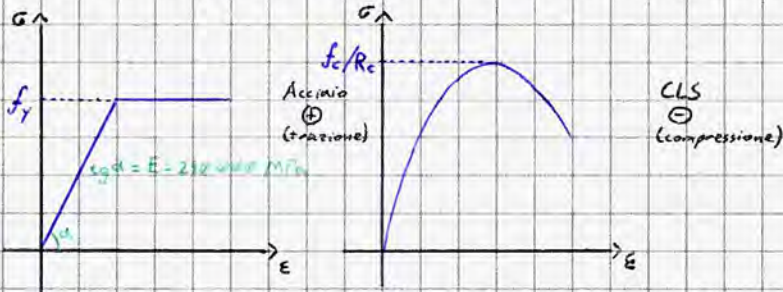
Il parametro di riferimento per le azioni esercitate sulla struttura è il frattile al 95%:

L'obiettivo principale nelle applicazioni professionali è che la struttura sia in grado di sopportare sollecitazioni entro determinati margini di sicurezza.

Il metodo più semplice in quest'ottica è stato impiegato dal 1906 al 2009, detto **metodo delle tensioni ammissibili**, che ha caratterizzato la Storia delle costruzioni sin dalle prime norme tecniche e norme sismiche.

Il metodo si basa su un'ipotesi semplice derivante dalla SdC, ovvero il comportamento elastico lineare: rispetto alle caratteristiche di resistenza del materiale effettive il materiale viene usato molto poco e la struttura non entra mai in campo plastico.

Osserviamo un generico diagramma σ - ϵ di materiali tipicamente usati nelle costruzioni, tipo acciaio e CLS:



Più un materiale opera nel campo plastico, ovvero più essa è in grado di deformarsi, dunque è più sicura: i materiali duttili forniscono il tempo di fuggire dalla struttura e, attraverso la deformazione, denuncia in superficie eventuali malori. Il CLS non armato e la muratura, ad esempio, si spaccano improvvisamente senza fornire alcun sintomo.

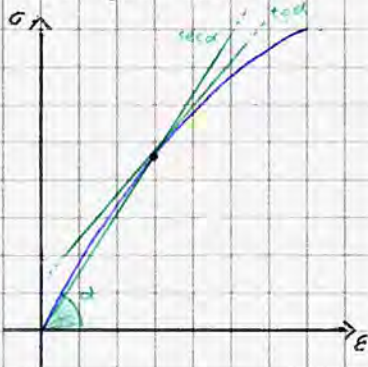
Il metodo delle tensioni ammissibili, tenendo conto del comportamento reale fissava il limite di esercizio delle strutture progettate entro il limite elastico lineare:

• Acciaio: $\sigma_s / \sigma_A = \text{tensione ammissibile dell'acciaio} \approx \frac{2}{3} \sigma_{\text{caricamento acciaio}} f_y \Rightarrow \sigma_A \approx \frac{2}{3} f_y$

• CLS: ha un comportamento fortemente non lineare $\Rightarrow \sigma_c \approx \frac{1}{3} f_c$

coefficienti di sicurezza < 1 (riducono la resistenza)

La tensione ammissibile, presa come valore/condizione limite, determina valori più bassi della resistenza meccanica effettiva offerta dal materiale: in questo modo si era certi che i materiali operassero sempre in un campo elastico lineare, concetto particolarmente importante per il CLS: nell'intervallo in cui il comportamento del materiale è assunto come elastico lineare $\sigma_d \approx \sigma_{cd}$.



Essendo il legame costitutivo elastico lineare valgono tutte le formule studiate in Scienza delle Costruzioni (principio di sovrapposizione degli effetti...), grande vantaggio del metodo è il non considerare la piena resistenza del materiale: raggiunto un valore limite in una qualsiasi sezione dell'intera struttura era necessario riprogettare il tutto; il metodo è dunque molto limitante e tendente al sovradimensionamento rispetto a quanto realmente necessario.

Nei decenni si è verificato che i coefficienti garantivano la necessaria sicurezza strutturale; con il terremoto a San Giuliano di Puglia nel 2002 si ha una rivoluzione: si ipotizza che il metodo delle tensioni ammissibili non garantisca necessariamente un sufficiente grado di sicurezza; questo momento segna il culmine di un iter avviato con un DM del 1996 in cui il metodo delle tensioni ammissibili era solo indicato (senza

metodo di calcolo); viene invece introdotto il metodo di analisi agli stati limite nella norma; il 2002 è stato il casus per andare oltre.

Se una struttura entra in campo plastico nella risposta alle sollecitazioni, si distribuisce il danneggiamento e la dissipazione di energia su tutta la struttura, che dunque dissipa meglio l'energia; se la struttura permane in campo elastico lineare si rischia che il danno si concentri in pochi punti, portando a fratture localizzate e al crollo.

Negli anni '60 e '70 viene elaborato un altro metodo di sicurezza, detto **metodo del calcolo a rottura** (entrato in normativa in quegli anni ma abolito poco dopo): il metodo considera il collasso della struttura determinando il carico che porta la struttura (o il singolo elemento strutturale) al collasso considerando il comportamento non lineare del materiale (o dei materiali, nel caso di composizione di più materiali).

Rispetto alle tensioni ammissibili dunque il metodo permette di spingere le prestazioni del materiale fino ai valori di f_y e f_c , ma ancora non si considera la resistenza del materiale in fase plastica; si presunde dalla lunghezza del ramo successivo.

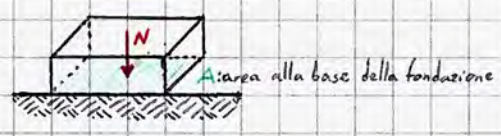
Il metodo prevede di confrontare il carico agente con il carico massimo sopportabile dalla struttura, come ben visibile alla pagina successiva.



$N_e \leftrightarrow N_R: \gamma_F N_e \leq N_R \Leftrightarrow N_e \leq \frac{N_R}{\gamma_F}$
carico agente carico di rottura
 coefficiente di sicurezza > 1 : amplifica il carico agente.

Anche questo metodo non considera la duttilità del materiale.

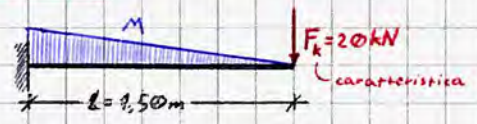
Per essendo stato abolito nei calcoli di strutture in elevazione, questo metodo viene ancora usato per la sola verifica del suolo di fondazione: si confronta il carico agente con il carico limite del terreno:



$Q = \gamma \frac{N}{A} \leq Q_{lim} \Leftrightarrow \frac{N}{A} \leq \frac{Q_{lim}}{\gamma}$

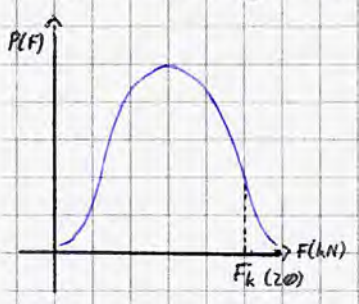
È stato poi elaborato un metodo, mai entrato in normativa perché troppo complesso per verifiche manuali ma adatto ad applicazioni al calcolatore, che è alla base dell'attuale metodo usato in normativa (semiprobabilistico): usa la teoria del metodo introdotto ora per poi effettuare verifiche deterministiche, confrontando i valori fissati dopo aver impostato una base di calcolo probabilistico e detto metodo/approccio probabilistico; si basa sul fatto che tutte le grandezze (carichi/resistenze) coinvolte nella progettazione strutturale sono aleatorie.

Esempio



$M = F \cdot L = M_{dk}$ momento agente

(Fk)
 Nel progetto, 20 kN è il frattile al 95% della variabile aleatoria F; ne segue che anche Md è una variabile aleatoria (essendo il prodotto di una variabile aleatoria per una costante).
 Le gaussiane che descrivono la distribuzione di F ed M dunque non variano; cambiano solo grandezze e unità di misura. Ne segue che anche Mdk è un frattile al 95%.



Supponiamo di realizzare la mensola in acciaio (è più semplice il calcolo del momento massimo che si sviluppa nella membratura); in particolare, consideriamo una IPE240 in acciaio S235.

In una trave in acciaio il momento resistente (massimo momento sopportabile) si calcola con un'elaborazione agli stati limite considerando l'ingresso in campo plastico attraverso la formula:

Classi di resistenza dell'Acciaio

S235

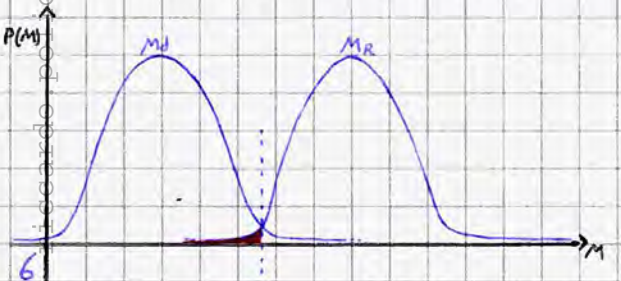
valore nominale della tensione di snervamento (fyk) in MPa, ovvero N/mm²
 caratteristico: frattile del 95%

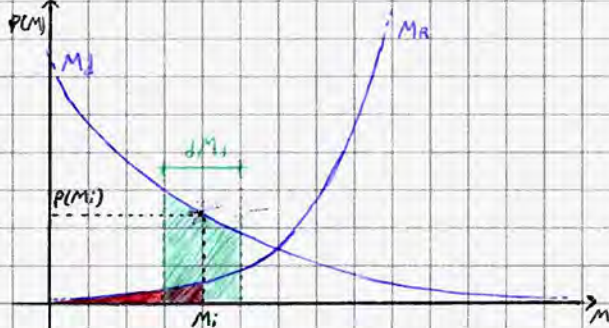
$M_{Rk} = W_{pl} \cdot f_{yk}$
caratteristico costante (da sagomario) = 366,6 cm³

$F_k \rightarrow M_{dk} \Rightarrow M_{dk} \leq M_{Rk} \text{ OK}$
 $f_{yk} \rightarrow M_{Rk}$

Il metodo probabilistico si applica considerando un valore aleatorio di F (e il corrispondente Md) ed un altro valore randomico di fy (e il corrispondente MR) per poi confrontare Md e MR. Detta verifica viene iterata per un numero significativo di combinazioni F-fy per poi sommare il numero di verifiche superate e quello delle verifiche non superate. Se il numero delle verifiche non superate è al più pari a 10⁻⁵ volte il numero di verifiche superate la struttura è verificata; la probabilità che essa collassi è al più 1/100 000. Risulta evidente come il metodo sia particolarmente efficace al calcolatore, ma inutilizzabile manualmente; si osservi inoltre come la probabilità che una struttura collassi non si annulla MAI!

Più rigorosamente, poiché le gaussiane di Md e MR sono diagrammabili in uno stesso grafico, si procede considerando l'intersezione tra le due curve e, di conseguenza, la probabilità che MR < Md: se entro i limiti imposti dal metodo la struttura è verificata.





ingrandimento delle curve a p. 6

$M_R \leq M_i$ è infatti rappresentata nel diagramma dall'area in rosso. Essendo però necessario definire indipendentemente M_R (dipendente dal materiale) e M_D (dipendente dai carichi), occorre studiare l'area data dalla seguente forma integrale:

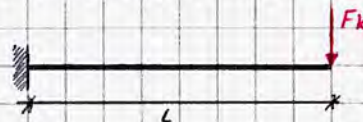
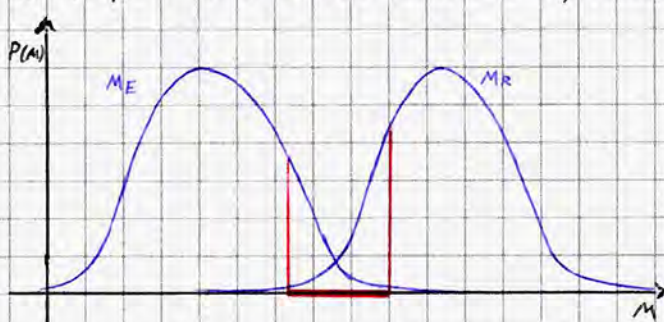
$$\int_{-\infty}^{M_i} P(M_R) dM_R \quad (\text{area in rosso nel diagramma})$$

e confrontarla con la precedente (in verde) come di seguito, ottenendo la probabilità di fallimento/collasso PF (probability of failure) ed effettuando dunque la verifica ($PF \leq 1/100000$). Il calcolo della PF infatti è valido $\forall M_i$: si effettua un calcolo integrale tra $-\infty$ e $+\infty$!

$$\int_{M_i=-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{M_i} P(M_R) dM_R \right) \cdot (P(M_i) \cdot dM_D) = PF \leq 1/100000$$

Il metodo probabilistico vede applicazioni solo su elaboratore e a scopi di ricerca; nelle applicazioni professionali, come da normativa, si impiega una valutazione di tipo semi-probabilistico: le variabili aleatorie sono trattate in maniera probabilistica ma il confronto tra esse è deterministico: si instaura una corrispondenza biunivoca tra le variabili di resistenza e i carichi.

Nel metodo semi-probabilistico dunque si parte assumendo i carichi come tratti al 95% e le resistenze come tratti al 5%; nella realtà però non si ha la certezza che le effettive configurazioni rientrino nei limiti così stabiliti; con successive applicazioni dunque si fa in modo da minimizzare la probabilità di fallimento della struttura.



variabili aleatorie

$$M_{Ek} = F_k \cdot L$$

$$M_{Rk} = f_{yk} \cdot W_{el} \quad (\text{formula Navier})$$

Acciaio S235 $\rightarrow f_{yk} = 235 \text{ MPa}$

Nella verifica per valori caratteristici si ottiene una striscia, evidenziata in figura, in cui la verifica non è soddisfatta; essa è l'intersezione dei valori che superano il 95% per M_E e sono inferiori al 5% per M_R .

Perché la probabilità di collasso di una struttura deve necessariamente essere inferiore allo $0,00001\%$ ($1/100000$), non è logicamente possibile assumere detti valori come valori di progetto: la probabilità che la verifica non sia soddisfatta è della $0,0025\%$ ($5\% \times 5\%$), sensibilmente più elevata di quanto richiesto.

Si passa dunque dai valori caratteristici ai valori di progetto, differenti dai primi in quanto ottenuti tramite dei coefficienti di sicurezza, maggiori di 1, che modificano i valori misurati in base alla distribuzione:

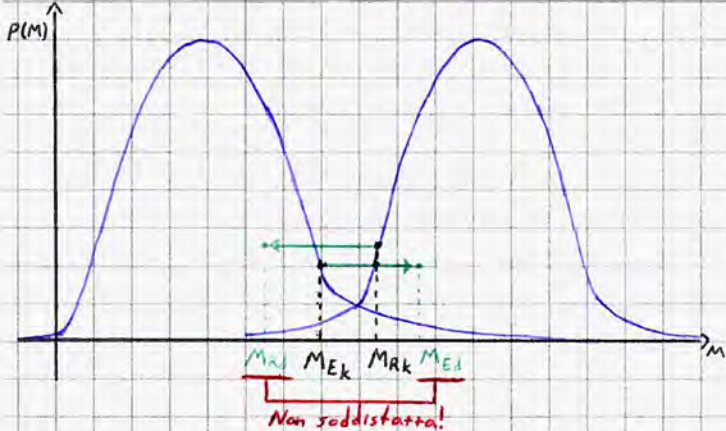
$$M_{Ek} = F_k \cdot L \quad \longrightarrow \quad M_{Ed} = \gamma_F \cdot F_k \cdot L$$

dipende dal tipo di carico ($F = \text{"forza"}$)

$$M_{Rk} = f_{yk} \cdot W_{el} \quad \longrightarrow \quad M_{Rd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_M} W_{el}$$

"design", progetto

dipende dal materiale



Il metodo semiprobabilistico confronta solo ME e MR rispetto ai valori di progetto: nel grafico a fianco si vede come, pur essendo la verifica soddisfatta per i valori caratteristici (con probabilità di collasso dello 0,0025%), non lo è per i valori di progetto. La formula di verifica in questo metodo dunque è:

$$M_{Ed} \leq M_{Rd} \Rightarrow \text{verifica soddisfatta, altrimenti bisogna intervenire sulla struttura.}$$

Osservazione: $M_{Ed} = \gamma_F \cdot M_{EK}$
 $M_{Rd} = \frac{M_{Rk}}{\gamma_M}$ } la distanza relativa tra M_{Ed} e M_{Rd} si riduce, eventualmente portando a una verifica non soddisfatta; i coefficienti si moltiplicano tra loro in maniera tale da quantificare la sovrastima effettuata sulla struttura: ipotizzando $\gamma_F = 1,5$ e $\gamma_{acciaio} = 1,15$, la struttura è sovrastimata di 1,725, ovvero è progettata per operare fin quasi al doppio delle proprie capacità; ne segue che le probabilità di collasso si riducono sensibilmente.

I γ dunque sono coefficienti tabellati che riducono entro i limiti richiesti la probabilità di collasso; essi hanno diverse caratterizzazioni:

Coefficienti di sicurezza dei carichi γ_F

- γ_{g1} , relativo al peso proprio della struttura $g_{k1} = 1,3$
- γ_{g2} , legata ai carichi permanenti g_{k2} , a loro volta distinti in:
 - completamente definiti = 1,3 a seconda che l'elemento sia esplicitamente definito nel progetto o meno.
 - non completamente definiti = 1,5
- γ_q , coefficiente di sicurezza dei carichi variabili $q = 1,5$

Coefficienti di sicurezza dei materiali γ_M

- Acciaio = 1,15
- CLS = 1,5
- Muratura = 3

Si osservi che i due γ aumentano all'aumentare dell'incertezza relativa alla grandezza in esame. Le amplificazioni implicate dai γ si studiano in due diverse configurazioni dette stati limite, che esplicano particolari condizioni rispetto alle quali le strutture devono garantire prestazioni.

I due stati limite maggiormente studiati nella progettazione strutturale sono lo Stato Limite Ultimo - che schematizza la massima combinazione di carico sopportabile dalla struttura prima del collasso, anche per effetto dell'instabilità; si studia in quali condizioni la struttura non è più in grado di sopportare le azioni agenti - e lo Stato Limite di Servizio (Esercizio), che analizza la struttura nella sua condizione usuale, considerando combinazioni di carichi differenti in funzione della destinazione d'uso dell'opera.

Stato Limite Ultimo: Punto di partenza è lo studio della combinazione fondamentale alla SLU, indicata con F_d (forza di progetto). In riferimento ad un solajo di copertura, ad esempio:

$$F_d = \gamma_{g1} g_{k1} + \gamma_{g2} g_{k2} + \gamma_{q1} q_{k1} + \psi_{02} \gamma_q q_n$$

azione variabile DOMINANTE
carico variabile ACCOMPAGNATORE (qui è un carico da NEVE)

coefficiente di combinazione stocastica: coefficiente minore di 1, risultante dalla statistica, che schematizza la probabilità estremamente ridotta che si verificassero entrambi i carichi contemporaneamente, al loro massimo valore previsto e considerando l'amplificazione dovuta ai coefficienti di sicurezza. ψ viene definito in base alla destinazione d'uso dell'edificio.

Stato Limite di Servizio: si considerano diverse combinazioni di carico a seconda delle azioni gravanti sulla struttura, differenziate in base alla probabilità che esse siano compresenti.

Si definiscono:

- **Combinazione rara:** carico applicato raramente sulla struttura, ha una bassa probabilità di verificarsi. Vi si associano ^{degli} Ψ_{0i} :

$$F_d = g_{k1} + g_{k2} + q + \Psi_{02} q_n$$

- **Combinazione frequente:** probabilità media, vi si associano degli Ψ_{1i} :

$$F_d = g_{k1} + g_{k2} + \Psi_1 q + \Psi_2 q_n$$

- **Combinazione quasi permanente:** presente nella quasi totalità della vita della struttura, vi si associano degli Ψ_{2i} :

$$F_d = g_{k1} + g_{k2} + \Psi_2 (q + q_n)$$

In generale, $\Psi_{0i} > \Psi_{1i} > \Psi_{2i}$ ($\Psi_i < 1$); si sceglie il carico di entità maggiore come azione fondamentale (dominante) in maniera tale da ottenere il massimo carico possibile dalla singola combinazione.

I coefficienti Ψ risultano, come detto, dalla statistica: Ψ_2 coincide con il valore medio della distribuzione, Ψ_1 col frattile al 95% e Ψ_0 restituisce il carico nella sua interezza, ovvero un frattile del 100%. Si osservi come al diminuire dell'incertezza - ovvero all'aumentare della probabilità con cui una determinata combinazione si verifica - diminuiscono anche i coefficienti Ψ . Dal punto di vista della norma, l'entità dei singoli Ψ varia anche in base alla destinazione d'uso dell'edificio da progettare.

Acciaio

L'acciaio nelle costruzioni corrisponde ad una famiglia di scelte tecnologiche: esiste di più tipologie - principalmente in base al tenore di carbonio presente nella lega - in risposta a diverse esigenze.

In generale, una delle principali proprietà per la classificazione di un materiale in ambito strutturale è il **rendimento meccanico**, che fisicamente rappresenta la lunghezza massima di un elemento (verticale, tendenzialmente) realizzato in un unico materiale prima che collassi per effetto del peso proprio, trascurando l'instabilità.

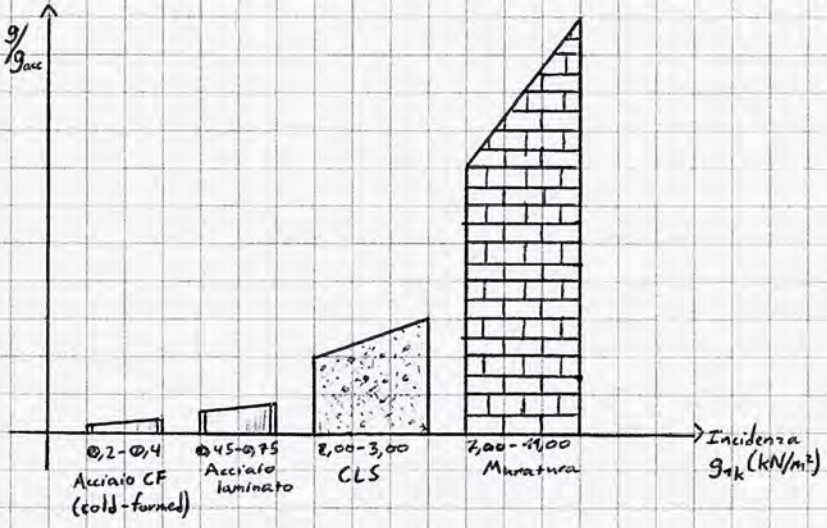
$$L_0 = \frac{f_d}{\gamma}$$

è un rapporto tra resistenza e peso specifico, ha le unità di misura di una lunghezza.

Le NTC fissano i seguenti valori di rendimento:

- Muratura: pietra M15, malta $f_{bk} 40 = 3000$ (componenti più resistenti possibili per questa tecnologia)
- CLS: ordinario - C40/50: 10000
alta resistenza - C90/105: 25000
- Legno: lamellare GL36h: 38000 (classe massima; 36 indica la resistenza a flessione)
- Acciaio: S460: 55000
S γ
S960: 110000
smervamento γ $[=] \text{MPa}$

Tenendo conto del rendimento meccanico, a parità d'ingombro geometrico il peso proprio della struttura (al netto dei solai) si riduce; considerando una stessa carica accidentale (costante a parità di destinazione d'uso) è possibile valutare, l'incidenza considerando l'incidenza del peso proprio degli elementi in una data scelta tecnologica, il peso proprio di una qualsivoglia struttura in prima approssimazione:



In genere, sono preferibili strutture più leggere: i singoli elementi sono più facilmente trasportabili (minor costo, minor impatto ambientale...) e l'intera opera assorbe una forza sismica minore (dal II Principio della Dinamica, $F = m \cdot a$).

A prescindere dal peso specifico è dunque facilmente calcolabile in prima approssimazione il peso o il costo di una struttura in prima approssimazione: supponendo di voler realizzare un edificio di 3 livelli con impronta di 100m² in acciaio, sapendo che $g_k \approx 30$ kg/m² e che il materiale costa orientativamente 3€/kg:
 Peso struttura $\approx (3 \cdot 100) \cdot 30 = 9000$ kg
 Costo struttura $\approx 9k \cdot 3 = 27000$ €.

Le prerogative del sistema costruttivo in acciaio sono legate a caratteristiche fisiche (geometriche) e meccaniche (relative al materiale impiegato). In particolare, l'acciaio presenta vantaggi:

- **Strutturali (firmitas):**
 - elevata leggerezza: minor manodopera, meno carichi in fondazione, minor ingiungimento nel trasporto, minor forza sismica...
 - buona resistenza
 - elevata duttilità: non va incontro a rottura improvvisa
- **Tecnologico-costruttivi (utilitas - venustas):**
 - prefabbricazione: standardizzazione, velocità ed economicità esecutive
 - uso differenziato del materiale: è possibile impiegare diverse classi del materiale per diverse categorie di elementi strutturali
 - design e qualità di componenti e sistemi: processo controllato, estetica gradevole
 - rapidità di trasporto, montaggio e messa in opera
- **Ambientali:**
 - ridotta imputa in formazione e installazione degli elementi (NON nella realizzazione del materiale!)
 - riutilizzo degli elementi costruttivi, materiale riciclabile a fine vita \Rightarrow basso impatto

possibilità di realizzare strutture su grandi luci, in altezza e in orientazione.
 strutture sismoresistenti
 strutture high-tech
 Riduzione dei costi diretti (di realizzazione) e indiretti (legati alla vita della struttura eccedente).
 oggetti legati all'opera realizzata.

⚠ Il materiale presenta anche importanti svantaggi, che caratterizzano vincoli progettuali:

- **Bassa resistenza al fuoco:** propagazione rapida del calore, collasso più rapido rispetto ad omogenee strutture in legno; solitamente gli elementi sono protetti da vernici intumescenti, cartongesso o CLS.
- **Elevata deformabilità:** l'elevato rendimento meccanico porta ad elementi particolarmente snelli.
- **Problemi di instabilità dell'equilibrio:** spesso causa di collasso nelle strutture.
- **Necessità di una maggiore accuratezza nella concezione e modellazione della struttura:** si segue più propriamente la teoria della Scienza delle Costruzioni, esistono molteplici possibili condizioni di vincolo e le strutture tendono all'isostaticità. Sono necessari modelli e calcoli particolarmente accurati.

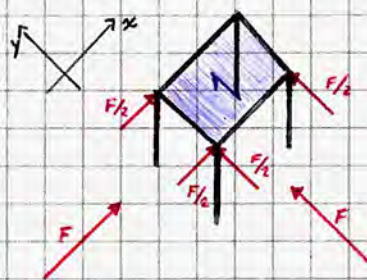
Il diagramma di flusso a pagina 2 sulla concezione di un edificio segue le stesse fasi sia se la struttura è esistente che se deve essere realizzata: in entrambi i casi è necessario schematizzare la struttura in un modello di calcolo. Se la struttura è di nuova costruzione sarà necessario fare un progetto, nel caso di intervento sull'esistente invece occorre effettuare una valutazione di sicurezza sul comportamento strutturale dell'opera.

Nel caso di una struttura nuova, la fase dell'analisi riguarda un'analisi di concezione: assegnati dei limiti urbanistici, architettonici etc si definisce uno scheletro strutturale; le dimensioni degli elementi non sono note a priori - coincidono infatti con il risultato da ricercare alla fine del processo - dunque si impiegano delle dimensioni di primo tentativo (simplificando gli schemi in base all'ordine di grandezza dei carichi applicati o in base allo studio di opere simili già realizzate). Per una struttura esistente invece si identifica la struttura: le dimensioni degli elementi sono note (nel CLS per conoscere il posizionamento delle armature si utilizza il pacometro, strumento che misura la differenza frequenza delle onde elettromagnetiche emesse); in assenza del progetto strutturale originario si effettua un progetto simulato, adottando la norma vigente all'epoca di realizzazione dell'opera, in maniera tale da poter simulare digitalmente il comportamento strutturale dell'opera e determinare i punti critici da verificare sul posto (anche attraverso prelievi).

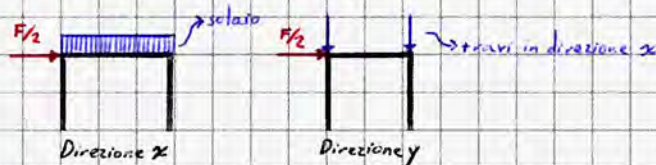
Identificata/Predimensionata la struttura, effettuata la modellazione, si svolge un'operazione di analisi, scegliendo una delle 4 possibili tipologie (Statica/Dinamica x Lineare/Non Lineare); trovate le sollecitazioni che si sviluppano nella struttura si effettuano le verifiche, in una fase di controllo che porta ad un risultato o a un rinforzo/cambio di sezione - a seconda che la struttura sia esistente e da progettare - per poi determinare una relazione del processo e dei risultati, in una fase di sintesi.

Alcune Osservazioni:

- I controventi, strutture sismoresistenti, vengono solitamente realizzati con una trave continua ed una spezzata che si incontrano a metà impalcato su un trapezetto; il progetto prevede di considerare la trave continua nella direzione tendenzialmente in trazione (la compressione porta con sé un problema di instabilità, dipendente dalla snellezza), bisogna però tener conto del fatto che le azioni sismiche agiscono in entrambe le direzioni.
- In una struttura a telaio il peso è in larga parte dovuto agli impalcati, NON al peso proprio della struttura; nelle strutture in muratura invece c'è una forte influenza.
- In zona sismica si impiega la peak ground acceleration - a_{max} , definita dalla norma - pari all'accelerazione massima registrabile in caso di sisma nell'area. Semplificando sensibilmente la procedura, ricordando il II principio della dinamica si ha che la forza sismica agente sulla struttura è pari ad a_{max} per la massa dell'edificio; essa viene poi ripartita su ogni sistema sismoresistente presente (che riceve una quota F/n di carico, con n pari al numero di sistemi sismoresistenti):



Nel caso di strutture regolari è necessario studiare solo telai semplici, in questo esempio sono due:

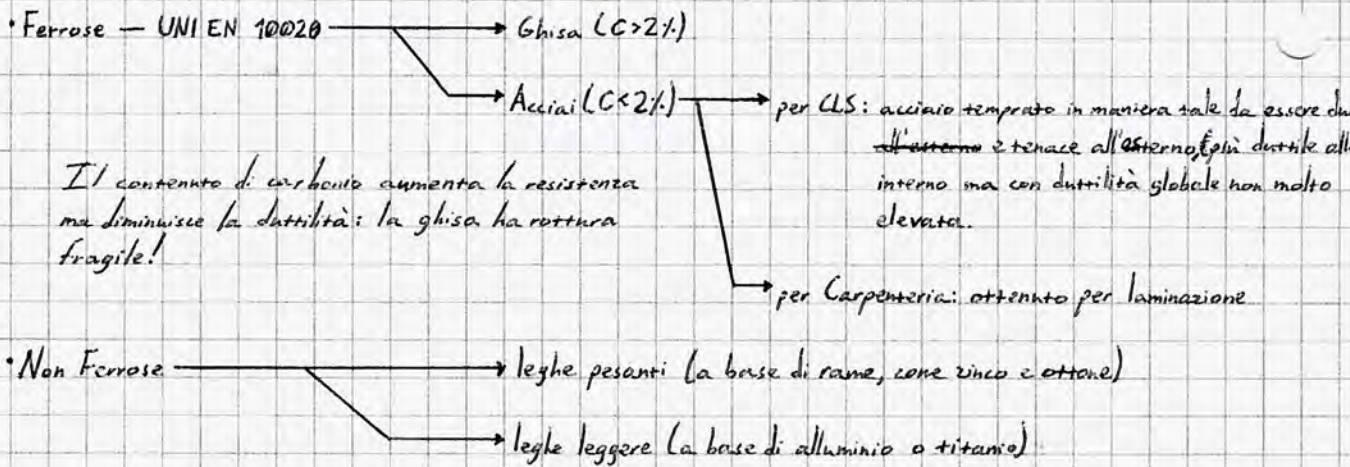


Definire il materiale, ovvero la scelta tecnologica, si possono individuare i componenti del sistema strutturale. Per l'acciaio ad esempio si distingue tra:

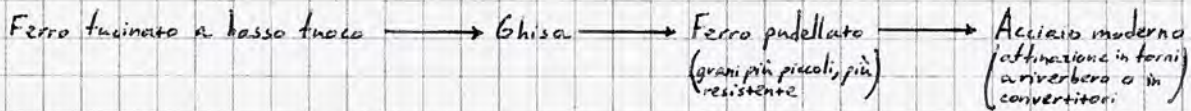
- Membrature (HE, IPE... travi e pilastri)
- Collegamenti (Nodo trave-colonna, collegamento colonna-fondazione...); nel caso dell'acciaio sono punti delicati: i particolari costruttivi definiscono la specifica condizione di vincolo: a seconda di come si configura il collegamento specifico il suo comportamento varia, abitualmente tra cerniera e incastro; in caso di incertezza nella schematizzazione si può considerare il caso più sfavorevole o impiegare il metodo delle componenti (particolarmente complesso) per verificare l'esatta risposta del vincolo.

Acciaio: il materiale

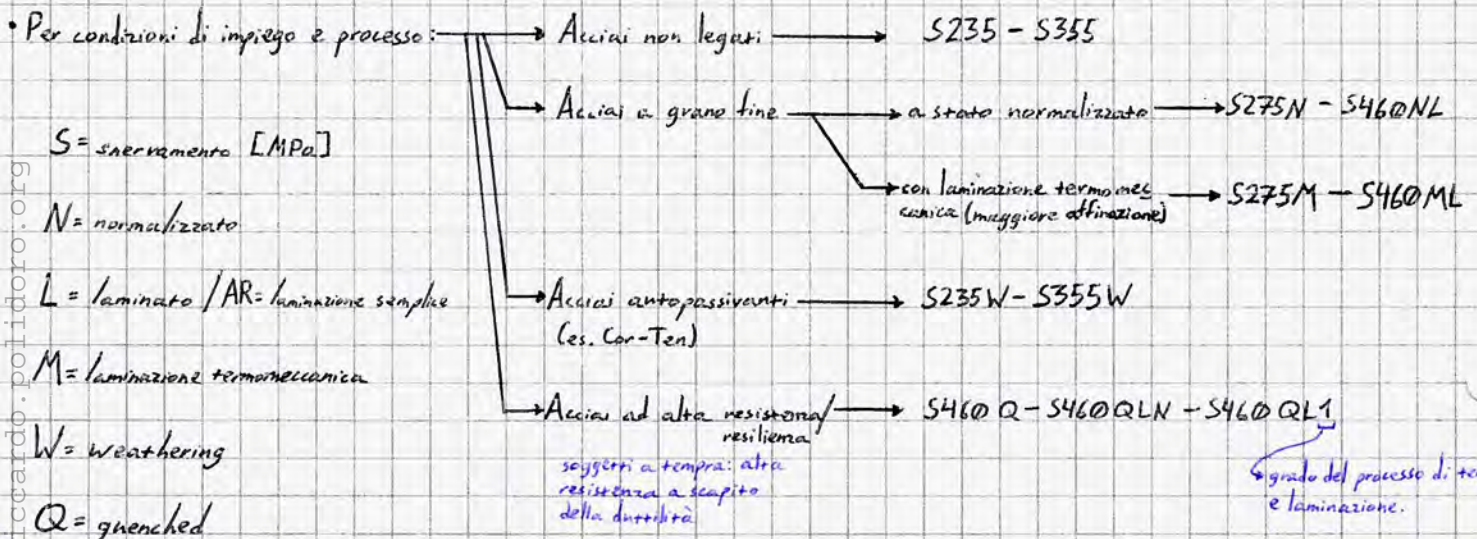
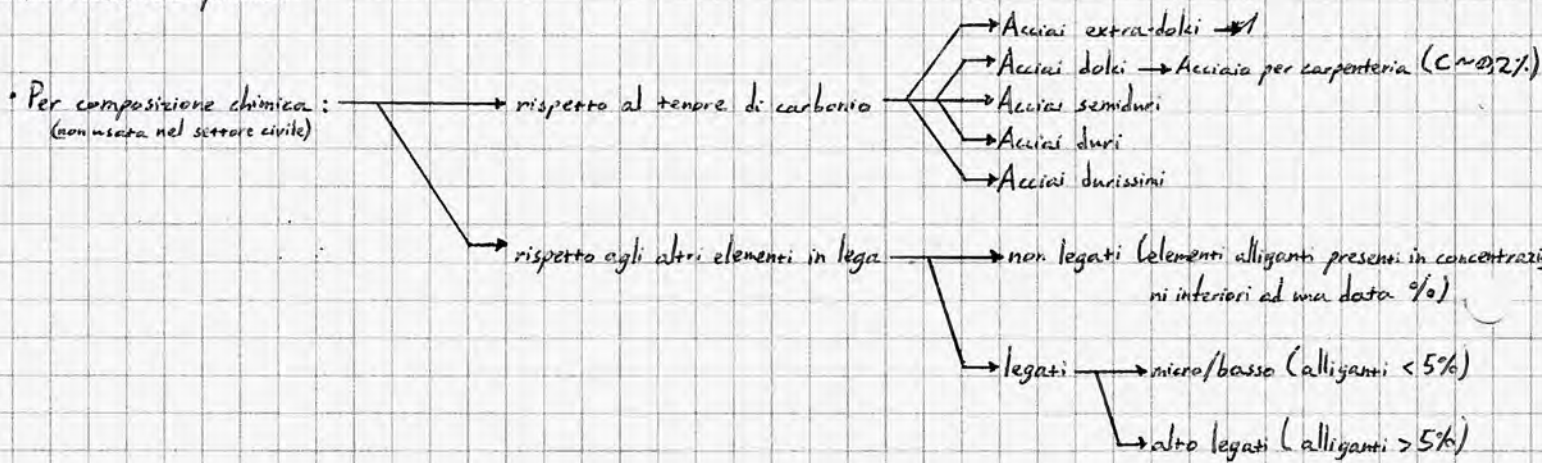
In base al principale elemento metallico contenuto in una lega, le leghe si classificano in:



L'evoluzione storica del materiale è dovuta alla possibilità di raggiungere temperature progressivamente maggiori e di controllare il tenore di carbonio con sempre maggiore precisione:



Per quanto riguarda la classificazione degli acciai per Carpenteria, si impiegano due differenti categorizzazioni di cui la seconda è quella usata nella pratica:



S = snervamento [MPa]

N = normalizzato

L = laminato / AR = laminazione semplice

M = laminazione termomeccanica

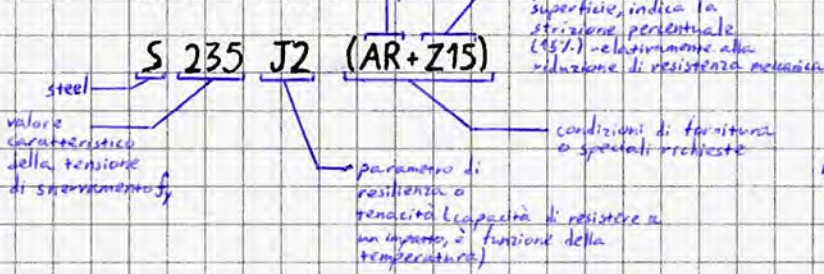
W = weathering

Q = quenched

Classificazione degli acciai da carpenteria - nomenclatura

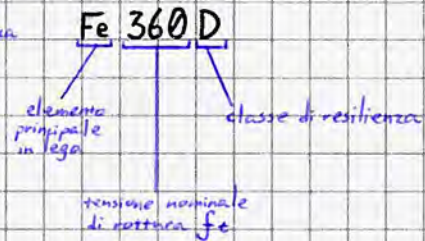
Nomenclatura EU

(in uso dal 1997)



Nomenclatura italiana (obsoleta)

(precedente, talvolta ancora usata)



A parità di resilienza, S235 \approx Fe360.

Come ogni prodotto industriale, anche l'acciaio impiegato nel settore edilizio deve rispettare determinati standard superando dei controlli della qualità, necessari per certificare la rispondenza del materiale alle necessità di progetto.

Tali controlli, effettuati in ogni passaggio - dall'altoforno al cantiere, passando ad esempio per il convertitore - iniziano in stabilimento e riguardano, tra le altre, prove di trazione, prove di resilienza (se il materiale non è resiliente si rischiano rotture fragili) e prove di natura chimica (per caratterizzare le sostanze presenti: alcune favoriscono la saldabilità). A seguito delle prove suddette si effettua un controllo statistico della qualità, con il quale si ricava la resistenza caratteristica del materiale:

$$f_k = f_m (1 - k \delta)$$

- f_k : caratteristico medio
 - f_m : valore medio
 - k : costante dipendente dal numero di prove fatte
 - δ : indice di variazione $(= \frac{\text{scarto quadratico medio}}{\text{valore medio}})$

L'indice di variazione, dipendente dalla dispersione statistica dei valori di resistenza misurati, mostra con un parametro percentuale l'apertura della curva a campana che schematizza le resistenze del provino; tipicamente assume un valore del 7% sulla curva della tensione di snervamento e del 5% su quella di rottura; valori maggiori non sono ammissibili: in fase di esecuzione simili dispersioni possono comportare gravi conseguenze sull'integrità dell'edificio.

Si riporta di seguito il valore del fattore k corrispondente ad un frattile del 5% in funzione del numero di prove effettuate sul materiale:

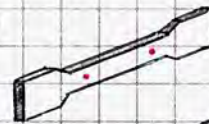
N° prove	4	5	6	8	10	20	30	∞ (>30)
k	2,63	2,33	2,13	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

Indagini sperimentali e principali proprietà meccaniche

Le fasi operative delle prove meccaniche sui materiali sono:

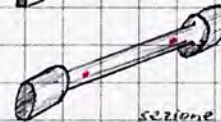
• Preparazione dei provini: i provini utilizzati per le prove sull'acciaio sono di due tipi; si ricavano da porzioni del profilato e sono di dimensione normale dall'UNI

• Provino prismatico (a osso di cane)



• punti in cui si misurano L_0 ed L nelle prove

• Provino cilindrico

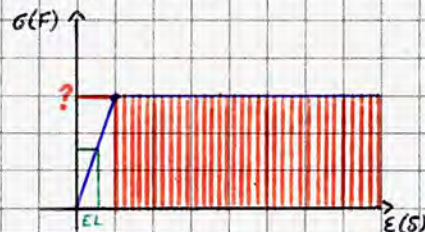


usato per prove cicliche, con fasi anche di compressione: la sezione cilindrica si oppone all'instabilizzazione

Si osserva che le sezioni all'estremità sono maggiori: ciò evita che la rottura del provino si verifichi in corrispondenza delle morse

• Esecuzione della prova: si misurano i valori di forza e spostamento, da cui si ricava il diagramma $\sigma - \epsilon$

• Interpretazione dei risultati



⚠ Le prove in campo plastico possono essere eseguite solo a controllo di spostamento: a un'unica intensità della forza possono corrispondere infiniti valori di spostamento!

Una delle caratteristiche fondamentali dell'acciaio evidenziata nelle prove di trazione è la ductilità: un materiale duttile attraversa una lunga escursione in campo plastico prima di andare incontro a rottura, determinando elevati valori di deformazione ultima.

Alcune ~~leghe~~ ^{leghe} perlopiù ad alta resistenza, hanno invece un comportamento incrudente, con una escursione in fase plastica minore.

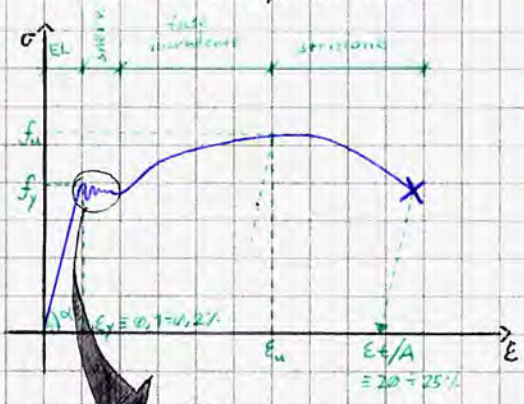
$$\sigma = \frac{F}{A_0}$$

Tensione [F/L²]

$$\epsilon = \frac{(L-L_0)}{L_0}$$

Deformazione [%]

Parametri ingegneristici misurati nella prova (riferiti a L₀/A₀)



Materiale snervante (acciaio dolce)

Materiale incrudente (lega di alluminio)

Proprietà meccaniche misurate:

- Resistenza allo snervamento effettiva f_y o convenzionale allo 0,2% $f_{0,2}$ [MPa; N/mm²]; indicata in normativa EU con R_{eH} e limitata tale che $f_{y,max} \leq 1,20 f_{yk}$ in Italia.
- Resistenza a rottura f_t o f_u [MPa; N/mm²]; indicata in normativa EU con R_m .
- Rapporto di incrudimento f_t/f_y , limitato tale che nella normativa EU debba essere $\geq 1,10$; in Italia deve essere $\geq 1,20$ ma, essendo in zona sismica, è limitato anche superiormente per non determinare valori in disequilibrio eccessivo.
- Modulo di elasticità normale E [MPa; N/mm²].
- Allungamento percentuale uniforme ϵ_u [%], imposto $\geq 15 \epsilon_y$ (ricordiamo che, essendo in campo elastico al momento della misurazione, $\epsilon_y = f_y/E$) dalla norma EU.
- Allungamento percentuale dopo la rottura $\epsilon_t(vA)$ [%], necessariamente $\geq 15\%$ per la norma EU ma limitato ulteriormente in Italia tale che $\epsilon_t \geq 20\%$.
- Strizione percentuale a rottura Z (indicata esplicitamente in nomenclatura).

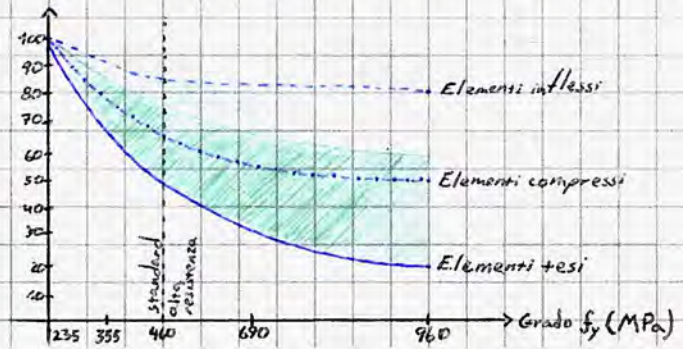
$\epsilon_y \approx 0,1-0,2\%$ perché dipende da f_y (a parità di E)

Come si è visto, nel diagramma σ - ϵ ingegneristico di una prova a trazione si distinguono 4 fasi:

- Fase elastica;
- Fase di snervamento (scorrimento delle molecole nel reticolo cristallino);
- Fase di incrudimento (lavoro aumento di resistenza fino ad un valore massimo, in cui inizia la strizione);
- Fase di strizione (diminuiscono le σ perché la forza è riferita ad A_0 nel diagramma ingegneristico).

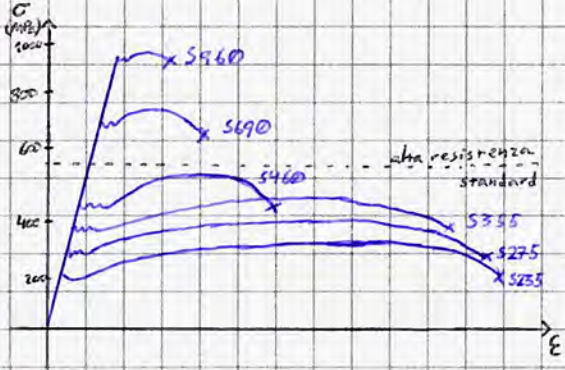
Tra gli acciai considerati a livello teorico, va notato che l'acciaio S235 non è più in commercio e il S275 è poco usato; nelle costruzioni odierne si impiega principalmente lo S355, più resistente, con ridotta variazione di resilienza e una ridotta levitazione di prezzo rispetto ai precedenti. Per comprendere se la scelta di acciai più resistenti comporta una convenienza economica del progetto, può essere utile il seguente grafico:

$$\overline{G}_{1k} = \frac{G_{1k,Si}}{G_{1k,S235}} (\%)$$



Si osservi come l'uso di acciai più resistenti sia conveniente nel caso di elementi tesi, in cui è possibile utilizzare sezioni minori (non essendovi il problema dell'instabilità) e risparmiare anche il 70% di materiale, perché un 14 aumento del grado di acciaio aumenta la resistenza.

Proprietà meccaniche degli acciai da carpenteria e per CLS



	Acciai normali (AR)					Acciai a grano fine termomeccanico (TM) o normalizzati (N)	
	S235 (Fe360)	S275 (Fe430)	S355 (Fe510)	S420	S460	FeB38k (mai più usato)	B450C (Fe544k)
f_y [N/mm ²]	235	275	355	420	460	375	450
f_t [N/mm ²]	360	430	510	500	580	450	540
f_u/f_y	1,53	1,56	1,47	1,19	1,15	1,20	1,26
E [N/mm ²]	210k	210k	210k	210k	210k	200 000	200 000
ϵ_t [%]	28-24	24-21	22-20	20	20	14	12
γ [kN/m ³]	78,5	78,5	78,5	78,5	78,5	78,5	78,5
α [°C ⁻¹]	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}	10^{-5}

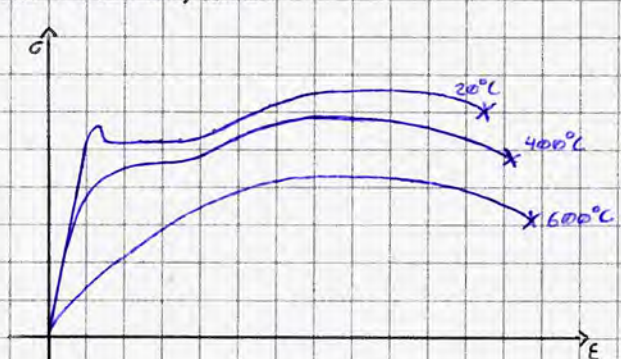
⚠ Gli acciai per calcestruzzo e quelli da carpenteria hanno simili caratteristiche di resistenza; logicamente il modulo elastico non varia, essendo il materiale sempre acciaio. Principale discriminante tra le due tipologie è la duttilità, maggiore nell'acciaio da carpenteria in quanto l'acciaio per le armature del CLS è soggetto a tempra (ricordiamo che la duttilità dipende dal processo di lavorazione degli elementi).

(peso specifico)
(di dilatazione termica)

Al momento esiste una unica classe di acciaio per CLS.

Gli acciai tradizionali presentano una particolare debolezza: se esposti a fuoco o alte temperature, soffrono di un considerevole deterioramento delle caratteristiche di resistenza del materiale, come visibile nei diagrammi σ - ϵ del materiale a 20°C, 400°C, 600°C. Si osserva, in particolare, come a 600°C si deteriori anche la rigidità (E) del materiale.

In vista di questo fenomeno, sono state realizzate delle curve di riduzione per profilati in acciaio che permettono di studiare l'evoluzione delle caratteristiche di resistenza in funzione della temperatura: oltre all'introduzione di sistemi di prevenzione incendi può essere utile conoscere l'incidenza del fenomeno per considerare strategie per arginare o limitare l'insorgenza di problemi strutturali (nel caso in cui gli incendi siano particolarmente probabili, ad esempio, può essere utile aumentare la sezione). Una tipica soluzione è l'adozione di cassettoni in cartongesso.

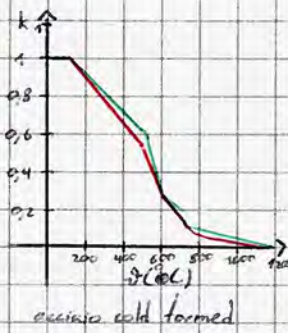
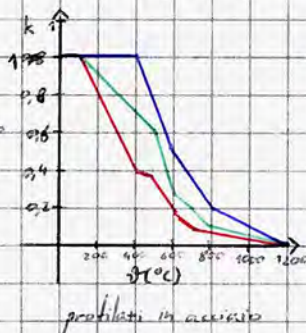


Nelle curve di riduzione i punti vengono diagrammati misurando i seguenti parametri:

$$k_{E,\theta} = \frac{E_\theta}{E} \quad \text{deterioramento della rigidità}$$

$$k_{y,\theta} = \frac{f_{y,\theta}}{f_y} \quad \text{deterioramento della resistenza a snervamento}$$

$$k_{p,\theta} = \frac{f_{p,\theta}}{f_p} \quad \text{deterioramento della tensione di rottura}$$



Si osservi come gli elementi in acciaio cold formed, ottenuti per piegatura da lamiera (coils) - elementi a parete sottile con spessori variabili tra 0,4 mm e 4 mm - e usati tipicamente come elementi secondari (ad esempio il telaio per le pareti in cartongesso) presentano un diagramma differente: essendo gli elementi molto sottili non esiste alcuna significativa differenza tra i tre parametri considerati; in generale il materiale si deteriora più facilmente.

Oltre alla prova di trazione, un'altra importante prova meccanica attuata sul materiale è la prova di resilienza, di cui il primo strumento storicamente adottato è il Pendolo di Charpy, che sfrutta il principio di conservazione dell'energia meccanica totale per misurare l'energia dissipata dal provino (appartemente lavorato) nella rottura; tale misura varia con la temperatura.

La resilienza viene dunque misurata in Joule e varia in funzione della temperatura; tramite prove sperimentali e curve interpolanti è stato possibile costruire diagrammi che esprimono la resilienza in funzione della temperatura permettendo di confrontare i valori identificati con quanto richiesto dalla norma, consentendo una miglior scelta dell'acciaio.



La norma richiede che il ^{provino} materiale possa dissipare almeno 27 J nelle condizioni in cui il materiale di cui sarà composto l'edificio. (Acciai JR, JO, J2, K2) si troverà in esercizio. A tal proposito può essere utile la seguente tabella, che associa al tipo di acciaio e il relativo sub-grado di resilienza i valori di energia richiesti dalla norma ad una data temperatura.

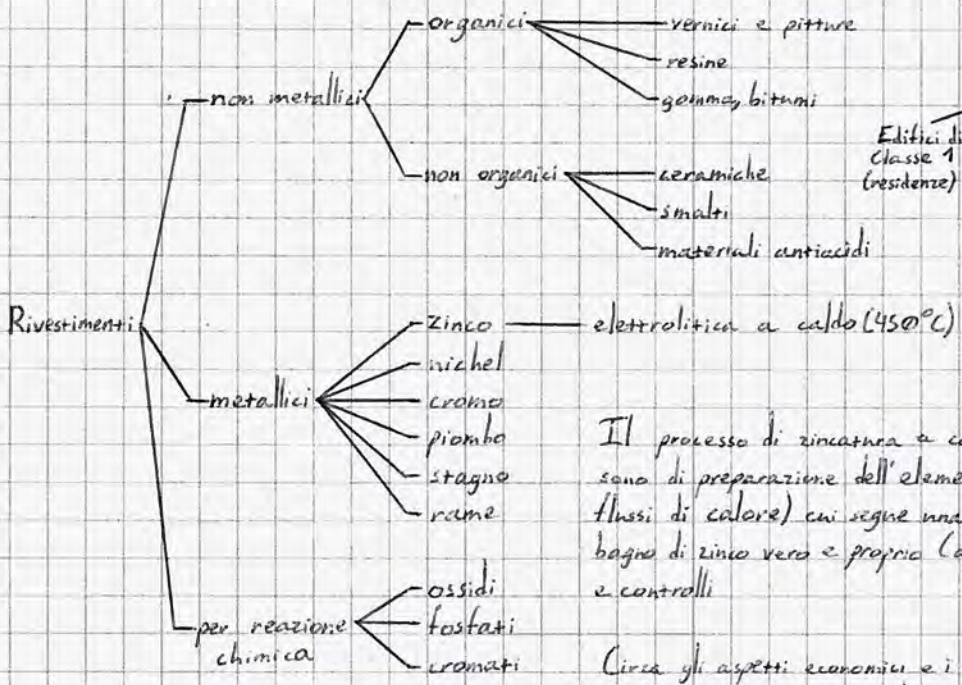
Tipo di Acciaio	Sub grado	Kv-value (J)	Temperature di prova (°C)
Acciai AR	JR	27	20
Acciai W	JO	27	0
	J2	27	-20
	K2	40	-20
Acciai N	N	40	-20
	NL	27	-50
Acciai M	M	40	-20
	ML	27	-50
Acciai Q	Q	30	-20
	QL	30	-40
	QL1	30	-60

La **durabilità**, caratteristica fondamentale che viene valutata attraverso la velocità di corrosione (espressa come riduzione di spessore nel tempo), dipende sia dal tipo di materiale che dall'ambiente in cui esso si trova.

Per questo motivo, gli ambienti vengono classificati in base alla loro corrosività (C1 → C5) e in base a varie terliche abbinata all'umidità (T1 → T5), ovvero in base alla fascia climatica.

Come detto, è possibile diagrammare la riduzione di spessore nel tempo di uno stesso materiale in ambienti diversi. Per arginare il fenomeno si possono adottare dei

sistemi di protezione passiva o pseudopassiva, di cui il più utilizzato è la zincatura (eventualmente abbinata ad una successiva verniciatura in un sistema detto duplex), di cui è possibile calcolare accuratamente lo spessore necessario in funzione dell'ambiente e della vita utile dell'edificio (periodo di tempo in cui l'edificio richiede solo interventi di manutenzione ordinaria). Tali sistemi si classificano in:



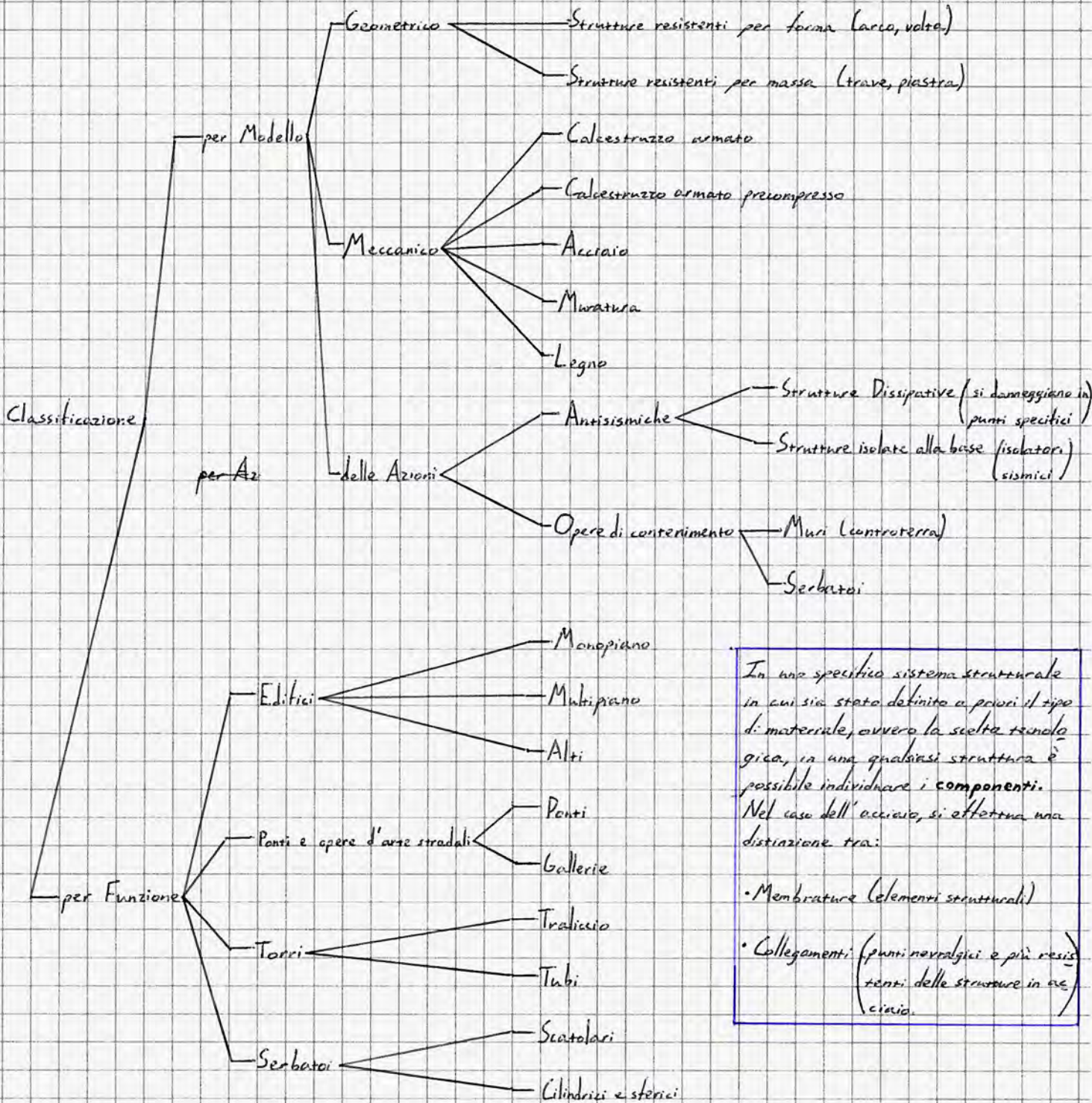
Il processo di zincatura a caldo evolve secondo diverse fasi, di cui le prime sono di preparazione dell'elemento (sgrassaggio, decapaggio, flussaggio con flussi di calore) cui segue una fase di preriscaldamento che porta infine al bagno di zinco vero e proprio (a 450°C), con una fase successiva di raffreddamento e controlli.

Circa gli aspetti economici e i costi, l'acciaio ha subito un incremento di prezzo del 40% in 10 anni; si osserva inoltre che la differenza di prezzo tra acciai a resistenza normale è minima; tipicamente conviene utilizzare acciaio S355 poiché consente l'utilizzo di sezioni più sottili e risparmiare sul costo complessivo.

Avendo analizzato il materiale in tutte le sue accezioni, valutiamo e descriviamo gli aspetti più legati alle applicazioni progettuali, analizzando le applicazioni possibili dell'acciaio nelle strutture, ovvero sotto forma di **membrature** e **sistemi strutturali**. Prescindendo dal materiale e dalla struttura, le strutture di nostro interesse mirano alla realizzazione di edifici, ovvero costruzioni destinate allo svolgimento di attività umane di diversa natura; li classifichiamo in tre differenti categorie:

- Edifici monofunzionali: per attività civili e industriali;
- Edifici multifunzionali: per attività residenziali e uffici, tipologia di nostro principale interesse;
- Edifici altri: tipicamente impiegati per attività terziaria.

Indipendentemente dal materiale, ogni membratura o sistema strutturale presenta una specifica classificazione in base a:



In una specifico sistema strutturale in cui sia stata definita a priori il tipo di materiale, ovvero la scelta tecnologica, in una qualsiasi struttura è possibile individuare i componenti. Nel caso dell'acciaio, si effettua una distinzione tra:

- Membrature (elementi strutturali)
- Collegamenti (punti nevralgici e più resistenti delle strutture in acciaio).

Definito il materiale si individuano dunque le componenti da utilizzare per la realizzazione dell'opera, che nel caso dell'acciaio tendono a riferirsi alle seguenti tipologie:

- Membrature: profili a doppio T ad ali strette (IPE) o larghe (HE);
- Collegamenti: la principale e più elementare distinzione è tra nodo trave-colonna e collegamento trave-fondazione, ma le tipologie sono molteplici e dipendono dal progetto specifico.

Una volta assemblati, gli elementi permettono di restituire gli:

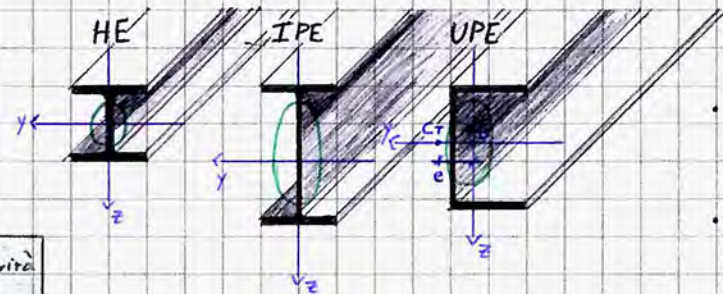
- Edifici monopiano: costituiti da impalcato - travi secondarie - travi principali - colonne - fondazione e eventuali controventi in opposizione alla forza sismica se richiesti dalla natura dei collegamenti;
- Edifici multipiano: possono essere controventati o, se la struttura è a nodi rigidi, a telaio; è anche possibile realizzare strutture controventate in una direzione e a telaio nell'altra!

A seconda del tipo di elemento, è possibile considerare diversi parametri prestazionali utili a verificare la rispondenza dello specifico elemento considerato all'impiego valutato nel progetto.

Tipo di Elemento	Risposta alle azioni	Parametro prestazionale
Elemento Inflesso travi principali travi secondarie	<p>Sezione doppiamente simmetrica</p> <p>Resistenza</p> <p>W_y modulo di resistenza $[L^3]$</p> <p>Deformabilità</p> <p>I_y momento d'inerzia $[L^4]$</p>	
Elemento Compresso Snello colonne aste composizioni di strutture reticolari	<p>$N_{cr} = \frac{\pi^2 E \cdot I_{min}}{L^2}$</p> <p>Fissato il tipo di acciaio nell'asta tesa e compressa tozza la prestazione dell'elemento dipende dall'area.</p>	<p>I_{min} momento d'inerzia minimo $[L^4]$</p>

Prestazione della Sezione	Profilo quadro pieno SQ 51x54mm	Doppio T ali larghe HE 100 B	Parametro																								
Hps Area = cost. = $26 \cdot 10^2 \text{ mm}^2$	<p>$h = 54 \text{ mm}$ $i_x = i_y = 14,7 \text{ mm}$</p>	<p>$h = 100 \text{ mm}$ $i_x = 25,3 \text{ mm}$ $i_y = 41,6 \text{ mm}$</p>	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Parametro</th> <th>SQ</th> <th>HE</th> <th>HE %</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>i_x</td> <td>14,7</td> <td>25,3</td> <td>172%</td> </tr> <tr> <td>i_y</td> <td>14,7</td> <td>41,6</td> <td>283%</td> </tr> <tr> <td>h</td> <td>51</td> <td>100</td> <td>196%</td> </tr> <tr> <td>I_x</td> <td>56,4</td> <td>449,5</td> <td>797%</td> </tr> <tr> <td>I_y</td> <td>56,4</td> <td>167,3</td> <td>297%</td> </tr> </tbody> </table>	Parametro	SQ	HE	HE %	i_x	14,7	25,3	172%	i_y	14,7	41,6	283%	h	51	100	196%	I_x	56,4	449,5	797%	I_y	56,4	167,3	297%
Parametro	SQ	HE	HE %																								
i_x	14,7	25,3	172%																								
i_y	14,7	41,6	283%																								
h	51	100	196%																								
I_x	56,4	449,5	797%																								
I_y	56,4	167,3	297%																								
Il tutto a parità di area, ovvero di materiale.																											

Circa la prestazione della sezione, in base alla forma dell'ellisse centrale, ovvero alla centrifugazione della sezione, è possibile valutare a parità di peso (o, equivalentemente, di area) la performance di profili tipici in diverse applicazioni; definito $I_y > I_x$, ovvero y come asse forte si ha che:



Si osserva quindi che:

- Il profilo HEB si presenta, a parità di area, ben centrifugato nelle due direzioni principali (ellisse tozza).
- Il profilo HEA si presenta meno centrifugato del profilo IPE secondo l'asse y , ma è dotato di una maggiore inerzia secondo l'asse debole z .
- Il profilo IPE a parità di area è quello più centrifugato secondo l'asse forte e quindi più rigido e resistente in assenza di svergolamento.
- Il profilo UPN, data la sua dissimmetria rispetto a z , presenta una maggiore centrifugazione dell'IPE secondo l'asse z .

Confronto a parità di peso o area	HEB 100 HEA 120	IPE 180	UPE 160 UPN 180
Elementi compressi (colonne)	***	**	*
Elementi inflessi con SVERGOLAMENTO (travi)	***	**	*
Elementi inflessi senza svergolamento (travi)	**	***	**
Elementi soggetti a flessione deviata (capreancci)	**	**	***

Va notato che lo svergolamento non si verifica se sono presenti dei ritegni alla traslazione fuori asse della trave, ad esempio in presenza di una lamiera grecata che collega le travi tra loro.

La flessione deviata è un fenomeno che si sviluppa lungo 2 direzioni!

Nel caso di edifici multipiano, le membrature tipicamente utilizzate sono:

• Solare:



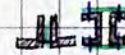
lamiera grecata con getto in CLS-A

• Contraventi verticali e orizzontali:

●
tondo
tune

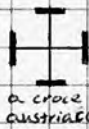


profili semplici

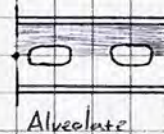
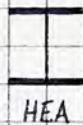
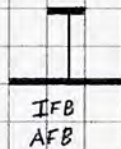


profili composti

• Colonne: profili laminati a caldo



• Travi principali: travi a parete piena o alleggerite standard:

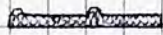


• Travi secondarie: travi a parete piena laminata a caldo:



Se si considerano invece edifici monopiano, frequenti nelle applicazioni industriali, va precisato che per un rapporto tra la direzione ortogonale alle travi secondarie (b) e la direzione di orditura delle travi suddette (a) minore di 1,5 si preferisce una doppia orditura, effettuata con strutture reticolari spaziali, OHS o una doppia orditura di travi "principali".

• Solare:



pannelli sandwichati



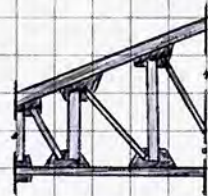
lamiera grecata

• Colonne: profili laminati a caldo (HE, OHS, RHS)

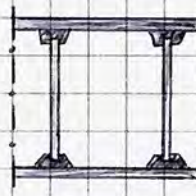
• Travi principali:

Travi a parete piena o alleggerite standard (HEA, IPE eventualmente alveolate)

Membrature composte (reticolari e a telaio)

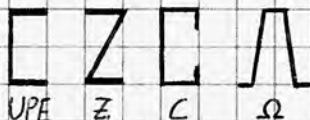


Maniè



Vierendeel

• Travi secondarie: travi a parete piena laminata a caldo o formate a freddo



UPE

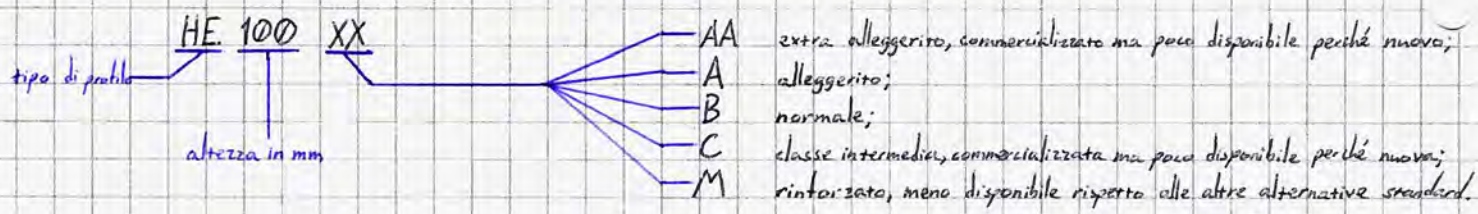
Z

C

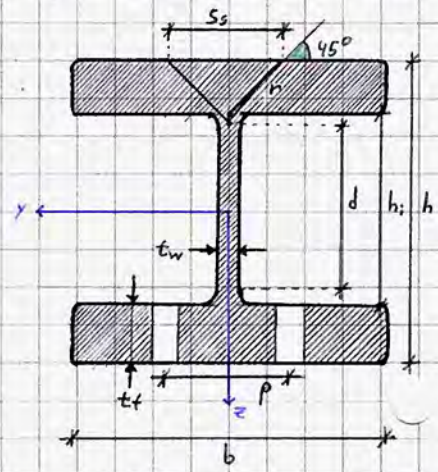
Ω

In virtù dell'elevata versatilità del materiale, gli elementi in acciaio vengono categorizzati in specifici **sagomari** definiti per ognuna delle forme standardizzate.

Uno dei sagomari più completi è quello redatto dalla Arcelor, importante azienda siderurgica indiana avente sede europea in Lussemburgo, che elenca numerose caratteristiche per ogni tipologia di profilo. Ad esempio, per una HE 100 si ha che:



Dimensioni geom.	Peso G (kg/m)	h (mm)	b (mm)	t _w (mm)	t _f (mm)	r (mm)	A (10 ³ mm ²)
HE 100 AA	12,2	91	100	4,2	5,5	12	15,6
HE 100 A	16,7	96	100	5	8	12	21,2
HE 100 B	20,4	100	100	6	10	12	26,0
HE 100 C	30,9	110	103	9	15	12	39,3
HE 100 M	41,8	120	106	12	20	12	53,2



Dimensioni di costruzione/dettaglio	h ₁ (mm)	d (mm)	φ	p _{min} (mm)	p _{max} (mm)
HE 100 AA	80	56	M10	54	58
HE 100 A	80	56	M10	54	58
HE 100 B	80	56	M10	56	58
HE 100 C	80	56	M10	59	61
HE 100 M	80	56	M10	62	64

Ogni tabella elenca differenti caratteristiche degli stessi profili: la prima elenca tutte le caratteristiche geometriche (si segnalano in particolare il peso a metro lineare G, il raggio di curvatura r); la seconda presenta le

Superficie esterna	A _e (m ² /m)	A _G (m ² /t)
HE 100 AA	0,553	45,17
HE 100 A	0,561	33,68
HE 100 B	0,567	27,76
HE 100 C	0,593	19,23
HE 100 M	0,619	14,82

dimensioni di dettaglio, che descrivono come forare l'elemento per realizzare collegamenti, che diametro φ di bulloni impiegare, la distanza dai bordi p dell'alloggiamento dei bulloni. La terza tabella contiene informazioni sulla superficie per metro lineare o per tonnellata degli elementi avventi il profilo analizzato: ciò permette una rapida valutazione della vernice necessaria a garantire la protezione necessaria degli elementi strutturali. A queste tabelle si aggiungono quelle con le proprietà geometriche statiche del profilo:

Asse forte/debole	I _y (mm ⁴ · 10 ⁴)	W _{el,y} (mm ³ · 10 ³)	W _{pl,y} (mm ³ · 10 ³)	i _y (mm)	A _z (mm ² · 10 ⁴)	I _e (mm ⁴ · 10 ⁴)	W _{el,z} (mm ³ · 10 ³)	W _{pl,z} (mm ³ · 10 ³)	i _z (mm · 10 ⁰)
HE 100 AA	236,5	51,98	58,36	3,89	6,15	92,06	18,41	28,44	2,43
HE 100 A	349,2	72,76	83,01	4,06	7,56	133,8	26,76	41,14	2,51
HE 100 B	444,5	89,91	104,2	4,16	9,04	167,3	33,45	51,42	2,53
HE 100 C	758,7	137,9	165,8	4,39	13,39	274,4	53,28	82,08	2,64
HE 100 M	1143	190,4	235,8	4,63	18,04	399,2	75,31	116,3	2,74

Altre proprietà geometriche	S _s (mm)	I _t (mm ⁴ · 10 ⁴)	I _w (mm ⁴ · 10 ⁹)
HE 100 AA	29,26	2,51	1,68
HE 100 A	35,06	5,24	2,58
HE 100 B	40,06	9,25	3,38
HE 100 C	53,06	29,30	6,16
HE 100 M	66,06	68,21	9,93

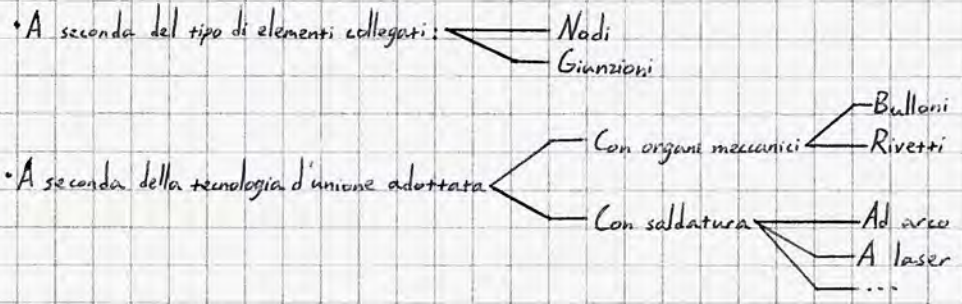
Si segnalano in queste tabelle i valori di inerzia (I_y=asse forte; I_z=asse debole; I_t=torsionale primaria; I_w=torsionale secondaria; l'ultima è per la verifica a torsione dei profili a parete sottile), il modulo di resistenza (W_{el}=elastico; W_{pl}=plastico), il raggio di inerzia i (rispetto agli assi forte e debole), l'area dell'anima (A_G).

Classificazione delle Sezioni	Pura flessione lungo l'asse forte y.			Pura compressione		
	S235	S355	S460	S235	S355	S460
HE 100 AA	1	1	2	1	1	2
HE 100 A	1	1	1	1	1	1
HE 100 B	1	1	1	1	1	1
HE 100 C	1	1	-	1	1	-
HE 100 M	1	1	1	1	1	1

L'ultima tabella tratta della classificazione delle sezioni: i profili si distinguono in 4 classi dipendenti dal materiale e dal tipo di sollecitazione cui sono sottoposti: in zona sismica ogni classe implica uno specifico comportamento dell'elemento, con 1 come categoria migliore:

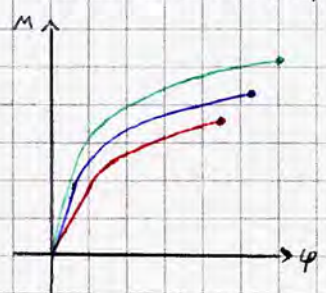
- 1 = duttile
- 2 = compatto
- 3 = semicompatto
- 4 = snello (non utilizzabile in zona sismica!)

In generale, i collegamenti possono essere classificati in più modi:



Ogni collegamento va concepito cercando di favorire nelle singole lamere l'insorgere di regimi membranali rispetto a quelli flessionali, ovvero facendo lavorare ogni piastra a lastra e NON a piastra.

• A seconda del comportamento strutturale rispetto alle membrature congiunte: le unioni, i collegamenti e i nodi uniscono più elementi; per valutare il collegamento nella sua interezza lo si confronta con l'elemento più debole in esso coinvolto - solitamente la trave per ragioni di gerarchia di carico - analizzandone il comportamento considerando il nodo, la membratura collegata e la loro composizione in un diagramma momento-rotazione; è preferibile progettare nodi sovrarresistenti, soprattutto in zona sismica.

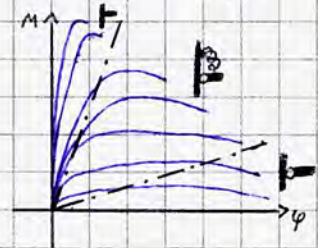


A seconda del risultato di detta analisi, i nodi si distinguono in:

- Nodi a completo ripristino di:
 - resistenza: il collegamento ripristina la resistenza della trave (il punto finale si trova più in alto);
 - rigidezza: il collegamento aumenta la rigidezza della trave (pendenza nel primo tratto di grafico);
 - ductilità: il collegamento ripristina la ductilità della trave (il punto finale si trova più a destra).

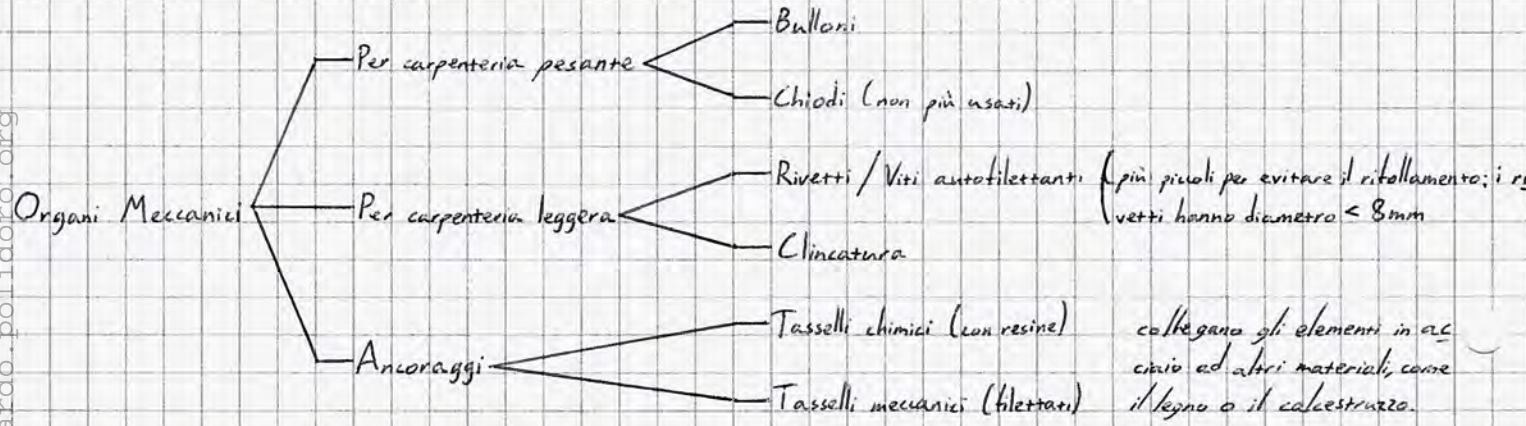
- Nodi a parziale ripristino rispetto a uno dei tre parametri analizzati;
- Nodi senza ripristino rispetto a uno dei tre parametri analizzati.

Attraverso l'applicazione del metodo delle componenti - metodo teorico complesso - è possibile classificare, in funzione della rigidezza e resistenza dei collegamenti rapportate alla resistenza della trave, le curve M/ϕ delle diverse tipologie di nodi in 3 differenti categorie che permettano di descrivere a rigore la natura del vincolo e dunque lo schema statico della struttura: le regioni definite nel diagramma determinano la schematizzazione del nodo come rigido (incastro), libero (cerniera) e semirigido (condizione intermedia in cui il vincolo assorbe una determinata percentuale di momento; è la regione più ampia e viene schematizzata con una cerniera soggetta a cedimento elastico).



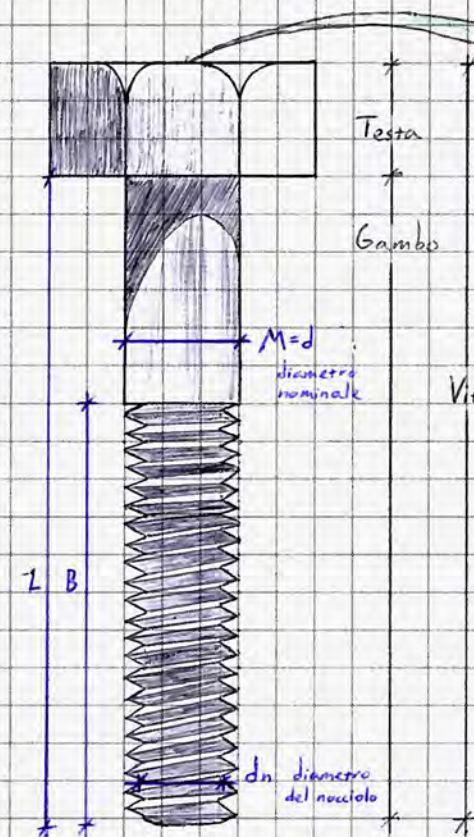
Nelle applicazioni pratiche, sui nodi semirigidi si utilizzano criteri di fascia, considerando sia il vincolo libero che quello rigido per poi ricavarne le sollecitazioni di maggior entità, portando ad un progetto a vantaggio di sicurezza realizzato in poco tempo.

Analizziamo più nel dettaglio le tecnologie di unione classiche, più utilizzate nelle strutture in acciaio:



In ogni caso, le strutture in carpenteria leggera si differenziano da quelle in carpenteria pesante perché realizzate integralmente con membrane formate a freddo.

Sottotermianoci ora sul bullone:



Classe di resistenza del bullone, fornisce informazioni sulla tensione di snervamento e di rottura così calcolate:

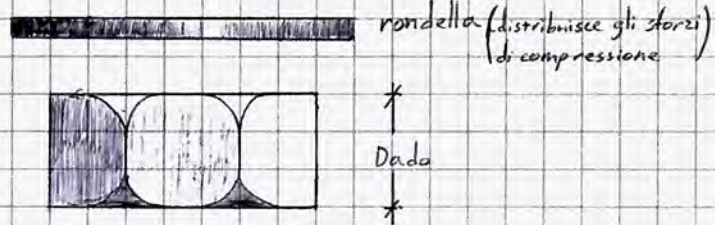
Rottura = $X \cdot 100$ MPa
 Snervamento = $(XY) \cdot 10$ MPa

Ad esempio, un bullone di classe 5.6 ha tensione di rottura a 500 MPa e di snervamento a 300 MPa.

Diametro nominale del bullone espresso in mm (M12 \Rightarrow $d = 12$ mm)

Circa le proprietà geometriche dei bulloni, i principali dati di interesse per la progettazione sono:

- $M=d$ = diametro nominale o lordo;
- d_n = diametro del nocciolo;
- d_m = diametro medio tra d e d_n ;
- d_s = diametro resistente;
- A = area lorda del bullone (relativa a d);
- A_s = area resistente [a trazione] (relativa a d_s).



Progetta A rigore, d_s e d_m sono funzione del passo della filettatura; nei calcoli consideriamo però:

$$d_m = \frac{d + d_n}{2} \longrightarrow d_s = \frac{d_m + d_n}{2}$$

In modo approssimato è inoltre possibile considerare $A_s \approx 0,75A$.

M-d (mm)	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	27
A_s (mm ²)	8,8	20,1	36,6	58	84,3	115	157	192	245	303	353	459

I valori suddetti sono logicamente tabulati per ogni bullone; nelle verifiche che coinvolgono l'area è sempre preferibile considerare A_s , a prescindere dall'effettiva area di intersezione, perché consente una progettazione a vantaggio di sicurezza.

Per $M=30$, classe massima, $A_s = 561$.

Le proprietà meccaniche dei bulloni evolvono in base alla regola già menzionata relativamente alla Classe X.Y; è possibile distinguere tra bulloni normali (3.6; 4.6; 4.8; 5.6; 5.8; 6.6; 6.8) e bulloni ad alta resistenza (8.8; 9.8; 10.9; 12.9).

In zona sismica è obbligatoria utilizzare bulloni ad alta resistenza, difatti la tipologia più utilizzata in Italia è la 8.8, seguita dalla 10.9.

Come immaginabile, ad ogni classe di vite corrisponde una classe del dado che garantisce il serraggio:

Vite	Dado
4.6	4
5.6	5
6.8	6
8.8	8
10.9	10

Si specifica che il serraggio dei dadi deve essere effettuato rigorosamente con una chiave dinamometrica: il serraggio comprime le lamiera determinando una distribuzione di sforzi a 45° - approssimati a sforzi lineari nelle applicazioni - che potrebbero danneggiare la lamiera; viceversa, un bullone non serrato non fornisce la resistenza richiesta e potrebbe analogamente portare a una rottura nel nodo. La coppia di serraggio, esplicitata per ogni tipologia di bullone, viene così calcolata:

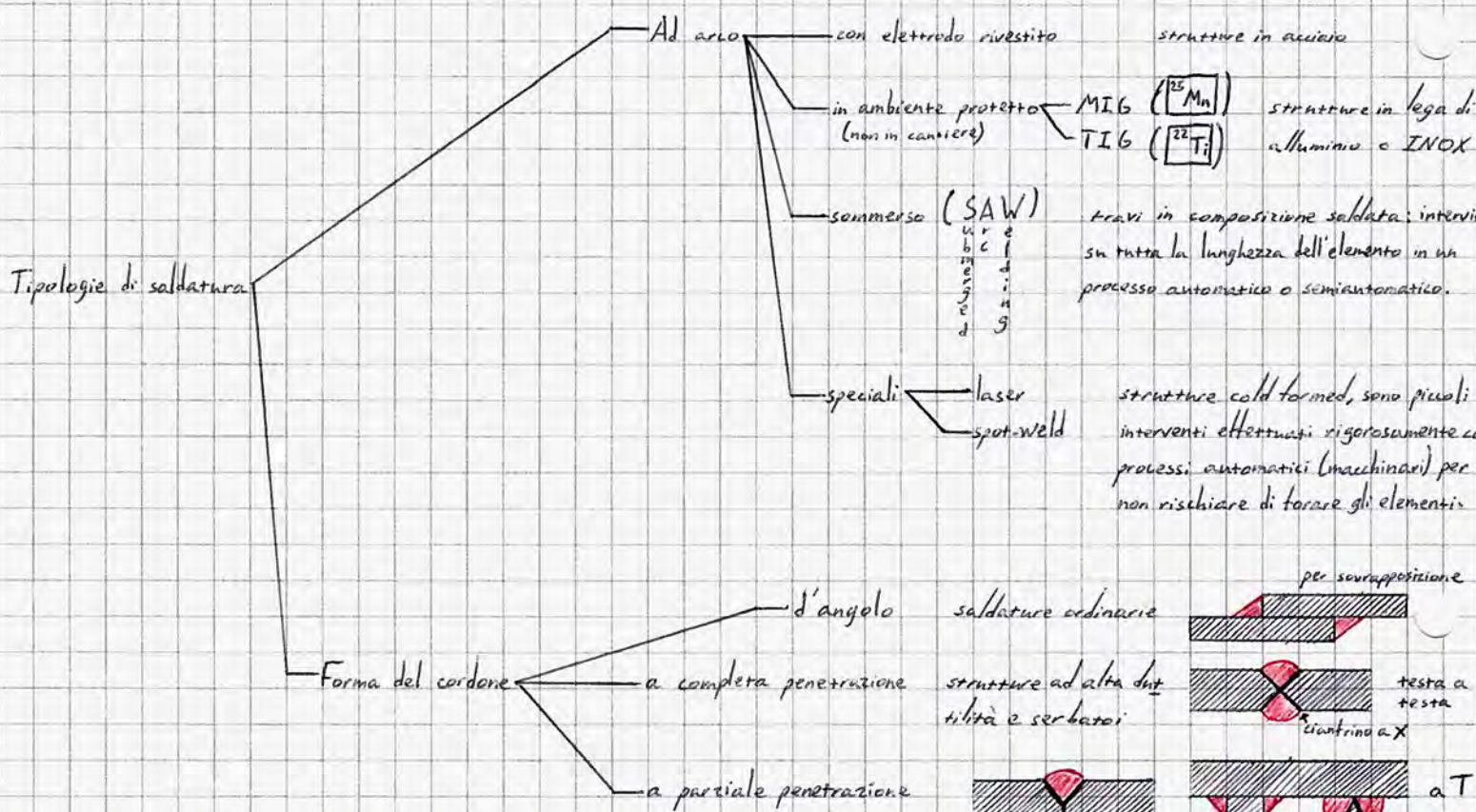
Forza di serraggio $F_{p,c} = 0,7 f_{ub} \cdot A_s \rightarrow M_s = d \cdot F_{p,c} \cdot k$

resistenza a rottura del bullone

$k \in [0,1; 0,23]$ coefficiente di rendimento della coppia, dichiarato dal produttore.

Si effettua infine un controllo su un congruo numero di campioni. 23

Pur essendo meno utilizzate a causa della difficile manutenibilità, trattiamo di seguito le unioni saldate. Va notato che in ambito strutturale si adottano generalmente saldature autogene per fusione, nelle quali il materiale di base - portato a fusione - partecipa alla realizzazione dell'unione. Si possono effettuare le seguenti classificazioni tipologiche delle unioni saldate:

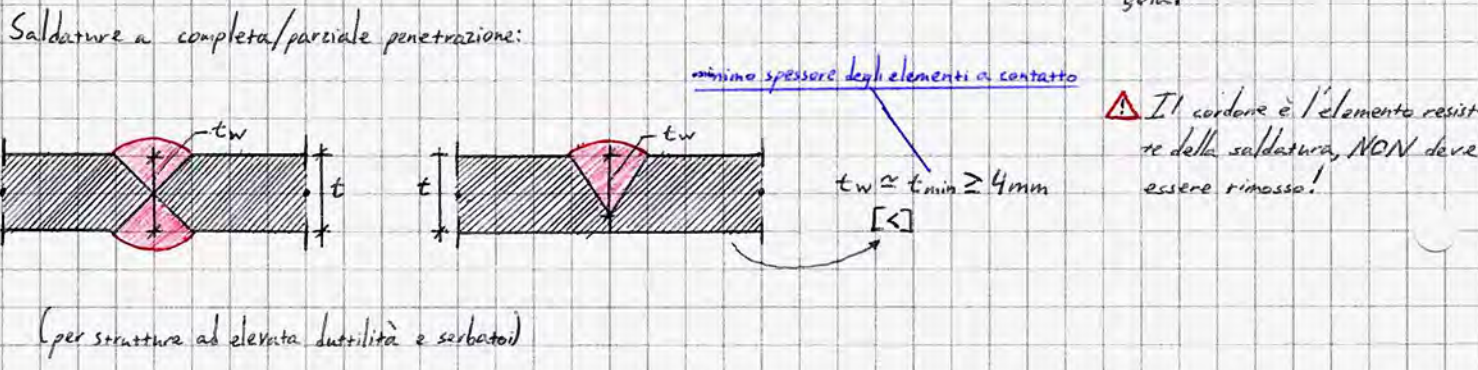
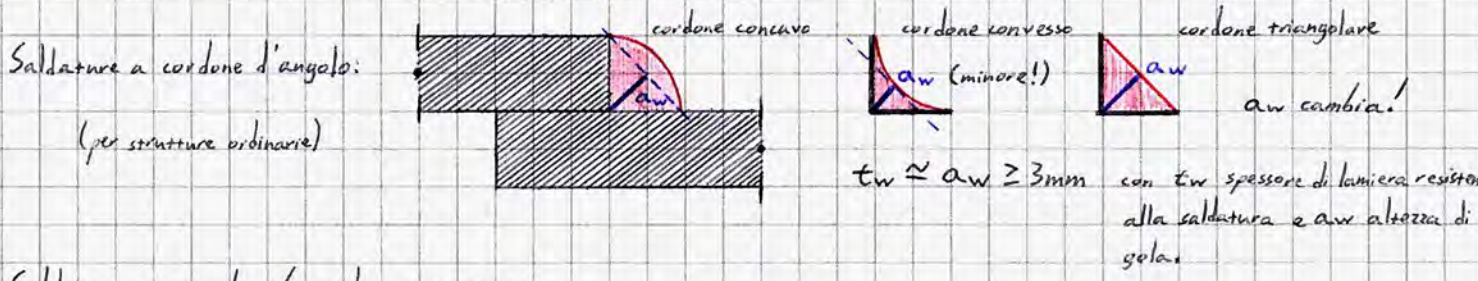


In generale, la saldatura avviene per fusione tra il metallo di base e quello di apporto; la sorgente termica è tipicamente rappresentata dall'arco elettrico che viene prodotto a seguito dell'elevata differenza di potenziale tra elettrodo e materiale di base.

Il materiale di apporto è fornito dal nucleo dell'elettrodo (dotato di adeguate caratteristiche meccaniche), il cui rivestimento produce un gas per la protezione della zona fusa da eventuali impurità presenti nell'aria.

I principali vantaggi del processo sono la sua semplicità e la possibilità di saldare pezzi di difficile accesso anche in sito; ciò comporta allo stesso tempo una bassa automazione del processo (dunque tempi di realizzazione maggiori) e l'impossibilità di saldare in sito leghe di alluminio, INOX o altri acciai legati.

Studiamo più nel dettaglio la geometria del cordone:



Le saldature possono presentare numerosi difetti dovuti a condizioni anomale in fase di realizzazione. Quelli principali sono:

- **Inclusioni:** dovute ad un uso errato dell'elettrodo o una rimozione non sufficiente della sporcizia, sono agglomerati di materiale d'apporto già solidificato sospesi nel bagno di fusione, che determinano discontinuità dal punto di vista della distribuzione di proprietà meccaniche.
- **Porosità:** dovute generalmente all'inquinamento del bagno di saldatura da parte di materiali estranei - come grasso o vernice - o incisioni marginali dovute a difficoltà da parte del soldatore nella gestione dell'elettrodo.
- **Cricche:** fessure prodotte nel cordone a caldo (per impurezze nel metallo) o a freddo (per assorbimento di idrogeno dall'atmosfera al bagno di fusione).
- **Tensioni residue** dovute al raffreddamento.
- **Zone alterate termicamente (HAZ).**
- **Strappi lamellari.**
- **Difetti di esecuzione.**
- ...

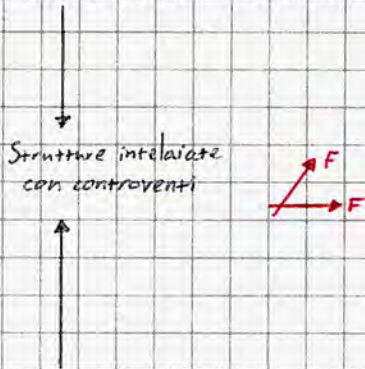
Ulteriore problematica è la necessità di certificare la qualità dei collegamenti attraverso verifiche sia non invasive (esami visivi, magnetoscopici, ad ultrasuoni, controlli radiografici ed analisi con liquidi penetranti) che invasive, con norme che da quelle italiane precedenti sono diventate molto stringenti e precise, con controlli numerosi.

Per favorire la rottura della trave rispetto alla colonna e seguire il criterio di gerarchia delle resistenze, in zona sismica e particolarmente nei nodi a completo ripristino si preferisce:

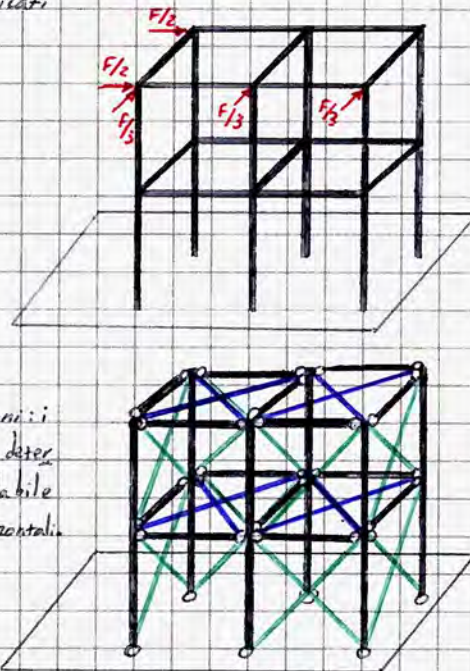
- Irrobustire la colonna tramite irrigidimenti.
- Indebolire la trave con incisioni dog bore sulle ali.

Avendo definito i componenti del sistema strutturale in acciaio, studiamo ora le diverse tipologie strutturali. Poiché l'attività professionale dell'ingegnere edile-architetto verte principalmente sugli edifici multipiano, effettuiamo una classificazione tipologica di dette strutture (i ragionamenti sono perlopiù analoghi per le altre tipologie). In base al tipo di nodo trave-colonna, le strutture per edifici multipiano si distinguono in:

- **Intelaiate:** resistono a momenti applicati



- **con controventi:** telai con articolazioni; i collegamenti a squadretta determinano una struttura labile rispetto alle azioni orizzontali.

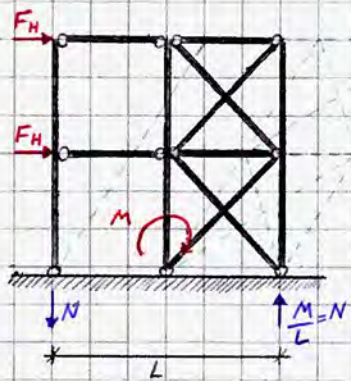


Come visibile di fianco, l'azione sismica si applica nel centro di rigidità della struttura, coincidente col baricentro nel caso di maglie con figure regolari. Per questo motivo, i telai rettangolari ripartiscono equamente la forza sismica, uguale nelle due direzioni. Poiché le forme non regolari presentano eccentricità tra baricentro e centro di rigidità, strutture così concepite presentano azioni torsionali e, di conseguenza, una progettazione più complessa.

I controventi si dividono in due tipologie a seconda della loro giacitura:

- **Controventi verticali:** si oppongono alle azioni orizzontali.
- **Controventi orizzontali:** irrigidiscono il solaio (usati solo se il solaio NON È RIGIDO!) e fanno migrare gli sforzi sui controventi verticali.

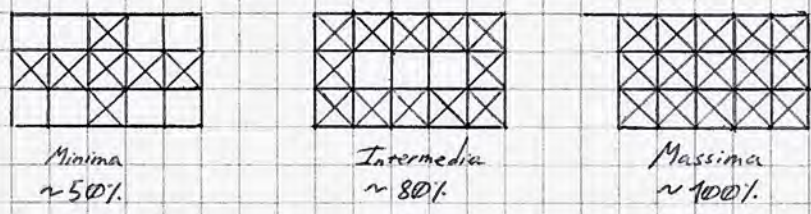
I sistemi di controventamento evitano dunque l'instabilità nelle strutture; i controventi orizzontali creano il piano rigido necessario al trasferimento delle azioni orizzontali trasmesse dalle pareti di estremità (vento) o presenti a livello nodale (masse sismiche); quelli verticali invece trasferiscono le azioni orizzontali trasmesse dai piani rigidi in fondazione.



Le altezze diverse della sollecitazione sismica/orizzontale determinano la generazione di momenti ribaltanti con braccio differente agenti nel centro di rigidità. Tali momenti sono assorbiti dalle colonne, che sviluppano uno sforzo normale interno, dipendente dalla lunghezza tra di esse, che aumenta la rigidità della struttura.

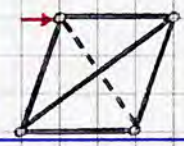
I sistemi di controventamento orizzontali presentano numerose possibili configurazioni; la selezione specifica è il prodotto di un'analisi cinematica avente come vincoli le posizioni dei controventi verticali verso cui i controventi orizzontali devono migrare il carico.

La minima disposizione possibile prevede di controventare almeno il 50% delle campate e in maniera simmetrica (per evitare l'insorgere di eccentricità nelle rigidità) oltre che tali da trasmettere tutti i carichi su ogni lato della struttura; la soluzione più rigida, ma anche più costosa e pesante, prevede di coprire ogni campata. Si riportano di seguito alcuni esempi:



ANTIECONOMICA!

Nell'analisi si ipotizzano le diagonali resistenti a sola trazione; quelle compresse vengono generalmente escluse dal calcolo cinematico e strutturale, poiché tendono ad instabilizzarsi.



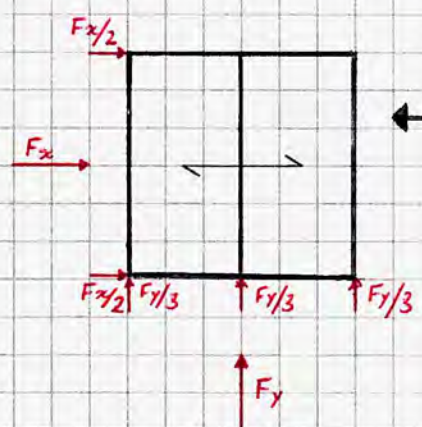
Un calcolo approssimativo della larghezza di un giunto sismico può essere effettuato tramite la seguente formula, presente in una normativa ormai desueta:

$$L = \frac{H}{100}$$

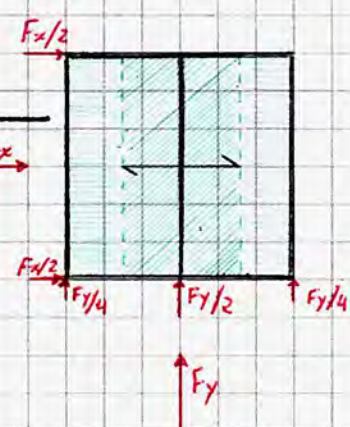
I controventi verticali vedono la loro utilità dipendere dallo schema statico di ogni impalcato:

Impalcato rigido (soletta collaborante e connettori)

Impalcato deformabile (lamiera greata)



Ogni telaio assorbe la forza sismica allo stesso modo.





Ogni telaio assorbe una forza sismica proporzionale alla massa portata, indicata nel disegno (e dipendente dall'orditura del solaio); in questo caso il telaio centrale assorbe il doppio della sollecitazione rispetto agli altri.

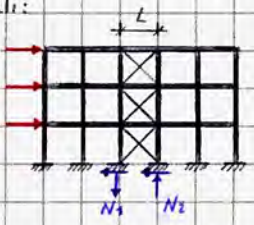
In zona sismica è preferibile progettare solai rigidi; la scelta può però risultare non conveniente in diversi casi.

La trasmissione dei carichi in fondazione può avvenire tramite il classico schema a telaio e attraverso controventi verticali, divisi nelle seguenti categorie:

- Concentrici (CBF): a Croce di S. Andrea o a V rovescia;
- Eccentrici (EBF): a K con link orizzontale [verticale], elemento dissipativo del controvento eccentrico (30cm-1,20m) che si plasticizza => viene lullonato alle flange della trave e alle diagonali per garantirne una facile sostituzione.
- Concentrici a sbandamento impedito (instabilità): a diagonale o a K sulla trave, i controventi hanno una dimensione maggiore che lavora anche come puntone; tipicamente si utilizzano profili scatolari con piatti interni, poi riempiti di CLS per evitare lo sbandamento.

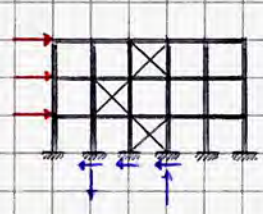
• Pareti/Nuclii:   in CLS o Acciaio/Alluminio, nel primo caso aumentano sensibilmente la massa della struttura, più di frequente si utilizzano pareti leggere piane o corrugate (in acciaio o alluminio); fungono in ogni caso da controventi e possono ricorrendosi agli schemi già visti.

Si osservi come i controventi limitino la libertà architettonica in facciata, soprattutto se concentrici. Analizziamo ora dei possibili schemi di posizionamento per analizzare al meglio la concezione dei sistemi di controventamento verticali:



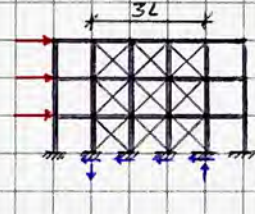
Poco centrigato
⊖

La ridotta L implica elevati sforzi normali nelle colonne in opposizione al momento ribaltante; può determinare problemi di instabilità a compressione.



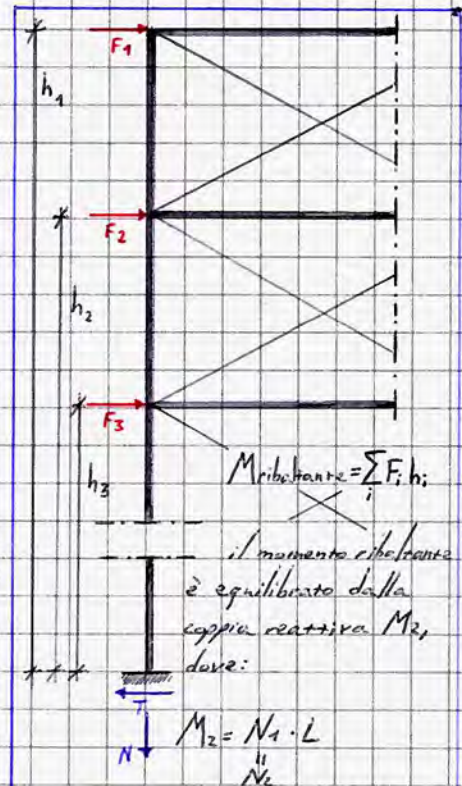
Mediamente centrigato [a scacchiera]
⊗

C'è discontinuità nei flussi delle colonne.

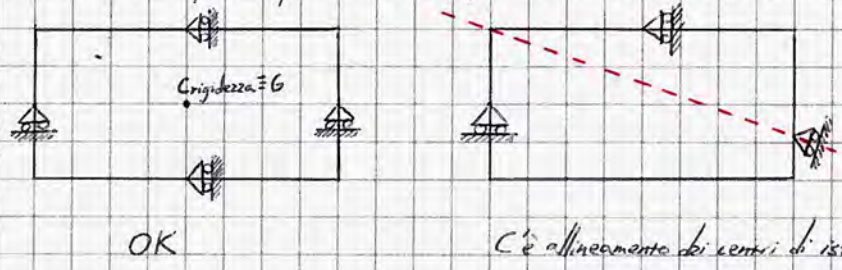


Molto centrigato
⊕

La luce aumenta sensibilmente, riducendo lo sforzo normale; la sua influenza nell'instabilità a compressione è molto ridotta.

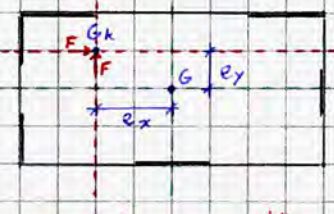
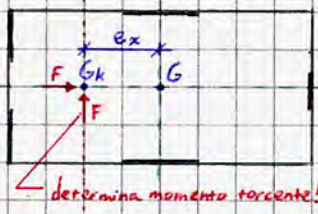


Aumentando il braccio infatti si riducono gli effetti sulle colonne prodotti dal momento ribaltante e si ripartisce su più colonne il taglio alla base. La disposizione dei controventi verticali in pianta si determina attraverso un'analisi cinematica dell'impalcato, per vincoli esterni, schematizzando i controventi come carrelli:



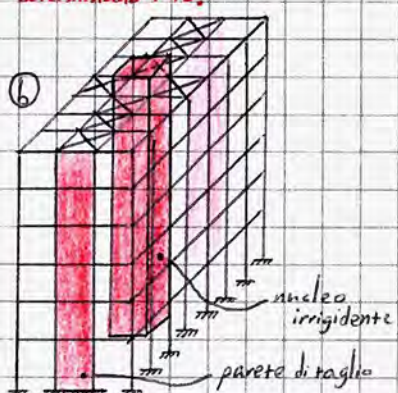
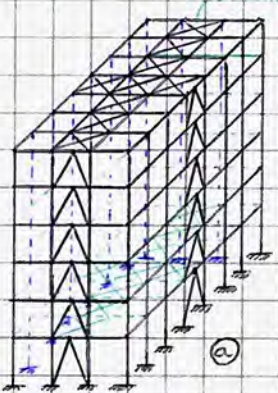
C'è allineamento dei centri di istantanea rotazione \Rightarrow la struttura è LABILE!

Ocorre inoltre disporre i controventi in modo tale da ridurre gli effetti latero-torsionali dovuti all'eccentricità tra $G_m \equiv G$ (baci centro) e G_k (centro di rigidità):



Per disporre i sistemi di controventamento nei telai pendolari, la cui applicazione tipica è per gli edifici multipiano, si impiegano tipicamente due schemi: controventi in acciaio orizzontali e verticali (l'ultimo \otimes presenta controventi verticali a V rovescia) o, nel caso di blocchi scala-ascensore con nuclei e pareti di taglio in CLS-A, privi di controventi verticali: gli elementi in CLS assolvono la funzione irrigidente rispetto alle azioni orizzontali (\otimes).

Per quanto riguarda i telai monogiano (capannoni industriali) solitamente non è possibile - per motivi di economia - realizzare il piano rigido; non essendovi uno schema a telaio le uniche colonne a supportare le azioni orizzontali sono quelle controventate; le altre vengono progettate unicamente per carichi verticali: i collegamenti sono di più facile progettazione e realizzazione!

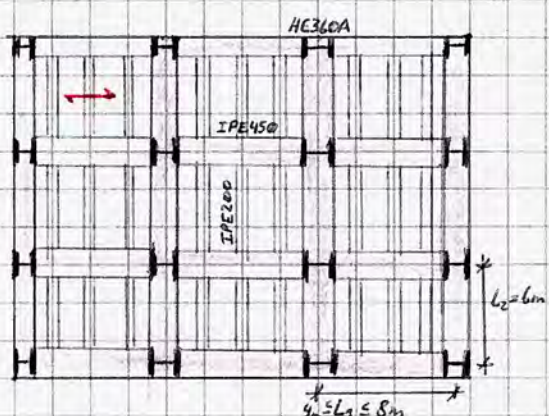
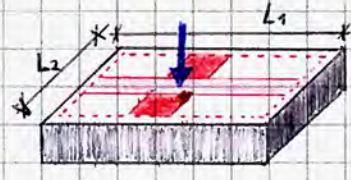


In fondazione, nuclei e pareti scaricano sempre su elementi continui, eventualmente velle e proprie platee.
 In generale, una struttura a telaio è più duttile di una a controventi, più resistente; la scelta della tipologia dipende dalle specifiche applicazioni.

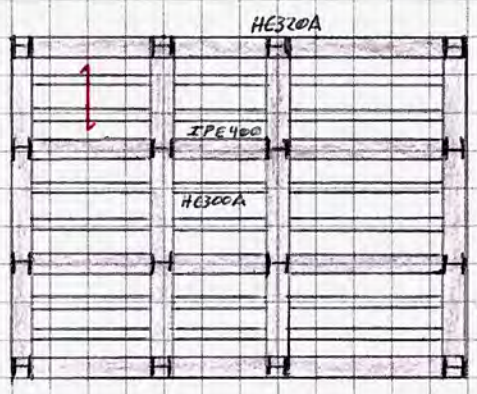
A seconda della tipologia strutturale e delle luci coinvolte inoltre si influenza l'orditura del solaio: le strutture in acciaio con schemi strutturale a telaio devono obbligatoriamente avere orditura a scacchiera.

La teoria per ordire i solai di strutture controventate deriva dal metodo di Grashof (metodo di analisi semplificato delle piastre), tramite il quale è possibile dimostrare che il carico applicato su una piastra viene assorbito in modo preponderante dalle strisce disposte sul lato corto, aventi maggior rigidità.

Infatti, negli impianti a semplice via su più ordini di piccola luce ($4m \leq L_1 \leq 8m$) o per coperture di grande luce ($L_1 \geq 25m$) conviene generalmente (tenendo conto che i limiti prestazionali delle membrature utilizzate oltre ai vincoli sulla spessore dell'impalcato possono determinare l'inversione dell'orditura) disporre le membrature del secondo ordine (travi secondarie) secondo il lato corto della maglia.



Soluzione più leggera



A parità di SLS pesa il 33% in più; diventa più conveniente economicamente per luci più ampie, avendo un minor ingombro strutturale.

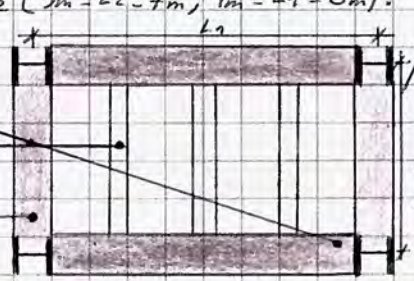
Nel processo di definizione delle maglie strutturali un parametro particolarmente importante è il rapporto di forma, che permette di conoscere rapidamente in prima approssimazione l'altezza di una trave: definita la tipologia e la tipologia strutturale, il rapporto di forma (r_{SH}) è la relazione che esiste tra l'altezza (H) della membratura e la sua lunghezza con riferimento ai correnti campi d'impiego. Tale rapporto è desunto dall'esperienza e/o dall'analisi statistica di strutture esistenti.

Nota la luce da coprire, L
 scelta la tipologia strutturale,
 noto il rapporto di forma, $r_{SH} = H/L$

Si determina l'altezza $H = r_{SH} \cdot L$

Ad esempio, per una struttura a maglie rettangolari ad uso residenziale ($3m \leq L_2 \leq 7m$; $4m \leq L_1 \leq 8m$):

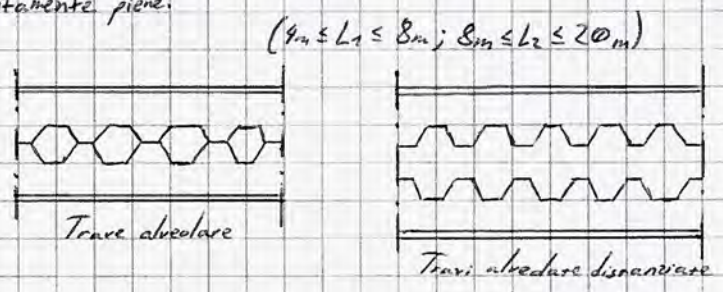
- Travi principali $\Rightarrow H_1 = L_1/20$
- Travi secondarie $\Rightarrow H_2 = L_2/30$
- Travi di collegamento $\Rightarrow H_3 = L_2/25$



Le travi di collegamento sono solitamente di altezza pari a quella delle travi principali per omogeneizzare il processo operativo

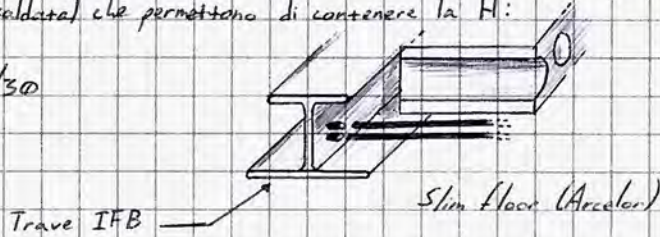
Nel caso di edifici multipiano del terziario, ad esempio ad uso ufficio, le luci possono aumentare sensibilmente; si tendono ad utilizzare travi alveolari/alveolate (più leggere) eventualmente aumentate di altezza ulteriormente (auostando due T) per le travi principali. Le travi secondarie, su cui poggia il solaio, sono solitamente piene.

- Travi principali $\Rightarrow H_1 = L_1/20$
- Travi secondarie $\Rightarrow H_2 = L_2/25$

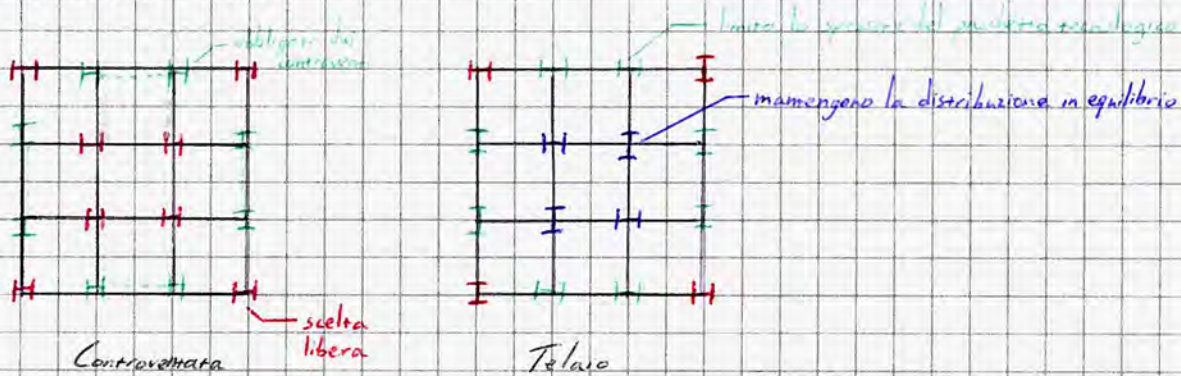


È anche possibile, per soluzioni particolarmente complesse, considerare impalcanti con travi inserite nella spessore del solaio senza travi secondarie, come per i sistemi *slim deck* (British steel) o *slim floor* (Arcelor) che prevedono l'utilizzo di travi AFB (laminati) o IFB (in composizione saldata) che permettano di contenere la H:

Travi principali $\Rightarrow H = L/30$



Nelle strutture pendolari assume particolare importanza anche l'orditura delle colonne, orientate in maniera tale che l'anima sia complanare alle diagonali dei controventi per permettere un tissaggio migliore ed una maggior resistenza; analogamente per limitare la snellezza fuori piano del controvento le diagonali sono orientate con l'asse forte nel piano del controvento. Nel caso di strutture a telaio, anche le colonne vanno ordinate a scacchiera: tutte le colonne sopportano l'azione sismica, dunque la distribuzione delle direzioni degli assi forti delle singole colonne deve essere relativamente equilibrata per evitare debolezze in caso di sismi:



Per quanto riguarda il predimensionamento delle colonne è possibile effettuare un ragionamento analogo a quanto fatto per le travi: attraverso analisi statistiche, sapendo che si ha un collegamento colonna-colonna all'incirca ogni 3 piani ($L_{max} = 12m$) è possibile stimare le dimensioni degli elementi:

- Per una struttura CBF (profili HE B):

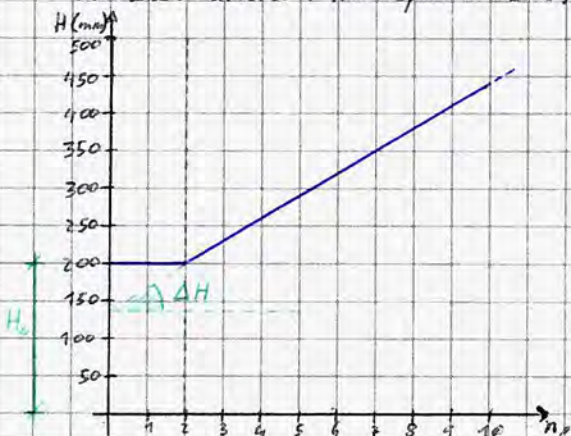


- $n_p \leq 2 \Rightarrow H = H_0$ (with $H_0 \rightarrow 200mm$)
- $n_p > 2 \Rightarrow H = n_p \cdot \Delta H + (H_0 - 2 \Delta H)$ (with ΔH gradiente, 50mm)

nelle colonne delle zone pendolari si usano griglie previste per CBF in zona non sismica ($n_p = 7 \Rightarrow HE 450 B$)

La verifica alla SLS in caso di sismi consente di evitare la rottura o il distacco di finiture e elementi portati (intissi, tamponature...)

- Per una struttura MRF (profili HE B):



- $n_p \leq 2 \Rightarrow H = H_0$
- $n_p > 2 \Rightarrow H = n_p \cdot \Delta H + (H_0 - 2 \Delta H)$ (with ΔH 30mm)

Nelle colonne per le strutture a telaio il profilo HE B potrebbe essere sostituita con una a prestazioni equivalenti per inerzia (I) alla SLS e per resistenza (W) e area (A) alla SLU.

Studiamo ora le aste tese per poter poi comprendere le dinamiche alla base delle verifiche. I profili tipicamente utilizzati sono circolari (cavi o pieni) ed angolari (singoli o accoppiati), e si trovano tipicamente in controventi, travi reticolari spaziali, copriate, travi reticolari, pensiline strallate.

Su di esse si effettuano solitamente delle verifiche a trazione:

Si confronta N_{Ed} con $N_{T,Rd}$, dove $N_{T,Rd}$ può assumere diversi valori:



trazione / resistenza

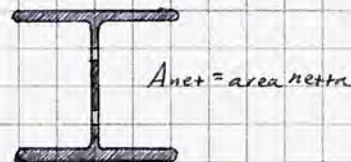
Nel caso di sezioni con fori, $N_{T,Rd}$ è il più piccolo tra lo sforzo plastico ($N_{pl,Rd}$) e lo sforzo ultimo ($N_{u,Rd}$): in corrispondenza dei fori solitamente si registra rottura fragile, senza deformazione; nelle sezioni prive di fori il fenomeno invece è duttile.

- $N_{pl,Rd}$: dipende dalla resistenza del materiale allo snervamento; ritenendosi allo specifico elemento la resistenza dipende logicamente anche dall'area. Il tutto viene riferito ad un coefficiente di sicurezza, per le verifiche a trazione è γ_{M0} pari a 1,05.

$$N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}} \rightarrow f_d, \text{ tensione di progetto alla SLU}$$

- $N_{u,Rd}$: è la resistenza ultima a intervenire (430 MPa per l'acciaio S275); poiché interessa la sezione con il foro si considera l'area netta (minore dell'area totale); anche il coefficiente di sicurezza è maggiore per tutelarsi rispetto ad una rottura fragile: $\gamma_{M2} = 1,25$ è il coefficiente tipicamente utilizzato per le verifiche ai collegamenti. A ciò si aggiunge ulteriormente un coefficiente β dipendente dal tipo di collegamento (dunque dai fori, di cui il diametro è indicato con d_0).

$$N_{u,Rd} = \beta \cdot \frac{A_{net} \cdot f_u}{\gamma_{M2}}$$



Si procede dunque nella verifica, controllando che $N_{Ed} \leq N_{Rd}$.

Per una questione di gerarchia delle resistenze e di obiettivi progettuali ci si aspetta inoltre che $N_{u,Rd} \geq N_{pl,Rd}$ in maniera tale da avere sempre rottura duttile. Da ciò risulta un vincolo sull'area netta:

$$A_{net} \geq \frac{f_y}{f_u} \cdot \frac{\gamma_{M2}}{\gamma_{M0}} \cdot \frac{A}{\beta}$$

In alternativa al metodo di verifica è possibile utilizzare una formula di progetto: scelto il tipo di sezione e il tipo di acciaio si calcolano le sollecitazioni agenti (eventualmente estrapolando parti della struttura, nel caso di telai grandi o complessi, per comprendere lo sforzo normale agente) in maniera tale da ricavare l'area teorica A^* necessaria per verificare l'elemento; si seleziona dunque dai sagomari il profilo più adatto.

$$A^* = \frac{N}{f_d} \rightarrow \text{sforzo normale agente} / \text{resistenza di progetto}$$

Le verifiche a compressione si distinguono in due categorie a seconda che l'elemento sia tozzo o meno (è l'unica distinzione: essendo l'acciaio un materiale isotropo, la sua risposta elastica è la stessa in ogni direzione). Poiché un elemento tozzo non è soggetto a instabilità per definizione, la verifica in questo caso coincide in larga parte con quanto fatto a trazione:

$$N_{Ed} \leq N_{c,Rd}$$

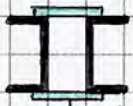
compressione

$$N_{c,Rd} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M0}}$$

per sezioni di classe 1, 2, 3: i profili snelli, di classe 4, hanno sezioni sottili e non tutta la loro area è effettivamente reagente: al posto dell'area A si considera l'area efficace A_{eff} .

Le aste compresse snelle - come le colonne di edifici multipiano - sono delle stesse tipologie delle aste tese, oltre ad eventuali sezioni calastrellate.

Tipicamente sono colonne, controventi verticali, pali (HP), travi nel piano d'appoggio di travi reticolari spaziali, il corrente superiore delle travi reticolari.



calastrello

Sono evidentemente influenzate dalla teoria della instabilità di Eulero, che fonda su 5 ipotesi che coincidono con una opportuna schematizzazione del modello geometrico, del modello meccanico e del modello delle azioni:

- Trave ad asse rettilineo doppiamente simmetrica; Modello Geometrico
- Vincoli di estremità cerniera-carrello;
- Materiale elastico lineare infinitamente resistente; Modello Meccanico
- Carico puramente assiale; Modello delle azioni
- Assenza di imperfezioni geometriche e meccaniche → **Asta ideale**

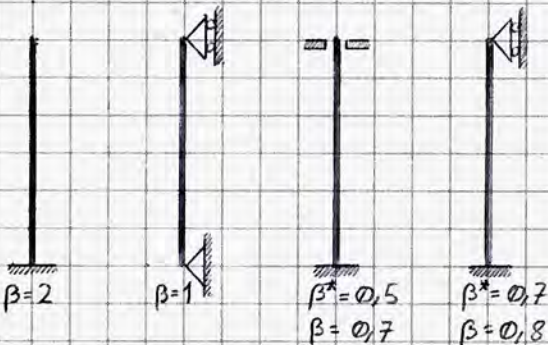
Tramite queste ipotesi Eulero elabora nel 1759 la nota formula del carico critico, in occasione del quale si ha una biforcazione dell'equilibrio:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_{cr}^2}$$

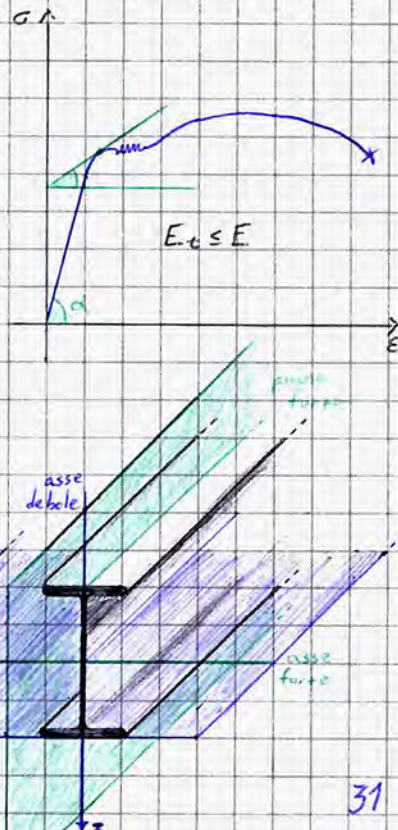
Nel 1780 Bernoulli nota che il fenomeno di instabilità si verifica anche per aste aventi differenti condizioni vincolari di estremità; introduce al posto di un unico L_{cr} assoluto la **lunghezza di libera inflessione** L_0 pari al prodotto tra la lunghezza propria dello elemento e un parametro adimensionale β , dipendente dallo specifico schema di vincolo, che rappresenta la distanza tra due flessi successivi della determinata instabile.

In seguito - nel 1889 - Engesser estende la trattazione anche alle aste tozze e introduce la **plasticizzazione**: il modulo elastico in occasione del superaggiungimento del carico critico può atterrire ad una fase successiva al comportamento elastico lineare; il valore reale di E non è mai tg di una minore; introduce dunque nella formula il modulo elastico tangente al grafico nel punto E_t . La formula diventa quindi:

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 E_t I}{L_0^2}$$



I valori di β segnati da asterisco sono valori della norma; quelli privi di detto simbolo sono i valori effettivi ottenuti sperimentalmente.



Ocorre ora definire il piano coniugato all'asse debole (piano debole) e il piano coniugato all'asse forte (piano forte)

Per Eulero, l'instabilità fuori piano è flessionale; vi è dunque diretta proporzionalità con l'inerzia e il materiale e inversa proporzionalità con la L critica; ne segue che per limitare l'influenza dell'instabilità sul progetto occorre prevedere elementi non troppo lunghi e con sezioni di grande inerzia.

Per valutare se una sezione è tozza o snella si applicano le formule euleriche già viste nel corso di Scienza delle Costruzioni:

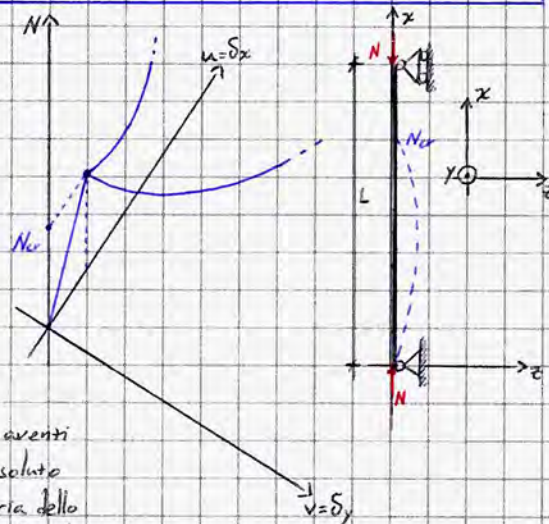
$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_{MAX}}{\lambda_1} \leq 0,2 \Rightarrow \text{trave tozza}$$

In cui:

$\bar{\lambda}$ = snellezza normalizzata

$$\lambda_{MAX} = \frac{L_0}{P_{min}} = \frac{\text{lunghezza di libera inflessione}}{\text{raggio di inerzia minimo}}$$

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$



Mettendo in relazione la σ_{cr} - ottenuta dallo sforzo normale corrispondente - con la snellezza λ - ottenuta dalla lunghezza dell'elemento - si definisce la cosiddetta iperbole di Eulero:

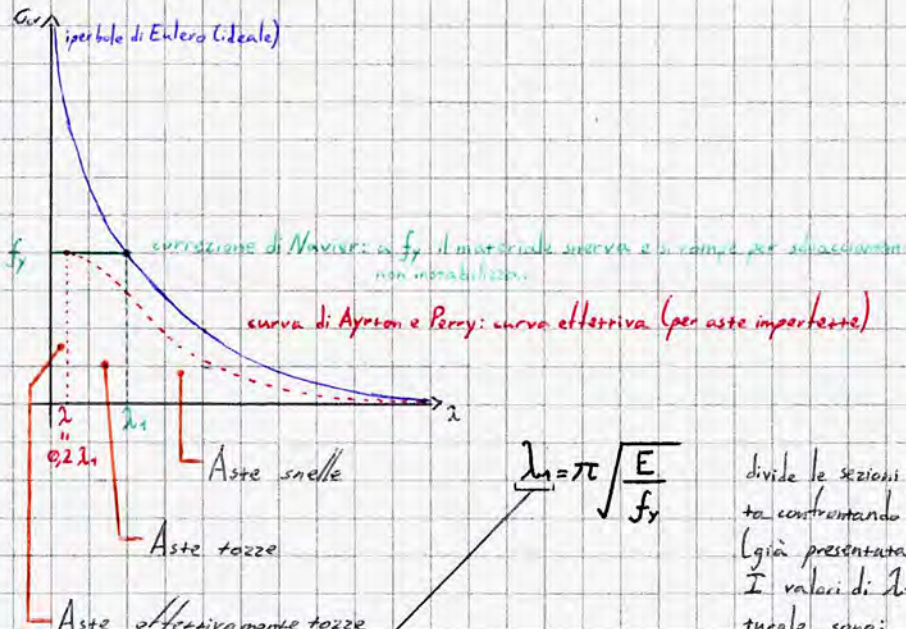
$$N_{cr} = A \sigma_{cr} \implies \sigma_{cr} \cdot A = \frac{\pi^2 E I}{L_0^2} \implies \sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

equazione dell'iperbole di Eulero

(p = i raggio d'inerzia)

snellezza geometrica $\lambda = \frac{\beta L}{p}$

Logicamente, la curva di instabilità euleriana $\sigma_{cr} - \lambda$ vale nelle ipotesi di asta ideale, in cui l'asta è perfetta e realizzata in un materiale infinitamente resistente. A ciò si sono susseguiti dei contributi successivi - come la correzione di Navier - che hanno permesso di analizzare casi reali.



Nel caso più frequente in cui l'asta presa in esame è parte di un telaio o presenta vincoli elastici alle estremità si utilizza il **metodo di Wood**: in funzione delle condizioni di vincolo nei telai si definisce un $\beta \in [1, \infty[$ - indicato in specifici abachi - dove si assume $\beta=1$ per telai con travi rigide, schemi pendolari o schemi sismoresistenti con travi molto più rigide delle colonne.

Nel caso di una struttura CBF, $\beta=1$ (0,7 in presenza di vincoli diversi della cerniera, ma ci si punta a vantaggio di sicurezza); se MRF a seconda del grado di rigidità può assumere valori anche molto differenti tra loro, tendendo all'infinito se le travi sono più rigide delle colonne; per strutture PF (pinned frames, in cui si ha una capriata semplicemente appoggiata su colonne) $\beta=2$.

$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}}$$

divide le sezioni tozze da quelle snelle; a seconda della natura dell'asta - determinata confrontando λ con λ_1 - si determina se applicare la teoria delle aste tozze (già presentata) o quella delle aste snelle.

I valori di λ_1 per gli acciai tipicamente utilizzati per la progettazione strutturale sono:

S235	→	94
S275	→	87
S355	→	76

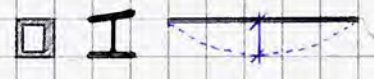
il confronto con λ_1 è la prima verifica da effettuare nello studio di elementi in acciaio compressi.

da cui deriva il λ di Ayres e Perry, pari a $2/10$ di λ_1 , che separa le aste effettivamente tozze da quelle snelle.

Nelle travi si verifica il fenomeno dell'instabilità flessorotazionale: essendo la trave un elemento inflesso, le fibre superiori sono generalmente compresse e dunque soggette a instabilità.

Le imperfezioni delle aste si dividono in due categorie:

- Geometriche: dissimmetrie; anima o ala non perfettamente rettilinea, curvatura dell'elemento
- Meccaniche: tensioni residue derivanti dalla laminazione globalmente autoequilibrata ma che possono raggiungere il 30-40% di f_y



La presenza di imperfezioni modifica profondamente il comportamento al collasso della membratura e ne abbatte fortemente le prestazioni ultime: la tesi di dottorato di Werner T. Koiter, che getta le basi della moderna teoria della stabilità delle strutture, fu scritta durante l'occupazione nazista e portata a conoscenza della comunità scientifica solo 15 anni più tardi a seguito della traduzione in inglese da parte della NASA.

La verifica allo S.L.U. si effettua, come immaginabile, confrontando lo sforzo agente con la resistenza all'instabilità:

$$N_{Ed} \leq N_{b,Rd} \quad \text{da cui si ricava il tasso di lavoro } s = \frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}} \leq 1$$

↳ buckling

Mentre N_{Ed} si ricava dal calcolo, $N_{b,Rd}$ dipende dalla classe della sezione. Per sezioni di classe 1, 2, 3 si ha che:

$$N_{b,Rd} = \chi \frac{f_y \cdot A}{\gamma_{M1}}$$

$\chi \leq 1$ è un coefficiente dipendente dalla snellezza dell'elemento (riduce la resistenza del profilo); è uguale a 1 se l'asta è tozza. Poiché vale per entrambi le direzioni, si considera il coefficiente che riguarda l'asse debole (che condiziona il progetto).

⚠ Si ricorda che la snellezza è un numero adimensionale!

Per calcolare $N_{b,Rd}$:

① Si calcola λ partendo dall'asse debole;

② Si calcola la snellezza normalizzata $\bar{\lambda}_i = \frac{\lambda}{\lambda_1} = \sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$

λ_1 ← snellezza geometrica
 $\sqrt{\frac{A f_y}{N_{cr}}}$ ← tiene conto della snellezza meccanica

③ Si calcola χ , dipendente da $\bar{\lambda}_i$ e dal tipo di imperfezioni geometriche e meccaniche valutate con un apposito coefficiente ϕ :

$$\phi = 0,5 [1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

← coefficiente dipendente dal tipo di profilo e dalla relativa curva di instabilità.

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 + \bar{\lambda}^2}} = \min \{ \chi_y; \chi_z \}$$

Nelle recenti Normative Tecniche sono state introdotte delle curve $\chi_i - \bar{\lambda}_i$ che permettono una più rapida risoluzione grafica (meno precise) delle curve d'instabilità.

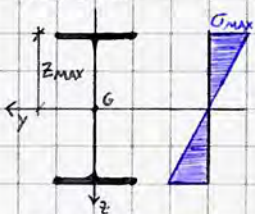
La scelta della specifica curva di instabilità (e, conseguentemente, la determinazione della classe della sezione) dipende dai seguenti parametri:

- Formati;
- Limiti geometrici (dipendenti dallo specifico tipo di sezione);
- Asse di rotazione (dipendente dal profilo e dal tipo di carico applicato);
- Materiale (incidenza delle imperfezioni meccaniche).

Come per le aste tese, ci occuperemo ora delle membrature soggette a flessione.

I profili tipicamente utilizzati per gli elementi inflessi sono a doppio T, a C, tubolari e cold-formed.

Come è noto, lo studio della trave inflessa inizia con Navier, che elabora la formula alla base dell'attuale dimensionamento rispetto alla resistenza:



$$\sigma_{max} = \frac{M_{Ed}}{I_y} \cdot z_{max} \implies \sigma_{max} = \frac{M_{Ed}}{W_{el,y}}$$

$z_{max} = \frac{h}{2}$: le aree più distanti dal baricentro della sezione
 modulo di resistenza elastico $\equiv W_{el,y} = \frac{I_y}{h/2}$

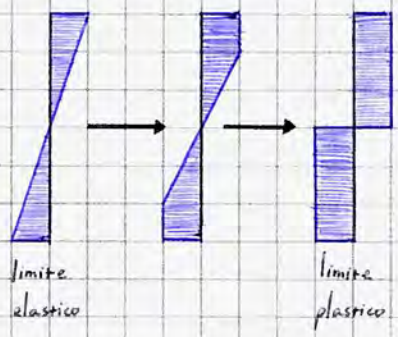
Volendo dimensionare gli elementi per resistenza a flessione attraverso una formula di progetto, il procedimento è elencato di seguito. Quando si tiene però conto del fatto che le travi progettate per resistenza (rispetto a W) vanno accuratamente verificate allo S.L. S_r, in particolare nei confronti della deformabilità (ovvero rispetto ad I).

- ① Scelta della tipologia di sezione;
- ② Scelta del tipo di acciaio;
- ③ Calcolo del momento flettente massimo allo SLU $M_{Ed,MAX}$ (confrontabile con una verifica E_d/R_d);
- ④ Calcolo di W^* , modulo di resistenza elastica teorico: $W^* = \frac{M_{Ed,MAX}}{\frac{f_d}{\gamma_m}}$ allo SLU
- ⑤ Scelta della sezione avente $W > W^*$ dal sagomario.

Gli elementi inflessi entrano però anche in campo plastico, cambiando comportamento; in questi casi il parametro è il modulo [di resistenza] plastico $W_{pl} = 2 \cdot S_y$.

Ciò perché il massimo momento resistente a comportamento elastico lineare è $W_{el} \cdot f_y$ (Navier), detto momento e limite elastico. Aumentando i valori del momento (salvo che per sezioni di classe 3 e 4) le fibre della sezione iniziano a snervare a partire dalle estremità entrando

in campo plastico. Plasticizzate tutte le fibre si giunge ad una condizione limite: birettangolare, ^{corrispondente al} momento limite plastico $M_{pl} = f_y \cdot W_{pl}$, in cui ogni fibra è soggetta ad una tensione pari a f_y .



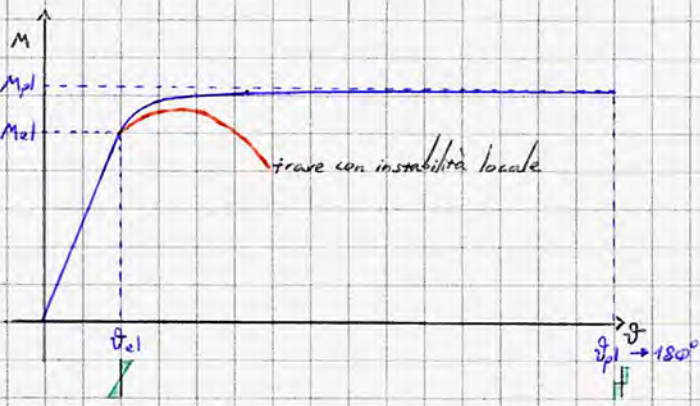
A seconda della snellezza locale dell'elemento (rapporto tra la larghezza di una parte dell'elemento e il suo spessore, come la semilarghezza di un'ala di un doppio T e il suo spessore) alcuni profili possono non entrare in campo plastico, avendo come momento limite ultimo quello al più elastico.

Altro parametro fondamentale nella valutazione degli elementi inflessi è il fattore di forma geometrico a flessione α :

$$\alpha = \frac{M_{pl}}{M_{el}} = \frac{W_{pl}}{W_{el}}$$

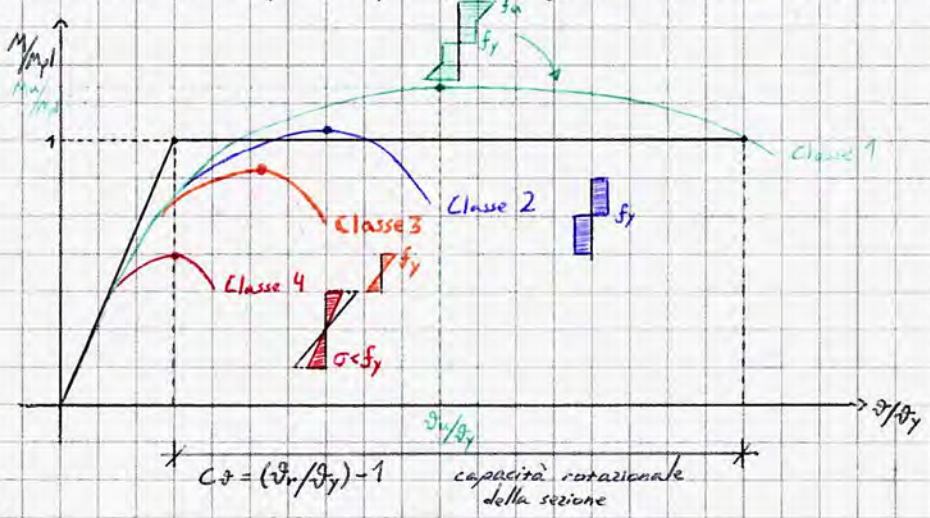
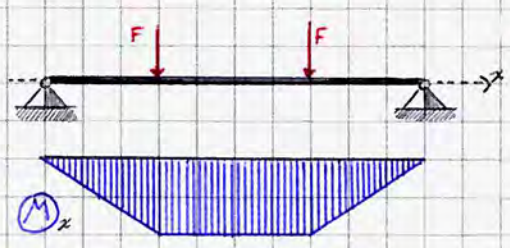
$\alpha = 1,10$ per I aumenta all'aumentare della massa della sezione!
 $1,50$ per H
 $1,00$ per :

Nel caso in cui la trave presenti fenomeni di instabilità locale si riducono anche sensibilmente le prestazioni — come la capacità di rotazione e dunque la resistenza.



- Le ipotesi alla base della trattazione appena effettuata sono:
- Conservazione delle sezioni piane (Hp. Bernoulli) e piccoli spostamenti;
 - Materiale elastico perfettamente plastico (Hp. Prandtl) ed isoresistente;
 - Assenza di qualunque fenomeno instabile (per la trattazione puramente teorica legata alla distribuzione birettangolare).

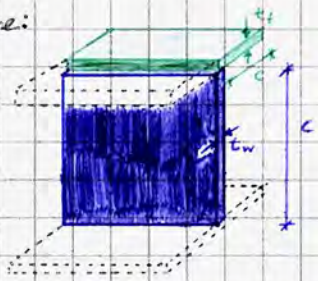
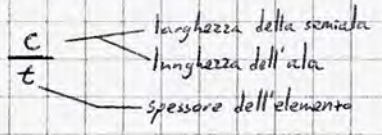
La prova sui fenomeni di instabilità locale si effettua applicando due forze concentrate di uguale intensità al provino: in questo modo la regione compresa tra le due sollecitazioni è a momento costante e dunque priva dell'influenza del taglio (ricordiamo infatti che $dM/dx = Q$). In queste prove aumenta la snellezza locale delle parti compresse, e il diagramma delle tensioni restituisce una distribuzione ulteriore, con massimo a f_u .



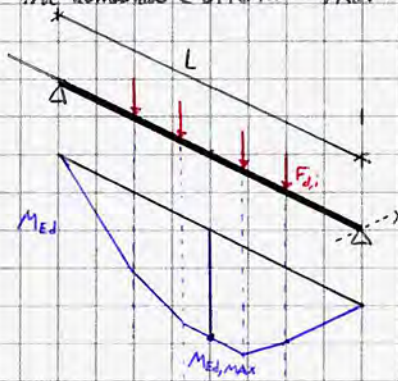
- Classe 1: $M_{max} > M_{pl}$
 $\theta_{max} \gg \theta_y$ sezioni DUTILI
- Classe 2: $M_{max} \geq M_{pl}$
 $\theta_{max} > \theta_y$ sezioni COMPATTE
- Classe 3: $M_{el} \leq M_{max} \leq M_{pl}$
 $\theta_{max} \approx \theta_y$ sezioni SEMICOMPATTE
- Classe 4: $M_{max} \equiv M_{el} < M_{pl}$
 $\theta_{max} < \theta_y$ sezioni SNELLE

Le sezioni di classe 1 e 2 vengono impiegate in zona sismica per le zone dissipative della struttura; quelle di classe 3 possono essere impiegate nelle sole zone non dissipative poiché lavorano solo in campo elastico. Le sezioni di classe 4, non raggiungendo M_{el} e avendo capacità rotazionale inferiore a θ_y si limitano a valori ottimali. A seconda della classe cambiano le formule di calcolo.

L'instabilità locale è funzione del rapporto tra le dimensioni locali della sezione:



Per effettuare la verifica a flessione in assenza di svergolamento (ovvero nei casi in cui la trave è vincolata torsionalmente, ad esempio con connettori che la collegano alla soletta collaborante) si segue il procedimento classico di verifica del rapporto tra domanda e offerta E_d/R_d :



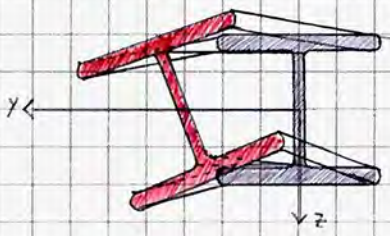
$$M_{c,Rd} = f_y \cdot \frac{W_y}{\gamma_{M1}}$$

← elastico o plastico a seconda della classe del profilo (lettice in classe 4)

Nel caso di sezioni di classe 4 si effettuano sempre verifiche di instabilità LOCALE (ad esempio sui connettori), mai globale!

La verifica a flessione con svergolamento prevede un'assenza della solidarizzazione con la soletta e la possibilità che alcune sezioni vadano incontro a rototraslazione. La prova si effettua imponendo dei vincoli torsionali di estremità, inducendo la instabilizzazione del fenomeno.

A seguito della flessione la flangia compressa tenderebbe ad instabilizzarsi e comportarsi come una colonna, tendendo idealmente a sbandare intorno al suo asse debole - ovvero nel piano XZ - ma, per la presenza della flangia tesa che esercita attraverso l'ala un effetto stabilizzante, ciò è parzialmente impedito: l'unica possibilità per la flangia compressa diventa sbandare intorno al suo asse forte - nel piano XY - trascinando con sé in un moto rototraslatorio la restante parte della sezione.



$$M_{Ed} \leq M_{b,Rd}$$

↳ Internal buckling

Le membrature soggette a puro taglio presentano verifiche semplici per le nostre applicazioni (meno per travi da ponte, travi lunghe, travi soggette a carichi distribuiti o concentrati di elevata intensità): ad eccezione delle sezioni a parete sottile, le travi su grandi luci (anche laminati a caldo) o con intensi carichi concentrati sugli appoggi (reazioni vincolari) o in campata (macchinari pesanti e simili) le strutture in acciaio sono sempre verificate, con un tasso di lavoro s comprese tra 0,2 e 0,3. Come invariabile, la verifica segue la usuale procedura di confronto E_d/R_d .

Il calcolo di V_{Rd} segue due modalità differenti a seconda che le sezioni siano ad { anima tozza (plastificata) / anima snella (instabilizzata)

• Sezioni ad anima tozza:

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \left(\frac{f_y}{\sqrt{3}} \right)}{\gamma_{M0}}$$

area dell'anima a taglio
le tensioni resistenti a taglio sono dello τ tangenziali, il calcolo deriva da von Mises
la verifica è una verifica di resistenza ($\gamma_{M0} = 1,05$)

• Sezioni ad anima snella:

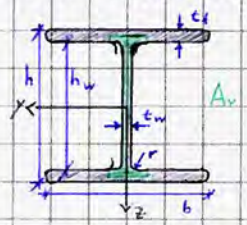
$$V_{c,Rd} = \frac{A_v \left(\frac{f_y}{\sqrt{3}} \right) \chi_v}{\gamma_{M1}}$$

coefficiente di riduzione della tensione resistente di progetto ($\chi_v \leq 1$) analogo a quello impiegato per la verifica di instabilità delle colonne (dipende dalla snellezza normalizzata del pannello d'anima \bar{I}_w).
la verifica è una verifica di instabilità ($\gamma_{M1} = 1,05$)

Dove l'area resistente a taglio dell'anima è - a vantaggio di sicurezza - pari al suo spessore per l'altezza; in realtà l'area effettiva da norma include anche parte dell'ala.

In un doppio T, $A_v = A - 2b \cdot t_f + (t_w + 2r) \cdot t_f \approx 1,04 h \cdot t_w$

In un profilo circolare cavo, $A_v = \frac{2}{\pi} A \approx 0,64 A$



Per determinare se una sezione presenta o meno un'anima snella, nel caso di anime non irrigidite si effettua il seguente confronto:

$$\frac{h_w}{t_w} > 72 \frac{\sqrt{E}}{\eta} \Rightarrow \text{anima snella}$$

dipende dal materiale: $E = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$
 pari a 1 per lo S460; $\eta = 1,2$ in tutti gli altri casi

Nel caso di anime irrigidite trasversalmente si limita l'instabilizzazione dell'elemento; il discriminante tra anime snelle e tozze si calcola dunque come di seguito:

$$\frac{h_w}{t_w} > 31 \frac{\sqrt{E}}{\eta} \sqrt{k_r}$$

parametro dipendente dalle condizioni di vincolo, ovvero dal grado di connessione tra anime ed elc.
 È tabellato.

L'ultima categoria di verifiche alla SLU riguarda gli elementi pressoinflessi, ovvero soggetti a una sollecitazione composta per sforzi normali e momenti flettenti. Il procedimento di verifica presenta un iter sia analitico (tramite formula) che grafico (si valuta se le condizioni esaminate giacciono in un determinato dominio).

Nel caso della verifica analitica, a seconda dello sforzo normale agente è possibile trasformare la verifica composta in una verifica a flessione; ciò si effettua ad esempio per i profili a doppia T, tubolari, statolari o cold-formed.

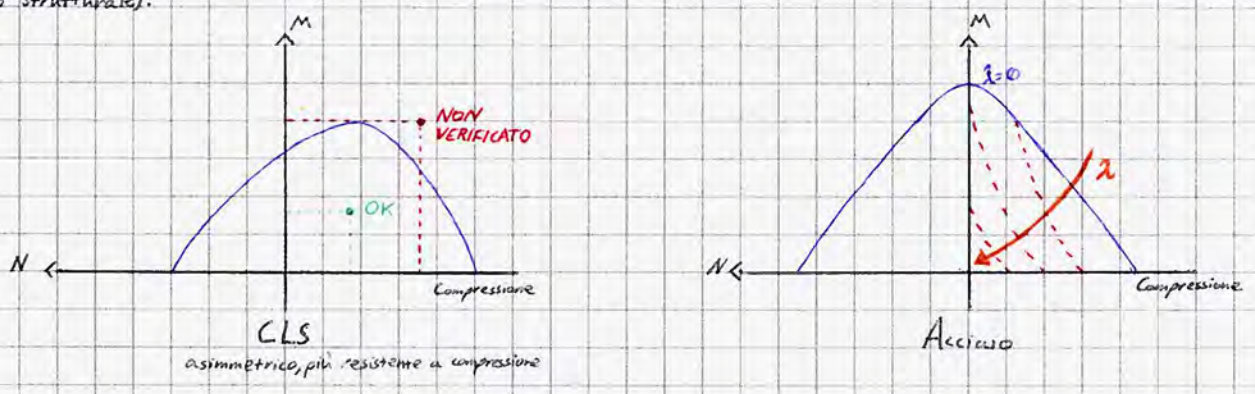
La pressoinflessione avviene solitamente nelle colonne, con un'evoluzione dipendente dal grado di vincolo (la trave può trasmettere momento alla colonna; in alternativa il fenomeno si attiva a causa dell'azione sismica); la verifica di base tipicamente procede come una verifica di resistenza per lo sforzo normale e l'instabilità sul momento.

Altri elementi soggetti a pressoinflessione sono le travi di controvento (il vento comprime, il solaio inflette).

Le travi reali presentano solitamente un'eccentricità nell'applicazione dello sforzo normale, che genera in ogni caso un momento ($M = N \cdot e$); se però l'eccentricità è minore di $L/1000$ il momento è però trascurabile (L è la luce coperta dalla trave).

⚠ È fondamentale effettuare sempre la verifica dell'eccentricità!

La verifica grafica si effettua considerando i domini di seguito (si riporta anche il diagramma del CLS per mostrarne il differente comportamento strutturale):



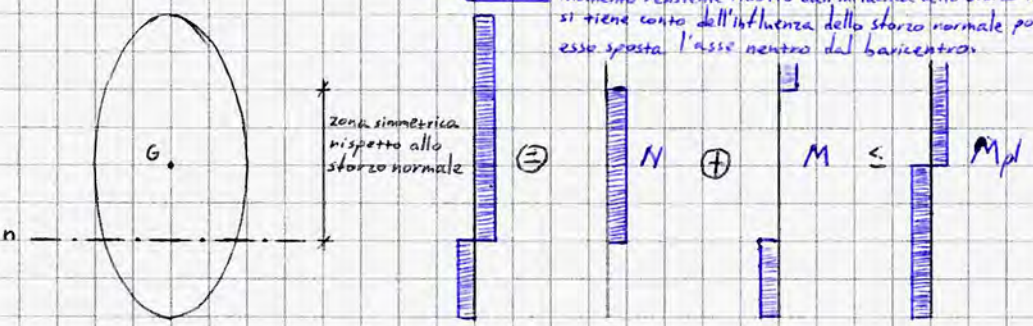
Il dominio dell'acciaio è simmetrico per $\lambda = 0$ (materiale iso-resistente), poco arrotondata verso l'asse delle ordinate (gli elementi hanno un basso fattore di forma $\alpha \approx 1,15$) e, a causa delle instabilità locali o globali, viene degradato nella zona compressa. (il dominio è convesso per $\lambda \gg 0$).

La verifica analitica prevede, nel caso di sezioni plastiche doppiamente simmetriche, di confrontare come di consueto M_{Ed} con M_{Rd} :

$$M_{Ed} \leq M_{N,Rd}$$

momento resistente ridotto dall'influenza dello sforzo normale; si tiene conto dell'influenza dello sforzo normale poiché esso sposta l'asse neutro dal baricentro.

Il terzo esercizio della prova di esame scritta prevede di calcolare il momento o lo sforzo normale per poi applicare la formula.



Ne segue che se N è sufficientemente piccola la verifica diventa una verifica a flessione a tutti gli effetti!

In genere, il calcolo segue la seguente procedura:

$$M_N = M_{pl} - M_{pl, cen}$$



$$M_{N, Rd} = M_{pl, Rd} \left[1 - \frac{W_{pl, cen}}{W_{pl}} \right]$$

\rightarrow $W_{pl, cen}$: W plastico centrato, riferito alla parte di sezione simmetrica tra l'asse neutro e il baricentro.
 \rightarrow $\frac{W_{pl, cen}}{W_{pl}}$: γ fattore di riduzione

La formula generale si specializza in espressioni più semplici per sezioni particolari:

• Sezioni rettangolari: $M_{N, Rd} = M_{pl, Rd} [1 - n^2]$

n : solitamente circa pari a 1; ne segue che non ha senso effettuare la verifica a pressoflessione (la resistenza a sforzo normale è verificata, occorre valutare l'instabilità)
 parametro che tiene conto dello sforzo normale: $n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl, Rd}}$

• Sezioni a doppio T di classe 1-2: $M_{N, Rd} = \min \left(M_{pl, Rd}; M_{pl, Rd} \left[1 - \frac{1-n}{1-0,5a} \right] \right)$

inflessione intorno all'asse forte $\left[\frac{N_{pl, Rd}}{A f_y} \right]$
 a : dipende dalle dimensioni geometriche delle parti che costituiscono la sezione; è il rapporto tra l'area dell'anima e l'area totale:

$$a = \frac{A - 2b \cdot t_w}{A}$$

Per l'inflessione intorno all'asse debole nei profili a doppio T invece il calcolo dipende dal confronto tra a ed n (che rappresenta il tasso di lavoro per solo sforzo normale, anche detto sforzo normale adimensionalizzato):

$$M_{N, Rd} = M_{pl, Rd} \quad \text{per } n \leq a$$

$$M_{N, Rd} = M_{pl, Rd} \left[1 - \left(\frac{n-a}{1-a} \right)^2 \right] \quad \text{per } n > a$$

Noto $M_{N, Rd}$ la verifica diventa essenzialmente una verifica a flessione che tiene conto dell'influenza dello sforzo normale.

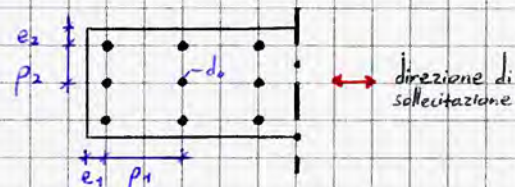
Confrontando il momento plastico della sezione pressoflessa M_N con il momento plastico per sola flessione semplice M_{pl} si evince che il primo risulta ridotto per effetto della plasticizzazione della zona centrale; ne segue che nelle sezioni a doppio T il momento resistente $M_{N, Rd}$ dipende dal rapporto tra l'area dell'anima ($A - 2b \cdot t_w$) e l'area totale.

Verifica e calcolo delle unioni: le unioni bullonate

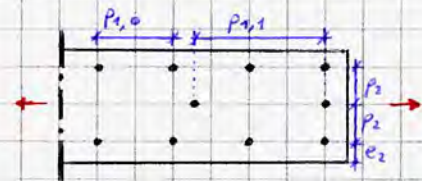
I bulloni e i chiodi sono dispositivi che, grazie alla loro morfologia dotata di due teste di estremità, sono capaci di trasmettere sia sollecitazioni semplici di trazione e taglio che sollecitazioni composte.

Per garantire un corretto funzionamento ed un'elevata durabilità all'unione, l'Eurocodice 3 presenta norme differenti a seconda della geometria di foratura della piastra. Si definiscono più parametri a seconda della tipologia di foratura, come elencato di seguito:

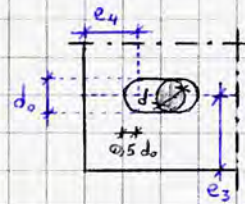
- Fori allineati:
 - e \rightarrow distanza bordo-foro;
 - p \rightarrow distanza tra due fori;
 - 1 \rightarrow direzione parallela alla sollecitazione;
 - 2 \rightarrow direzione ortogonale alla sollecitazione;
 - d_o \rightarrow diametro del foro.



- Fori stalsati (giunti tesi):
 $p_{1,0}$ → distanza tra fori nelle file esterne;
 $p_{1,1}$ → distanza tra fori nelle file interne.



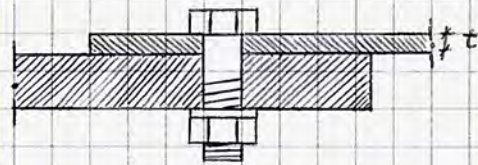
- Fori ovalizzati:
 e_3 → distanza bordo - asse dell'asola;
 e_4 → distanza bordo - asola, delimitata dalla posizione estrema dell'asse del bullone avente minima distanza dal bordo.



Nell'EC3 (II.4.2) sono imposti, a seconda della tipologia di acciaio e dell'ambiente in cui si trova, dei limiti minimi e massimi:

- mini: per consentire una corretta installazione impedendo un eccessivo indebolimento della lamiera, è proporzionale a d_0 ;
- MAX: per prevenire imbracciamenti locali (possono causare accumuli di sostanze corrosive) e ripartire uniformemente le sollecitazioni ai singoli bulloni.

Nel collegamento, si definisce t lo spessore della piastra (necessariamente minore di quello della flangia cui essa aderisce).



In genere, si consiglia: $2d_0 \leq e_3 \leq \min\{4t; 40\text{mm}\}$; $3d_0 \leq p \leq \min\{14t; 200\text{mm}\}$.

Tali valori sono più stringenti rispetto a quelli tabellari della norma, ma consentono un'applicazione rapida a prescindere dalla tipologia di acciaio considerato.

Nella realizzazione dei fori (punzonatura fino a 10mm, trapanatura per spessori maggiori) sono inoltre fissati dei limiti di tolleranza tra gambo e foro ($d_0 - d$), ripartiti in 3 classi nell'EC3 e 2 nelle NTC18:

EC3	
D	Tolleranza
M12-14	1mm
M16-24	2mm
>M24	3mm

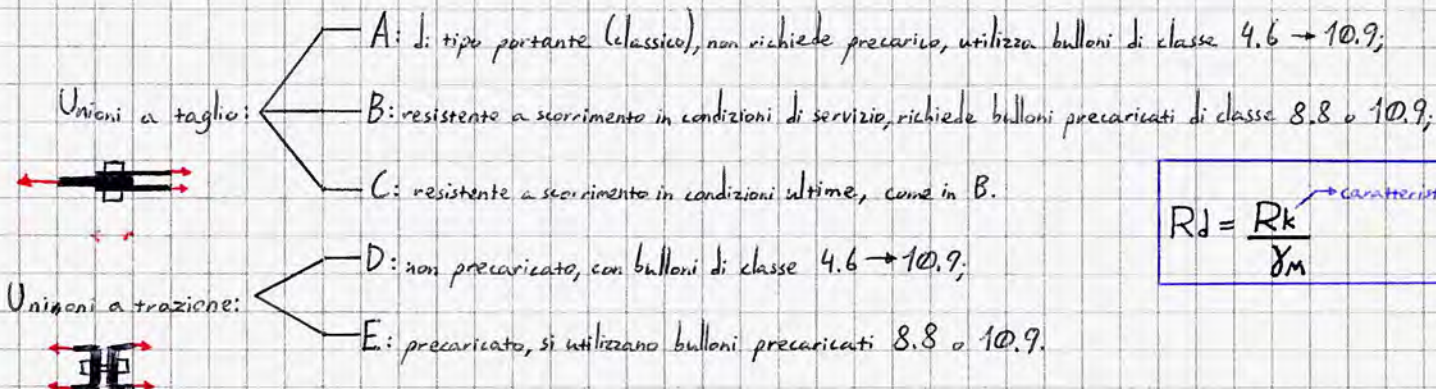
NTC 18	
D	T
M12-20	1mm
>M20	1,5mm

Per quanto riguarda la lavorazione delle parti a contatto, occorre garantire sufficiente attrito per determinarne un efficace esercizio oltre a garantire l'assenza di difetti superficiali. Sono utilizzabili due procedimenti:

- Sabbatura (con eventuale zincatura successiva);
- Pulitura con spazzola.

più performante → Classi A, B
 classe C

Le unioni bullonate si classificano in base alle sollecitazioni agenti; ogni categoria di unione presenta verifiche specifiche:

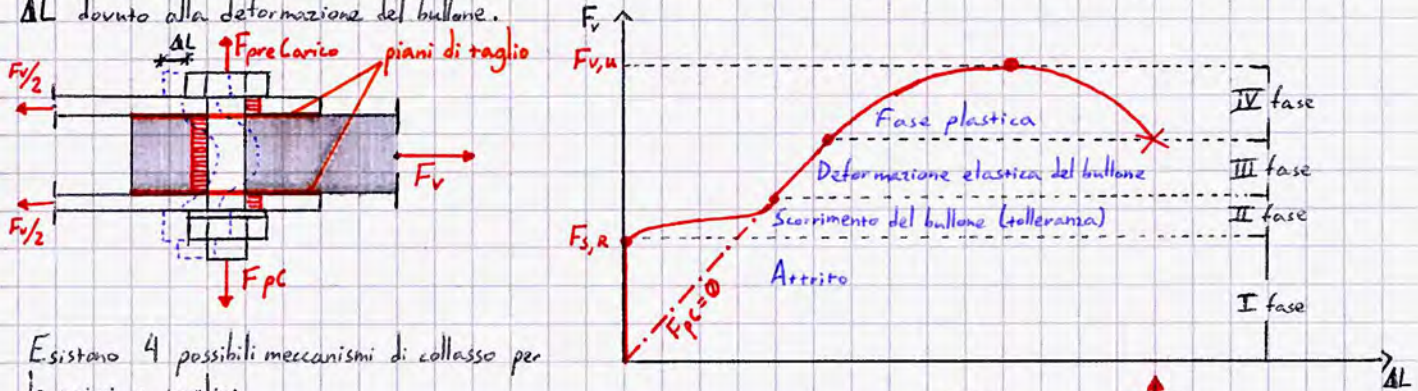


$$R_d = \frac{R_k}{\gamma_m} \rightarrow \text{caratteristica}$$

Sono inoltre normati i coefficienti di sicurezza parziali in base alle prestazioni richieste, fissando γ_{M2} per bulloni, γ_{M3} per bulloni resistenti a scorrimento... Da γ_{M4} (tasselli chimici) in poi i coefficienti sono legati ad applicazioni specifiche.

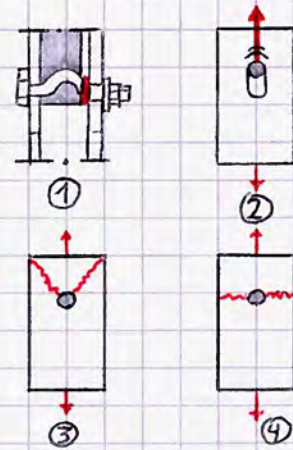
Unioni a Taglio

Il comportamento delle unioni a taglio viene analizzato tramite uno *lap shear test* (prova a taglio) in cui le lamiere - collegate da un bullone centrale - vengono tirate alle estremità in maniera tale da imprimere una sollecitazione tagliante sul bullone stesso: ogni interfaccia tra piastre adiacenti costituisce un piano di taglio e si registra uno scorrimento ΔL dovuto alla deformazione del bullone.



Esistono 4 possibili meccanismi di collasso per le unioni a taglio:

1. Rottura per taglio del bullone (in un piano di taglio);
2. Rifollamento della lamiera (il foro si ovalizza);
3. Rottura a taglio della lamiera (automaticamente verificata se si rispettano i limiti normativi su e_1 ed e_2);
4. Rottura per trazione della lamiera nella sezione netta (area indebolita dalla presenza del foro).



I modelli di capacità per il controllo e calcolo delle unioni variano a seconda della categoria di unione (A, B, C), con applicazioni differenti della verifica $Sd \leq Rd$ declinata in base agli specifici criteri di progetto. In ogni verifica si valuta la Fv,Ed del singolo bullone e la si confronta con la capacità corrispondente.

In particolare, per quanto riguarda la resistenza a taglio del bullone:

$$F_{v,Rd} = \begin{cases} \frac{\alpha_v \cdot f_{ub} \cdot A \cdot n_s}{\gamma_{M2}} & \text{Bulloni} \\ \frac{0,6 \cdot f_{ur} \cdot A_o \cdot n_s}{\gamma_{M2}} & \text{Chiodi e bulloni ENV} \end{cases}$$

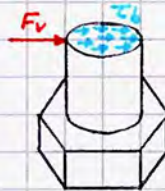
in cui:

- $f_{ub}[ur]$: resistenza ultima a trazione del bullone [chiodo];
- A : area lorda [resistente] del bullone;
- A_o : area del singolo foro;
- n_s : numero di piani di scorrimento;

- α_v : coefficiente che dipende dalla classe di resistenza del bullone e dalla posizione dei piani di taglio, trasforma la resistenza a trazione dell'organo $f_{ub}[ur]$ in una resistenza equivalente a taglio; per von Mises, $\alpha_v = 0,57 = 1/\sqrt{3}$.

Secondo la vecchia normativa italiana, la verifica da effettuare è invece alle tensioni ammissibili:

$$\tau_b = \frac{F_v}{n_s \cdot A} \leq \tau_{i,amm}$$



- ⚠ Per ridurre il numero di bulloni occorre modificare il diametro dell'organo più che agire sulla sua classe: in questo modo aumentano contemporaneamente la resistenza a taglio e quella a rifollamento.

- ⚠ Il collegamento progettato deve essere comunque verificato al fine di scongiurare il pericolo di altri meccanismi di collasso (rifollamento, rottura a trazione della lamiera).

Nel progetto, si effettua il seguente iter:

- Scelta della classe del bullone $\rightarrow f_{ub}$;
- Scelta del diametro del bullone M_{xx} , necessariamente $\geq t$ (spessore minimo delle lamiere congiunte) = $\min \{t_1, t_2\}$
a seconda che l'unione sia simmetrica o meno

• Nelle ipotesi di meccanismo di collasso a taglio:

$$\text{numero bulloni} = \frac{N_{sd}}{F_{v,Rd}} \quad \uparrow \text{1 bullone}$$

Nel caso della resistenza a ritollamento della lamiera:

$$F_{b,Rd} = \begin{cases} \frac{k_1 \cdot \alpha_b \cdot f_u \cdot d \cdot t}{\gamma_{M2}} & \text{Bulloni} \\ \frac{2,5 \cdot \alpha_b \cdot f_u \cdot d_0 \cdot t}{\gamma_{M2}} & \text{Chiodi e bulloni ENV} \end{cases}$$

in cui:

- f_u : resistenza ultima delle lamiere collegate;
- d : diametro nominale del bullone;
- d_0 : diametro del foro;
- t : minore tra gli spessori collegati (unioni asimmetriche) o minimo tra t_1 e $2t_2$ (unioni simmetriche);

• k_1 : coefficiente di ritollamento, non eccedente 2,5, definito dalle seguenti espressioni (dipendenti dalla direzione ortogonale alla sollecitazione):

$$k_1 = \min \left\{ 2,5; 2,8 \cdot \frac{e_2}{d_0} - 1,7 \right\} \quad \text{nelle file esterne di bulloni}$$

$$k_1 = \min \left\{ 2,5; 1,4 \cdot \frac{p_2}{d_0} - 1,7 \right\} \quad \text{nelle file interne di bulloni}$$

• α_b : coefficiente correttivo pari al $\min \left\{ \alpha_d; \frac{f_{ub}}{f_u}; 1 \right\}$, in cui α_d è un coefficiente dipendente dalle distanze nella direzione parallela alla sollecitazione:

$$\alpha_d = \frac{e_1}{3d_0} \quad \text{nelle file esterne di bulloni}$$

$$\alpha_d = \frac{p_1}{3d_0} - \frac{1}{4} \quad \text{nelle file interne di bulloni}$$

La verifica alle tensioni ammissibili corrispondente si effettua considerando una tensione di riferimento σ_{rif} :

$$\sigma_{rif} = \frac{F_v}{t \cdot d} \leq \alpha \cdot \sigma_{amm}$$

\leftarrow sol. globale di taglio nel bullone
 \leftarrow coeff. di ritollamento $\leq 2,5$

La verifica si conduce valutando se $F_{v,Ed} \leq F_{b,Rd}$.

In particolare, il coefficiente di ritollamento k_1 amplifica la resistenza ultima - essendo > 1 - poiché tiene conto dell'effettivo fenomeno di plasticizzazione che non riguarda la sola area di contatto - valutata convenzionalmente attraverso la sua proiezione diametricale $d \cdot t$ - ma che interessa a seguito della diffusione dei flussi tensionali una zona più vasta della lamiera.

⚠ Per unioni asimmetriche la resistenza a ritollamento si riduce del 25%.

Per gli organi meccanici da carpenteria leggera, il coefficiente di ritollamento è indicato con α .

L'ultima verifica tipica delle unioni a taglio riguarda la resistenza allo scorrimento (allo SLB o allo SLU), effettuata solo per bulloni precaricati, in cui si confronta la compressione agente tra le lamiere e impressa dal precarico con la sollecitazione tagliante $F_{v,Ed}$. Si distingue tra due regimi di sollecitazione:

• Taglio puro: $F_{s,Rd} = \frac{k_s \cdot n_s \cdot \mu}{\gamma_{M3}} \cdot F_{pc}$

in cui:

- k_s è il coefficiente di forma del foro (normali, asolati...);
- n_s è il numero di superfici di attrito/scorrimento;
- μ è il fattore di scorrimento;
- F_{pc} è la forza di precarico e serraggio, pari a $0,70 f_{ub} A_s$;
- $F_{t,Ed}$ è la sollecitazione di trazione nel bullone.

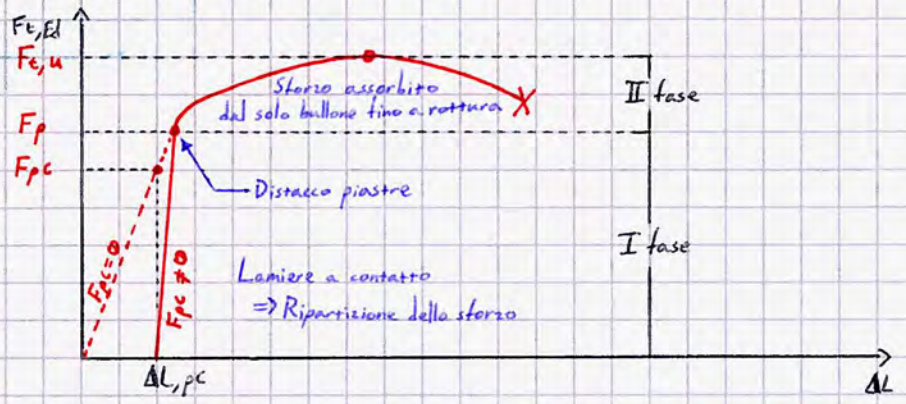
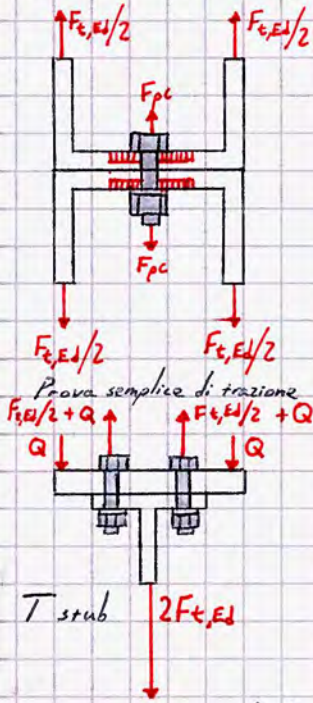
Anche qui, la verifica è soddisfatta se $F_{v,Ed} \leq F_{s,Rd}$.

La verifica alle tensioni ammissibili si effettua come segue:

$$\sigma_{f,0} = \frac{n_s \cdot \mu}{\gamma_f} \cdot F_{pc}$$

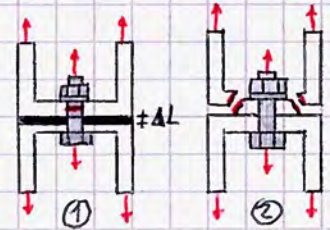
Unioni a trazione

Il comportamento delle unioni a trazione può essere analizzato tramite due prove differenti: una prova a semplice trazione (due lamiere simmetriche poste in trazione) o una prova T stub, in cui un elemento a T viene tirato dalla lamiera.



I meccanismi di collasso sono 2:

1. Rottura per trazione del gambo;
2. Rottura per punzonamento della lamiera in corrispondenza della testa.



Anche in questo caso i modelli di capacità esaminati (del tipo $Sd \leq Rd$) variano in base alla categoria di unione (D, E), richiedendo criteri di progetto specifici. In aggiunta alla trazione di progetto del singolo bullone Ft,Ed occorrerà dunque determinare la resistenza di progetto a trazione del gambo del bullone Ft,Rd e la resistenza al punzonamento della lamiera in corrispondenza della testa del bullone e/o del dado.

Nel caso della resistenza a trazione del gambo, si ha:

$$F_{t,Rd} = \begin{cases} \frac{k_2 \cdot f_{ub} \cdot A_s}{\gamma_{M2}} & \text{Bulloni} \\ \frac{0,9 \cdot f_u \cdot A_0}{\gamma_{M2}} & \text{Chiodi e bulloni ENV} \end{cases}$$

in cui:

- A_s è l'area ridotta del bullone
- k_2 è un coefficiente dipendente dal livello di serraggio, pari a 0,63 nei bulloni presollecitati e 0,9 negli altri casi.

Per la resistenza a punzonamento invece si ha:

$$B_{p,Rd} = 0,60 \pi \cdot d_m \cdot t_p \cdot f_u$$

in cui:

- d_m è il diametro medio, ovvero il minore tra la testa del bullone o del dado;
- t_p è lo spessore della piastra sotto il bullone o il dado;
- f_u è la resistenza ultima a trazione della lamiera.

La verifica alle tensioni ammissibili si effettua come segue:

$$\sigma_b = \frac{\gamma_N}{1,25} \frac{F_t}{A_{res}} \leq \sigma_{d, ammissibile}$$

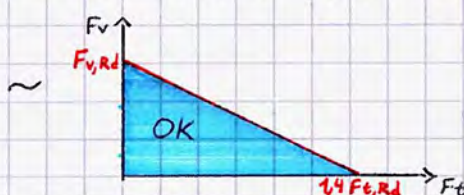


Unioni a taglio e trazione

Oltre ad effettuare le singole verifiche a taglio e a trazione descritte si valuta l'interazione tra i due regimi di sollecitazione, richiedendo che:

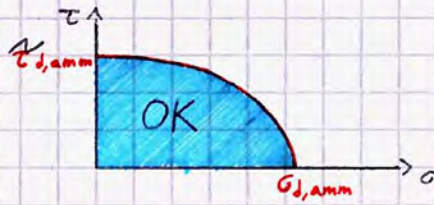
$$\frac{F_{v,Ed}}{F_{v,Rd}} + \frac{F_{t,Ed}}{1,4 F_{t,Rd}} \leq 1$$

Allo SLU



Nella verifica alle tensioni ammissibili si richiedeva invece che:

$$\left(\frac{\sigma_b}{\sigma_{d,amm}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_b}{\tau_{b,amm}}\right)^2 \leq 1$$

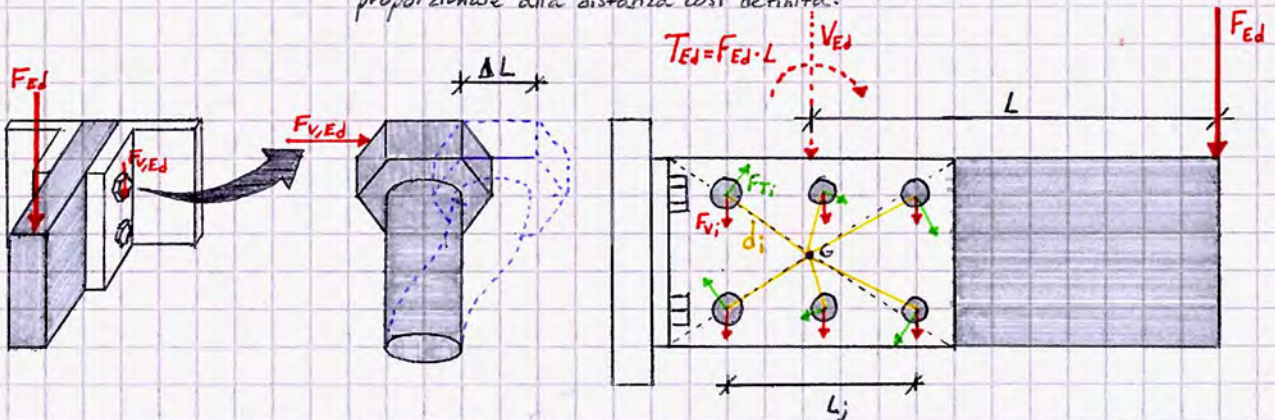


Valutazione delle sollecitazioni negli organi (domanda)

Avendo definito le verifiche da dover effettuare, determiniamo l'espressione delle azioni in esercizio sul bullone.

Valutazione degli sforzi di taglio: Nelle ipotesi di lamiere infinitamente rigide e bulloni perfettamente deformabili; bulloni a comportamento elastico lineare; bulloni dotati di sola rigidità tagliante $k_v = G \cdot A / k \cdot h$, proporzionale all'area del singolo organo; trascurabilità dell'attrito tra piastre, è possibile effettuare le seguenti considerazioni:

- La componente tagliante V_{Ed} può essere suddivisa in parti uguali F_{Vi} agenti sui bulloni con la stessa direzione;
- Il momento torcente T_{Ed} può essere suddiviso in forze agenti sui bulloni F_{Ti} in direzione ortogonale al segmento che unisce il bullone al baricentro della piastra e di entità proporzionale alla distanza così definita.



La valutazione degli sforzi di taglio procede nei seguenti passaggi:

1. Calcolo della componente tagliante F_{Vi} (dall'equilibrio alla traslazione rispetto ad y):

$$F_{Vi} = \frac{V_{Ed}}{n_b}$$

n_b → numero di bulloni

2. Calcolo della componente torcente (dall'equilibrio alla rotazione intorno a G):

$$F_{Ti} = \frac{T_{Ed} \cdot d_i}{n_b \cdot \sum_{i=1}^{n_b} d_i^2}$$

$$F_{Tx,i} = \frac{T_{Ed} \cdot dx_i}{n_b \cdot \sum_{i=1}^{n_b} dx_i^2}$$

$$F_{Ty,i} = \frac{T_{Ed} \cdot dy_i}{n_b \cdot \sum_{i=1}^{n_b} dy_i^2}$$

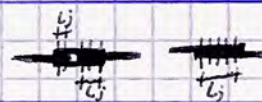
Nel caso in cui non valga l'ipotesi di lamiere infinitamente rigide e bulloni perfettamente deformabili bisogna tener conto dell'effetto shear lag, per cui $F_{Vi,Ed}$ ha una distribuzione pseudoparabolica con valori maggiori di quello teorico alle estremità e minori al centro. Si impiega un coefficiente di riduzione della resistenza $\beta_{lf} = \frac{1 - L_j - 15d}{200d}$

3. Somma vettoriale delle componenti:

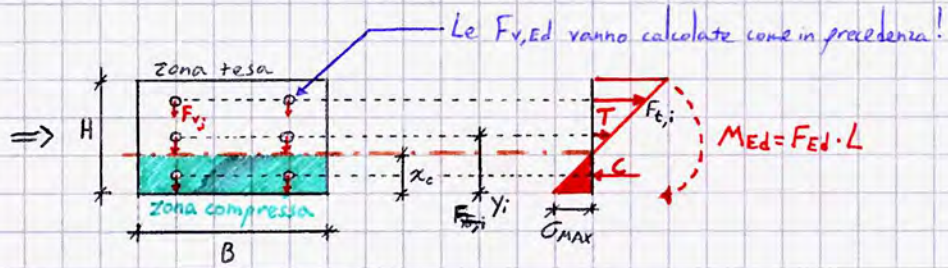
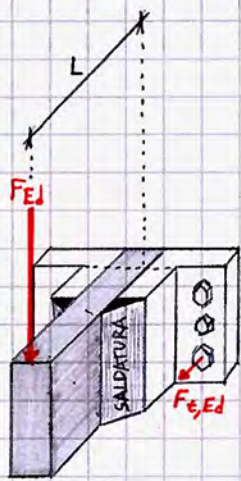
$$\vec{F}_{V,Ed} = \vec{F}_{Vi} + \vec{F}_{Ti} \Rightarrow \|\vec{F}_{V,Ed}\| = F_{V,Ed} = \sqrt{(F_{Vi} \pm F_{Ty,i})^2 + F_{Tx,i}^2}$$

→ A seconda che siano concordi o meno

L_j è l'interasse tra i bulloni estremi di un collegamento tra flange:



Valutazione degli sforzi di trazione: Nelle ipotesi di validità del principio di conservazione delle sezioni piane; materiale con comportamento elastico lineare per bulloni e piastre; trazioni assorbite solo dai bulloni nella zona tesa (si impone il distacco della piastra); compressione assorbita dalla sola piastra è possibile operare come di seguito:



1. Ricerca di x_c (dall'equilibrio alla traslazione lungo l'asse ortogonale alla piastra):

$$C = T \Rightarrow S_n = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} (2B \cdot x_c^2) = \sum_{i=1}^{n_b} A_i (y_i - x_c) \Rightarrow x_c = \dots \approx H/6$$

2. Calcolo delle sollecitazioni (dall'equilibrio alla rotazione rispetto all'asse neutro, ovvero dalla formula di Navier):

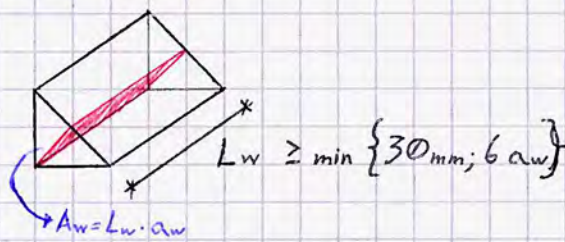
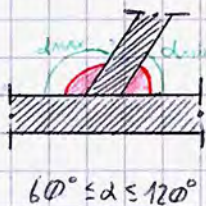
• Controllo piastra: $\sigma_{MAX} = \frac{M_{Ed}}{I_x} \cdot x_c$

• Controllo bullone: $F_{t,Ed} = \sigma_{b,t} \cdot A_i$

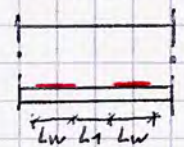
⚠ Il calcolo delle pressioni di contatto tra piastra di base e fondazione si esegue con gli stessi modelli utilizzati per la statica del c.a. per gli elementi pressoinflessi, secondo una teoria lineare.

Verifica e calcolo delle unioni: le unioni saldate

A livello di classificazione e limiti normativi sullo spessore di lamiera resistente alla saldatura si rimanda a p.24; per quanto riguarda la saldatura a cordone d'angolo si aggiungono i seguenti limiti:



Nel caso di saldature a tratti:



$$L_1 \geq \min\{2000\text{mm}; 16 \cdot t\}$$

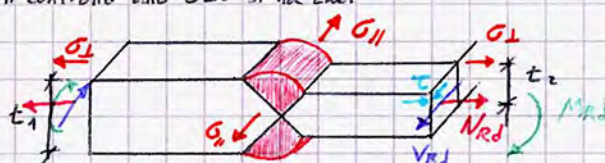
Resistenza delle saldature a completa penetrazione

Dipendendo dallo spessore della lamiera, si osserva che la saldatura a tratti viene impiegata per spessori di acciaio minori!

Si assume che la saldatura ripristini totalmente la resistenza degli elementi collegati; in particolare, la resistenza della saldatura è pari a quella della lamiera più debole (la più sottile se si adotta lo stesso materiale). Per il controllo allo SLU si ha che:

$$F_{w,Rd} = R_{d, \min}(M_{Rd}; N_{Rd}; V_{Rd})$$

La resistenza della saldatura è valutata con il criterio di Hencky-von Mises:



$$\sigma_{II} = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + \sigma_{\parallel}^2 - \sigma_{\perp} \sigma_{\parallel} + 3\tau^2} \leq \alpha \cdot \sigma_{amm}$$

$\alpha = 1$ per saldature di I classe
 $\alpha = 0,85$ per saldature di II classe

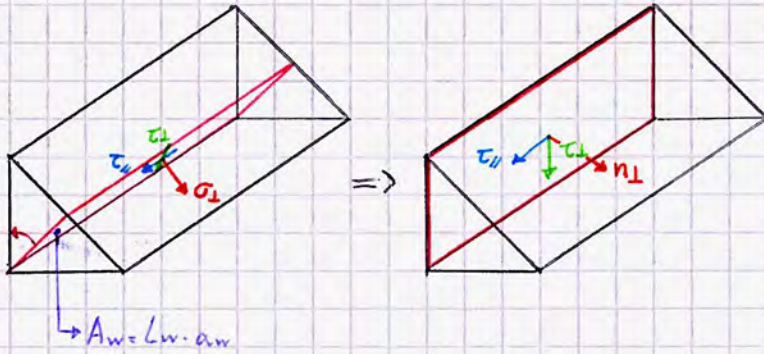
σ_{\perp} è la tensione normale perpendicolare [parallela] alla sezione longitudinale della saldatura.

Resistenza delle saldature a cordone d'angolo

Non essendo a completo ripristino di resistenza, occorre studiare lo stato tensionale nella sezione di gola in riferimento a 3 componenti principali di tensione:

- τ_{\parallel} : parallela all'asse della saldatura
- τ_{\perp} : ortogonale all'asse e complanare alla sezione di gola;
- σ_{\perp} : ortogonale alla sezione di gola e all'asse del cordone.

Per semplificare il calcolo delle tensioni nella saldatura, nella pratica professionale ci si riferisce al ribaltamento della sezione di gola su uno dei due lati del cordone.

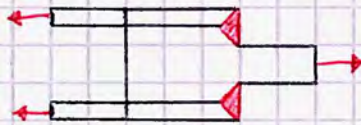


A livello sperimentale, nel diagramma τ - σ si ottiene un peroide, in cui:

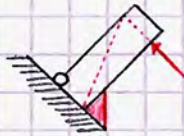
- Il punto V_1 si ottiene da una provetta Vandepierre del tipo qui schematizzato:



- Il punto V_2 si ottiene da un altro tipo di provetta Vandepierre:



- I punti restanti sono ottenuti tramite provette Van der Eb



I dati sperimentali sono in prima approssimazione schematizzati tramite un ellissoide di rottura, forma più regolare e di più semplice calcolo definita a partire da V_1 e V_2 - corrispondenti a punti di massima resistenza per la saldatura - senza tener conto della maggior resistenza per valori di $\sigma_{\perp} < 0$. L'ellissoide ha le seguenti equazioni:

$$\frac{\sigma^2}{f_{uw}^2} + \frac{\tau_{\perp}^2}{(0,75 f_{uw})^2} + \frac{\tau_{\parallel}^2}{(0,75 f_{uw})^2} = 1 \quad \frac{1}{0,75^2} \sim 1,8 \rightarrow \sigma_{id} = \sqrt{\sigma_{\perp}^2 + 1,8(\tau_{\perp}^2 + \tau_{\parallel}^2)}$$

Nell'EC3 non si effettua distinzione tra saldatura di I e II classe, a differenza del DM 1996 in cui si stabilisce:

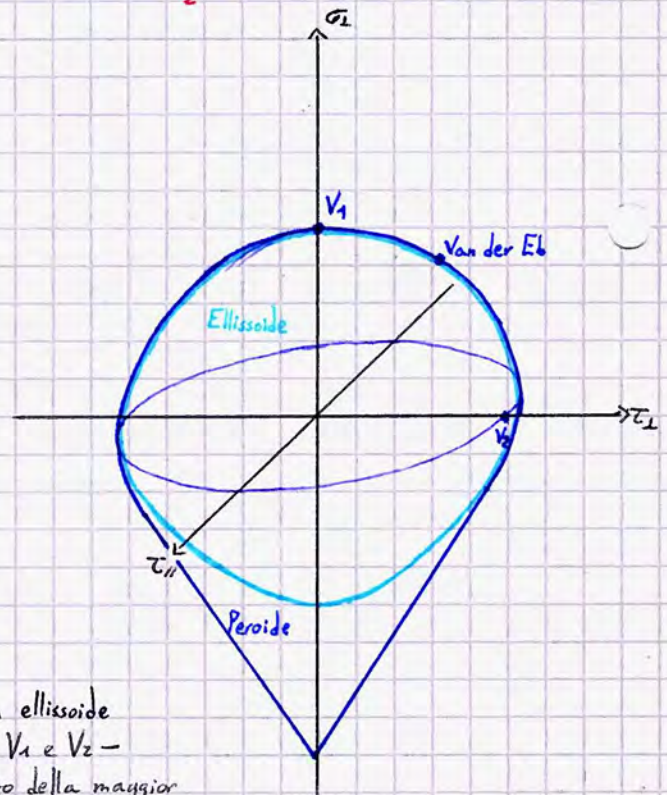
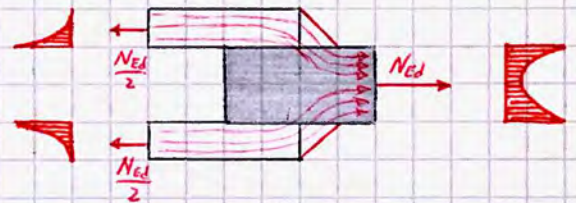
- Classe I: Saldatura con elettrodi di qualità 3-4 secondo la norma UNI 2132 che soddisfa controlli radiografici previsti dal raggruppamento B della UNI 7278;
- Classe II: Saldatura con elettrodi di qualità 2-3-4 (UNI 2132) che soddisfa i controlli radiografici previsti dal raggruppamento F della UNI 7278.

Nel caso di cordone frontale (ovvero con asse ortogonale alla sollecitazione agente N_{Ed}):

$$\sigma_{\perp} = \tau_{\perp} = \frac{(N_{Ed}/2) \cdot \sqrt{2}/2}{A_w}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{N_{Ed}/2}{A_w}$$

Meccanismo di trasferimento ($\sigma_w \neq \sigma$):



La verifica di resistenza si effettua con l'ellissoide ISO:

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_L^2 + k_w (\tau_L^2 + \tau_{II}^2)} \leq \frac{f_d}{\beta_w} = f_{wR}$$

in cui $\beta_w \leq 1$ è il coefficiente di sicurezza del cordone, che tiene conto della diversa resistenza del materiale di apporto della saldatura, in genere superiore a quella del materiale base.

Nel caso dell'EC3, si utilizzano modelli di resistenza differenti per il controllo allo SLU; si distingue tra:

- Metodo direzionale (controllo locale): Si valuta la sicurezza in termini tensionali (σ_{id}) nella sezione di gola considerando un dominio sterico di raggio r .

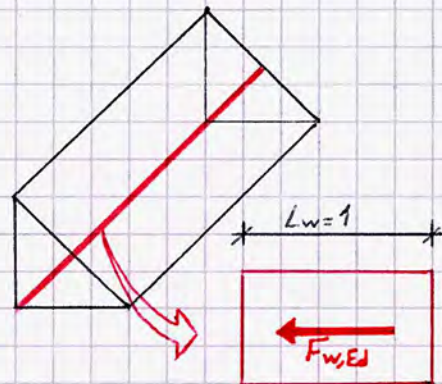
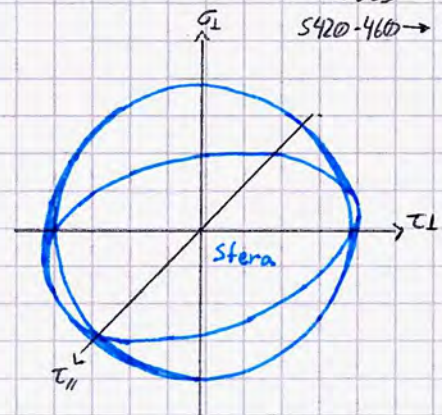
$$r = \frac{f_u}{\sqrt{3} \beta_w \gamma_{M2}}$$

con β_w dipendente dal tipo di acciaio: S235 $\rightarrow 0,80$
S275 $\rightarrow 0,85$
S355 $\rightarrow 0,90$
S420-460 $\rightarrow 1,00$

$$\sigma_{id} = \sqrt{\sigma_L^2 + 3(\tau_L^2 + \tau_{II}^2)} \leq \frac{f_u}{\beta_w + \frac{\gamma_{M2}}{1,25}}$$

- Metodo semplificato (controllo globale): Valuta la sicurezza in termini di resistenza a taglio del cordone per unità di lunghezza ($F_{w,Rd}$) a prescindere dal suo orientamento; partendo dallo stato tensionale nella sezione di gola [$F \cdot L^2$] o nella sezione ribaltata si considera la risultante delle forze agenti sul cordone per unità di lunghezza [$F \cdot L^2$].

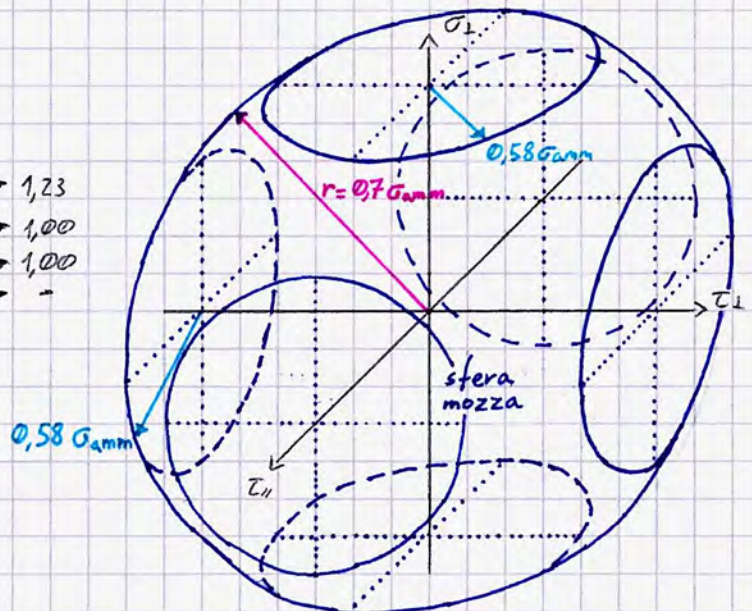
$$F_{w,Ed} \leq F_{w,Rd} = \frac{f_w}{\beta_w \cdot \gamma_{M2}} \cdot a_w$$



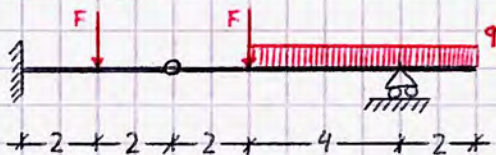
Nella normativa italiana (DM LL.PP. 09/01/1996) il modello di resistenza valuta la sicurezza in termini tensionali valutando lo stato di sollecitazione sulla sezione di gola ribaltata su una delle facce delle lamiere congiunte e controllando che esso sia contenuto nel dominio a sfera mozza definito dal seguente sistema:

$$\begin{cases} \sqrt{\sigma_L^2 + \tau_L^2 + \tau_{II}^2} \leq 0,70 d_w \cdot \sigma_{amm} \\ |\sigma_L| + |\tau_L| \leq 0,58 \cdot \sqrt{2} d_w \cdot \sigma_{amm} \end{cases}$$

con d_w dipendente dal tipo di acciaio: S235 $\rightarrow 1,23$
S275 $\rightarrow 1,00$
S355 $\rightarrow 1,00$
S420-460 $\rightarrow -$



Esercizi



$$F = 50 \text{ kN}; \quad q = 20 \text{ kN/m}$$

$$3t - s = l - i \Rightarrow 3(2) - 6 = 0 - i \Rightarrow 6 - 6 = -i \Rightarrow i = 0 \Rightarrow \text{struttura ISOSTATICA}$$

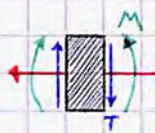
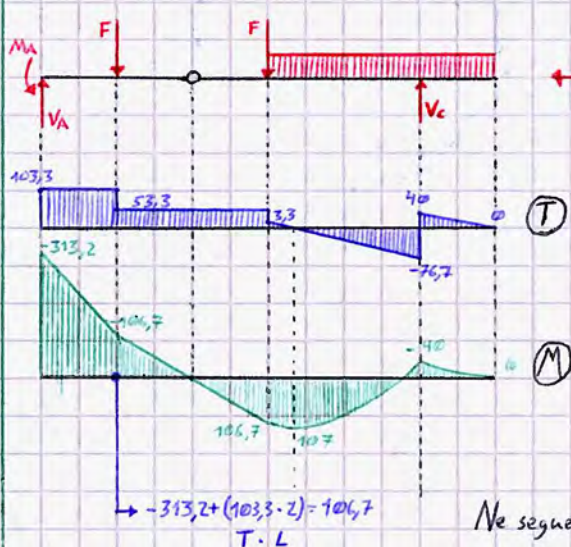
Analizziamo l'equilibrio della struttura attraverso le equazioni cardinali della statica:

$$\textcircled{I} \begin{cases} N_A - N_B^{sx} = 0 \\ V_A + V_B^{sx} - F = 0 \Rightarrow V_A = 50 + 53,3 = 103,3 \text{ kN} \\ M_A - 2F + 4V_B^{sx} = 0 \Rightarrow M_A = 100 + 213,2 = +313,2 \text{ kN}\cdot\text{m} \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \begin{cases} N_B^{dx} = 0 \\ -F - 6q + V_C - V_B^{dx} = 0 \Rightarrow V_B^{dx} = 117 - 120 - 50 = -53,3 \text{ kN} \\ -2F - (6q) \cdot 5 + 6V_C = 0 \Rightarrow V_C = \frac{2F + 30q}{6} = 116,7 \text{ kN} \end{cases}$$

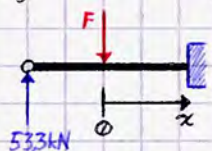
Si osserva come nella risoluzione conviene partire dal tronco II, avente un minor numero di incognite "per statiche".

Analizziamo ora il diagramma delle caratteristiche della sollecitazione, sapendo che $N = 0$:



Convenzione positiva al concio infinitesimo

Nel tracciare il diagramma del momento occorre identificare il punto di nullo nel taglio tra B e C; per farlo si fissa un riferimento cartesiano locale:



$$\text{Valutiamo } T(x) = 3,3 - (20 \cdot 4) = -76,7$$

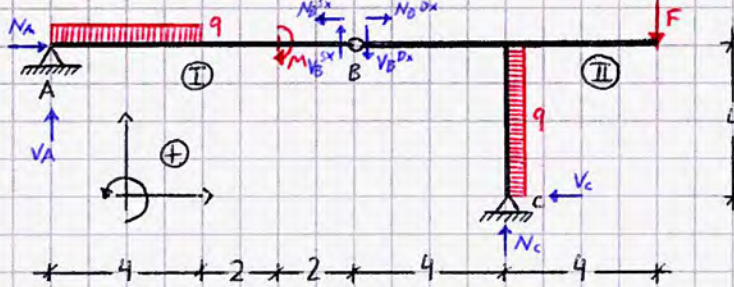
Dunque,

$$T(x) = 53,3 - 50 - 20x \Rightarrow T(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{3,3}{20} = 0,17 \text{ m}$$

$$\text{Ne segue che } M(x = 0,17 \text{ m}) = 53,3(2+x) - 50x - 20 \frac{x^2}{2} = 106,9 = 107 \text{ kN (MAX)}$$

Ricapitolando dalla Scienza delle Costruzioni, si osserva che:

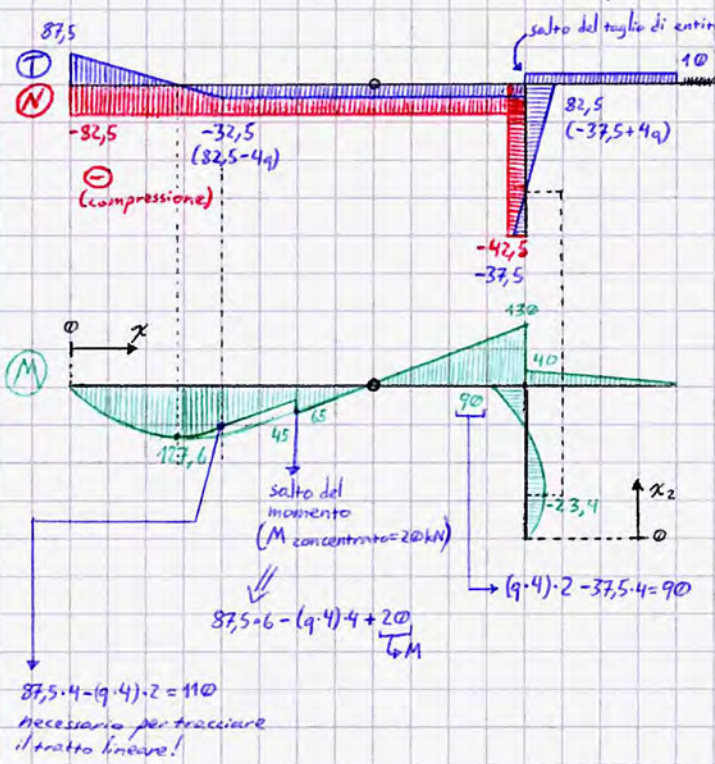
- Dalla equazioni della linea elastica, il taglio rappresenta la derivata del momento rispetto all'ascissa "curvilinea". Ciò implica che se il taglio è costante il momento ha andamento lineare, se è nullo il momento è costante o presenta un punto di massimo/minimo; se è lineare (in corrispondenza di carichi uniformi) il momento è parabolico.
- In corrispondenza di sollecitazioni concentrate si verifica un salto del taglio di entità pari al modulo della sollecitazione concentrata, corrispondente a un punto angoloso nel diagramma del momento.
- Il diagramma del momento assume valori positivi nei punti in cui sono tese le fibre inferiori; esso si rappresenta sempre sul lato delle fibre tese.
- Spesso occorre identificare il punto di nullo nel diagramma del taglio, identificando la forma funzionale del taglio nel tratto considerato; in questo modo è possibile identificare il valore massimo/minimo assunto dal momento.
- In corrispondenza di cerniere il momento è nullo! Analogamente, i punti di estremità delle strutture presentano sollecitazioni interne nulle a meno della presenza di vincoli o sollecitazioni attive.



$q = 30 \text{ kN/m}$
 $M = 20 \text{ kNm}$
 $F = 10 \text{ kN}$

La struttura è banalmente isostatica ($3e - s = l - i$; $e = 2, s = 6, l = 0$). Determiniamo le reazioni incognite tramite le equazioni cardinali della statica:

I $\begin{cases} N_A - N_B = 0 \Rightarrow N_A = N_B = 82,5 \text{ kN} \\ V_A + V_B^{sx} - 4q = 0 \Rightarrow V_A = 4q - V_B^{sx} = 120 - 32,5 = 87,5 \text{ kN} \end{cases}$
 A $-(4q) \cdot 2 - M + V_B^{sx} \cdot 8 = 0 \Rightarrow V_B^{sx} = -V_B^{dx} = \frac{M + 8q}{8} = \frac{20 + 30}{8} = 32,5 \text{ kN}$
 II $\begin{cases} N_B^{dx} - V_c - 4q = 0 \Rightarrow N_B^{dx} = V_c + 4q = 82,5 \text{ kN} \\ -V_B^{dx} + N_c - F = 0 \Rightarrow N_c = F + 32,5 = 42,5 \text{ kN} \\ -8F - 4V_c + 4N_c - 8q = 0 \Rightarrow V_c = \frac{-8F + 4N_c - 8q}{4} = -37,5 \text{ kN} \end{cases}$



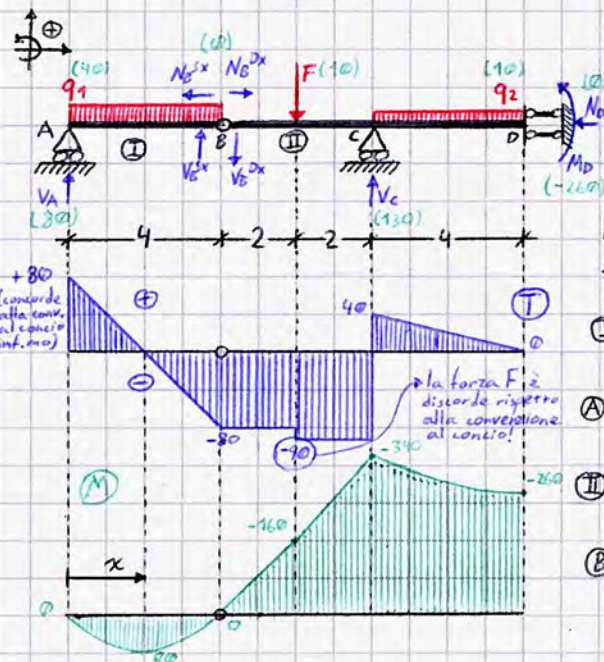
I diagrammi di taglio e sforzo normale sono stati impropriamente sovrapposti per risparmiare spazio. Si osserva che N è sempre negativo, essendo la struttura compressa.

Il diagramma del momento presenta un salto causato dalla presenza di un momento concentrato, che "tende le fibre inferiori a destra" (da cui il "verso" del tratto):

$M_{AB}(6m, s_x) = 87,5 \cdot 6 - (30 \cdot 4) \cdot 6 = 45 \text{ kNm}$
 $M_{AB}(6m, s_x) = 65 \text{ kNm}$

$M_{AB, \text{max}}?$
 $T_{AB}(x) = 87,5 - 30x; T_{AB} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{87,5}{30} = 2,9 \text{ m}$
 $M_{AB}(2,9 \text{ m}) = 87,5 \cdot 2,9 - (30 \cdot 2,9) \cdot \frac{2,9}{2} = 127,6 \text{ kNm}$

Nel tratto verticale, $T(x_2) = -37,5 + 30x_2 \Rightarrow T = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1,25 \text{ m}$
 $M(1,25 \text{ m}) = -37,5 \cdot 1,25 + (30 \cdot 1,25) \cdot \frac{1,25}{2} = -23,4 \text{ kNm}$



Verifica dell'isostaticità:
 $3e - s = l - i \Rightarrow 6 - 6 = 0 - i \Rightarrow i = 0$ ISOSTATICA

Per il calcolo delle reazioni vincolari si applicano le ECS nei due tratti della struttura:

I $\begin{cases} N_B^{sx} = 0 \\ V_A + V_B^{sx} = 40 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} \\ -(40 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{4 \text{ m}}{2}) + V_B^{sx} \cdot 4 \text{ m} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_B^{sx} = 0 \\ V_A = +80 \text{ kN} \\ V_B^{sx} = +80 \text{ kN} \end{cases}$
 II $\begin{cases} N_D^{dx} = N_D = 0 \\ -V_B^{dx} + V_c - 10 \text{ kN} - (10 \text{ kN/m} \cdot 4 \text{ m}) = 0 \\ -10 \cdot 2 + V_c \cdot 4 - 10 \cdot 4 \cdot (4+2) + M_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_D = 0 \\ V_c = 130 \text{ kN} \\ M_D = -260 \text{ kNm} \end{cases}$

Dai diagrammi alla pagina precedente, desunti dai calcoli riportati di seguito, si osserva che il minimo della parabola in CD è all'estremità della struttura - e pari alla reazione vincolare in D - poiché in quel punto il taglio si annulla; a destra e a sinistra della cerniera non variando il ^{taglio} momento, la tangente al grafico del momento nell'intorno di B è costante.

$$M(L=2m) = 80 \cdot 2 - 40 \cdot 2 \cdot 1 = 160 - 80 = 80 \text{ kNm}$$

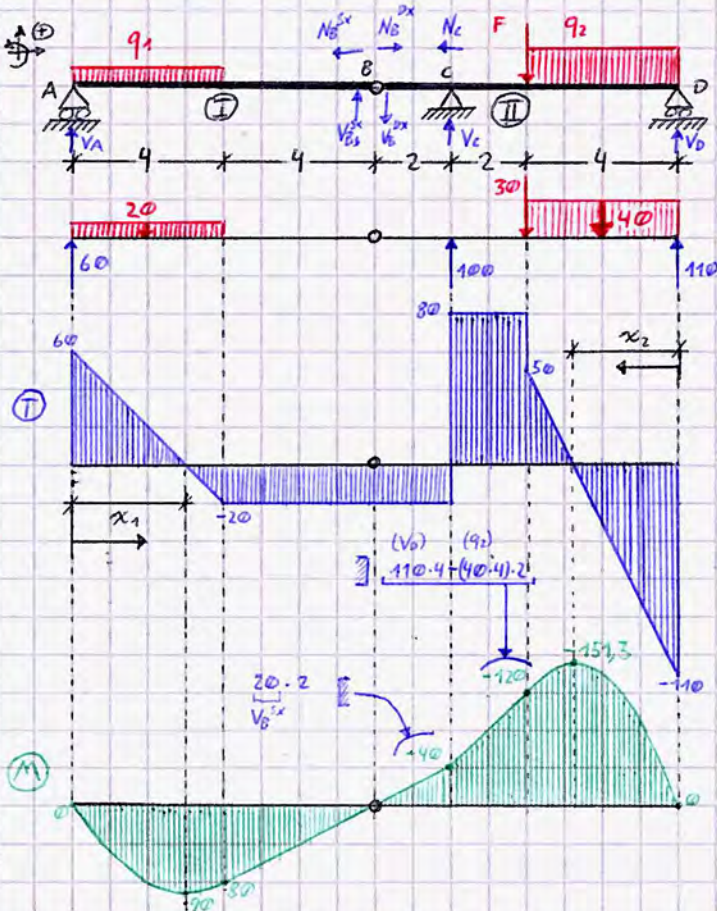
(7(0) \cdot L) \quad (9 \cdot L \cdot L/2)

$$M(L=6m) = -80 \cdot 2 = -160 \text{ kNm} \quad (\text{essendo nel secondo tratto, a sinistra si considera solo } V_B^{Dx})$$

(7(4m) \cdot L)

$$M(L=8m) = -260 - 10 \cdot 4 \cdot 2 = -260 - 80 = -340 \quad (\text{in questo caso si fissa l'ascissa da D verso C})$$

(M_D) \quad (9 \cdot L \cdot L/2)



$$q_1 = 20 \text{ kN/m} \quad 3t-s=2-i$$

$$q_2 = 40 \text{ kN/m} \quad 6-6=0-i \Rightarrow i=0 \Rightarrow \text{ISO}$$

$$F = 30 \text{ kN}$$

Applicando le E.C.S.

$$\text{I} \begin{cases} N_B^{Sx} = 0 \\ V_A + V_B^{Sx} - 20 \cdot 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_B^{Sx} = 0 \\ V_A = 60 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{A} \begin{cases} -20 \cdot 4 - 2 + V_B^{Sx} \cdot 8 = 0 \\ V_B^{Sx} = 20 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} -N_B^{Dx} + N_C = 0 \\ -V_B^{Dx} + V_C - 30 - 40 \cdot 4 + V_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_C = 0 \\ V_D = 110 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{D} \begin{cases} -V_B^{Dx} \cdot 8 + V_C \cdot 6 - 30 \cdot 4 - (40 \cdot 4) \cdot 2 = 0 \\ V_C = 100 \text{ kN} \end{cases}$$

Scegliendo questo polo l'unica incognita è V_C , essendo nota $V_B^{Dx} \Rightarrow$ l'equazione non va risolta dipendendo dalla seconda equazione del sistema e i calcoli sono più rapidi.

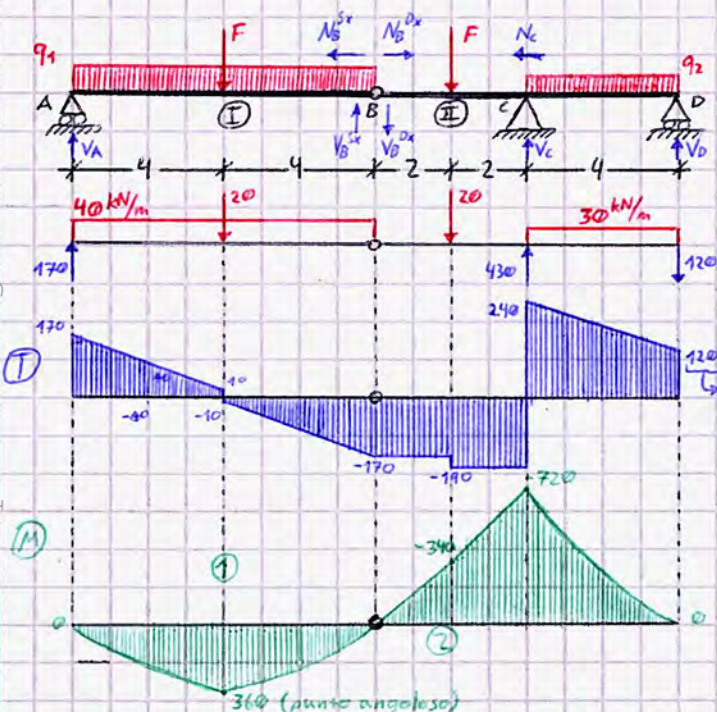
$$T(x_1) = 0 \Leftrightarrow 60 - 20x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 3m$$

$$M(x_1=3m) = 60 \cdot 3 - (20 \cdot 3) \cdot 1,5 = 90 \text{ kNm}$$

$$T(x_2) = 0 \Leftrightarrow -110 - 40x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{11}{4} = 2,75m$$

$$M(x_2=2,75m) = 110 \cdot 2,75 - (40 \cdot 2,75) \cdot \frac{2,75}{2} = 151,3 \text{ kNm}$$

Il primo schema, che riporta unicamente cerniere interne e sollecitazioni attive e reattive, consente un rapido tracciamento dei diagrammi delle caratteristiche interne della sollecitazione se incolonnati!



$$F = 20 \text{ kN}; \quad q_1 = 40 \text{ kN/m}; \quad q_2 = 30 \text{ kN/m}; \quad \text{ISOSTATICA}$$

$$\text{I} \begin{cases} -N_B^{Sx} = 0 \\ V_A + V_B^{Sx} - 20 - 40 \cdot 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_B^{Sx} = 0 \\ V_A = 170 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{A} \begin{cases} -20 \cdot 4 - (40 \cdot 8) \cdot 4 + V_B^{Sx} \cdot 8 = 0 \\ V_B^{Sx} = 170 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{II} \begin{cases} -N_B^{Dx} + N_C = 0 \\ -V_B^{Dx} - 20 + V_C - 30 \cdot 4 + V_D = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_C = 0 \\ V_D = -120 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\text{D} \begin{cases} V_B^{Dx} \cdot 8 + 20 \cdot 6 - V_C \cdot 4 + (30 \cdot 4) \cdot 2 = 0 \\ V_C = 430 \text{ kN} \end{cases}$$

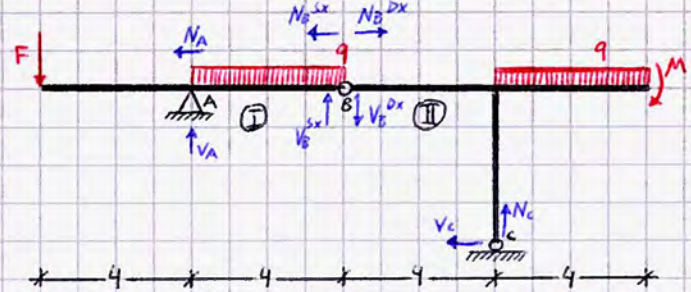
concorde con la convenzione al concio infinitesimo $\Rightarrow > 0!$

$$\text{1} \quad 170 \cdot 4 - (40 \cdot 4) \cdot 2 = 360 \text{ kNm}$$

$$\text{2} \quad -170 \cdot 2 = -340 \text{ kNm} \quad (V_B^{Dx} = -170 \text{ kN})$$

$$\text{3} \quad -120 \cdot 4 - (30 \cdot 4) \cdot 2 = -720 \text{ kNm}$$

\rightarrow tendono le fibre superiori!



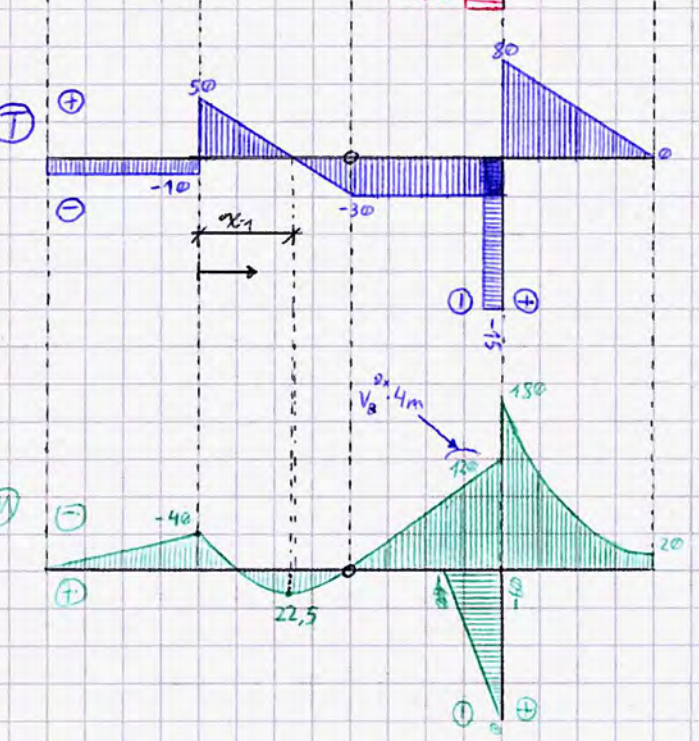
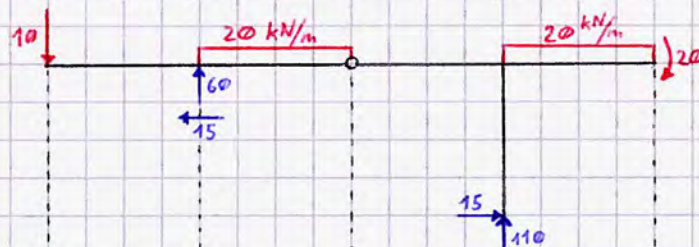
$F = 10 \text{ kN}$
 $q = 20 \text{ kN/m}$
 $M = 20 \text{ kNm}$

ISOSTATICA

① $\begin{cases} -N_A - N_B^{sx} = 0 \\ V_A + V_B^{sx} - 20 \cdot 4 - 10 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_A = 15 \text{ kN} \\ V_A = 60 \text{ kN} \\ V_B^{sx} = 30 \text{ kN} \end{cases}$

② $\begin{cases} N_B^{dx} - V_c = 0 \\ -V_B^{dx} + N_c - 20 \cdot 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_B^{dx} = -15 \text{ kN} \\ N_c = 110 \text{ kN} \\ V_c = -15 \text{ kN} \end{cases}$

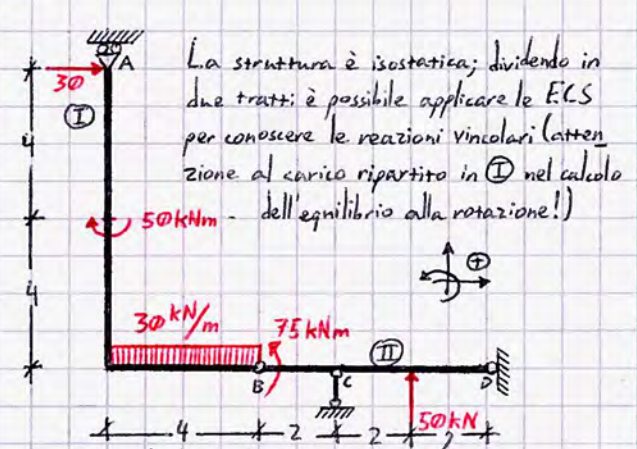
③ $N_c \cdot 4 - (20 \cdot 4) \cdot 6 - 20 - V_c \cdot 4 = 0$



$T(x_1) = 0 \Leftrightarrow 50 - 20x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ m}$

$M(x_1 = 2,5 \text{ m}) = -10 \cdot 6,5 + 60 \cdot 2,5 - (20 \cdot 2,5) \cdot \frac{2,5}{2} = 22,5 \text{ kNm}$

Nel nodo C il momento ha un salto a causa del contributo di V_c : $15 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = 60 \text{ kNm}$ (entità del salto)

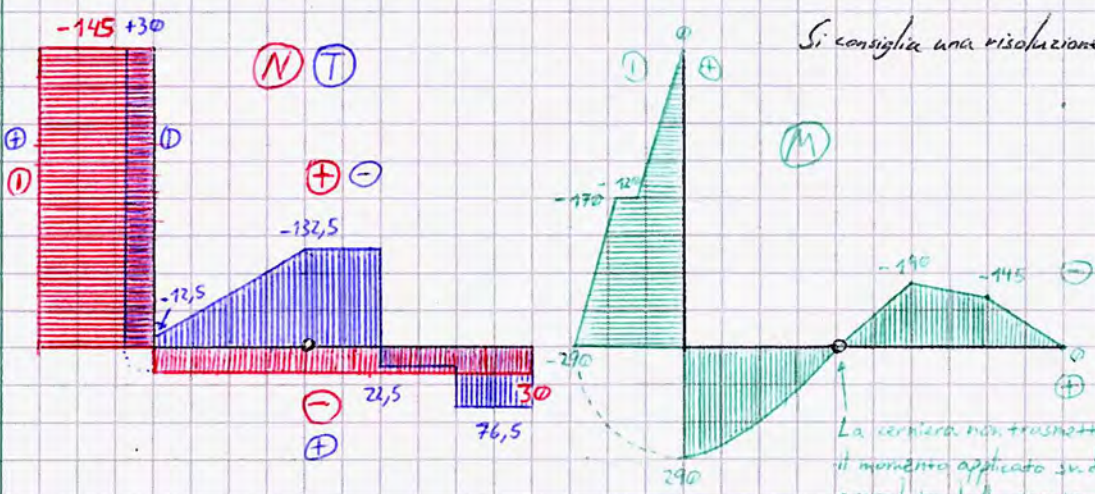


Dai calcoli risulta:

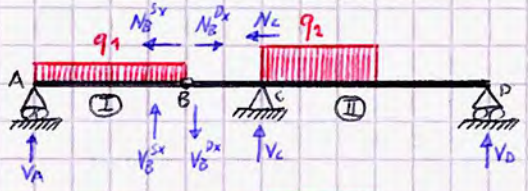
$V_A = 12,5 \text{ kN}$
 $N_B^{sx} = 30 \text{ kN} = N_D$
 $V_D = 72,5 \text{ kN}$
 $V_c = 155 \text{ kN}$

Da cui:

Si consiglia una risoluzione rigorosa dell'esercizio



La cerniera non trasmette momento, dunque il momento applicato su di essa non viene assorbito dalla struttura!



$$q_1 = 30 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 50 \text{ kN/m}$$

$$t=2 \rightarrow 3t-s=0$$

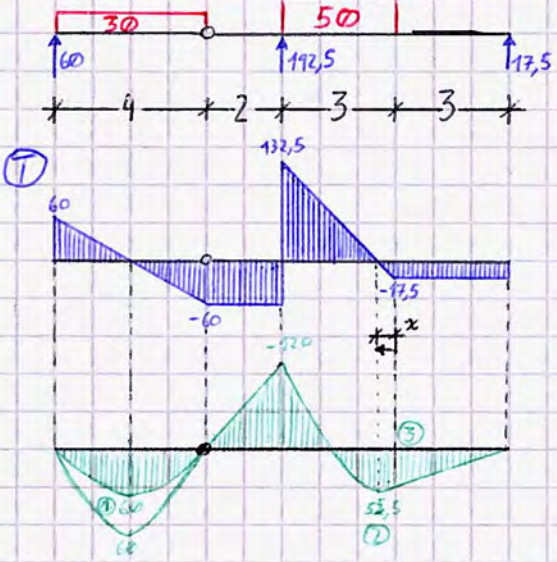
$$s=6 \rightarrow l=0 \rightarrow \text{ISOSTATICA}$$

ECS

$$\textcircled{I} \begin{cases} -N_B = 0 \\ V_A + V_B^{sx} - 30 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 60 \text{ kN} \\ V_B^{sx} \cdot 4 \text{m} - (30 \cdot 4) \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_B^{sx} = 60 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \begin{cases} N_B^{dx} - N_C = 0 \Rightarrow N_B^{dx} = -N_B^{sx} = N_C = 0 \\ -V_B^{dx} + V_C + V_D - 50 \cdot 3 = 0 \Rightarrow V_D = 17,5 \text{ kN} \quad (150 + 60 - 192,5) \end{cases}$$

$$\textcircled{D} \quad 8V_B^{dx} - V_C \cdot 6 + (50 \cdot 3) \cdot 4,5 = 0 \Rightarrow V_C = \frac{8 \cdot 60 + 50 \cdot 3 \cdot 4,5}{6} = 192,5 \text{ kN}$$



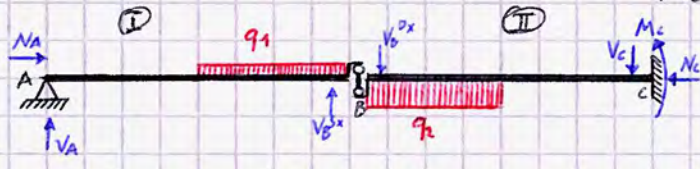
$$\textcircled{1} \quad M(x=2\text{m}) = 60 \cdot 2 - 30 \cdot 2 \cdot 1 = 60 \text{ kNm}$$

$$\textcircled{2} \quad -60 \cdot 2 = -120 \text{ kNm} \quad (V_B^{sx})$$

$$\textcircled{3} \quad 17,5 \cdot 3 = 52,5 \text{ kNm}$$

$$\textcircled{2} \quad T(x) = 0 \Leftrightarrow -17,5 + 50x = 0 \Rightarrow x = 0,35 \text{m}$$

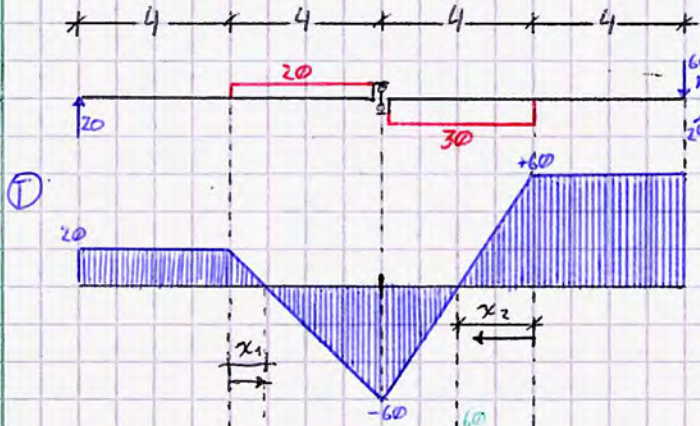
$$M(0,35\text{m}) = 17,5 \cdot 3 = 52,5 \text{ kNm}$$



$$q_1 = 20 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 30 \text{ kN/m}$$

ISOSTATICA



$$\textcircled{I} \begin{cases} N_A = 0 \\ V_A + V_B^{sx} - 20 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_A = 20 \text{ kN} \\ V_B^{sx} \cdot 8 + (20 \cdot 4) \cdot 6 = 0 \Rightarrow V_B^{sx} = 60 \text{ kN} = -V_B^{dx} \end{cases}$$

$$\textcircled{II} \begin{cases} N_C = 0 \\ V_B^{dx} + 30 \cdot 4 - V_C = 0 \Rightarrow V_C = 60 \text{ kN} \\ V_B^{dx} \cdot 8 - (30 \cdot 4) \cdot 6 + M_C = 0 \Rightarrow M_C = 240 \text{ kNm} \end{cases}$$

$$T(x_1) = 20 - 20x = 0 \Leftrightarrow x = 1\text{m}$$

$$M(x_1) = 20 \cdot 5 - 20 \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 90 \text{ kNm}$$

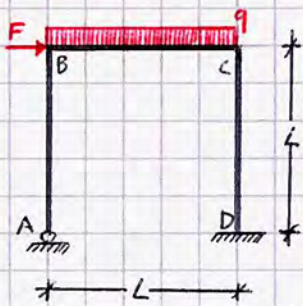
Analogamente,

$$T(x_2) = -60 + 30x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 2\text{m}$$

$$M(x_2) = -60 \cdot 2 + 30 \cdot 2 \cdot \frac{2}{2} = -60 \text{ kNm}$$

Esercizio: Metodo di Cross

Il Metodo di Cross è un metodo per la risoluzione di strutture iperstatiche che si avvale di vincoli ausiliari.

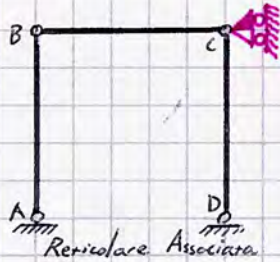


$q = 10 \text{ kN/m}$
 $F = 50 \text{ kN}$
 $L = 4 \text{ m}$
 $E = 30000 \text{ MPa}$ (materiale noto)
 $b \times h = 300 \times 300 \text{ mm}$ caratteristiche geometriche della sezione (sezione unica)

$$S = 10 \text{ mm}$$

La struttura risulta logicamente 2 volte iperstatica.

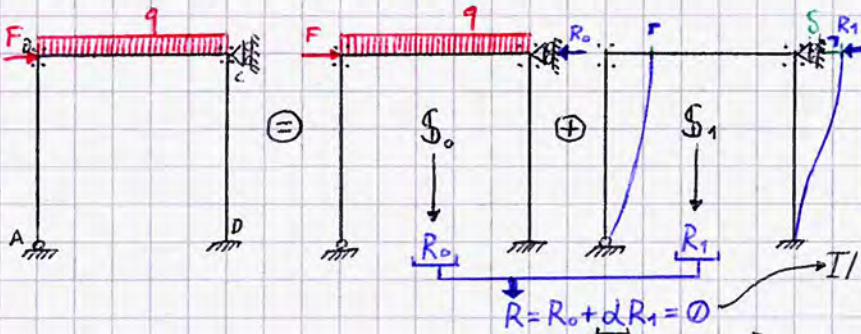
Il procedimento richiede di identificare un telaio a nodi fissi inserendo dei morsetti che bloccano i nodi tra le aste in maniera tale da garantire incastri perfetti.



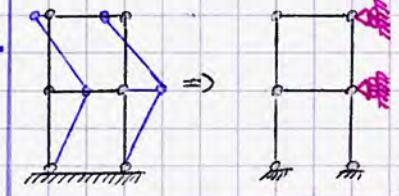
In via preliminare, si ricava dalla struttura la struttura reticolare associata: è un telaio a nodi spostabili (ovvero costituiti da cerniere) che consente di individuare il numero di vincoli ausiliari necessario per la risoluzione.

Valendo l'ipotesi di inestensibilità delle aste, la struttura reticolare associata in questo esempio non consente la traslazione verticale; essendo possibile la traslazione orizzontale il vincolo ausiliario è costituito da un carrello.

Definito il vincolo ausiliario, valendo il principio di sovrapposizione degli effetti si scompone la struttura in più sistemi: si considera il sistema dei carichi attivi ed un sistema per ciascun vincolo ausiliario aggiunto. In questo esempio si ha un totale di 2 sistemi:



Lo studio della reticolare associata è particolarmente utile in strutture molte volte iperstatiche; un telaio a 2 impalcati ad esempio richiede 2 carrelli.



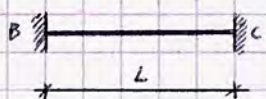
Il vincolo è ausiliario \Rightarrow esplica reazione NULLA.

Determinato in questa equazione, consente di comporre i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione valutati in S_0 e S_1 per sovrapporre gli effetti.

Successivamente si valutano i momenti d'incastro perfetto, ovvero i momenti agenti sui morsetti (Δ) cui il nodo reagisce con un momento uguale e opposto con il quale si riequilibra tutta la struttura: applicando i momenti di incastro perfetto alla struttura è possibile valutare attraverso un procedimento iterativo come i momenti si riequilibrano nelle varie aste. Ciò logicamente dipende dalla rigidità delle varie aste convergenti nel nodo. I momenti di incastro perfetto da valutare sono quelli dovuti al carico q (S_0 , asta BC) e quelli nelle aste verticali dello schema S_1 indotti dal cedimento S . Si osserva come sia necessario conoscere gli schemi notevoli delle travi iperstatiche.

Prima di procedere nella risoluzione di S_0 ed S_1 dunque occorre valutare la rigidità flessionale delle aste (indipendente dal sistema considerato) e i relativi coefficienti di ripartizione che distribuiscono il momento nelle varie aste in funzione della rigidità flessionale.

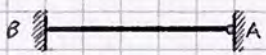
① Calcolo delle rigidità flessionali nelle aste (il procedimento, condotto per il nodo B, è analogo nel nodo C)



$$K_{BC} = \frac{4EI}{L} ; I = \frac{bh^3}{12} = \frac{0,3 \cdot 0,3^3}{12} = 0,000675 \text{ m}^4$$

$$E = 30000000 \text{ kPa}$$

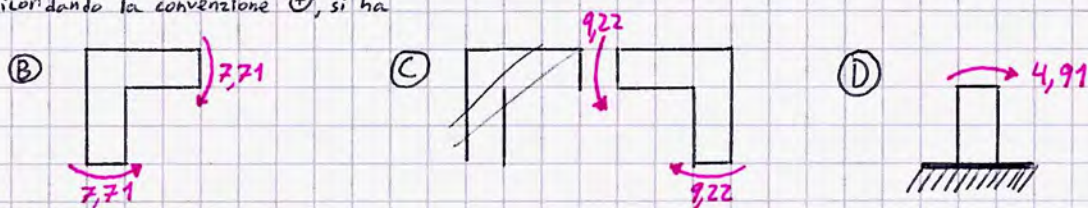
$$\rightarrow EI = 20250 \text{ kNm}^2$$



$$K_{BA} = \frac{3EI}{L}$$

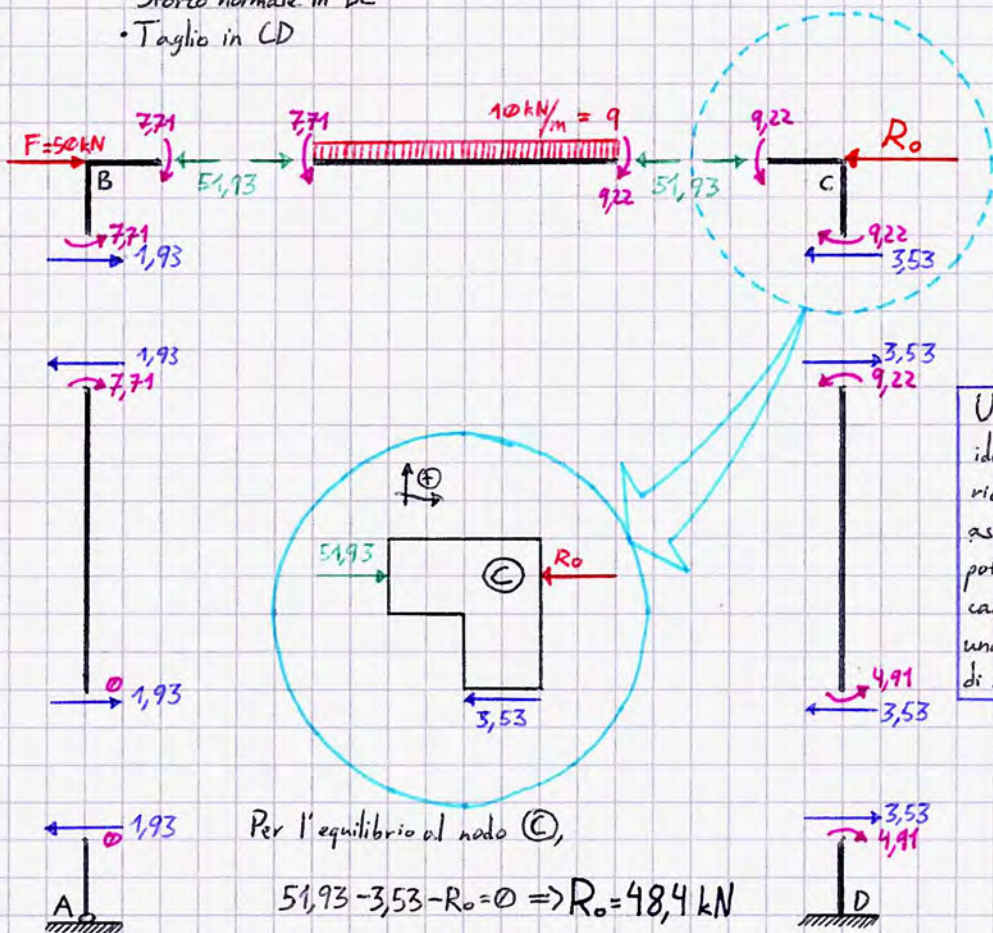
② $K_{BA} = \frac{3EI}{L} = \frac{3}{4} 20250 = 15187,5 \text{ kNm}$; $K_{BC} = \frac{4}{4} 20250 = 20250 \text{ kNm}$

Si definiscono dunque le seguenti caratteristiche interne della sollecitazione (da cui è possibile ricavare quelle rimanenti):
 Ricordando la convenzione \oplus , si ha



Trasferendo i momenti sulle singole aste, è possibile ricavare le caratteristiche interne di sollecitazione e diagrammarle nello schema S_0 . In questa prima fase è però rilevante valutare la sola reazione R_0 , dunque ci si sofferma su tutte le azioni concorrenti alla sua determinazione, ovvero:

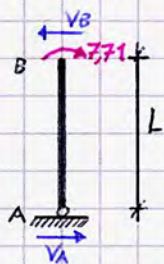
- Taglio in AB
- Sforzo normale in BC
- Taglio in CD



Una volta risolto S_0 , identificata R_0 , è importante ricordare i momenti agenti sulle aste e il valore di R_0 per poter tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione una volta noto α e la dinamica di sovrapposizione degli effetti.

Per l'equilibrio al nodo C,
 $5,93 - 3,53 - R_0 = 0 \Rightarrow R_0 = 48,4 \text{ kN}$

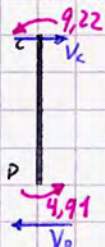
(V_{AB}) Non essendo presente un carico distribuito, il momento è lineare e il taglio è costante. Si ha che:



$$V_A = V_B = \frac{M_B}{L} = \frac{7,71}{4,00} = 1,93 \text{ kN}$$

⚠ I calcoli sono condotti SULL'ASTA, non includendo i nodi!
 Da ciò derivano i versi nel diagramma in alto.

(V_{CD}) Anche in questo caso il taglio è costante; essendo i momenti concordi si ha che:



$$V_C = V_D = \frac{M_C + M_D}{L} = \frac{9,22 + 4,91}{4} = 3,53 \text{ kN}$$

(N_{BC}) Dovendo valutare l'azione dello sforzo normale entrante in C, si ha che il complesso delle sollecitazioni agenti è pari a $F + V_B^{\text{nodo}} \Rightarrow N_{BC} = 51,93 \text{ kN}$. (Equilibrio al nodo B)

Calcestruzzo Armato

Il calcestruzzo e la relativa trattazione sono molto consolidati in letteratura in virtù del largo utilizzo del materiale, anche nei centri storici italiani; di fatti in passato non erano presenti norme sismiche evolute, l'affidabilità sismica era demandata alla qualità del materiale. Essendo oggi le norme più evolute, si tende spesso a realizzare prodotti di minor qualità; da ciò possono derivare collassi sismici inaspettati.

Ne segue che a una buona progettazione deve SEMPRE corrispondere una buona esecuzione dei lavori.

Di norma, la produzione di 1m^3 di CLS richiede:

1m^3 CLS =	300 kg	cemento] "Pasta", reagisce determinando presa e indurimento
	150 L	H_2O (tra 120 e 180 in base alle condizioni ambientali)	
	0,8 m^3	inerte grosso] "non reagiscono"
	0,4 m^3	inerte fine	

→ Gli interstizi dell'inerte grosso ospitano cemento e inerte fine.

Il cemento è un legante ottenuto dalla cottura e macinazione del clinker (roccia calcarea), presenta silicati e alluminati di calcio che reagiscono con l'acqua attraverso una reazione di idratazione, fortemente esotermica, che porta alla formazione della pasta (legante + acqua), che va incontro a presa e indurimento.

• Presa: inizia a circa 1 ora dal mescolamento e termina dopo circa 3-4 ore, è costituita da una prima evaporazione d'acqua e l'acquisto di una consistenza rigida

• Indurimento: si ritiene completato dopo circa 28 giorni (la reazione in realtà perdura nel tempo, a 28 giorni però si raggiunge una resistenza pressoché pari alla resistenza massima del materiale).

Per una buona reazione di idratazione, l'acqua deve essere priva di impurità in maniera tale da non determinare interferenze nella reazione o misurazioni erronee dell'effettivo rapporto acqua-cemento, stechiometricamente pari a 0,2 ma compreso tra 0,4 e 0,6 nella pratica per una maggiore lavorabilità.

$$\frac{a}{c} = 0,4 - 0,6 \quad \text{per lavorabilità} \quad \left(\frac{a}{c} \nearrow \text{resistenza} \right)$$

Poiché il calcestruzzo è frequentemente prodotto in centrali di betonaggio, per consentire un buon trasporto si utilizzano dei ritardanti di presa. A seconda delle esigenze possono essere aggiunti anche altri tipi di additivi, come gli acceleranti di presa, gli aeranti (formano delle porosità nel CLS contro il gelo, richiedendo un minor $\frac{a}{c}$) o i fluidificanti.

Occorre inoltre vibrare il CLS per rimuovere l'aria, evitando vibrazioni eccessive per non rischiare fenomeni di segregazione (bleeding, separazione tra inerti grossi, inerti fini e pasta).

Gli inerti possono essere di cava (+ spigolosi) o di fiume (+ lisci); combinati devono essere privi di impurità; sono elementi più resistenti (aumentano infatti l'indice di durezza superficiale di una battuta sclerometrica, in cui la misura dipende dal rimbalzo sulla superficie).

Occorre inoltre attuare una selezione del fuso granulometrico (attraverso un diagramma di Fuller) per garantire un assortimento corretto per garantire la compattezza necessaria del prodotto.

Per la lavorabilità si effettua uno slump test: si versa il CLS in un recipiente tronco-conico (Cono di Abrams), costipandolo per poi rilasciarlo e valutarne l'abbassamento ($\Delta h = \text{slump}$).

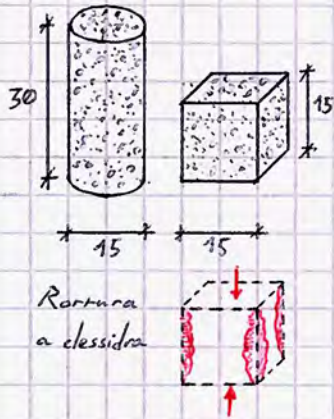
Per getti di calcestruzzo su grande estensione si realizzano dei getti di ripresa tra il getto in presa/indurimento e quello fresco, vanno limitati o utilizzare ritardanti di presa per attenuare il distacco e la mancata aggregazione tra le due masse e garantire la realizzazione di un oggetto monolitico.

Nel caso di oggetti a grande luce, come i ponti, oltre alla dilatazione termica (cui si ovvia con giunti termici) diventa problematico il ritiro del calcestruzzo, che causa tensioni di trazione in grado di determinare fessurazioni che - a differenza della microfessurazione fisiologica del CLS - può causare un indebolimento della struttura a causa di una maggiore permeabilità ad attacchi atmosferici. Il ritiro, proporzionale alla lunghezza degli elementi, è solitamente di agevole controllo nel CLS gettato in opera (essendo noti i quantitativi utilizzati in misura); nel precompresso ciò non è vero, essendo l'elemento già soggetto a tensioni e realizzato anche per luci maggiori di 20m.

A seguito del getto e della vibrazione, si spruzza acqua sul getto in maniera tale da contrastare l'evaporazione di H_2O e ridurre il ritiro: mentre la maturazione in aria porta una contrazione, la maturazione in acqua induce una dilatazione del materiale.

In ambito strutturale, esistono due possibili approcci per la trattazione del CLS:

- **Micromodellazione:** si studia il comportamento dei singoli costituenti del CLS, interpretato come materiale eterogeneo;
- **Macromodellazione:** si approssima l'elemento strutturale con un solido equivalente omogeneo dotato di proprietà medie.



Per lo studio della resistenza a compressione si effettua una prova di laboratorio su cubi (per nuove costruzioni) o cilindri (per costruzioni esistenti) con una macchina di prova sostanzialmente caratterizzata da un piatto (il cui movimento è garantito da un martinetto) che comprime il provino; la modalità di prova può essere a controllo di forza (si assegna una legge di crescita alla sollecitazione applicata, ad esempio $+0,1 \text{ N/s}$, da cui si leggono gli spostamenti corrispondenti) o a controllo di spostamento (da una legge di crescita sugli spostamenti si leggono le sollecitazioni corrispondenti).

In un buon provino cubico, la rottura è a clessidra; analogamente, la rottura di un provino cilindrico prevede uno schiacciamento centrale.

Dai dati di forza e spostamento ($F-\Delta$) si ricava il diagramma sforzo-deformazione $\sigma-\epsilon$ (F/A_p ; $\Delta/H_{\text{provino}}$).

Considerando il campo elastico, la resistenza a trazione del CLS è circa $1/10$ di quella per la compressione; a confronto il rapporto per la muratura è di circa $1/30$!

Si osserva che il calcestruzzo ha comportamento non lineare già in campo elastico; entro il 40% della tensione di rottura f_u però si ritiene ammissibile una schematizzazione del comportamento del materiale come se fosse costituito da un legame elastico lineare, costituito dalla secante al diagramma tra l'origine e il punto appena definito. In questa fase il materiale dilatandosi determina delle fessurazioni, ma le lesioni così formate tendono a richiudersi.

Tra 0,4 e 0,85 f_u il comportamento del materiale è fortemente non lineare; le lesioni tendono a ingrandirsi e non tornano alla dimensione originaria e non è possibile alcuna schematizzazione lineare.

Oltre 0,85 f_u il comportamento del CLS non è più stabile; si compromettono i legami molecolari! A causa della bassa duttilità e del meccanismo di rottura fragile, il tratto successivo al raggiungimento di f_u è molto limitato.



Come anticipato, i parametri di resistenza del calcestruzzo si dividono in:

- $\rightarrow R_c$ resistenza cubica a compressione
- $\rightarrow f_c$ resistenza cilindrica a compressione

$$f_c = 0,83 R_c$$

Le classi di CLS già consolidate presentano un rapporto f_c/R_c di 0,8-0,85 per semplicità; le nuove classi di resistenza sono invece fedeli al rapporto appena definito.

Sono entrambe un frattile al 5% (sono cioè minorate solo nel 5% dei casi), cui si aggiunge successivamente un coefficiente di sicurezza.

$f_c < R_c$ a causa di problematiche legate all'esecuzione della prova: l'esecuzione della prova con il provino cubico presenta una forza di attrito interna al provino stesso che genera una forma di confinamento su di esso, opponendosi allo spaccamento laterale; sullo elemento cilindrico invece, attesa la snellezza, detto attrito ha un effetto molto meno evidente ed efficace!

Nei calcoli si utilizzano valori medi, determinati con equazioni empiriche a partire dai valori caratteristici:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$$

$$R_{cm} = R_{ck} + 9,6 \text{ MPa}$$

Classi di CLS utilizzate in opera: C8/10 → C90/105

La classe minima impiegata in campo strutturale è il C16/20; la classe minima per il precompresso è il C28/35. Dal C45/55 si parla di CLS ad alta resistenza; richiedono particolare cura nella composizione e negli aspetti realizzativi. Dal C70/85 si parla di CLS ad altissima resistenza, impiegati solo previa richiesta al Servizio Tecnico Civile del Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici; richiedono numerose provv. prima della posa in opera.

Anche se il cantiere è servito da un calcestruzzo confezionato in centrale di betonaggio e non è realizzato in situ, occorre effettuare un controllo della qualità del materiale (controlli di accettazione) tramite dei prelievi — realizzando 2 provini per ogni prelievo — definiti in base alla categoria di controllo da effettuare:

• Tipo A: Fino a 1500 m^3 , "normale"; prevede 1 prelievo ogni 100 m^3 di getto, comunque 1 prelievo per ogni giorno di getto, su un minimo di 3 prelievi (si ottengono almeno 6 provini!!);

• Tipo B: Oltre 1500 m^3 , il controllo è più accurato e volge alla realizzazione di un campione di dati statistici; si realizza 1 prelievo ogni 100 m^3 , comunque 1 prelievo per ogni giorno di getto, su un minimo di 15 prelievi ovvero 30 provini!

Si consideri un controllo di tipo A: ogni provino sviluppa una propria resistenza media ogni giorno fino all'indurimento, raggiunto il quale si valuta la resistenza media del calcestruzzo nella struttura realizzata:

Giorno	Prelievo	Provini (Res)	R _{media} (prelievo)
1	1	R _{c1} ; R _{c2}	$R_1 = \frac{f_{c1} + f_{c2}}{2} (R)$
2	2	R _{c3} ; R _{c4}	$R_2 = \frac{f_{c3} + f_{c4}}{2} (R)$
3	3	R _{c5} ; R _{c6}	$R_3 = \frac{f_{c5} + f_{c6}}{2} (R)$

$$\text{Da cui, } R_m = \frac{R_1 + R_2 + R_3}{3}$$

Il controllo di accettazione prevede una fase di controllo e di confronto con i valori di resistenza minima e media: supponendo che $R_1 < R_2 < R_3$ occorre, cioè verificare che:

$$R_1 \geq R_{ck} - 3,5 \text{ MPa}$$

$$R_m \geq R_{ck} + 3,5 \text{ MPa}$$

Poiché la valutazione di tali valori di resistenza può essere effettuata solo giorni dopo il prelievo, il cantiere prosegue durante la maturazione dei provini; se le condizioni suddette non sono verificate si determina un contenzioso legale per i danni conseguenti, rendendosi altresì necessario un rinforzo strutturale.

Si consideri ora un controllo di tipo B:

• I controllo: si ottengono R_1, \dots, R_{15} (resistenze medie, come fatto in precedenza)

Supponendo che $\min \{R_1, \dots, R_{15}\} = R_1$, occorre verificare che $R_1 \geq R_{ck} - 3,5 \text{ MPa}$

• II controllo: occorre verificare che $R_m = \frac{\sum_{i=1}^{15} R_i}{15} \geq R_{ck} + 1,45 \text{ MPa}$

$$\rightarrow \text{Scarto quadratico medio} \\ S = \frac{1}{n-1} \sqrt{\sum_{i=1}^n (R_i - R_m)^2}$$

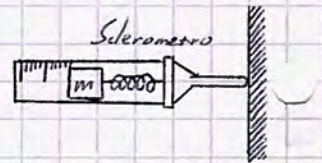
Se entrambi i controlli sono verificati, il cantiere può proseguire; per i controlli di tipo B occorre però controllare anche il coefficiente di variazione delle resistenze:

$$Cov = \frac{S}{R_m}$$

Se $0,15 \leq Cov < 0,30$, sono necessari controlli aggiuntivi per valutare se la variazione di resistenza è localizzata o se è dovuta ad un errore confezionamento; se $Cov > 0,30$ il CLS NON È ACCETTABILE.

Per quanto riguarda le prove su strutture esistenti in CLS, necessarie per la valutazione della degradazione del materiale, si distinguono tra:

• Prova sclerometrica: si utilizza uno sclerometro, strumento che valuta la durezza superficiale del materiale attraverso la percussione. La prova si conduce come segue:



1. Localizzare le barre di armatura attraverso un pacometro, dispositivo dotato di sonda che emette un segnale acustico in presenza di una barra di armatura (gli strumenti più avanzati consentono di determinare anche il diametro della barra e lo spessore del copriferro). La localizzazione è fondamentale per identificare le zone di battuta ed evitare misurazioni errate (non si batte sulle barre!);
2. Si rimuove l'intonaco dalle zone di battuta;
3. Si svita il tappo dello sclerometro, utilizzando la sua pietra abrasiva per rendere liscia la superficie;
4. Si appoggia lo strumento alla parete, spingendo per garantire l'ingresso della punta; la molla interna si allunga in misura proporzionale alla durezza del CLS, rendendo possibile la misura su una scala graduata;
5. Tramite formule empiriche si ricava indirettamente la resistenza del CLS.



Una battuta sclerometrica richiede almeno 12 misure di durezza per ogni elemento strutturale: si scartano da queste le misure di estremità (MAX; min) per poi effettuare una media delle misure rimanenti.

Poiché la resistenza si ricava da formule empiriche legate a parametri superficiali e la durezza assume valori molto più elevati se la battuta si effettua sulle armature o sul pietrisco, la prova determina risultati poco precisi ed è solitamente accoppiata con altre verifiche.

• Prova ultrasonica: si basa sulla trasmissione di onde a 40-120 kHz tra un'emittente e una sonda ricevente; a seconda della compattezza del materiale cambia il tempo di volo, rendendo possibile la lettura dello elemento strutturale in relazione a composizione, compattezza e modulo elastico del materiale;

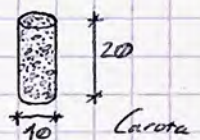
• Prova SONREB (Sonic Rebound): combinazione di prova ultrasonica e sclerometrica, restituisce informazioni complete; è la tipologia di prova più usata e più precisa;

• Pullout (estrazione): si fora l'elemento strutturale inserendo un tassello, vi si collega un martinetto per tirarlo; ne segue la rottura del CLS o del tassello (più frequentemente del CLS, essendo meno resistente) da cui, nota la forza di estrazione, è possibile conoscere la resistenza del materiale studiandone la forma pseudo-troncoconica. È una prova semidistruttiva.



• Prove su carote cilindriche: dopo aver usato un pacometro per non prelevare barre di armatura, si utilizza una carotatrice per prelevare i provini. Successivamente:

1. Si numerano le carote e si redige un verbale di prelievo indicando le generalità dell'impresa, del collaudatore e del committente;
2. Si portano le carote in laboratorio effettuandone una rettifica: attraverso una cappatura con malta ad alta resistenza si rende liscia la superficie del cilindro per consentire una prova meccanica;
3. Prova meccanica, tipicamente a controllo di spostamento ($0,1 \text{ mm/s}$) ed eventuale confronto con i documenti di progetto originali;
4. Verifica della struttura con i dati ricavati dalle analisi.



La norma presenta un particolare criterio di premialità in base al grado di conoscenza acquisito e dal numero di prelievi effettuati: un numero maggiore di prelievi consente di ridurre i coefficienti di sicurezza utilizzati, secondo 3 livelli di conoscenza cui si abbinano altrettanti fattori di confidenza:

$$\left. \begin{array}{l} \text{LC1} \rightarrow 1 \text{ provino ogni } 100\text{m}^2 \text{ di edificio} \rightarrow \text{FC} = 1,35 \\ \text{LC2} \rightarrow 2 \text{ provini ogni } 100\text{m}^2 \text{ di edificio} \rightarrow \text{FC} = 1,20 \\ \text{LC3} \rightarrow 3 \text{ provini ogni } 100\text{m}^2 \text{ di edificio} \rightarrow \text{FC} = 1,00 \end{array} \right\} \Rightarrow f_d = \frac{f_{cm}}{\text{FC}}$$

→ valore medio di resistenza individuato

La norma obbliga alla realizzazione di prove distruttive (carotaggio) per un'analisi strutturale soddisfacente; le prove semidistruttive e non distruttive possono comporre parte della campagna di rilevamento purché siano almeno pari al triplo delle prove distruttive non effettuate in ragione di questa scelta. Logicamente, le prove vanno distribuite in diversi elementi strutturali, a diversi livelli per massimizzarne l'affidabilità statistica: confrontando i valori medi nei singoli elementi strutturali è anche possibile determinare se sono state utilizzate classi differenti di CLS.

Come anticipato, per le strutture di nuova costruzione si conducono due tipologie di controlli su provini cubici realizzati in cassafornе in polistirolo.

⚠ In fase di progetto, si ricordi che la classe di resistenza del calcestruzzo indica la sua resistenza caratteristica, NON quella di progetto! Il C 25/30 ad esempio ha una $R_{ck} = 30 \text{ MPa}$. Per passare alla resistenza di progetto si impegna la seguente relazione:

$$f_d = \alpha_{cc} \frac{f_{ck} [R_{ck}]}{\gamma_c}$$

→ 1,5

→ Coefficiente fissato pari a 1 nell'EC3 (ma è buona norma considerarlo pari a 0,85) che tiene conto del fatto che la resistenza del materiale in laboratorio è misurata a rottura istantanea, in presenza di un carico a breve durata; in esercizio il CLS è soggetto a carichi di lunga durata e deformazioni viscosе che ne riducono la resistenza nel lungo periodo. In virtù dello spessore ridotto, sulle solette $\alpha_{cc} = 0,8$.

La valutazione del modulo elastico del CLS, attesa la non linearità del materiale, è particolarmente complessa. Per le strutture di nuova realizzazione si utilizzano 2 differenti approcci:

• Teorico: si considera un modulo elastico medio E_{cm} , computato dalla formula:

$$E_{cm} = 22\,000 \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,93} \rightarrow \text{Resistenza cilindrica media}$$

con $f_{cm} = f_{ck} + 8 \text{ MPa}$ (valore di progetto)

• Sperimentale: ci si ferma al 40% di f_c nella prova, intersecando il diagramma con la secante per 0, calcolando E_s (modulo elastico secante; $E_s = \tan \alpha$) e passando al modulo elastico tangente (effettivo) considerando che $E = 1,10 E_s$ (procedura effettuata d'ordine in laboratorio)

Come osservato in precedenza, il comportamento meccanico del CLS si può dividere in 3 stadi, cui corrispondono altrettanti approcci nelle verifiche:

I stadio: elastico lineare → si confrontano le σ agenti con il 40% di f_u ;

II stadio: approssimativamente elastico lineare nelle verifiche

III stadio: richiede un confronto E_d/R_d in virtù della non linearità.

⚠ Se cambia la classe di CLS cambia il modulo elastico!

Anche per la valutazione della resistenza a trazione del CLS si impiegano due approcci:

• Teorico: $f_{ctm} = 0,30 \sqrt[3]{f_{ck}^2}$ fino a C50/60

Resistenza media del CLS a trazione

si osserva che è un'aliquota della resistenza a compressione.

$f_{ctm} = 2,12 \ln\left(1 + \frac{f_{cm}}{10}\right)$ oltre C50/60

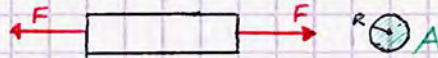
Da ciò, si ha che $f_{ctk} = 0,7 f_{ctm} \rightarrow f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c}$
 $\frac{\gamma_c}{1,5}$

Solitamente è circa pari al 10% della resistenza a compressione; a partire dal II stadio la si assume NULLA.

• Sperimentale: si effettua una delle seguenti prove meccaniche

• Prova diretta: si pone un cilindro in trazione, incollandolo alle piastre. Raggiunta la rottura del provino si ottiene la resistenza a trazione assiale del materiale:

$f_{ct,ax} = \frac{F}{A}$



Essendo le estremità del provino solitamente incollate con malte ad alta resistenza (maggiore di quella del CLS), un distacco di esse dai piatti può compromettere il buon compimento della prova, che presenta dunque difficoltà di esecuzione non trascurabili.

• Prova brasiliana [indiretta; splitting test]:



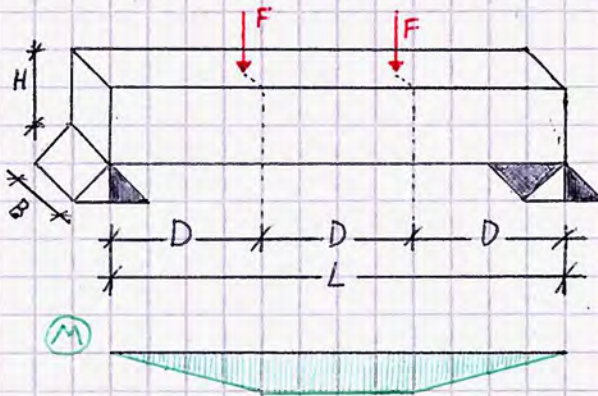
Si comprime il provino tra due piatti, valutandone lo spaccamento e la conseguente rottura a trazione impressa indirettamente:

$f_{ct,sp} = \frac{F}{\pi RL}$



Essendo il materiale caratterizzato da un comportamento non lineare, a rigore $f_{ct,ax} < f_{ct,sp}$, infatti, $f_{ct,ax} = 0,90 f_{ct,sp}$!

• Prova di flessione:



Considerato il provino in figura, soggetto alle condizioni di carico rappresentate in maniera tale da garantire un tratto a momento costante; portandolo a rottura è possibile valutare la resistenza del CLS a trazione indotta dalla flessione: entrando in campo formalmente non lineare il materiale sviluppa resistenze molto maggiori rispetto a quelle computate nelle prove esclusivamente a trazione (che agiscono solo nel I stadio); ne segue la necessità di applicare un coefficiente correttivo, empiricamente fissato pari a 0,5.

$f_{ct,FL} = \frac{M}{W} = \frac{F \cdot D}{BH^3/6} = \frac{6FD}{BH^2}$

Da cui $f_{ct,ax} = 0,5 f_{ct,FL}$

Come anticipato, la resistenza del CLS ^{varia} nel tempo; è possibile valutare in base al tipo di cemento e dalla stagionatura l'aumento di resistenza dalla fase di getto in poi attraverso la seguente funzione esponenziale:

$f_{c,t} = e^{s(1 - \sqrt{28/t})} \cdot f_{c,28}$
tempo (in GIORNI)

- 0,38 per cementi normali (325)
- 0,25 per cementi intermedi (425)
- 0,20 per cementi ad alta resistenza (525)

dipende dal tipo di CLS: s =



Si osserva come il calcestruzzo a 28 giorni dal getto sviluppi gran parte della propria resistenza: in 100 anni il CLS ha una resistenza del 10-30% maggiore rispetto a $f_{c,28}$.

Ritiro: condizione influenzata dalla presenza d'acqua nell'impasto (poca acqua \Rightarrow diminuzione di volume e viceversa). Essendo le strutture in CLS molte volte iperstatiche in caso di ritiro si creano degli sforzi di trazione/compressione con importanti coazioni, soprattutto sulle grandi luci; mentre nelle strutture ordinarie esso può non essere considerato, nelle strutture in c.a.p. diventa fondamentale!
 È possibile non valutare il ritiro nelle strutture se si rispettano le seguenti condizioni:

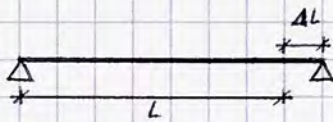
- Evitare un uso eccessivo di H_2O ;
- Evitare getti di elevata estensione ($L_{max} < 30-40m$);
- Prevedere giunti di dilatazione termica in caso di lunghezze di getto maggiori di 30-40m
- Disporre opportunamente delle armature fuori calcolo contro gli sforzi generati dal ritiro (trazione negli orizzontamenti, flessione nei pilastri).

Volendo effettuare un paragone tra ritiro e dilatazione termica, si ha che:

$$\frac{\Delta L}{L} = \alpha \Delta T = (0,10 \div 0,40) \cdot 10^{-3} \quad (\text{Eritiro})$$

Ne segue che $\Delta T = \frac{\Delta L}{\alpha \cdot L} = - (20 \div 40^\circ C) \left(\frac{\alpha_{CLS}}{\alpha} \right)$

gli effetti del ritiro sono paragonabili ad un abbassamento di temperatura tra i 20 e i 40°C!



$$E_R = \underbrace{E_{RA}}_{\text{Ritiro autogeno (nella prima fase di presa, le prime ore)}} + \underbrace{E_{RE}}_{\text{Ritiro da essiccamento (in tutta la vita del materiale)}}$$

Si ha che:

$$E_{RA} = -2,5 (f_{ck} - 10) \cdot 10^{-6}$$

$$E_{RE} = K_h \cdot \underbrace{E_{cd,0}}_{\substack{\text{istante } 0 \\ \text{dipende dalla superficie esposta all'ambiente, si verifica in base ad un parametro definito dal rapporto tra area esposta all'atmosfera (A) e semiperimetro dell'elemento considerato (u/2):}}}$$

$$h_0 = \frac{2A}{u} \Rightarrow \text{se } h_0 = 100mm, K_h = 1 \\ h_0 = 200mm, K_h = 0,85$$

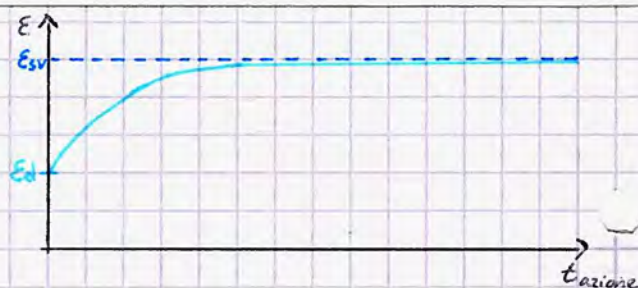
Creep/Fluage: generato da fenomeni di scorrimento viscoso, determina un incremento di deformazione rispetto alle deformazioni elastiche del materiale nel caso di elementi soggetti a carichi costanti (la deformazione cresce sotto carichi costanti). In altre parole, a parità di carico applicato, un carico imposto e rilasciato determina una certa deformazione (elastica); lo stesso carico applicato sul lungo periodo determina deformazioni maggiori. Ciò viene valutato con un coefficiente dipendente dal tempo di azione del carico, dall'umidità relativa, da h_0 ; viene indicato in apposite tabelle dalla norma.

In particolare:

$$E_{sv} = \phi E_{el}$$

$\phi \sim 2-3 = f(\epsilon; UR; h_0)$

↳ deformazione elastica
 ↳ deformazione da scorrimento viscoso



Acciaio da Calcestruzzo

L'acciaio, essendo una lega Fe-C con tenore di carbonio inferiore al 2%, è un materiale resistente e duttile; può presentare Mn e Si per una maggior saldabilità e altri elementi in quantità molto più scarse.

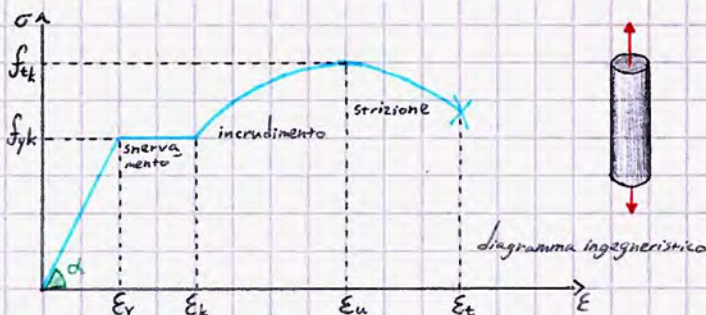
L'acciaio da calcestruzzo viene di norma prodotto da rottami ferrosi inseriti in forni elettrici in maniera tale da realizzare billette quadrate o circolari di lunghezza fino a 12 m e di diametri $\phi 100 - \phi 180$; esse vengono poi portate a fusione per un secondo raffreddamento e una fase di laminazione, distinta tra:

- Laminazione a caldo: drastica riduzione di temperatura ma limitata nel tempo, determina un raffreddamento degli strati superficiali, non incidendo sul diametro e sulla duttilità;
- Laminazione a freddo: brusca variazione di temperatura che comporta variazione di diametro e minor duttilità.

Si ha che la laminazione a caldo porta alla produzione di ACC B450C, mentre la laminazione a freddo all'ACC B450A; confrontandoli si osserva che la differenza principale è nella duttilità:

	B450C	B450A
f_{yk}	450 MPa	450 MPa
f_{tk}	540 MPa	540 MPa
ϵ_u	$\geq 0,075$	$\geq 0,025$

Caratteristiche meccaniche misurate su provino cilindrico a trazione



In passato esistevano 4 tipi di barre d'acciaio da calcestruzzo:

Feb 22k
Feb 34k
liscie

Feb 38k
Feb 44k
ad aderenza migliorata

L'acciaio è un materiale estremamente controllato, con analisi effettuate nell'impianto di produzione (75 provini di 3 differenti classi diametrali per ogni colata, sui quali si effettuano almeno 3 prove in maniera tale da garantire un controllo statistico), nel centro di trasformazione e in cantiere. Ne segue che il coefficiente di sicurezza nella determinazione della resistenza di progetto è minore rispetto a quanto osservato per il calcestruzzo:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \rightarrow 1,15$$

$$f_{yk} = f_{ym} - K_s \quad \text{↳ Valore statistico, può essere un frattile al 95% (1,895) o al 10% (1,5)}$$

$$K_s = \sqrt{\frac{E(\alpha_1 - \alpha_0)^2}{\alpha - 1}}$$

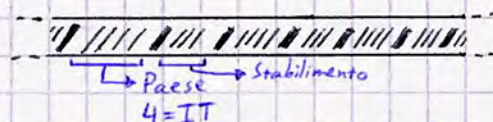
$$f_{td} = \frac{f_{tk}}{\gamma_s}$$

$$E = \tan \alpha = 200.000 \div 210.000 \text{ MPa}$$

ϵ_u : deformazione al raggiungimento dello sforzo ultimo (massimo), si legge in corrispondenza di A_{gt} (covero della sezione di provino che si rompe).

ϵ_t : si legge in corrispondenza di A_5 , sezione a distanza 5D dalla rottura.

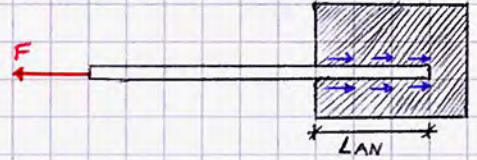
Al giorno d'oggi, le "striatore" delle barre ad aderenza migliorata (standard per le costruzioni aderenti) consentono di identificare paese e stabilimento di produzione:



Nella centrale di trasformazione si effettuano 3 prelievi per 3 classi diametrali differenti.

Tensioni di aderenza: tensioni tangenziali agenti sulla superficie esterna della barra opponendosi allo slittamento. dipendono essenzialmente da 2 fattori:

• Tipologia di barra (oggi sempre aderenza migliorata)



• Tipologia di CLS (getto e vibrazione)

A questi si aggiungono la lunghezza della barra e la sua posizione rispetto al bordo del CLS (il che influisce anche sulla durabilità del materiale). Si ha che:

$$f_{bk} = 2,25 \cdot \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot f_{ctk}$$

f_{bk} (bond / aderenza) dipende da ϕ :

- $\phi < 32 \text{ mm} \Rightarrow \eta_2 = 1$
- $\phi \geq 32 \text{ mm} \Rightarrow \eta_2 = \frac{132 - \phi}{100}$

f_{bk} dipende dalle condizioni di ancoraggio:

- Buon ancoraggio $\Rightarrow \eta_1 = 1$
- Ancoraggio mediocre $\Rightarrow \eta_1 = 0,7$

$$f_{bd} = \frac{f_{bk}}{\gamma_{m2}} \rightarrow 1,5$$

Per garantire che la barra non si stili, bisogna calcolare una lunghezza di ancoraggio:

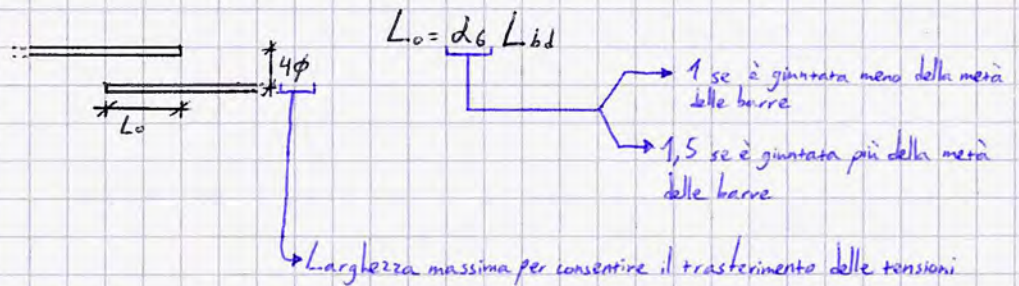
$$A = \pi \frac{\phi^2}{4}$$

Si ha che $f_{yd} \cdot \frac{\pi \phi^2}{4} = \pi \cdot \phi \cdot L_{AN} \Rightarrow L_{AN} = \frac{f_{yd} \cdot \phi}{4 f_{bd}}$

f_{bd} sup. laterale ↑ tengono conto di condizioni normative

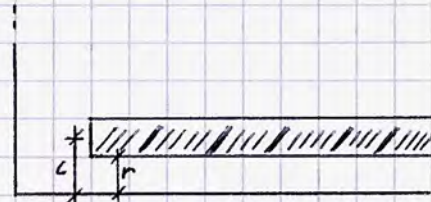
Nella pratica professionale, $L_{AN} = 40\phi$. Se l'ancoraggio è costituito da un ferro piegato, assumendo un angolo minore di 90° si ha che la lunghezza di ancoraggio deve essere almeno pari a 5ϕ per non rischiare slittamenti e distacchi del copriferro.

Giunzioni per sovrapposizione: spesso i ferri non sono sufficientemente lunghi ed è necessario calcolarne la lunghezza di sovrapposizione (sostanzialmente un ancoraggio) per determinare un comportamento strutturale continuo:



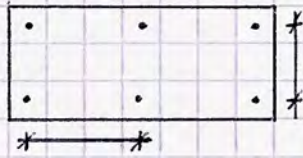
Le giunzioni devono essere SEMPRE effettuate sugli appoggi e NON in mezzaria, in virtù delle sollecitazioni minori.

Ricoprimento ed interferro: Si definisce ricoprimento r la distanza dal bordo della barra al bordo della trave in CLS, è di almeno 2cm per le solette ed almeno 3cm per gli altri elementi. Si definisce copriferro c la distanza tra l'asse della barra e il bordo della trave. Ne segue che:



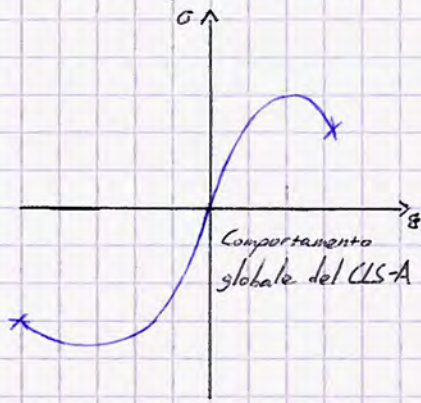
$$c = r + \frac{\phi}{2}$$

Interferro: distanza tra due ferri consecutivi, limitata inferiormente dalla dimensione dagli inerti e superiormente da un non efficace trasferimento delle tensioni.



Stadi di comportamento del Calcestruzzo Armato (CLS-A, materiale eterogeneo e composito)

Come anticipato, il calcestruzzo armato presenta tre differenti stadi, corrispondenti ai diversi livelli di sollecitazione nel materiale.



I stadio: piccole sollecitazioni, sia acciaio che calcestruzzo hanno comportamento elastico lineare; in questo stadio si richiede una verifica a fessurazione: $\sigma \leq f_{cr}$.

II stadio: sollecitazioni più elevate, che portano il CLS in regime elastico non lineare; lo si può assimilare a legame costitutivo elastico lineare. In passato ciò implicava una verifica alle tensioni ammissibili, oggi si verifica il comportamento a taglio delle sezioni non armate.

III stadio: sia l'acciaio che il calcestruzzo entrano in campo non lineare, a una stessa σ si associano più ϵ possibili; a seconda del comportamento dell'elemento (compressivo/teso, inflesso, a taglio, ...) si effettuano delle verifiche $E_d \leq R_d$ (rispetto a N, M, T).

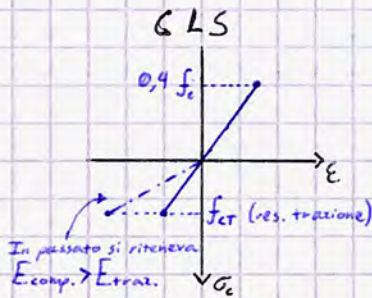
Nei primi due stadi valgono tutti i principi visti in Scienza delle Costruzioni, essendo presente una corrispondenza biunivoca tra σ ed ϵ . Le verifiche si effettuano dunque tramite un confronto in termini tensionali ($\sigma \leq \sigma_{lim}$; $\tau \leq \tau_{lim}$). Nota la ϵ è possibile ricavare la σ , da cui è possibile effettuare la verifica, solitamente allo Stato Limite di Servizio).

Al terzo stadio non possono essere confrontate le tensioni agenti, non valendo la corrispondenza biunivoca sopracitata a causa del comportamento non lineare; ne segue la verifica in termini di caratteristiche interne della sollecitazione.

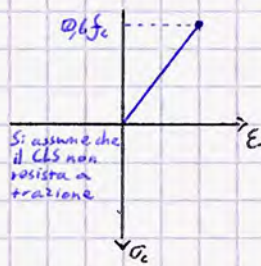
Legami Costitutivi

Stadio

I
(0 - 0,4 f_c)



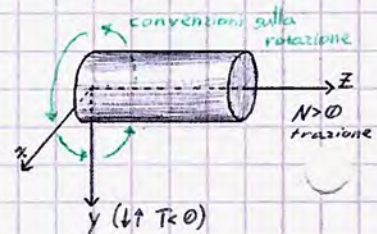
II
(0,4 - 0,6 f_c)



In realtà, negli elementi costruiti il CLS al II stadio inizia a presentare lesioni ma partecipa alla resistenza (parzialmente); l'approssimazione è a vantaggio di sicurezza.

III

Si analizza il comportamento effettivo del materiale, senza schematizzazioni.



Si osserva che il primo quadrante del grafico ritrae SEMPRE il comportamento corrispondente alla miglior resistenza del materiale (a compressione per il CLS $\Rightarrow \sigma < 0$).

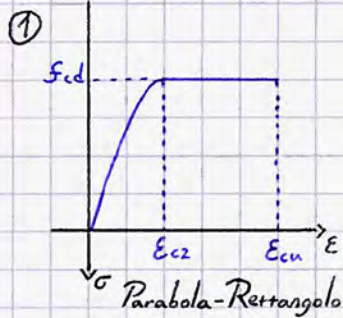
Il diagramma del CLS è approssimato, affetto dunque da errori e imprecisioni; nel progetto non bisogna tendere all'ottimizzazione spinta ma progettare in base al comportamento degli elementi strutturali.

I stadio: si effettua una verifica a fessurazione; considerando il momento agente e confrontandolo col momento che determina la fessurazione si valuta il regime di resistenza. Se $M_{Ed} > M_{fessurazione}$, non essendo la verifica soddisfatta, si ha che la G_{agente} è tale da portare il CLS almeno al II stadio.

II stadio: in passato si effettuava una verifica alle tensioni ammissibili, oggi si effettua una verifica allo stato limite di servizio (SLS \rightarrow confronto E_d/R_d)

III stadio: si effettua una verifica allo Stato Limite Ultimo (SLU) basata su modelli comportamentali semplificati del materiale:

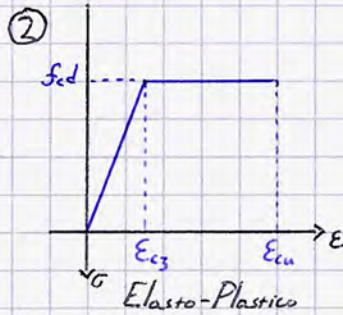
Modelli comportamentali del CLS:



$$\epsilon_{c2} = 0,2\% (0,002)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\% \\ 0,35\% (0,0035)$$

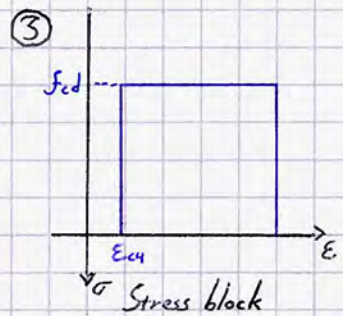
Di applicazione tipica (più usato).



$$\epsilon_{c3} = 1,75\% \\ 0,175\% (0,00175)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\%$$

Questo modello non viene più utilizzato nella pratica professionale.



$$\epsilon_{c4} = 0,2\epsilon_{cu} = 0,7\% \\ 0,07\% (0,0007)$$

$$\epsilon_{cu} = 3,5\%$$

Raramente utilizzato

Vantaggi del CLS-A (CLS + Acciaio):

① Perfetta aderenza tra i due materiali, soprattutto con le barre ad aderenza migliorata.

② Stesso coefficiente di dilatazione termica

Poiché $\epsilon_{cu,cls} \ll \epsilon_{cu,acc}$, raggiunta la deformazione ultima del CLS non si ha più perfetta aderenza tra i materiali: la sezione non è più unica e viene meno l'ipotesi ①.

⚠ È importante conoscere i valori di riferimento del modello parabola-rettangolo (ϵ_{cu} , ϵ_{c2})

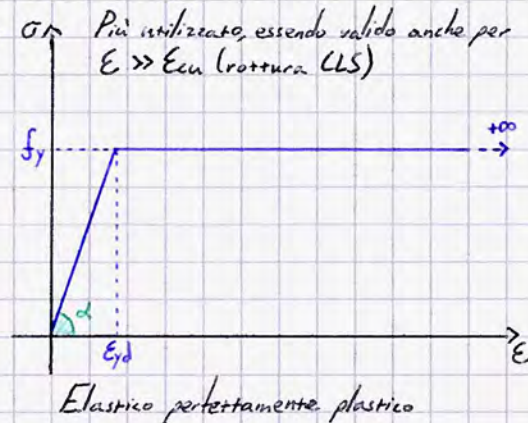
Modelli comportamentali dell'Acciaio:



fattore di incrudimento

$$k = \frac{f_y}{f_y} \sim 1,15$$

$$E = \tan \alpha$$



Più utilizzato, essendo valido anche per $E \gg \epsilon_{cu}$ (rottura CLS)

$$\epsilon_{\mu b} = 0,9\epsilon_{\mu k} = 6,75\% (\epsilon_{\mu k} = 7,5\%)$$

perfetta aderenza!

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_y}{E} = 1,86\% \sim 2\% \Rightarrow \epsilon_{c2} \sim \epsilon_{yd}; \text{ la deformazione di snervamento tra i due materiali è la stessa. } \uparrow$$

Valutiamo più nel dettaglio il comportamento e l'interazione Acciaio-calcestruzzo nei vari stadi: nell'ipotesi di perfetta aderenza, è possibile studiare anche la deformazione nei 2 materiali:

I stadio



$$\epsilon_c = \frac{\sigma_c}{E_c} ; \quad \epsilon_s = \frac{\sigma_s}{E_s}$$

Poiché per piccole deformazioni $\epsilon_c = \epsilon_s$, si ha che:

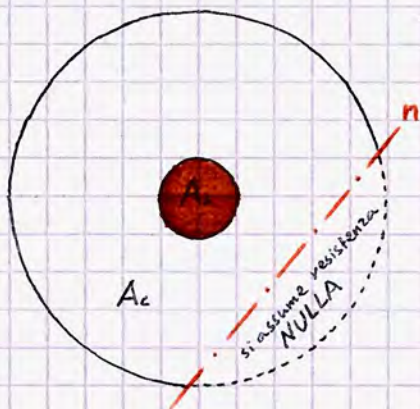
$$\frac{\sigma_c}{E_c} = \frac{\sigma_s}{E_s} \Rightarrow \sigma_s = \frac{E_s}{E_c} \sigma_c \Rightarrow \sigma_s = n \sigma_c \quad \triangle!$$

↙ coefficiente di omogeneizzazione

Nel primo stadio dunque è possibile conoscere la tensione agente in uno dei due materiali nota la σ nell'altro materiale una volta calcolato il coefficiente di omogeneizzazione n :

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{210\,000}{22\,000 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0,3}} = 6,7 \quad \text{con } f_{cm} = f_{ct} + 8\text{MPa}$$

II stadio



Mentre a compressione raggiunti simili livelli di sollecitazione non si riscontra alcuna problematica, le regioni della sezione in regime di trazione si suppongono aventi resistenza nulla.

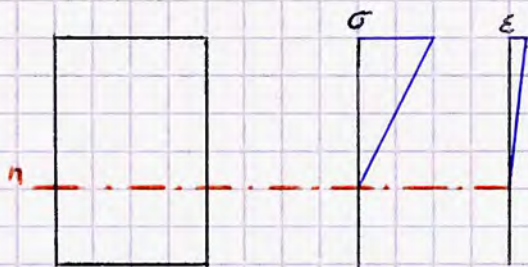
Nel caso di uno sforzo di trazione con risultante non applicata nel baricentro della sezione (in caso contrario l'intera area occupata dal CLS non reagirebbe), ovvero se la sezione è soggetta ad un regime di tenso/pressoflessione, l'area di CLS soggetta a trazione non reagisce. Bisogna dunque identificare l'asse neutro in maniera tale da poter definire la sezione efficace di CLS (area reagente), il relativo momento d'inerzia etc.

Tale individuazione avviene mediante un processo iterativo: si verifica la σ agente valutando se la posizione conseguente dello sforzo normale può essere identificata (nel caso in cui sia ignota l'eccentricità dello sforzo normale rispetto al baricentro, altrimenti il procedimento è diretto) da cui si ricava la posizione dell'asse neutro.

La norma consente a questo punto una semplificazione del procedimento di verifica, riferendosi sempre alla sezione geometrica complessiva: nota la nuova sezione, si immagina di applicare lo sforzo normale nel baricentro geometrico della sezione complessiva, non nel baricentro della sezione efficace.

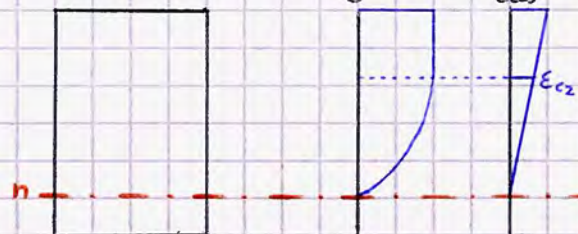
È ancora valida la legge $\sigma_s = n \sigma_c$, assumendo però che il modulo elastico tangente del calcestruzzo a $0,6 f_{ct}$ (ovvero al II stadio) sia minore di $E_{secante}$ a $0,6 f_{ct}$.

Convenzionalmente, si assume $n = 15$ considerando il minore tra i due.



Diverse scale, medesimo andamento.

III stadio



E_{acc} (nelle sole sezioni in cui è presente l'acciaio)

$$M_{Ed} \leq M_{Rd}$$

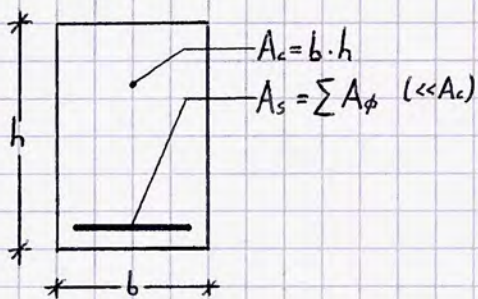
$$N_{Ed} \leq N_{Rd}$$

Andamento degli sforzi secondo il modello
Parabola-rettangolo

Verifiche

① Verifica al I stadio di sforzo normale

Al primo stadio, la regione a compressione ha lo stesso comportamento di quella a trazione.



CLS

$$\sigma_c = \frac{N}{A_{c,I}} \begin{cases} \rightarrow \sigma_c \leq f_{cd} \text{ (a compressione)} \\ \rightarrow \sigma_c \leq f_{ctd} \text{ (a trazione)} \end{cases}$$

Area di calcestruzzo IDEALE: si considera l'area occupata dai tendini omogeneizzata, come se fosse CLS: $A_{c,I} = A_c + n A_s$.
In questo modo, le aree sono tra loro comparabili.

Se le due verifiche sul CLS sono soddisfatte, si è certi di trovarsi nel primo stadio; altrimenti la sezione è soggetta a sollecitazioni tali da determinare un comportamento ad uno stadio superiore.

Acc

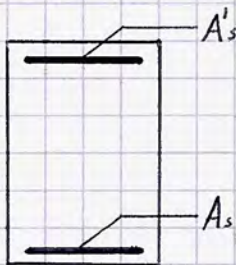
$$\sigma_s = n \sigma_c \leq f_{yd}$$

se è verificato il CLS, l'acciaio è automaticamente verificato.

II stadio

La verifica a compressione è del tutto identica

Nel caso di uno sforzo di trazione (sforzo puramente normale \rightarrow centrale, sezione non parzializzata) si considerano due aree di acciaio tali per cui $A_s = A'_s$ (così da far coincidere baricentro della sezione con baricentro geometrico):



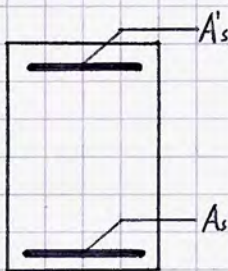
$A_s = A'_s$ (ipotesi che consente di affermare che la sezione sia interamente tesa se lo sforzo normale è applicato nel baricentro.)

$\sigma_c = 0$ poiché il CLS non reagisce a trazione al II stadio

$$\sigma_s = \frac{N}{A_s + A'_s} \leq f_{yd}$$

III stadio

Occorre calcolare esplicitamente lo sforzo resistente



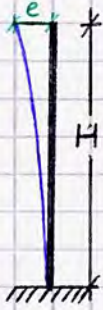
Trazione: noto N_{Ed} occorre calcolare N_{Rd}

$$N_{Rd} = (A_s + A'_s) \cdot f_{yd} \quad \text{da cui si verifica } N_{Ed} \leq N_{Rd}$$

Compressione: $N_{Rd} = (A_s + A'_s) f_{yd} + \underbrace{A_c}_{b \cdot h} \cdot f_{cd}$

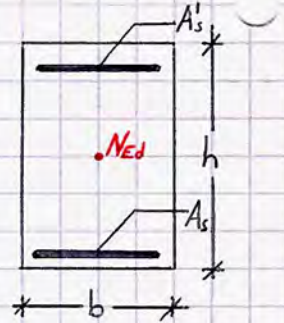
Progetto a sforzo normale del CLS

Sono incognite le dimensioni della sezione e delle armature; sono note le sollecitazioni agenti. Di norma il progetto a sforzo normale riguarda i pilastri ed è dunque condotto a compressione: si ha come dato di progetto N_{Ed} , bisogna definire b, h, A_s, A'_s .



Ipotizzando N_{Ed} puro, agente al centro della sezione, si effettua una schematizzazione tra progetto e caso reale: a causa delle imperfezioni legate alla realizzazione degli elementi è sempre presente una certa eccentricità che determina un momento flettente accoppiato allo sforzo normale.

Tale eccentricità è tollerabile rispetto al progetto se è racchiusa entro il 5% dell'altezza H della colonna; in caso contrario l'elemento è da considerare pressoinflesso invece che compresso.



I criteri di progetto si possono individuare tramite indicazioni già presenti in letteratura, ovvero per opere già realizzate: fissata la classe di CLS da utilizzare è possibile conoscere l'area resistente minima della sezione $A_c = N_{Ed} / f_{cd}$.

Fissando la base b della sezione è possibile dunque conoscere $h = A_c / b$; per ciò che concerne le armature occorre considerarne i requisiti normativi: tipicamente $A_s = 1 \div 4\% A_c \Rightarrow 1\% A_c \leq A_s + A'_s \leq 4\% A_c$; questo metodo, generalmente determinante in fase di dimensionamento, non tiene conto della leggera flessione dell'elemento oltre alle eventuali necessità di tutela.

La norma ottempera a queste necessità demandando un progetto rispetto ad una sollecitazione agente di $1,20 N_{Ed}$: in questo modo si include implicitamente l'eccentricità della colonna; a loro volta avviene un simile ragionamento per le armature: si ritiene che $1,00 N_{Ed}$ è assorbito dal CLS, mentre $0,20 N_{Ed}$ dalle armature. Si ha dunque che:

$$A_c = \frac{N_{Ed}}{f_{cd}} ; \quad A_s + A'_s = \frac{0,2 N_{Ed}}{f_{yd}}$$

si verifica poi che $A_s + A'_s$ rientri tra il 1% e il 4% di A_c ; se l'area occupata dallo acciaio supera il limite superiore conviene ingrandire la sezione; se invece essa è inferiore al limite minimo, imposto per motivi di resistenza e duttilità, si ripristina l'1% per garantire sufficiente duttilità contro il sisma.

Contrariamente a quanto immaginabile, il limite massimo del 4% è una condizione molto onerosa, con armature poco distanziate; si tende dunque ad allontanarsi il più possibile dal 4% - compatibilmente col limite minimo - per minimizzare le difficoltà economiche e tecnologiche della realizzazione oltre ad eventuali problemi di natura tecnica nella vita utile dell'opera.

Esempio

Consideriamo $A_s + A'_s = 10 \text{ cm}^2$ (noto) e supponiamo che $A_s = A'_s$ (pilastro, distribuzione uniforme a compressione). Occorre considerare i seguenti limiti normativi nel progetto di pilastri:

$\phi_{\text{minimo}} = 12 \text{ mm}$ (ferri longitudinali, tipicamente $\phi 16$);

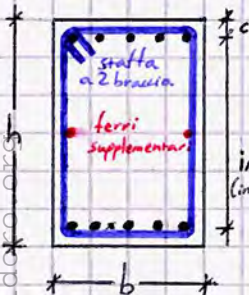
interasse massimo = 300 mm;

$\phi_{\text{min, statte}} = 6 \text{ mm}$;

interasse max, statte $\leq \min \begin{cases} 33 \text{ cm} \\ 12 \phi_{\text{min, longitudinali}} \end{cases}$ in condizioni STATICHE

in zona sismica si hanno norme più restrittive sull'interasse tra le statte, con un passo ridotto in prossimità dei nodi.

Consideriamo un'armatura longitudinale $\phi 12 \Rightarrow A_{\phi 12} = 1,13 \text{ cm}^2 \Rightarrow \frac{A_s + A'_s}{A_{\phi 12}} \sim 10$ ferri (5 in fascia superiore, 5 in fascia inferiore)



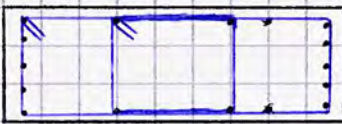
Considerando un copriferro di 3 cm, si ha $b = 30 \text{ cm}$ ed $h = 40 \text{ cm}$. Calcoliamo l'interasse massima della sezione:

$$i_{\text{max, sez}} = \frac{h - 2c}{n - 1} = \frac{40 - 2 \cdot 3}{10 - 1} = 3,4 \text{ cm} > 300 \text{ mm} \Rightarrow \text{si aggiungono dei ferri FUORI CALCOLO lungo } h \text{ per limitare l'interasse tra 2 ferri consecutivi (ferri supplementari), della stessa classe di diametro del ferro longitudinale standard.}$$

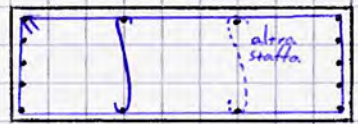
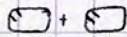
I ferri supplementari, oltre che da rinforzo, fungono da ripiego allo spancimento delle statte dovuto allo sforzo normale, limitando la possibilità di distacco del copriferro (ferro di parete).

L'angolo di legatura di una statta è sempre di 135° rispetto all'orizzontale.

Nel caso di setti (ad es. 30×90), una sola statta determinerebbe problemi di instabilità; per un miglior confinamento ed una maggiore duttilità si considerano statte a 4 braccia o statta a 2 braccia con tirantini intermedi (di più scomoda realizzazione, stalsati negli strati consecutivi e applicati a statte alternate \rightarrow una sì, una no)



staffa a 4 bracci



staffa a 2 bracci + tirantini



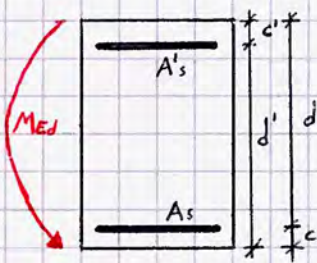
Comportamento a flessione del CLS-A

I stadio: valgono i principi della SDC, la sezione è interamente reagente; si calcolano σ_c , σ_s e σ'_s per poi confrontare σ_c con f_{cd} e le due σ_s con f_{yd} ; nei calcoli inoltre si considera come coefficiente di omogeneizzazione $n = E_s/E_c$.

II stadio: valgono i principi della SDC, dunque anche in questo caso si effettua un confronto in termini di tensione. Essendo la sezione inevitabilmente parzializzata, poiché si assume la regione compressa come sezione reagente risulta particolarmente complessa l'explicitazione di E_c , ne segue che si assume come valore convenzionale del coefficiente di omogeneizzazione $n = 15$.

III stadio: la verifica si effettua secondo la teoria degli stati limite, dunque dal confronto delle caratteristiche interne della sollecitazione; essendo la sezione parzializzata occorre determinare la posizione dell'asse neutro per poi poter condurre il confronto $M_{Ed} \leq M_{Rd}$.

I stadio - verifica



Definita l'altezza utile della sezione $d = h - c$, definire le classi dei materiali e fissati b , h , A_s , A'_s si verifica se la sezione ipotizzata sopporta il momento di progetto M_{Ed} (assegnato dallo schema statico).

In particolare, si assume in questo caso:

CLS: C25/30

Acc: B450C

f_{yk} , valore caratteristico della tensione di snervamento

$$f_{yd} = \frac{450}{1,15} = 391 \text{ N/mm}^2$$

Obiettivo in una verifica di una sezione è il calcolo delle tensioni nel CLS, nell'acciaio teso e nell'acciaio compresso; ipotizzando una direzione ad M_{Ed} (ad esempio opposta rispetto al disegno) si ha che:

σ_c : di compressione (sezione parzializzata) $\rightarrow < 0$

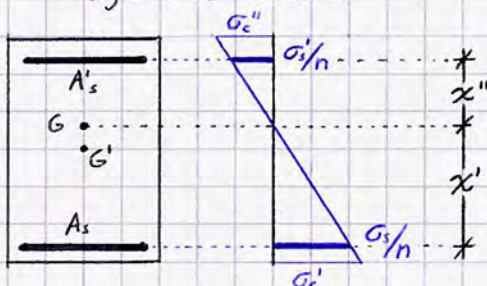
σ_s : di trazione $\rightarrow > 0$

σ'_s : di compressione $\rightarrow < 0$

Verifica: $\sigma_c = \frac{M}{I} x \leq f_{cd}$; $\sigma_s = n \sigma_c \leq f_{yd}$
 $\sigma'_s = n' \sigma_c \leq f_{yd}$

in genere $\sigma_s \neq \sigma'_s$ poiché non è detto che le armature siano distribuite egualmente tra fascia superiore ed inferiore.

x è la distanza tra il baricentro della sezione tesa ed il baricentro della sezione; a seconda della valutazione di σ_s o σ'_s si seleziona una distanza o la sua complementare; se le distanze sono uguali le formule logicamente coincidono:



In questo caso $A'_s > A_s$; tra le due σ_s/n si verifica logicamente la più gravosa. Inoltre, G è il baricentro della sezione mentre G' il baricentro geometrico. Si ha che:

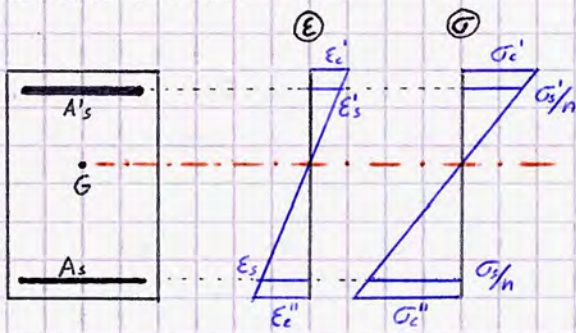
$$\sigma_s = n \frac{M}{I} x' \leq f_{yd}$$

$$\sigma'_s = n \frac{M}{I} x'' \leq f_{yd}$$

Sono noti h, c, n, M ; bisogna calcolare I .

$$\text{Se } G \equiv G'; A_s = A'_s; \sigma_c' = \sigma_c''; \sigma_s = \sigma'_s \Rightarrow \sigma_c = \frac{M}{I} \cdot \frac{h}{2}; \sigma_s = \sigma'_s = n \cdot \frac{M}{I} \cdot \left(\frac{h}{2} - c\right)$$

Considerando $A's > A_s$:



Si osserva che:

$$\sigma_c'' > \sigma_c'$$

$$\sigma_s > \sigma_s'$$

Inoltre, si deduce che la determinazione di x discende dal teorema del Varignon: il momento statico - somma delle forze agenti (o masse, o aree) per le loro distanze rispetto ad un asse passante per il polo di riferimento è uguale alla risultante delle forze (masse, aree) moltiplicate per la distanza x , assumendo che l'asse sia parallelo al bordo superiore della sezione:

$$x = \frac{A_i \cdot d_i}{A_{tot}}$$

Con un procedimento analogo si valuta il centro di rigidità delle strutture in zona sismica

Si ha quindi che:

$$x = \frac{S_x}{A} = \frac{b \cdot h \cdot \frac{h}{2} + n A_s \cdot d + n A_s' \cdot c}{b \cdot h + n(A_s + A_s')}$$

⚠ n!

Omogeneizzazione dell'area rispetto ad A_c

Valore maggiore dell'area compressiva; poiché però $\sum A_s \sim 1\% A_c$ tale incremento è trascurabile.

$$I = b \cdot \frac{x^3}{3} + b \cdot \frac{(h-x)^3}{3} + n A_s' (x-c)^2 + n A_s (d-x)^2 = b \frac{h^3}{12} + b h (\frac{h}{2} - x)^2 + n A_s' (x-c)^2 + n A_s (d-x)^2$$

dal teorema di Huyghens-Streiner, essendo trascurabile l'inertia baricentrica dei tendini.

Il calcolo del momento d'inertia può essere valutato dividendo la sezione in due rettangoli definiti dall'asse neutro o applicare Huyghens-Streiner.

Ne segue che:

$$\sigma_c'' = \frac{M_{Ed} (h-x)}{I}$$

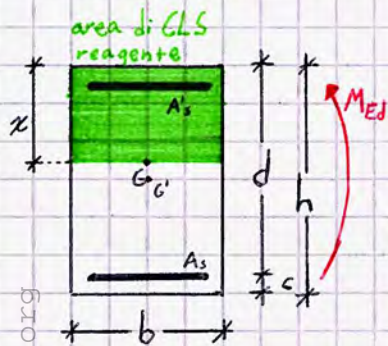
$$\sigma_c' = \frac{M_{Ed} x}{I}$$

$$\sigma_s' = n \frac{M_{Ed}}{I}$$

$$\sigma_s = n \frac{M_{Ed}}{I}$$

più gravose in questa applicazione

Flessione al II stadio



Supponiamo che siano assegnati i materiali e la geometria della sezione; supponiamo inoltre che $A's > A_s$. Valutiamo la posizione del baricentro considerando il momento statico rispetto ad esso:

$$\sum A_i \cdot d_i = A \cdot x$$

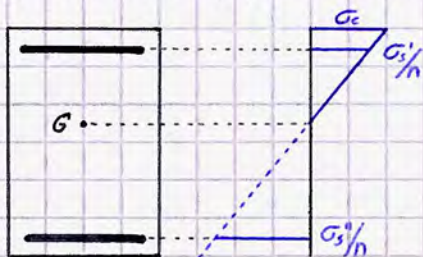
se l'asse considerato passa per il baricentro della sezione, $x=0 \rightarrow A \cdot x=0 \rightarrow \sum A_i \cdot d_i = 0$. Dunque:

$$\sum A_i \cdot d_i = 0 \Leftrightarrow -b \cdot x \left(\frac{x}{2}\right) - n A_s' (x-c) + n A_s (d-x) = 0$$

compressione trazione

L'equazione ammette due soluzioni; di cui l'unica accettabile è quella > 0

Una volta nota la x , si calcola il momento d'inertia e le tensioni agenti per poi procedere come nel caso precedente:

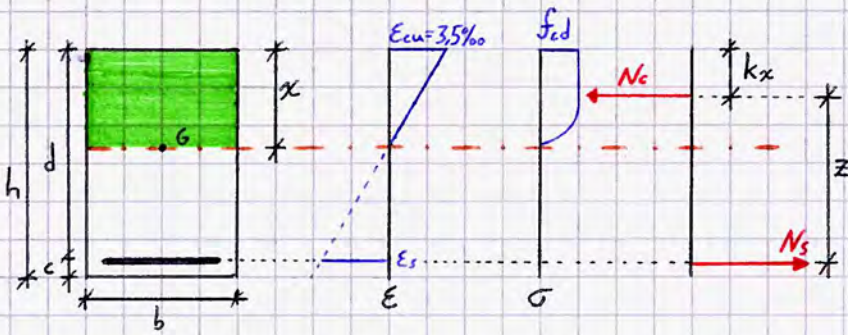


$$I(x) = b \frac{x^3}{3} + n A_s' (x-c)^2 + n A_s (d-x)^2$$

$$\sigma_c = \frac{M_{Ed} \cdot x}{I(x)} ; \sigma_s' = n \frac{M_{Ed}}{I(x)} (x-c) ; \sigma_s = n \frac{M_{Ed}}{I(x)} (d-x)$$

E si confrontano le tensioni con f_{cd} e f_{yk} .

Flessione al III stadio



Si considerano due casi differenti:

- Si considera unicamente l'armatura tesa;
- Si include anche l'armatura compressa.

Come evidente dagli schemi a fianco, si ottengono delle risultanti dello stato di sollecitazione che, poiché $N_s = N_c$ per l'equilibrio alla traslazione, danno luogo a una coppia interna di braccio Z (braccio della coppia interna).

Ne segue che $M_{Rd} = N_c \cdot Z = N_s \cdot Z \geq M_{Ed}$.

$$N_c = N_s \Rightarrow -N_c + N_s = 0 \Rightarrow -bx f_{cd} \beta + A_s f_{yd} = 0 \Rightarrow x = \frac{A_s f_{yd}}{b \cdot f_{cd} \beta}$$

$$N_c = \underbrace{b \cdot x \cdot f_{cd}}_{\text{Area resistente}} \cdot \underbrace{\beta}_{\text{fattore di riempimento } \beta = 0,81}$$

La distanza tra la risultante degli sforzi di compressione ed il bordo della sezione, detta kx , ha di norma la seguente espressione:

$$kx = 0,416x$$

Il fattore di riempimento β tiene conto del fatto che la distribuzione effettiva delle tensioni σ non è uniformemente pari a f_{cd} ma ha un andamento a parabola rettangolo.

$$N_s = A_s \cdot f_{yd}$$

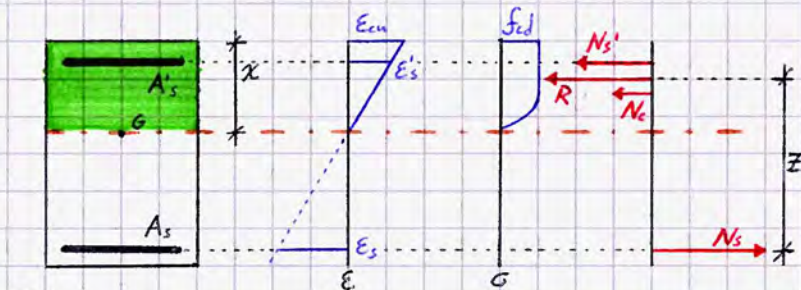
Di norma, l'acciaio teso snerva tranne quando si tende ad $A_s = 4\% A_{tot}$, più complesso.

Nota kx , essendo noto il punto di applicazione di N_c è possibile conoscere automaticamente Z :

$$Z = (d - kx)$$

Da cui, noto Z , $M_{Rd} = b \cdot x \cdot f_{cd} \cdot \beta (d - kx) = A_s f_{yd} (d - kx)$

e si effettua la classica verifica $M_{Ed} \leq M_{Rd}$.



Poiché in questo caso $N_c + N'_s \sim N_s$, si può confondere Z con quella calcolata in precedenza invece di determinare l'effettivo punto di applicazione della forza risultante delle risultanti di compressione R . Si ha quindi che $N_s - N'_s - N_c = 0$.



$$N_c = -b \cdot x \cdot \beta \cdot f_{cd}$$

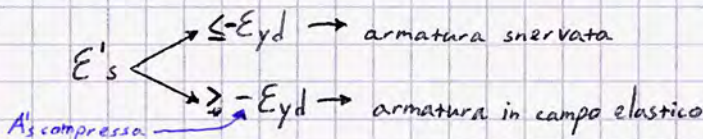
$$N_s = f_{yd} \cdot A_s$$

$$N'_s = \begin{cases} f_{yd} \cdot A'_s & \text{se l'armatura è snervata} \\ s' f_{yd} A'_s & \text{se l'armatura è ancora in campo elastico, con } s' = \frac{\sigma'_s}{f_{yd}} \end{cases}$$

Per valutare se A'_s presenta acciaio snervato o meno si valuta la curvatura della sezione, pari alla pendenza dello stato deformativo:

$$\chi = \frac{\epsilon_{cu}}{x} = \frac{\epsilon'_s}{x-c} = \frac{\epsilon_s}{d-x}$$

Nota x dunque è nota χ , da cui è possibile valutare $\epsilon'_s = \chi \cdot (x - c)$. Da un confronto tra ϵ'_s ed ϵ_{yd} si comprende se l'armatura è snervata, valutando N'_s di conseguenza. In particolare:



La determinazione di χ si effettua ipotizzando inizialmente che A_s' sia snervata; ne segue che $N_s' = f_{yd} \cdot A_s'$. Effettuando un equilibrio alla traslazione delle risultanti, si ha:

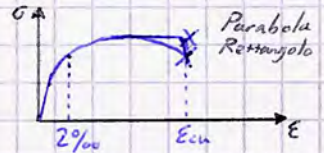
$$-N_c - N_s' + N_s = 0 \Rightarrow -b \cdot \chi \cdot f_{cd} \cdot \beta - f_{yd} A_s' + f_{yd} A_s = 0 \Rightarrow \chi = \frac{-f_{yd} (A_s - A_s')}{f_{cd} \cdot b \cdot \beta}$$

In campo elastico, per il legame costitutivo elastico lineare:

$$s' = \frac{\sigma_s'}{f_{yd}} = \frac{E \cdot \epsilon_s'}{f_{yd}}$$

Inoltre, $\frac{\epsilon_{cu}}{\chi} = \frac{\epsilon_s'}{\chi - c} \Rightarrow \epsilon_s' = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi} (\chi - c)$, da cui $\epsilon_s' = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi} (\chi - c) \leq \epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E} \approx 2\text{‰} \equiv$ comportamento a snervamento del CLS

Ne segue che se $\chi \geq 2,27c$, l'armatura compressa è **SNERVATA** salvo travi torsamente armate o travi a spessore. Se detta condizione non è verificata si calcola s' semplicemente nel calcolo di N_s' o dal calcolo di ϵ_s' : calcolato s' si ricava nuovamente χ :



$$A_s' \cdot \sigma_s' = A_s' \cdot s' \cdot f_{yd}$$

$$s' = \epsilon_s' \cdot E$$

$$\epsilon_s' = \frac{\epsilon_{cu}}{\chi} (\chi - c)$$

$$-b \cdot \chi \cdot \beta \cdot f_{cd} - A_s' \cdot \frac{\epsilon_{cu}}{\chi} (\chi - c) + A_s f_{yd} = 0$$

equazione di II grado in χ (equilibrio alla traslazione e rotazione)

M_{Rd} si ricava imponendo l'equilibrio alla rotazione della sezione: di norma si sceglie come polo rispetto cui valutare l'equilibrio il punto di applicazione di N_c , da cui:

$$M_{Rd} = N_s' (k\chi - c) + N_s (d - k\chi) \geq M_{Ed}$$

Di norma nel progetto si fissa $\chi = 0,25h$ per garantire sufficiente duttilità e lo snervamento dell'armatura compressa.

$$A_s f_{yd} [A_s f_{yd} \cdot s']$$

$$s' = \frac{\epsilon_s' E}{f_{yd}} \quad \chi(x-c) \quad \frac{\epsilon_{cu}}{\chi}$$

⚠ Equilibrio a traslazione $\rightarrow \chi$

Equilibrio a rotazione $\rightarrow M_{Rd}$

Valutazione di caratteristiche combinate della sollecitazione ($N < 0$ presso- e $N > 0$ tensoflessione)

Nel caso in cui il bivettore del momento applicato alla sezione esaminata giace parallelamente all'asse x [y] si parla di tenso/pressoflessione semplice; altrimenti si tratta di tenso/pressoflessione deviata (la cui risoluzione avviene tramite una scomposizione per componenti).

Definendo il piano ortogonale al bivettore del momento M , si è definito il piano di sollecitazione; la sua traccia in una generica sezione si dice asse di sollecitazione.

È possibile inoltre definire l'eccentricità $e = M_i/N$ in maniera tale da poter definire la distanza tra il punto di applicazione della tensione normale e il baricentro della sezione.

In base alla posizione dell'asse neutro, la retta parallela all'asse di sollecitazione consente di definire l'andamento delle distribuzioni di $\sigma - \epsilon$.

La valutazione del legame tra deformazione della sezione e curvatura χ viene effettuata tramite formula monomie derivanti da calcoli integrali:

$$e_n = \frac{I_n}{S_n}$$

prima relazione monomia

$$E \cdot \chi_s = \frac{N}{S_n} = \frac{M_n}{I_n} = \frac{N \cdot e_n}{I_n}$$

Nello studio dello stato di sollecitazione si utilizza la formula di Navier accoppiata ad una formula derivante dalla seconda formula monomia:

$$\sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I_x} y \pm \frac{M_y}{I_y} x \quad ;$$

$$\sigma = \frac{N}{S_n} \cdot s = \frac{N \cdot e_n}{I_n} \cdot s$$

Particolarmente importante nel caso di caratteristiche combinate della sollecitazione è comprendere il punto di applicazione dello sforzo normale N , in particolare rispetto al nocciolo d'inerzia: considerando i raggi di nocciolo e_1, e_2 tramite cui, individuato il baricentro, è possibile conoscere polo e antipolo.

In particolare, se lo sforzo normale è applicato sul vertice superiore del nocciolo, l'asse neutro della sezione sarà tangente al bordo inferiore della sezione (e viceversa):

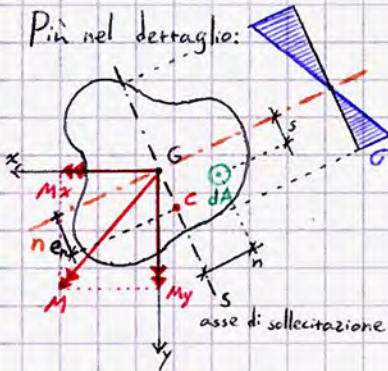


$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y = 0;$$

$$\frac{N}{A} + \frac{(-N \cdot e_1)}{I_x} y = 0 \Rightarrow e_1 = \frac{I_x}{A \cdot d_{G, \text{interiore}}}$$

$d_{G, \text{interiore}}$
distanza tra G e il bordo inferiore della sezione

Più nel dettaglio:



- Se il vettore del momento M ha due componenti ci si riferisce a pressoflessione composta, altrimenti si tratta di pressoflessione semplice.
- L'asse di sollecitazione è sempre ortogonale all'asse neutro $\Rightarrow s \perp n$
- È importante determinare la posizione del centro di sollecitazione C , in cui è applicato lo sforzo normale (risultante della distribuzione delle σ).
- L'eccentricità di C rispetto al baricentro della sezione determina uno spostamento dell'asse neutro, retta antipolare di C rispetto al baricentro stesso: minore è l'eccentricità di C , maggiore è la distanza di n da G .

$$e_x = \frac{M_x}{N}; \quad e_y = \frac{M_y}{n} \quad \text{eccentricità di } C \text{ da } G \text{ calcolata per componenti}$$

• È importante definire inoltre le distanze tra asse neutro e generica area infinitesima $dA(s)$ e tra dA e asse della sollecitazione (n), in maniera tale da poter desumere le formule monomie.

• Ricordando la teoria della Scienza delle Costruzioni:

$$\epsilon = \frac{N}{EA} + \frac{M_x}{EI_x} y - \frac{M_y}{EI_y} x$$

poiché $\epsilon \cdot E = \sigma$ nel L.C.E.L., si ricava facilmente σ :

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x$$

formula di Navier

• Formule monomie:

$$\epsilon = \frac{d\epsilon}{ds} \cdot s = \chi_s \cdot s$$

$$\sigma = E \cdot \epsilon = E \chi_s \cdot s$$

Curvatura della sezione; definisce l'inclinazione del segmento che rappresenta la distribuzione delle σ

• Definizione delle caratteristiche della sollecitazione:

$$1) N = \int \sigma dA = E \chi_s \int s dA = E \chi_s S_n$$

Momento statico rispetto all'asse neutro

$$2) M_n = N \cdot e_n = \int \sigma \cdot s dA = E \chi_s \int s^2 dA = E \chi_s I_n$$

Momento flettente

Eccentricità rispetto all'asse neutro (in termini infinitesimi è pari ad s)

$$3) M_s = N \cdot e_s = \int \sigma \cdot n dA = E \chi_s \int s \cdot n dA = 0$$

essendo $s \perp n$, $s \cdot n = 0$; c'è solo una componente di M

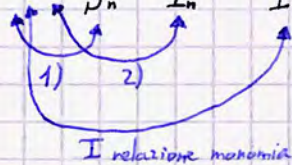
Da questi calcoli derivano le due relazioni monomie qui presentate:

$$e_n = \frac{M_n}{N} = \frac{E \chi_s I_n}{E \chi_s S_n} = \frac{I_n}{S_n}$$

I relazione monomia

$$E \chi_s = \frac{N}{S_n} = \frac{M_n}{I_n} = \frac{N \cdot e_n}{I_n}$$

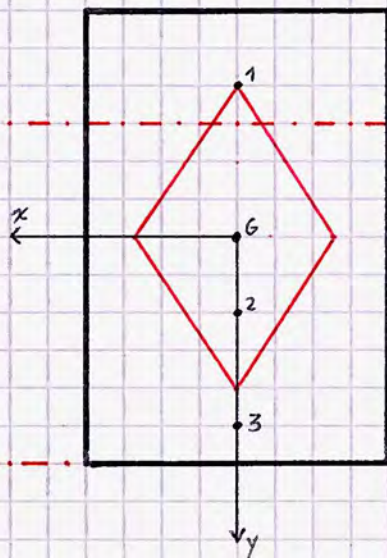
II relazione monomia



I relazione monomia

Sapendo che $\sigma = \chi_s \cdot s \cdot E$, si ha dunque che $\sigma = \frac{N}{S_n} \cdot s = \frac{N \cdot e_n}{I_n} \cdot s$

n(2)



n(3)

n(1)

Nello schema a fianco si osserva una ricapitolazione della relazione tra punto e retta antipolare; nei casi 1 e 2 si osserva che la sezione non è parzializzata, dunque interamente compressa [tesa]. Nel caso rimanente, essendo la sezione parzializzata, si avrà una sezione parzialmente compressa e parzialmente tesa.

Se il centro di sollecitazione C coincide con il baricentro della sezione, l'asse neutro sarà una retta impropria e la distribuzione delle tensioni sarà uniforme.

Nel caso di pressoflessione retta, le relazioni tra tensione e caratteristiche della sollecitazione si semplificano come segue:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e_x}{I_x} \cdot y$$

$$\sigma = \frac{N}{S_n} \cdot s = \frac{N \cdot e_n}{I_n} \cdot s$$

Per comprendere la posizione del centro di sollecitazione è necessario valutare i raggi di nocciolo: in questo modo si comprende se la sezione è parzializzata o meno.

Individuare la posizione dell'asse neutro coincide con la determinazione del luogo dei punti in cui $\sigma = 0$, dunque:

$$\sigma = 0 \Leftrightarrow \frac{N}{A} + \frac{(-N \cdot e_1)}{I_x} \cdot d_{G_i, \text{int}} = 0;$$

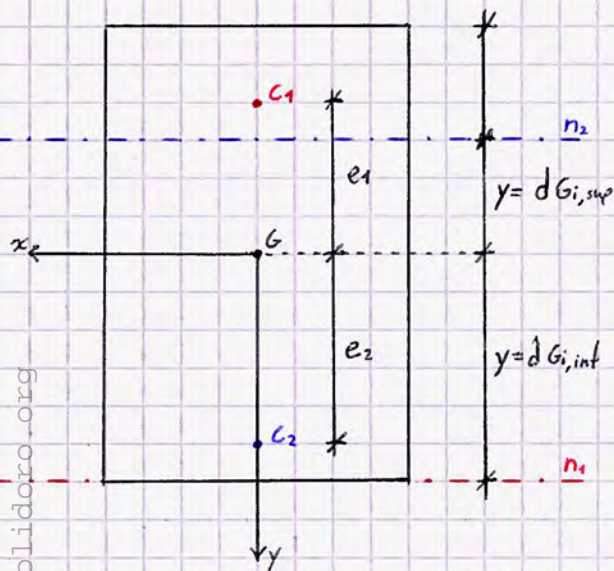
$$e_1 = \frac{I_x}{A \cdot d_{G_i, \text{int}}} \quad \text{distanza tra } C_1 \text{ e } G$$

Ricordando che $\rho = \sqrt{\frac{I_x}{A}}$ raggio d'inerzia, si ha che:

$$e_1 = \frac{\rho^2}{d_{G_i, \text{int}}}$$

Analogamente, per ottenere e_2 si ipotizza che N sia applicato in C_2 ; si ha che:

$$e_2 = \frac{I_x}{A \cdot d_{G_i, \text{sup}}} = \frac{\rho^2}{d_{G_i, \text{sup}}} \quad \text{se } n \text{ coincide con il bordo superiore della sezione}$$



I stadio

Fissiamo come classi dei materiali:

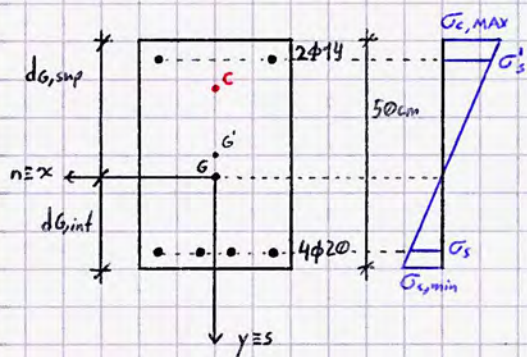
$$\text{CLS} \rightarrow \text{C25/30}$$

$$\text{Acc} \rightarrow \text{B450C}$$

Assumiamo le seguenti sollecitazioni agenti:

$$M \equiv M_x = 50 \text{ kNm}$$

$$N = -100 \text{ kN}$$



Occorre attuare le seguenti verifiche:

1) Verifica a pressoflessione

2) Verifica a fessurazione \rightarrow essendo $\sigma_{trazione} \leq f_{ctk}$ la verifica è soddisfatta

$$\text{In generale, si ha che } \sigma_c = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y.$$

Procedimento operativo di verifica:

- Determinare il baricentro della sezione G ;
- Calcolare l'inerzia della sezione rispetto al baricentro G ;
- Determinare le tensioni agenti nel CLS e nell'acciaio.

È logico osservare che G è più prossimo al bordo inferiore della sezione in virtù della diversa distribuzione delle armature. Si ha quindi che:

$$y = \frac{S}{A} = d_{G,sup}$$

$$d_{G,int} = h - d_{G,sup}$$

$$\begin{aligned} A &= A_c + n(A_s + A'_s) \approx 1604 \text{ cm}^2 \\ S &= A_c \cdot \frac{h}{2} + nA'_s \cdot c + nA_s \cdot d = 41430 \text{ cm}^3 \\ &\quad \begin{array}{l} \downarrow \text{copriferro} \\ \downarrow \text{distanza utile} \end{array} \\ d_{G,sup} &= \frac{S}{A} = 26 \text{ cm} \Rightarrow d_{G,int} = h - d_{G,sup} = 24 \text{ cm} \end{aligned}$$

$$I = \frac{b \cdot d_{G,sup}^3}{3} + \frac{b \cdot d_{G,int}^3}{3} + nA'_s (d_{G,sup} - c)^2 + nA_s (d_{G,int} - c)^2$$

inerzia calcolata considerando i due rettangoli delimitati dall'asse neutro e le inerzie non baricentriche delle armature (le inerzie baricentriche sono trascurabili).

Definito il copriferro c è possibile determinare la posizione dell'asse neutro; dunque le tensioni agenti:

$$\sigma_{c,max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} d_{G,sup} \quad ; \quad \sigma'_s = n \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{I} (d_{G,sup} - c) \right)$$

$$\sigma_{c,min} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} d_{G,int} \quad ; \quad \sigma_s = n \left(\frac{N}{A} + \frac{M}{I} (d_{G,int} - c) \right)$$

Poiché $f_{ctk} = 2,16 \text{ MPa}$ (resistenza a trazione del CLS, dovuta alla flessione), essendo $\sigma_{\min} > f_{ctk}$ occorre progredire nella analisi passando al II stadio.

II stadio

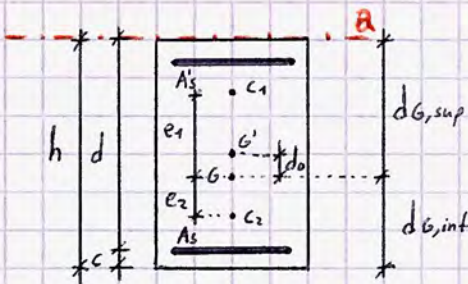
Occorre effettuare i seguenti accorgimenti:

- Poiché si assume che il CLS non abbia più resistenza a trazione, occorre prestare attenzione al segno dello sforzo normale nella distribuzione.
- A seconda della posizione del punto di applicazione dello sforzo normale rispetto al nocciolo d'inertia si parla eventualmente di piccola eccentricità (N interno al nocciolo) o grande eccentricità (N esterno al nocciolo)

① N interno al nocciolo, sezione tesa:

Se la sezione è interamente tesa, il CLS non reagisce.

Proseguiamo come nel caso precedente:



$$d_{G,sup} = \frac{S_{sup}}{A}$$

$$S'_{sup} = A' \cdot c + A_s \cdot d \quad \text{momento statico rispetto al bordo superiore [m}^2 \cdot \text{m]}$$

$$e_1 = \frac{I}{A \cdot d_{G,int}} ; \quad e_2 = \frac{I}{A \cdot d_{G,sup}} ; \quad \rho^2 = \frac{I}{A}$$

$$I = A' (d_{G,sup} - c)^2 + A_s (d_{G,int} - c)^2$$

rispetto all'asse passante per il baricentro della sezione G

$$e = \frac{M}{N} - d_0 = \frac{M}{N} - (d_{G,sup} - h/2)$$

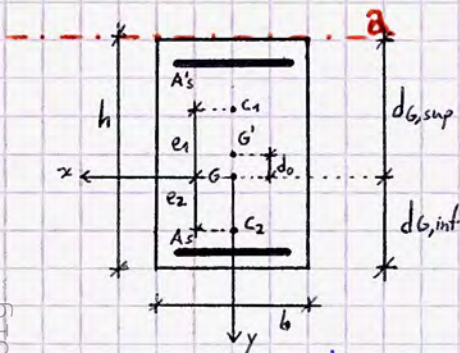
Si ha che C è interno al nocciolo $\Leftrightarrow e_1 \leq e \leq e_2$.

$$\sigma_s = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} y = \frac{N}{A} + \frac{N \cdot e}{I} y$$

\downarrow s in trazione

con $y = \begin{cases} d_{G,int} - c \Leftrightarrow \sigma_s \\ d_{G,sup} - c \Leftrightarrow \sigma'_s \end{cases}$

② N interno al nocciolo, sezione compressa:



In questo caso l'area del CLS è tutta reagente:

$$A = A_c + n(A_s + A'_s) = bh + n(A_s + A'_s)$$

$$S_{sup} = bh \cdot \frac{h}{2} + nA'_s \cdot c + nA_s \cdot d$$

$$d_{G,sup} = \frac{S_{sup}}{A} \rightarrow d_{G,int} = h - d_{G,sup}$$

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + (bh) \left(d_{G,sup} - \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{nA_s (d_{G,int} - c)^2 + nA'_s (d_{G,sup} - c)^2}{H-S \text{ su } A_s, A'_s \text{ trascurando le inerzie baricentriche}}$$

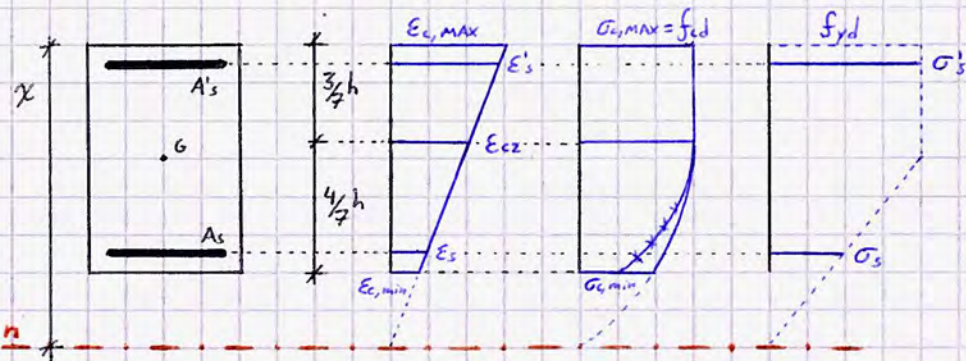
Huygens-Steiner su A_c

$$e_1 = \frac{I_x}{A \cdot d_{G,int}} ; \quad e_2 = \frac{I_x}{A \cdot d_{G,sup}}$$

raggi di nocciolo (rispetto a centri di sollecitazione "limite")

$$e = \frac{M}{N} - d_0 = \frac{M}{N} - (d_{G,sup} - h/2)$$

② Sezione tutta compressa



Analogamente a quanto osservato in precedenza, è possibile definire le deformazioni nelle barre di armatura come segue:

$$\frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{c2}} = \frac{h-c}{\frac{4}{7}h} \Rightarrow \epsilon'_s = \frac{h-c}{\frac{4}{7}h} \epsilon_{c2}$$

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{c2}} = \frac{c}{\frac{4}{7}h} \Rightarrow \epsilon_s = \frac{c}{\frac{4}{7}h} \epsilon_{c2}$$

x si ricava per tentativi, in maniera tale da verificare la seguente uguaglianza:

$$N_c + N'_s + N_s = N_{Ed} \quad (\sum N = 0)$$

in cui:

• N_{Ed} è noto;

• $N_c = -\beta \cdot b \cdot x \cdot f_{cd}$

con $\beta = \begin{cases} 0,81 & \leftrightarrow \text{sezione parzializzata} \\ 1,00 & \leftrightarrow \text{sezione tutta compressa } (x \geq h) \end{cases}$

• $N_s = \sigma_s \cdot A_s = f_{yd} \cdot A_s$ (armatura snervata) $[\epsilon_s \cdot E_s \cdot A_s$ (armatura in campo elastico)]

• $N'_s = \sigma'_s \cdot A'_s = -f_{yd} \cdot A'_s$ (armatura snervata) $[-\epsilon'_s \cdot E'_s \cdot A'_s$ (armatura in campo elastico)]

Nota la x , è possibile valutare il momento resistente della sezione (M_{Rd}):

$$M_{Rd} = -N_c \left(\frac{h}{2} - kx \right) + (N_s - N'_s) \left(\frac{h}{2} - c \right) \quad \text{equilibrio alla rotazione rispetto a G}$$

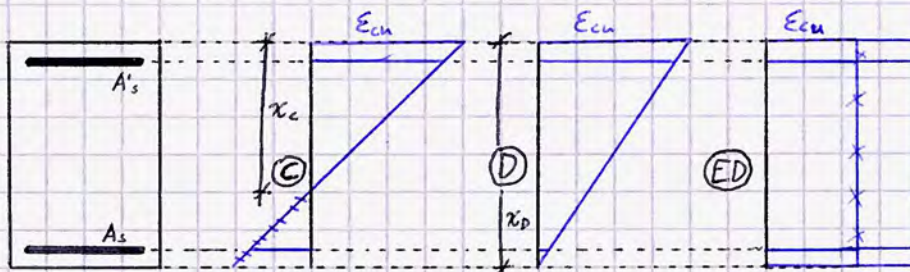
$k = \begin{cases} 0,416 & \leftrightarrow \text{sezione parzializzata} \\ 0,500 & \leftrightarrow \text{sezione tutta compressa} \end{cases}$

Si osserva che la verifica a pressoflessione al III stadio viene sostanzialmente ricondotta ad una ordinaria verifica a flessione.

Valutato M_{Rd} , si effettua la verifica $M_{Ed} \leq M_{Rd}$.

③ Sezione ~~tutta~~ tesa (armature reagenti, entrambe snervate) o ai massimi valori di compressione (ϵ_{cu})

Occorre valutare il dominio di resistenza: di norma, $A'_s \neq A_s$.



$$N = A_s f_{yd} + A'_s f_{yd}$$

$$M = A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right) + A'_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

Si osserva che:

$$A_s = A'_s \Leftrightarrow M = 0$$

[≠] [≠]

In particolare, $M_{<} > 0 \Leftrightarrow A_s > A'_s$

Valutiamo i vari diagrammi di distribuzione delle deformazioni per definire nel dettaglio le sollecitazioni agenti.

Diagramma (C)

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{cu}} = \frac{d-x}{x} \Rightarrow \epsilon_s = \frac{d-x}{x} \epsilon_{cu}$$

$$\frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{cu}} = \frac{x-c}{x} \Rightarrow \epsilon'_s = \frac{x-c}{x} \epsilon_{cu}$$

Ne segue che:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \begin{cases} -f_{yd} \Leftrightarrow \epsilon_s \leq -\epsilon_{yd} \\ \epsilon_s \cdot E_s \Leftrightarrow -\epsilon_{yd} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} \Leftrightarrow \epsilon_s \geq \epsilon_{yd} \end{cases} \\ \sigma'_s &= \begin{cases} -f_{yd} \Leftrightarrow \epsilon'_s \leq -\epsilon_{yd} \\ \epsilon'_s \cdot E_s \Leftrightarrow -\epsilon_{yd} \leq \epsilon'_s \leq \epsilon_{yd} \\ f_{yd} \Leftrightarrow \epsilon'_s \geq \epsilon_{yd} \end{cases} \end{aligned}$$

Dunque,

$$N = -\beta \cdot b \cdot x \cdot f_{cd} + A_s \sigma_s - A'_s \sigma'_s$$

$$M = -\beta \cdot b \cdot x f_{cd} \left(\frac{h}{2} - k \cdot x \right) + A_s \sigma_s \left(\frac{h}{2} - c \right) - A'_s \sigma'_s \left(\frac{h}{2} - c \right) \quad \begin{aligned} \beta &= 0,810 \\ k &= 0,416 \end{aligned}$$

Diagramma (D)

è identico al caso precedente, ma con $x=h$

$$\frac{\epsilon_s}{\epsilon_{cu}} = \frac{c}{h} \Rightarrow \epsilon_s = \frac{c}{h} \epsilon_{cu}$$

$$\frac{\epsilon'_s}{\epsilon_{cu}} = \frac{d}{h} \Rightarrow \epsilon'_s = \frac{d}{h} \epsilon_{cu}$$

Per valori usuali del copriferro c , l'armatura inferiore è in campo elastico mentre quella superiore è snervata.

$$N = -\beta b h f_{cd} + \underbrace{\epsilon_s E_s \cdot A_s - f_{yd} A'_s}_{\text{LCEL}} = -\beta \cdot b \cdot h \cdot f_{cd} + \frac{c}{h} \epsilon_{cu} E_s A_s - f_{yd} A'_s$$

$$M = -\beta b h f_{cd} \left(\frac{h}{2} - k \cdot h \right) + \frac{c}{h} \epsilon_{cu} E_s A_s \left(\frac{h}{2} - c \right) - f_{yd} A'_s \left(\frac{h}{2} - c \right) \quad \begin{aligned} \beta &= 1,000 \\ k &= 0,500 \end{aligned}$$

Diagramma (ED)

$$\epsilon_s = \epsilon'_s = \epsilon_{cu}$$

$$\sigma_s = \sigma'_s = f_{yd}$$

$$N = -b \cdot x \cdot f_{cd} + A_s f_{yd} - A'_s f_{yd}$$

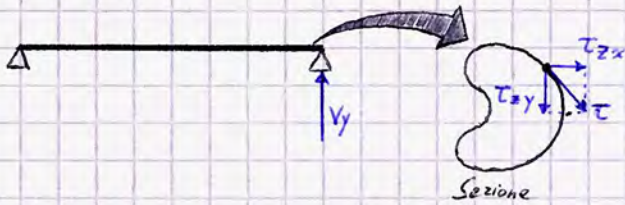
$$M = A_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right) - A'_s f_{yd} \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

Essendo la sezione tutta compressa, con diagramma delle tensioni costante, il braccio del contributo di momento offerto dal CLS è nullo

Taglio nel CLS

Per la valutazione del taglio nel CLS occorre innanzitutto individuare un congruo modello di comportamento; mentre nella SdC esso si studia indipendentemente dalle altre caratteristiche di sollecitazione, nel caso specifico del CLS-A lo studio del taglio è accoppiato allo sforzo normale in virtù della diversa area reagente nei vari stadi di sollecitazione. Ne segue che di norma nelle travi in CLS-A è sempre presente un legame T-M.

Mentre nella SdC si utilizza la teoria del De Saint Venant, in TdC lo studio del taglio si effettua tramite la trattazione semplificata di Jourawsky:

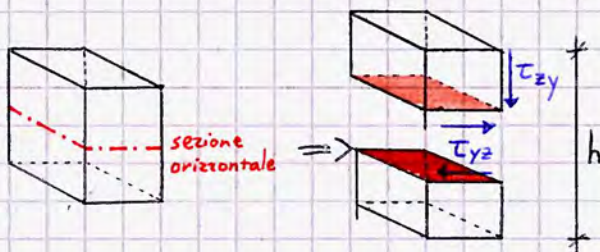


Per l'equilibrio:

$$\sum \tau_{zx} = 0$$

$$\sum \tau_{zy} = V_y$$

Per analizzare nel dettaglio le tensioni e la loro distribuzione si studia il conio elementare:



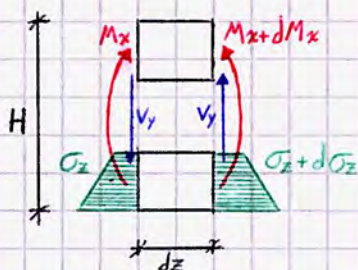
$\tau_{yz} = \tau_{zy}$ tensione di scorrimento, la sua risultante è una forza di scorrimento. Queste tensioni sono da valutare in sezioni miste Acciaio-CLS (dove sono presenti i connettori) o nelle travi in CLS-A (sezioni di scorrimento).

Per l'equilibrio alla rotazione,

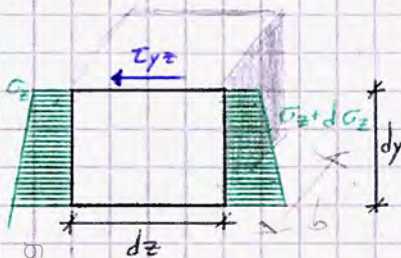
$$dM_x = V_y \cdot dz$$

M_x provoca delle tensioni $\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} \cdot y$ (Navier)

per l'equilibrio alla traslazione, $d\sigma_z = \frac{M_x + dM_x}{I_x} \cdot y - \frac{M_x}{I_x} \cdot y = \frac{dM_x}{I_x} \cdot y = V_y \cdot \frac{dz}{I_x} \cdot y$



Ed è dunque definito il legame tra taglio e sforzo normale. Avendo imposto l'equilibrio alla traslazione orizzontale sul conio, definendo la sezione orizzontale [corda] è possibile analizzare il regime tensionale nella parte inferiore del conio; per l'equilibrio, si ricava che:



$$\tau_{yz} \cdot \underbrace{b \cdot dz}_{\text{area}} = \int \underbrace{d\sigma_z \cdot b \cdot dy}_{\text{area}} \Rightarrow \tau_{yz} \cdot b \cdot dz = \int \frac{V_y dz}{I_x} y \cdot b \cdot dy;$$

$$\tau_{yz} \cdot b \cdot dz = \frac{V_y dz}{I_x} \int y \cdot b \cdot dy;$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_y dz}{I_x \cdot b dz} \cdot S_x;$$

$$\tau_{yz} = \frac{V_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} = \tau_{zy} \quad \text{Formula di Jourawsky}$$

Nella formula di Jourawsky:

- V_y deriva dalla risoluzione dello schema statico delle travi;
- I_x è il momento d'inerzia dell'intera sezione della trave;
- b ; S_x in genere dipendono dalla sezione e dalla corda: S_x è per definizione il momento statico rispetto all'asse baricentrico dell'area sottesa dalla corda, b è costante in una sezione rettangolare ma varia nelle altre sezioni (ad esempio nei profili a doppio T).

Nel calcolo inoltre si assume che τ sia costante lungo la sezione; in realtà i suoi valori maggiori sono alle estremità della sezione ma essendo maggiori del 2-3% in sezioni strette e del 10% in sezioni larghe si trascura detta discrepanza.

Per calcolare le tensioni tangenziali massime - e la corda corrispondente - si applica la formula di Jourawsky puntando a massimizzare S_x .

Nel caso di una sezione rettangolare, si ha che le tensioni tangenziali massime si registrano in corrispondenza del baricentro; nota N_c come risultante delle tensioni normali σ si ha:

$$N_c = \int \sigma_z \cdot b \cdot dy \quad \text{sapendo dalla teoria della flessione che } \sigma_z = E \chi_y \cdot y,$$

$$N_c = \int E \chi_y \cdot y \cdot b \cdot dy = E \chi_y \int y \cdot b \cdot dy = E \chi_y S_x \Rightarrow S_x = \frac{N_c}{E \chi_y}$$

Sapendo inoltre l'espressione del momento flettente $M_x = E I_x \chi_y \Rightarrow \chi_y = \frac{M_x}{E I_x} \Rightarrow I_x = \frac{M_x}{E \chi_y}$;

Si ottiene che $\frac{S_x}{I_x} = \frac{N_c}{M_x} = \frac{1}{z}$ con z pari al braccio della coppia interna (p. 71)

\downarrow
 $M_x = N_c \cdot z$

Riprendendo la formula di Jourawsky,

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \frac{V_y \cdot S_x}{I_x \cdot b} = \frac{V_y}{z \cdot b} \Rightarrow \tau_{\max} = \frac{V_y}{0,9d \cdot b}$$

\downarrow
 $\approx 0,9d$

Come è noto, anche nel caso del taglio il comportamento del CLS-A viene studiato nei 3 stadi:

I stadio

Il modello di comportamento del CLS al I stadio, come è noto (p. 66) è un modello lineare in cui il CLS è in grado di reagire a trazione; ne segue che nell'analisi delle tensioni tangenziali è possibile applicare Jourawsky riferendo S_x ed I_x alla sezione omogeneizzata, Attnando il seguente procedimento:

1. Calcolo del baricentro della sezione;
2. Determinazione di I_x ed S_x .

Considerando una sezione rettangolare di dimensioni $b \times h$ con armature simmetriche - ovvero il cui baricentro coincide col baricentro geometrico della sezione - si individua una corda per il calcolo di S_x ; definita y la distanza tra corda e baricentro si distinguono 2 casi:

- ① Corda compresa tra le due armature, ovvero $-\frac{h}{2} + c < y < \frac{h}{2} - c$:

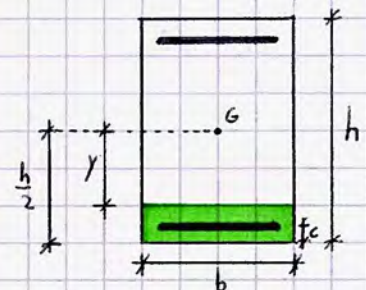
$$S_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\frac{\left(\frac{h}{2} - y \right)}{2} + y \right] + n A_s \left(\frac{h}{2} - c \right)$$

omogeneizzazione dell'armatura, inclusa nell'area sottesa da S_x

- ② Corda compresa tra l'armatura inferiore e il bordo della sezione:

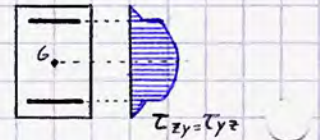
$$S_x = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\frac{\left(\frac{h}{2} - y \right)}{2} + y \right]$$

non contribuisce l'armatura



Si osserva dunque che l'andamento delle tensioni tangenziali nel CLS-A cambia in funzione dell'area considerata; essendo I_x riferito alla intera sezione esso è logicamente costante, caratteristico della sezione stessa, con espressione:

$$I_x = \frac{bh^3}{12} + n(A_s + A'_s) \left(\frac{h}{2} - c \right)^2$$



Ne segue che S_x comporta la variazione delle tensioni tangenziali lungo l'altezza della sezione; in generale l'andamento della loro distribuzione è parabolico, con un salto in corrispondenza dell'armatura e un punto di massimo al baricentro della sezione.

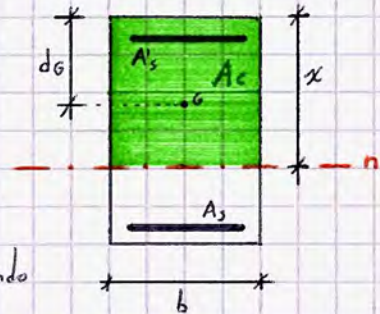
Se le armature sono asimmetriche, il baricentro della sezione omogeneizzata tende verso l'armatura di area maggiore, non coincidendo più col baricentro geometrico; tale viraggio si verifica anche col punto di massimo della distribuzione delle tensioni tangenziali; anche in questo caso il ΔS_x varia in corrispondenza delle due armature.

II Stadio

Il CLS non reagisce a trazione; a compressione assume un comportamento ancora lineare. Nel calcolo delle tensioni tangenziali ci si riferisce alla sola sezione reagente e omogeneizzata; bisogna quindi valutare lo sforzo normale nella sezione per comprendere se e come è parzializzata.

Si utilizza il seguente procedimento:

1. Calcolare la posizione dell'asse neutro (come nella pressoflessione);
2. Calcolare il baricentro della sezione;
3. Determinare I_x ed S_x .



Una volta individuato l'asse neutro, il calcolo del baricentro viene condotto valutando la distanza d_G del punto dalla cima della sezione, ovvero:

$$d_G = \frac{S_{sup}}{A} \quad \text{con } S_{sup} \text{ momento statico della sezione omogeneizzata rispetto al bordo superiore della sezione}$$

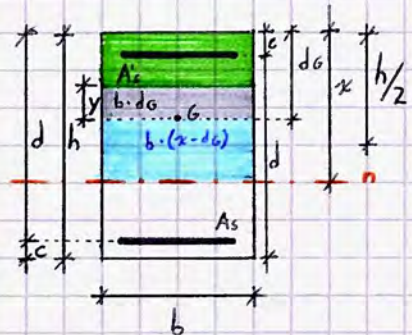
In cui:

$$A = \frac{b \cdot x}{A_c} + nA_s + nA'_s$$

$$S_{sup} = b \cdot x \cdot \frac{x}{2} + nA'_s \cdot c + nA_s \cdot d \quad \text{supponendo } c=c'; d=d'$$

Nota d_G è identificato il baricentro della sezione omogeneizzata reagente, dunque è possibile calcolare I_x ed S_x . Per il calcolo del momento statico occorre fissare una corda nella sezione reagente; essendo tipicamente le fibre inferiori delle travi in trazione per semplicità si preferisce calcolare il momento statico dell'area sovrastante la corda per semplicità di calcolo: per l'equilibrio la somma dei due momenti statici rispetto a qualsiasi corda è 0, dunque il calcolo di S_x si ottiene indirettamente:

$$S_{x,sup} = b \left(\frac{h}{2} + y \right) \left(d_G - \frac{h}{2} + y \right) + nA'_s (d_G - c) \Rightarrow S_{x,int} = -S_{x,sup}$$



Per quanto riguarda il momento d'inerzia della sezione, il calcolo si effettua parzializzando la sezione in due rettangoli rispetto all'asse baricentrico (fino all'asse neutro); si valutano dunque le somme dei momenti d'inerzia valutati rispetto al bordo comune alle due regioni individuate, asse baricentrico della sezione reagente complessiva.

$$I_x = \frac{b \cdot d_G^3}{3} + \frac{b \cdot (x - d_G)^3}{3} + nA'_s (d_G - c)^2 + nA_s (d - d_G)^2$$

Calcolando $\tau_{zy,MAX} = \frac{V_y}{0,9d \cdot b}$ è possibile valutare l'andamento delle tensioni tangenziali nella sezione e la relativa variazione al variare della sollecitazione agente.

Nel caso di una sezione soggetta a tensoflessione, l'area reagente non presenta tensioni tangenziali tali da eguagliare $\tau_{zy,MAX}$ in quanto il baricentro della sezione si trova al di sotto dell'asse neutro; il diagramma dunque si interrompe.

Armature a taglio

Per comprendere a fondo le dinamiche di progetto delle armature a taglio occorre comprendere l'andamento delle lesioni a taglio nelle travi: le tensioni tangenziali infatti determinano delle sezioni in trazione che, in presenza di solo taglio, determinano lesioni a 45° dal bordo fino all'asse neutro della sezione. Se al taglio è accoppiato un momento $M > 0$, per la azione combinata flessione + taglio si osserverà un passaggio graduale da lesioni verticali ad un andamento a 45° (in virtù delle tensioni tangenziali maggiori) fino all'asse neutro.

Per valori ridotti di tensione e carico agente si definisce che le lesioni nascono per flessione; nel caso in cui si prevedano lesioni a taglio occorre progettare delle armature specifiche in grado di aumentare la resistenza dell'elemento strutturale evitandone una rottura fragile a taglio.

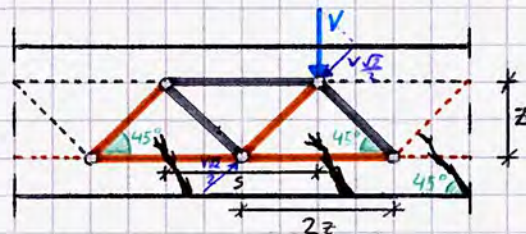
Le armature a taglio sono dunque delle armature apposite per fronteggiare detta sollecitazione, distinte tra stoffe e ferri piegati. I secondi, molto utilizzati in passato poiché seguivano l'andamento del momento flettente grazie ad una sagomatura a 45° che riprende esattamente la giacitura degli sforzi di taglio, era più efficiente e caratterizzata da un minor uso dei materiali; con l'aumento del costo della manodopera si è preferita l'adozione delle stoffe, che fungono inoltre da cerchiatura aumentando la resistenza della sezione.

La norma oggi si incentra sul progetto di stoffa, fissandone il numero minimo.

Il modello di calcolo su cui si basa il progetto delle armature a taglio è il traliccio di Morsch, traliccio isostatico avente come arco corrente inferiore l'armatura tesa, i puntoni compressi costituiti dal CLS tra due lesioni a taglio consecutive (schematizzate come aste) e il corrente superiore è costituito dal CLS compresso; ne segue che i tiranti del traliccio coincidono con le stoffe [armature a taglio].

① Ferri piegati

- L'altezza del traliccio è pari al braccio della coppia interna;
- La trave è soggetta a un taglio V ;
- Le lesioni a taglio sono inclinate di 45° sull'orizzontale;
- I puntoni sono inclinati a 45° sull'orizzontale, la distanza tra due puntoni consecutivi è $2z$;
- Scomponendo V come sforzo assiale sulle aste, si ottiene che sul ferro piegato agisce una forza pari a $V\sqrt{2}$.



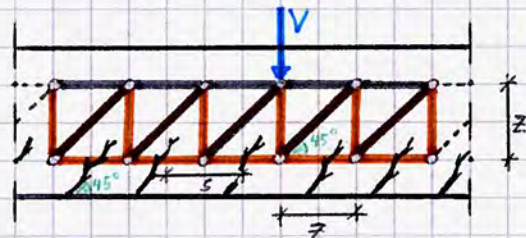
Fissato un valore di lunghezza di trave s in cui è presente l'armatura a taglio, si valuta il numero di armature a taglio presenti:

$s = 2z \Rightarrow 1$ ferro; definendo A_{sag} = area del ferro sagomato, e fissando $\sigma = f_{yd}$ (fase di progetto) si ha:

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma} \Rightarrow A_{sag} = \frac{V\sqrt{2}}{f_{yd}} \quad \text{area teorica di progetto}$$

② Stoffa

Essendo le stoffe a giacitura verticale, la distanza tra due puntoni è pari a z .



$$s = z \quad F = V \quad (\text{stoffa vert.} \Rightarrow V \text{ è già assiale!})$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \Rightarrow A = \frac{F}{\sigma} \Rightarrow \text{definito } n, \text{ il numero di bracci della stoffa, } A_{stoffs} = \frac{V}{n \cdot f_{yd}} \quad \text{area teorica di progetto}$$

III Stadio

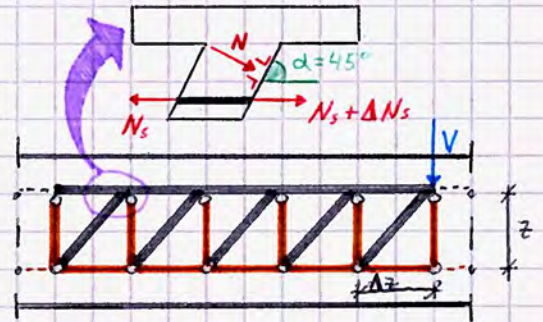
Il CLS ha comportamento non lineare e non reagisce a trazione; si distinguono due differenti casi di studio ed altrettanti modelli:

- Studio del comportamento del materiale in assenza di armatura specifica a taglio → Modello a pettine
- Studio del comportamento del materiale in presenza di armatura specifica a taglio → Modello ad inclinazione variabile

Modello a pettine

La rottura dell'elemento schematizzato a fianco può avvenire:

- Nel puntone in CLS (pressoflessione);
- Nel corrente superiore in CLS (compressione e taglio).



È dunque opportuno valutare la resistenza massima a taglio in entrambi i meccanismi.

Il modello a pettine presenta come "denti" i blocchi di CLS compresi tra due lesioni consecutive a taglio nella trave e come "costola" la parte di CLS compressa della sezione; ciascun dente è unito ai denti adiacenti tramite la armatura longitudinale in fascia inferiore.

Per effettuare le analisi del comportamento del CLS, supponiamo di isolare un singolo dente (come nello schema in alto); si ottiene che:

$$N_s = \frac{M}{z}$$

$$\Delta N_s = \frac{\Delta M}{z}$$

sollecitazioni agenti sulla barra di armatura; in presenza del taglio assumono la formulazione di destra.

$$N_s = V$$

$$\Delta N_s = V \cdot \frac{\Delta z}{z}$$

La variazione di N_s provoca nella sezione resistente del dente (trasversale ad esso) uno sforzo normale N da verificare per valutare la possibilità di rottura dello stesso:

$$N = \Delta N_s \cos \alpha = \Delta N_s \frac{\sqrt{2}}{2}$$

È possibile dunque effettuare la verifica statica del dente, tenendo conto della presenza - oltre ad N - di un momento flettente di intensità $\Delta N_s \cdot y$, con y braccio sempre pari a $d - x - \frac{\Delta z}{4}$. In funzione del taglio, si ha che:

$$M = V \cdot \frac{\Delta z}{z} \left(d - x - \frac{\Delta z}{4} \right)$$

Per il calcolo di V_{Rd} occorre definire l'area della sezione resistente, pari a:

$$A = b \cdot \Delta z \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{b \Delta z}{\sqrt{2}}$$

Analogamente, il modulo di resistenza della sezione sarà pari a:

$$W = \frac{b \left(\frac{\Delta z}{\sqrt{2}} \right)^2}{6} = \frac{b \Delta z^2}{12}$$

Sapendo che $\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W}$, è possibile calcolare le tensioni agenti nella sezione:

$$\sigma = \underbrace{\frac{\Delta N_s \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{b \Delta z}}_{N/A} + \underbrace{\frac{V \Delta z}{z} \left(d - x - \frac{\Delta z}{4} \right) \frac{12}{b \Delta z^2}}_{M/W} = \frac{\Delta N_s}{b \Delta z} + \frac{12 V}{b z \Delta z} \left(d - x - \frac{\Delta z}{4} \right) \Rightarrow \sigma = \frac{V}{b z} + \frac{12 V}{b z} \left(d - x - \frac{\Delta z}{4} \right)$$

È stato osservato sperimentalmente che $\Delta z = d$ e $x = 0,2d$; sostituendo i dati sperimentali nella formulazione teorica del modello si ha che:

$$d - x - \frac{\Delta z}{4} = d - \frac{2}{10}d - \frac{d}{4} = \frac{20 - 4 - 5}{20}d = \frac{11}{20}d$$

Da cui $\sigma = 6,2 \frac{V}{b \cdot d}$ ed è dunque possibile valutare la resistenza a taglio del dente, assumendo che σ coincida con la tensione di resistenza a trazione in flessione del materiale, ovvero imponendo $\sigma = 1,6 f_{ctd}$

Si ha quindi che $V_{Rd} = 0,25 b \cdot d \cdot f_{ctd}$

Ottenuta la resistenza a taglio del dente, occorre valutare quella del corrente compresso sovrastante. Per l'equilibrio alla rotazione, si ha che:

$$V \cdot z = N_c \cdot z \Rightarrow V = N_c$$

Inoltre,

$$\sigma = \frac{N_c}{b \cdot x} ; \tau = \frac{V}{b \cdot x} \Rightarrow \sigma = \tau$$

Questo tipo di regime tensionale è individuato da un **cerchio di Mohr** di centro $(\frac{\sigma}{2}; 0)$ e raggio $R = \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2}$. Si ha quindi che le tensioni principali di trazione hanno per espressione:

$$\sigma_E = \sqrt{(\frac{\sigma}{2})^2 + \tau^2} - \frac{\sigma}{2}$$

Sostituendo τ nella relazione si ha che $\sigma_E = 0,62 \tau = 0,62 \frac{V}{b \cdot x}$

Da cui, imponendo che la tensione di trazione σ_E sia pari alla resistenza a trazione in flessione del materiale, si ha che:

$$V_{Rd} = b \cdot x \cdot 1,6 f_{ctd}$$

Da prove sperimentali a taglio condotte sulle travi si osserva che la resistenza effettiva della trave è maggiore rispetto a quella valutata, in entrambi i meccanismi; ciò è dovuto ai seguenti fenomeni:

- **Ingranamento degli inerti:** La superficie dovuta a una lesione non è mai liscia, presenta una scabrezza dovuta anche alla presenza degli inerti che generano sollecitazioni attrittive che limitano lo scorrimento. L'effetto è più efficace in lesioni di ridotta apertura, ovvero in travi poco alte.
- **Effetto spinotto:** la deformazione angolare dell'armatura longitudinale nella lesione funge da vincolo, limitando eventuali spostamenti ed aperture ulteriori della lesione.
- **Effetto di sforzo assiale:** Lo sforzo assiale comprime i denti adiacenti tra loro, offrendo una resistenza maggiore.

Le NTC considerano i seguenti parametri per la valutazione di sezioni non armate a taglio:

$$V_{Rd,c} = \text{MAX} \left\{ \begin{aligned} & \left(0,18 K \cdot \sqrt[3]{100 \rho_l \cdot f_{ck}} + 0,15 \sigma_{cp} \right) \cdot b_w \cdot d = V_{Rd,c,1} \\ & V_{Rd,c,2} = \left(0,035 \sqrt{K^3 f_{ck}} + 0,15 \sigma_{cp} \right) \cdot b_w \cdot d \end{aligned} \right.$$

ingranamento degli inert
effetto spinotto
tensione di compressione che tiene conto di N

Con: $K = 1 + \sqrt{\frac{200}{d}} \leq 2,00$ parametro legato all'ingranamento degli inert, misurato in mm

↓
Valore massimo (per sezioni meno alte di 20 cm)

$$\rho_l = \frac{A_{sl}}{b_w \cdot d} \leq 0,02$$

parametro legato all'effetto spinotto, misura la percentuale geometrica di armatura longitudinale nella sezione

$$\sigma_{cp} = \frac{N_{Ed}}{A_c} \leq 0,2 f_{cd} \quad [N/mm^2]$$

Modello ad inclinazione variabile

Nel traliccio ad inclinazione variabile si schematizza il fatto che all'aumentare dei carichi agenti la resistenza massima a taglio non è data dal solo CLS: può attivarsi uno dei seguenti meccanismi

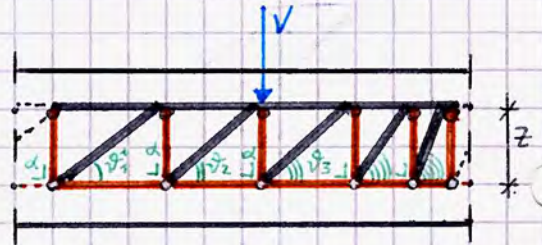
- Si snerva prima l'armatura, poi crolla il puntone in CLS (comportamento variabile del puntone, avente inclinazione variabile);
- Rottura fragile del CLS

Si ricordi che nel modello ad inclinazione variabile puntone e corrente in CLS sono incastrati tra loro.

Si fissano i seguenti parametri:

$\vartheta \rightarrow$ variabile

$d \begin{cases} \rightarrow 45^\circ \Leftrightarrow \text{ferro piegato} \\ \rightarrow 90^\circ \Leftrightarrow \text{statta} \end{cases}$ noto in verifiche/progetti



Altezza del traliccio pari a z, braccio della coppia interna

Trave soggetta a un taglio V

$$\text{Distanza tra due puntoni pari a } z \cotg \vartheta + z \cotg d = z (\cotg \vartheta + \cotg d)$$

Nella valutazione dei due meccanismi di collasso, è importante definire la resistenza a taglio del generico puntone. Sapendo che ϑ è variabile, si ha che:

$$N_c = \frac{V}{\text{sen} \vartheta}$$

$$A_{\text{resistente, puntone}} = b_w \cdot [(z \cotg \vartheta + z \cotg d) \text{sen} \vartheta]$$

Il valore oltre cui si verifica una rottura per schiacciamento del puntone è $v_1 \cdot f_{cd}$, in cui v_1 è un coefficiente riduttivo che tiene conto della contemporaneità di azioni ortogonali sul puntone.

EC2 $\rightarrow v_1 = 0,6 \frac{f_{ck}}{200}$ dipende dalla resistenza del materiale

NTC2018 $\rightarrow v_1 = 0,5$

Si ha rottura per compressione del puntone se si raggiungono valori di taglio così definiti:

$$\frac{V}{\sin \vartheta} = V_1 f_{cd} \Leftrightarrow V_{Rdm} = \sin^2 \vartheta \cdot b_w (z \cot \vartheta + z \cot \alpha) V_1 f_{cd}$$

Essendo $\frac{1}{\sin^2 \vartheta} = 1 + \cot^2 \vartheta$, $V_{Rdm} = \frac{b_w (z \cot \vartheta + z \cot \alpha) V_1 f_{cd}}{1 + \cot^2 \vartheta}$ resistenza MEDIA a taglio del puntone in CLS a schiacciamento

Si ha in definitiva che:

$$V_{Rd} = V_{Rdm} \cdot \alpha_{cv}$$

↳ Coefficiente correttivo che tiene conto del contributo benefico della compressione; varia in funzione del rapporto tra σ_{cp} e f_{cd} :

Non c'è compressione $\longrightarrow \alpha_{cv} = 1$

$0 \leq \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,25 \longrightarrow \alpha_{cv} = 1 + \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}$

$0,25 \leq \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \leq 0,50 \longrightarrow \alpha_{cv} = 1,25$

$0,50 \leq \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}} \leq 1 \longrightarrow \alpha_{cv} = 2,5 \left(1 - \frac{\sigma_{cp}}{f_{cd}}\right)$

Valutiamo ora nel dettaglio la resistenza a taglio al III stadio in base alle armature a taglio selezionate.

① Ferri sagemati $\longrightarrow \alpha = 45^\circ$, $\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cot \alpha = 1$

Consideriamo un tratto di lunghezza s ;

$$N_{sag} = \frac{V}{\sin \alpha}$$

$$A_{sag} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot (z \cot \vartheta + z \cot \alpha)$$

$$\frac{N_{sag}}{A_{sag}} = f_{yd} \Leftrightarrow N_{sag} = A_{sag} f_{yd} \Rightarrow \frac{V}{\sin \alpha} = A_{sag} f_{yd}$$

Ne segue che $V_{Rd,sag} = \sin \alpha A_{sag} f_{yd} = \sin \alpha \frac{A_{sw}}{s} (z \cot \vartheta + z \cot \alpha) f_{yd}$

Confrontando $V_{Rd} = V_{Rdm} \cdot \alpha_{cv}$] la resistenza minima coinciderà con la resistenza a taglio della sezione, da cui si effettua la verifica $V_{Ed} \leq V_{Rd}$

Perché al diminuire di ϑ aumenta $\cot \vartheta$, la norma limita $\cot \vartheta \leq 2,5$. In generale, all'aumentare di $\cot \vartheta$ si riduce V_{Rdm} e aumenta $V_{Rd,s}$; ne segue che il collasso dell'elemento strutturale si raggiunge per un valore di ϑ tale per cui $V_{Rdm} = V_{Rd,s}$: entrambi gli elementi perdono contemporaneamente le proprie caratteristiche di resistenza.

$$V_{Rd,sag} = \frac{A_{sw}}{s \sqrt{2}} \cdot z (1 + \cot \vartheta) f_{yd}$$

$$V_{Rd} = \frac{b_w \cdot z (1 + \cot \vartheta) \cdot 0,5 f_{cd}}{1 + \cot^2 \vartheta} \alpha_{cv}$$

② Statte $\rightarrow \alpha = 90^\circ, \sin \alpha = 1, \cos \alpha = 0, \cotg \alpha = 0$

Sapendo che $V_{Rd, sezione} = \min \begin{cases} V_{Rd, m} \cdot d_{cv} & (CLS) \\ V_{Rd, s} & (Acc) \end{cases}$

$$d_{cv} \cdot V_{Rd, m} = \frac{\alpha_{cv} \sqrt{1 + f_{cd}} \cdot b_w \cdot z \cdot \cotg \vartheta}{1 + \cotg^2 \vartheta}$$

$$V_{Rd, s} = \frac{A_{sw}}{s} \cdot z \cdot f_{yd} \cdot \cotg \vartheta$$

A_{sw} Aspetta, Res

come per i ferri sagomati, ma V è già di per sé assiale rispetto alle statte, dunque non bisogna scomporlo rispetto ad una direzione parallela alla statta \Rightarrow non compare $\sin \alpha$.

In fase di progetto, si ipotizza $\cotg \vartheta = 2,5$ (valore massimo) e si confrontano i due valori di resistenza: se $V_{Rd, s} < V_{Rd, c}$ il comportamento della trave a taglio rispetta la gerarchia delle resistenze, portando all'attivazione di un meccanismo di collasso duttile; altrimenti, si procede come segue:

Si impone $V_{Rd, s} = V_{Rd, m}$ e si valuta $\cotg \vartheta$:

$$\cotg \vartheta = \sqrt{\frac{V_1 f_{cd} b_w}{A_{sw/s} \cdot f_{yd}}} \quad \text{e si verifica che } 1 < \cotg \vartheta < 2,5 \text{ come da norma}$$

Detto procedimento coincide anche con il classico iter di verifica.

In fase di progetto può convenire valutare l'area resistente a taglio A_{sw} dell'armatura, imponendo $V_{Rd, s} = V_{Ed}$ e calcolando in funzione di esso A_{sw} dalla formula:

$$A_{sw} = \frac{V_{Ed} \cdot s}{z \cdot f_{yd} \cdot \cotg \vartheta}$$

fissando $\cotg \vartheta = 2,5$ si calcola $V_{Rd, MAX}$; se è maggiore di V_{Ed} , il procedimento è ben condotto e la sezione resiste per $\vartheta = 2,5$.

In caso contrario, occorre valutare il giusto angolo ϑ imponendo che $V_{Ed} = V_{Rd, MAX}$; ne deriva un'equazione di II grado che consente di individuare ϑ .

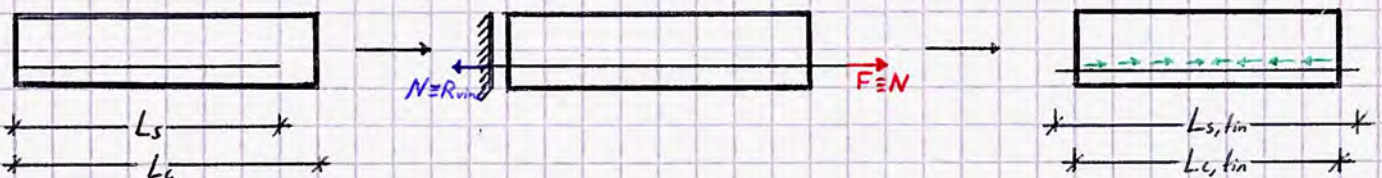
$\Delta R_d < E_d (\Leftrightarrow) \cotg \vartheta = 2,5$ in questo procedimento specifico!

Calcestruzzo Armato Precompresso

Il c.a.p. è un particolare tipo di CLS-A in cui le armature sono costituite da cavi/tretoli/funi in acciaio posti in trazione prima o dopo la maturazione del CLS (costituendo due tipologie differenti di precompresso), successivamente bloccati o tagliati in maniera tale da trasferire lo sforzo applicato ad essi nel CLS come sforzi di compressione, garantendo la possibilità di realizzare elementi strutturali aventi luci maggiori in virtù della forte riduzione (o annullamento) degli sforzi di trazione.

La realizzazione di un elemento in c.a.p. prevede l'inserimento nella cassaforma in cui sarà gettato il CLS di un cavo in gomma di lunghezza L_s , minore rispetto alla lunghezza della trave in CLS, in cui viene successivamente inserito il tretolo - anch'esso di lunghezza L_s - che viene poi posto in trazione tramite una piastra con dispositivi di fissaggio da un lato e un martinetto dall'altro; la tensione nella barra porta ad una deformazione associata ad uno stato tensionale di trazione.

Gettato il CLS, si rilascia il tretolo in maniera tale da trasferire gli sforzi acquisiti nel CLS in virtù della perfetta aderenza tra cavo e calcestruzzo; ciò determina un accorciamento della trave in CLS fino a una lunghezza $L_{c, tin}$; i tretoli si accorciano anch'essi ma, in virtù del ritegno dovuto al CLS, conservano una lunghezza maggiore della lunghezza iniziale L_s .



$\Delta L_{s, tin} = L_{c, tin}!$

Si ha quindi che:

$$\Delta L_s = \frac{N \cdot L_s}{E_s A_s} \implies L_{s,fin} = L_s + \Delta L_s$$

$$\Delta L_c = \frac{N \cdot L_c}{E_c A_c} \implies L_{c,fin} = L_c - \Delta L_c$$

Poiché $L_{c,fin} = L_{s,fin}$, si ha che la differenza tra le lunghezze iniziali dei due componenti si ottiene dalla formula:

$$L_c - L_s = N \left(\frac{L_c}{E_c A_c} + \frac{L_s}{E_s A_s} \right)$$

È dunque possibile valutare lo sforzo normale da applicare alla barra in funzione degli altri parametri: definito il modulo di omogeneizzazione $n = E_s/E_c$, si ha:

$$N = E_s A_s \frac{L_c - L_s}{L_s + L_c \cdot \frac{n A_s}{A_c}} \quad \text{sforzo normale da applicare all'armatura in tensione per garantire che la sezione sia tutta compressa.}$$

Il regime tensionale alla base del c.a.p. si definisce uno stato di sollecitazione autoequilibrato: poiché l'azione del trattolo è equilibrata dalla reazione del CLS, formalmente non è presente alcuno stato di sollecitazione nell'elemento strutturale complessivo. Diverso il caso di altri sforzi interni o del peso proprio.

Logicamente, se le barre tese sono eccentriche rispetto al baricentro della sezione, con detta operazione si determina anche un momento flettente (che può contribuire alla resistenza degli elementi inflessi).

Come anticipato, gli elementi in c.a.p. si dividono in due tipologie a seconda del momento in cui i cavi/trattoli sono posti in trazione rispetto alla maturazione del CLS. In particolare, si distingue tra:

- Elementi in c.a.p. pre-tesi (a fili aderenti), come i travetti prefabbricati per solaio;
- Elementi in c.a.p. post-tesi (a cavi scorrevoli), come le travi da ponte, per capannoni industriali, ...

La classe minima di CLS per realizzare elementi in c.a.p. è il C28/35; oltre a i trattoli gli elementi presentano solitamente un'armatura diffusa aggiuntiva per reagire agli sforzi di taglio e di compressione (spesso elevati su aree ridotte, particolarmente nelle travi) detta armatura di frettaggio: è un'armatura lenta - non tirata - posta in prossimità dell'appoggio (più titta). Ciò perché spesso l'entità della precompressione è molto elevata!

In virtù della particolare dinamica realizzativa degli elementi in c.a.p., la loro resistenza viene valutata in maniera particolarmente cautelativa, con criteri di resistenza in fase di maturazione e in esercizio (a lungo termine, la trave è maturata e vi si applicano i carichi):

- In fase iniziale, $\sigma_c < 0,7 f_{ck,j}$
agente \rightarrow resistenza caratteristica del CLS al giorno j
- In esercizio, $\sigma_c < 0,60 f_{ck}$ in combinazione rara (caratteristica) SLS
 $\sigma_c < 0,45 f_{ck}$ in combinazione quasi permanente

Le misure sono più cautelative in virtù della luce maggiore degli elementi

Nelle zone di ancoraggio per evitare sovradimensionamenti eccessivi si ammette $\sigma_c < 0,9 f_{ck,j}$ in virtù degli elevati sforzi di pre-trazione.

Circa la resistenza a trazione del CLS, dopo il 2005 non sono state più fornite indicazioni progettuali, seguendo l'idea e la filosofia progettuale secondo cui gli elementi in c.a.p. non debbano entrare in trazione o comunque essere soggetti a regimi ridotti di trazione. Nella norma del 2005 si afferma che la resistenza a trazione è al più pari alla resistenza a trazione caratteristica del CLS rapportata a un coefficiente di sicurezza (precedentemente, $\sigma_{t,max} = 0,07 f_{ctk}$).
Comunque, $f_{ctk} \sim 10\% f_{ck}$.

In virtù del particolare regime tensionale degli elementi, l'acciaio delle armature è acciaio armonico, avente un maggior tenore di Carbonio, che determina una maggior resistenza a scapito di una minor duttilità (+ fragile).

Il materiale non presenta uno snervamento ben definito, in quanto il diagramma σ - ϵ è continuo; ne segue che la valutazione di f_y in letteratura è stata fissata in base alla tipologia di elementi costituenti l'armatura:

• Fili: $f_y \equiv f_{p0.1}$, sforzo determinato conducendo la parallela al tratto iniziale in corrispondenza di $\epsilon = 0,1\%$

• Trefoli e trecce: $f_y = f_{p1}$ ($\epsilon = 1\%$; retta verticale); essendo più spessi è ammessa una maggior resistenza, con un criterio più cautelativo.







Per quanto riguarda le deformazioni, l'allungamento massimo dell'acciaio armonico è del 3,5%, contro il 7,5% dell'acciaio per armature standard e il 20% dell'acciaio da carpenteria pesante.

Anche per l'acciaio si effettuano delle verifiche in fase iniziale e in fase di esercizio con gli stessi parametri indipendentemente dal fatto che l'elemento sia pre- o post-teso, considerando un'azione massima ammissibile pari all'80-90% del valore assunto come f_{yk} .

Definita $f_{p,tk}$ la tensione di rottura, si ha che $\Delta(f_{yk} [f_{p0tk}; f_{p1tk}]; f_{p,tk}) = 10 \div 20\% f_{yk} \Rightarrow$ piccola

Le armature per opere in c.a.p. si dividono in:

- fili;  ($\phi 2-10$)
- trecce; 
- trefoli; 
- funi (megatrefoli, costituite da più trefoli accoppiati);
- barre  (usate ad esempio per il rinforzo strutturale di opere snelle in muratura)

Gli elementi in c.a.p. possono essere classificati in relazione al loro grado di precompressione, che può essere:

- Completo: l'elemento in opera non è soggetto a trazione;
- Normale: la trazione nell'elemento è limitata;
- Parziale: si ha una trazione più significativa, sono necessarie armature lente aggiuntive; (appoggi)
- Non precompresso

Sono inoltre presenti più tecnologie di precompressione:

- Interna (alla sezione di CLS): non ispezionabile, meno suscettibile alla corrosione;
- Esterna: visibile a occhio nudo, è possibile tendere nuovamente i ferri in caso di perdite di tenuta ma gli elementi sono più esposti a corrosione;
- Mista: in parte interna, in parte esterna.

Nella tecnologia di post-tensione, il rilascio dei cavi scorrevoli non agisce solo sulla testata dell'elemento in CLS ma lungo tutto lo sviluppo del cavo!

Valutazione delle tensioni in una trave in c.a.p.

In una trave ordinaria in c.a.p., lo stato tensionale deve essere valutato in più sezioni in virtù del fatto che il cavo teso presenta ordinariamente un andamento parabolico lungo lo sviluppo longitudinale della trave; la forza di precompressione varia lungo il cavo per effetto dell'attrito tra i fili e la guaina che contiene il cavo stesso.

Il cavo, posto al livello del baricentro della sezione alle estremità della trave, rientra sempre nel nocciolo d'inerzia o si trova al più sul suo bordo; noto il nocciolo d'inerzia è dunque possibile geometrizzare il cavo, che avrà equazione:

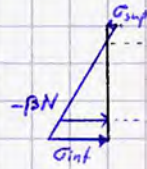
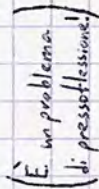
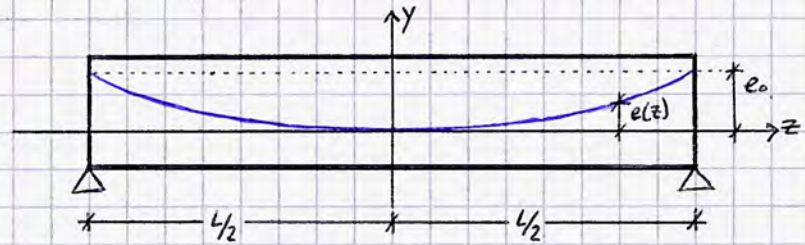
$$e(z) = \frac{4e_0}{L^2} z^2$$

Per valutare le sollecitazioni normali nella sezione di CLS dovuta alla sola precompressione è sufficiente immaginare di sezionare la trave nella sezione da analizzare.

Ad esempio, nella sezione di mezzaria - in cui il cavo è orizzontale e il momento è massimo - si avrà una forza di precompressione al tiro pari a $\beta \cdot N$ che si trasmette come forza di trazione del cavo, trasmettendo attraverso la sezione di CLS la forza di compressione $-N$, uguale e opposta alla forza βN , applicata con l'eccentricità e rispetto al baricentro della sezione; ne segue che ai bordi della sezione agiranno le sollecitazioni:

$$\sigma_{int} = -\frac{\beta N}{A} - \frac{\beta N \cdot e}{W_{int}}$$

$$\sigma_{sup} = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N \cdot e}{W_{sup}}$$



Il coefficiente β , compreso tra 1,15 e 1,35, tiene conto del rilassamento e delle perdite di tensione nell'acciaio, fisiologiche. Poiché di norma N indica la forza di precompressione in esercizio, ovvero a cadute di tensione avvenute, la forza di p.c. al tiro è pari a βN .

$\beta = 1,15 \div 1,35$ tiene conto delle cadute di tensione nel CLS.

A, W_{int}, W_{sup} sono area e moduli resistenti relativi ai bordi della sezione in CLS:

$$W_{int} = \frac{I}{x_{Gint}}$$

$$W_{sup} = \frac{I}{x_{Gsup}}$$

I = momento d'inerzia baricentrico della sezione resistente

Considerando una tipica sezione di trave da precompresso, si osserva che viene prevista una flangia inferiore; essa in realtà accoglie il cavo; la sua larghezza ridotta rispetto all'ala superiore deriva dal fatto che in caso di trazione nella parte inferiore della sezione il CLS non eserciterebbe alcun contributo di resistenza.

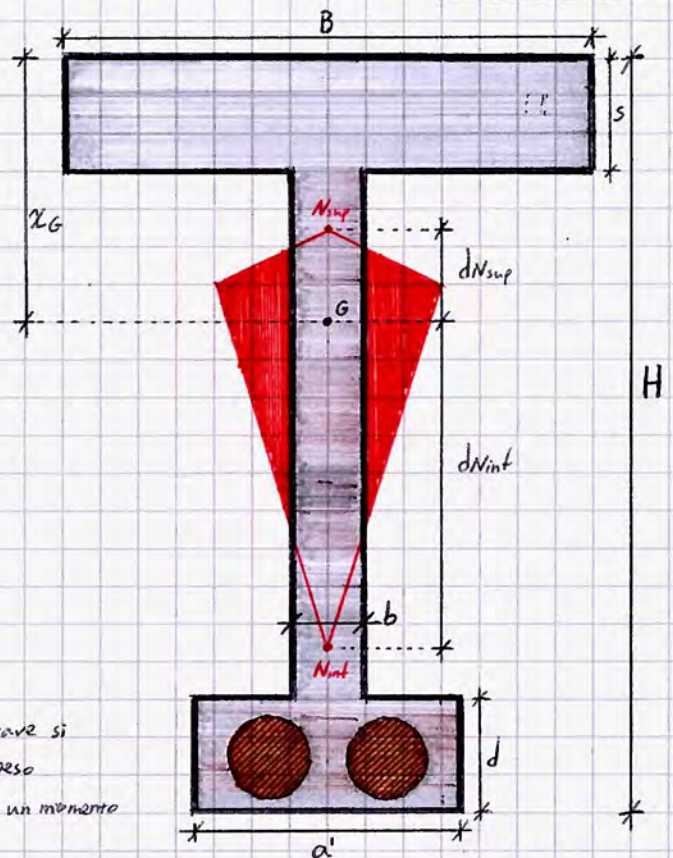
Noti i punti di nocciolo superiore ed inferiore della sezione, posti alle distanze d_{Nsup} e d_{Nint} dal baricentro, è evidente che se il cavo è interno al nocciolo la sezione di CLS della trave sarà tutta compressa; noti i punti di nocciolo si ha per definizione che l'imponendo che l'asse neutro sia tangente al nocciolo):

$$0 = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N \cdot d_{Nsup}}{W_{int}} \Rightarrow d_{Nsup} = \frac{W_{int}}{A}$$

$$0 = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N \cdot d_{Nint}}{W_{sup}} \Rightarrow d_{Nint} = \frac{W_{sup}}{A}$$

Va tenuto presente che all'atto della precompressione la trave si incurva, staccandosi dal suolo tramite che negli appoggi; il peso proprio della trave dunque agisce, applicando in particolare un momento flettente nella sezione di mezzaria, in cui si ha:

$$\sigma_{int}^{TIRO} = -\frac{\beta N}{A} - \frac{\beta N \cdot e}{W_{int}} + \frac{Mg}{W_{int}} ; \quad \sigma_{sup}^{TIRO} = -\frac{\beta N}{A} + \frac{\beta N \cdot e}{W_{sup}} - \frac{Mg}{W_{sup}}$$

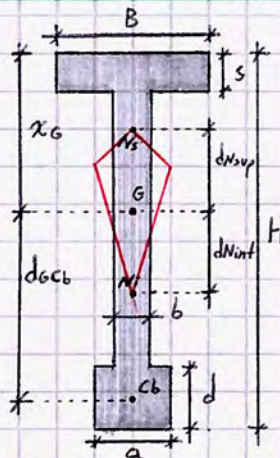


Successivamente al tiro della trave si producono le cadute di tensione per effetto delle deformazioni lente.
 A questo proposito, β assume un'entità maggiore nel caso di elementi a fili aderenti (pre-tesi): negli elementi a cavi scorrevoli (post-tesi) è sempre possibile tendere nuovamente il cavo prima della posa in opera, dunque si assume un minor incremento di N .

Esempio

$$\begin{aligned} B &= 1,00 \text{ m} \\ b &= 0,25 \text{ m} \\ a &= 0,50 \text{ m} \\ s &= 0,25 \text{ m} \\ d &= 0,40 \text{ m} \\ H &= 2,50 \text{ m} \end{aligned}$$

A? G? I?



$$A = B \cdot H - (B-a)(H-s) - (a-b)(H-(s+d)) = 0,913 \text{ m}^2$$

La valutazione della posizione del baricentro si effettua rapportando il momento statico rispetto al bordo superiore della sezione all'area della sezione stessa.

$$S_{sup} = B \cdot H^2 \cdot a - (H-s) \cdot a \left(a - b + \frac{H-s}{2} \right) - b (H-(d+s)) \left(s + \frac{H-(d+s)}{2} \right) = 1,035 \text{ m}^3$$

Da cui, $x_G = \frac{S_{sup}}{A} = 1,134 \text{ m}$

Il momento d'inerzia, come l'area, può essere valutato applicando Huyghens-Steiner su più aree:

$$I_G = \frac{B \cdot H^3}{3} - \frac{(B-b)(H-s)^3}{3} + \frac{a(H-x_G)^3}{3} - \frac{b(H-x_G-d)^3}{3} = 0,663 \text{ m}^4$$

Valutiamo ora i moduli di resistenza per individuare i punti di nocciolo:

$$W_{int} = \frac{I_G}{H-x_G} = \frac{I_G}{x_{G,int}} = 0,485 \text{ m}^3$$

$$W_{sup} = \frac{I_G}{x_G} = \frac{I_G}{x_{G,sup}} = 0,585 \text{ m}^3$$

Da cui:

$$d_{N,int} = \frac{W_{sup}}{A} = 0,64 \text{ m}$$

$$d_{N,sup} = \frac{W_{int}}{A} = 0,53 \text{ m}$$

È dunque possibile calcolare le distanze tra G, Nint, Nsup dal centro Cb del bulbo inferiore (dove è possibile immaginare sia posizionato il cavo):

$$x_{Cb,int} = \frac{d}{2} = 0,20 \text{ m} \Rightarrow d_{Gcb} = (H-x_G) - x_{Cb,int} = 1,166 \text{ m}$$

$$d_{N1cb} = (d_{Gcb} - d_{N,int}) = 0,526 \text{ m}$$

$$d_{N2cb} = (d_{Gcb} + d_{N,sup}) = 1,696 \text{ m}$$

È possibile inoltre fornire una misura di efficienza della precompressione tramite il coefficiente di rendimento della precompressione η :

$$\eta = \frac{\sigma_{so} - \Delta\sigma_s}{\sigma_{so}} = 1 - \frac{\Delta\sigma_s}{\sigma_{so}} = 1 - \frac{\lambda E_s}{E_{so} E_s} = 1 - \frac{\lambda}{E_{so}}$$

ΔE_s , deformazione dovuta al rilassamento dell'acciaio oltre a fenomeni di ritiro e fluage

in cui: σ_{so} = tensione iniziale dell'acciaio nell'elemento in c.a.p.

$\Delta\sigma_s$ = caduta di tensione nell'acciaio a seguito della messa in esercizio

E_{so} = deformazione iniziale nell'acciaio

$\lambda = 0,25 \cdot 10^{-3}$ in genere

Con gli acciai armonici, $\eta = 0,7 \div 0,8$.

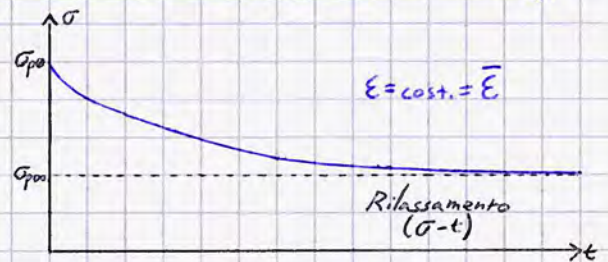
Rilassamento: caduta di tensione nell'acciaio a deformazione costante.

Considerando un cavo teso tra due estremità fisse tale da essere soggetto a una tensione σ_{so} si noterà una riduzione della tensione nel tempo con un andamento analogo al diagramma del fluage.

L'entità della caduta di tensione dovuta al rilassamento è funzione della tensione iniziale; in particolare, per bassi valori di ritiro σ_{so} non si ha rilassamento; all'aumentare della tensione applicata invece esso cresce.

Differenza tecnologica sostanziale tra c.a. e c.a.p. è che mentre nel primo CLS e Acc sono solidali in virtù dell'aderenza sin dall'inizio, nel c.a.p. le deformazioni tra i due materiali sono rese indipendenti sin dall'inizio, tanto che nelle interfacce tra i materiali si generano tensioni di senso opposto.

Solo a presollecitazione completata, dopo l'operazione di iniezione di malta tra Acc e ghaine, i due materiali diventano solidali tra loro.



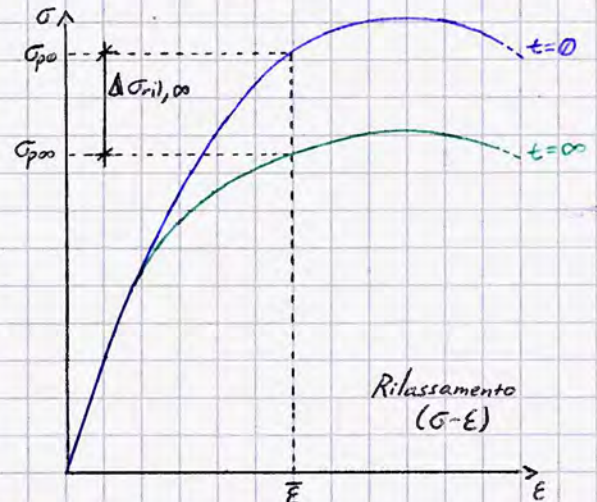
Ritiro: per il calcolo delle cadute di tensione legate al ritiro del CLS è possibile adottare i seguenti valori:

- 0,0003 per elementi precompressi prima di 14 giorni di stagionatura;
- 0,00025 per elementi precompressi dopo almeno 14 giorni di stagionatura.

Definita E_{rit} la deformazione del CLS per ritiro, la caduta di precompressione sarà pari a:

$$\Delta N_{rit} = E_{rit} \cdot E_s \cdot A_s$$

Da cui si osserva la diretta proporzionalità tra la caduta di tensione dovuta a ritiro e l'area di armatura precompressa pre-tesa.



Viscosità: La deformazione lenta sotto carico, depurata dal ritiro, può essere assunta in prima approssimazione pari ad almeno 2 volte la deformazione elastica per le combinazioni quasi permanenti se l'elemento è sollecitato dopo almeno 14 gg di stagionatura e almeno 2-3 volte se l'elemento è sollecitato entro i 14 gg di stagionatura, con valori minori sperimentalmente ammissibili in caso di particolari provvedimenti di maturazione del CLS.

Il calcolo della caduta di tensione per effetto della viscosità va riferito alla tensione che, nella sezione considerata, agisce sulla fibra di CLS posta al livello dell'armatura.

Nelle travi ad armatura pre-tesa, il calcolo della deformazione elastica del CLS (su cui si basa quella differita nel tempo) si basa sul valore assunto dalla tensione nell'acciaio al momento dell'applicazione dello stato di coazione al CLS, desunto dalla curva sperimentale di rilassamento determinata in condizioni simili a quelle esecutive, ponendo attenzione all'influenza di un eventuale riscaldamento per accelerare l'indurimento del CLS sul rilassamento dell'acciaio.

Nata la deformazione elastica E_{ea} per le combinazioni quasi permanenti in corrispondenza della fibra posta a livello del cavo, si ha che:

$$\Delta N_{vis} = \frac{2E_{ea}}{E_{vis}} \cdot E_s \cdot A_s$$

(fenomeno anche noto come fluage)

La normativa IT (DM 9/1/96) consentiva di determinare l'entità della caduta di tensione per rilassamento tramite prove sperimentali, fornendo valori convenzionali di caduta di tensione a tempo infinito a temperatura ambiente (20°C) e per una tensione iniziale $\sigma_{s0} = 0,75 f_{pk}$, riportati nella tabella di seguito.

Tipo di Armatura	$\Delta\sigma_{ril, \infty}$
Filo	0,15 σ_{s0}
Treccia	0,20 σ_{s0}
Tretolo	0,18 σ_{s0}
Barra	0,12 σ_{s0}

Per una tensione inferiore a 0,5 f_{pk} , tale caduta di tensione è nulla; per tensioni comprese tra 0,5 f_{pk} e 0,75 f_{pk} la caduta di tensione per rilassamento varia con legge parabolica con origine in 0,5 f_{pk} e tangente orizzontale. In corrispondenza di 0,75 f_{pk} .

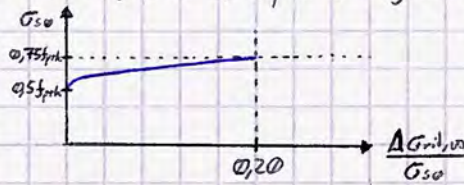
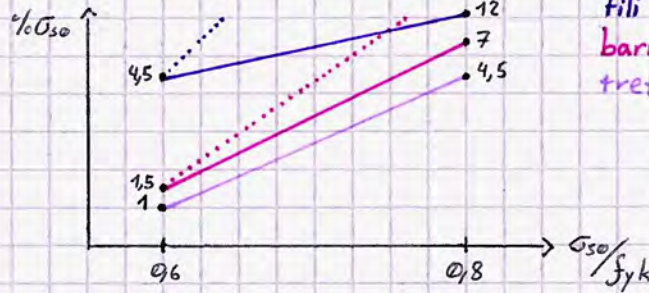


Diagramma dell'andamento di una caduta di tensione per rilassamento in una treccia al variare di σ_{s0}

Nel caso dell'EC2, invece, valgono le seguenti indicazioni:

- Cadute di tensione per rilassamento: si utilizza un grafico per $t = 10000$ h a $T = 20^\circ\text{C}$, moltiplicando il valore ricavato per ottenere le cadute di tensione a tempo infinito.



fili
barre
tretoli

le linee tratteggiate sono una rappresentazione in scala

- Cadute di tensione per ritiro: $\Delta N_{rit} = \epsilon_{rit} E_s A_s$, con $\epsilon_{rit} \sim 0,3 \cdot 10^{-3}$
- Cadute di tensione per effetti viscosi: $\Delta N_{vis} = \epsilon_{vis} E_s A_s$, con $\epsilon_{vis} \sim 2 \epsilon_{el}$

Interdipendenza rilassamento-ritiro-viscosità: Per la contemporanea presenza di ritiro e flange, il rilassamento in realtà non si verifica a deformazione costante ma variabile.

In corrispondenza di detta interdipendenza si desume che le cadute di tensione per rilassamento possono essere ridotte al valore:

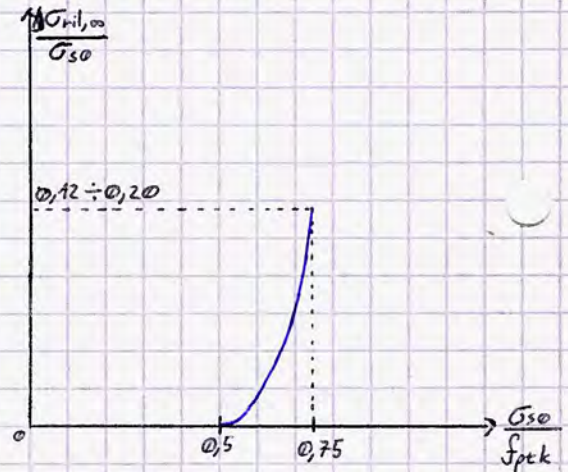
$$\Delta' \sigma_{ril, \infty} = \Delta \sigma_{ril, \infty} \left(1 - \frac{2,5}{2 \epsilon_{el}} \cdot \frac{\Delta \sigma_{sst}}{\sigma_{s0}} \right)$$

In cui $\Delta \sigma_{sst}$ sono le cadute di tensione per ritiro e flange, ~~per~~

ni:

~~ni:~~

Si ha quindi che $\Delta N_{ril} = A_s \cdot \Delta' \sigma_{ril, \infty}$



Ricapitolando, le travi in c.a.p. presentano un'armatura tesa disposta entro un preciso dominio, detto fuso di Guyon, per garantire che la sezione di trave sia sempre tutta compressa; essendo le travi in c.a.p. tipicamente schematizzabili come travi appoggiate-appoggiate in particolare i cavi adottano un andamento parabolico, analogo al diagramma del momento su di esse in maniera tale che la precompressione determini un momento flettente, accoppiato allo sforzo normale massimo in mezz'arco e nullo agli appoggi, opposto al momento dovuto ai carichi applicati.

Una trave pre-tesa viene realizzata tirando il cavo per poi far maturare il CLS; terminata la maturazione vengono tagliate le estremità del cavo, che determina una compressione sulle testate delle travi.

Una trave a cavi scorrevoli invece prevede il posizionamento di una guaina in cui si inserisce il cavo, messo in trazione a fine maturazione tramite dei cunei posti all'estremità dell'elemento che lo bloccano, garantendo una trasmissione degli sforzi in ogni sezione per attrito grazie all'inserimento di una resina a ritiro compensato tra guaina e cavo, che garantisce anche una protezione dalla corrosione.

Per ciò che concerne la trazione, in fase iniziale si assumeva che la resistenza a trazione doveva essere almeno pari al 10% della resistenza a compressione a 15 giorni di maturazione, in assenza di indicazioni oggi si considera un 6-7%.

riccardo.polidoro@poli.it

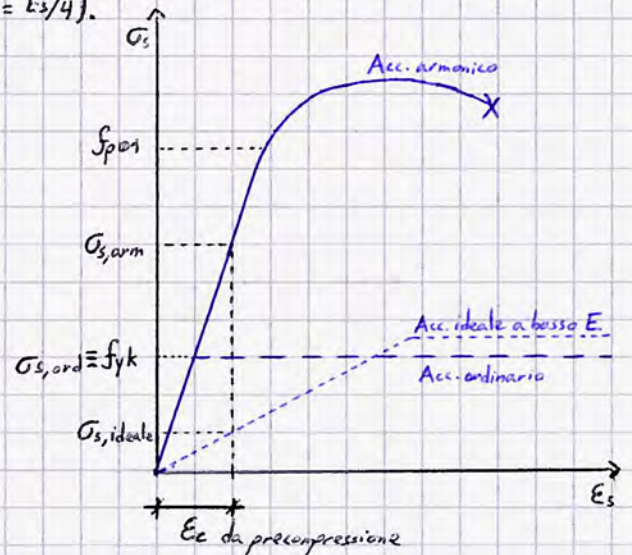
La precompressione nasce attraverso un'elevata inventiva tecnica che si è tradotta in numerose prime applicazioni, tutte fallimentari: ciò era dovuto all'accorciamento delle travi in CLS dovuto agli sforzi di compressione, di circa $0,003$, essendo $E_c = E_s$, si ha che:

$$\sigma_s = 210000 \cdot 0,003 = 630 \frac{N}{mm^2} \quad \text{a fronte di } f_{yk} = \frac{450}{1,15} \frac{N}{mm^2} \text{ per gli acciai dell'epoca ordinaria}$$

Risulta dunque che l'acciaio per c.a.p. deve essere molto più resistente del c.a. a parità di modulo elastico o, idealmente, di resistenza paragonabile al c.a. a fronte di un modulo elastico molto ridotto, che determinerebbe tensioni di trazione pari al 10% di quelle attualmente impiegate (se $E = E_s/4$).

Circa le caratteristiche degli acciai armonici, essi hanno:

- Tensione di rottura $\sim 20000 \text{ N/mm}^2$
- Tensione di snervamento variabile:
 - $f_{p0.01} \sim 1420 \text{ N/mm}^2$
 - $f_{p1} \sim 1800 \text{ N/mm}^2$



Con il taglio dei cavi tesi si ha un accorciamento degli stessi, dunque una caduta istantanea di tensione, cui si aggiungono le cadute lente sotto carico; dette cadute si monitorano tramite la deformazione dei cavi, incidendoli in maniera tale da indurre istantaneamente una deformazione misurabile da uno strumento (si stanno sviluppando dei sensori appositi non invasivi per consentire un monitoraggio strutturale in tempo reale).

Nel progetto di travi in c.a.p., bisogna elaborare sezioni tali da garantire che il cavo in trazione sia incluso nel nocciolo d'inerzia; in seguito si valuta il regime tensionale nella sezione — problema riconducibile ad una pressoflessione — per cui è sufficiente valutare le tensioni sui bordi superiore e inferiore della sezione stessa.

Il rilassamento dell'acciaio è uno dei principali motivi alla base del valore del coefficiente β moltiplicativo della tensione di trazione dei cavi, in quanto esso può determinare l'insorgenza di regimi sollecitativi di trazione in alcune sezioni di trave, demandando la resistenza esclusivamente alle armature lente (evidentemente non progettate per sforzi considerevoli). Il rilassamento a sua volta definisce indirettamente il coefficiente di rendimento della precompressione! Per meglio comprendere il vantaggio dell'utilizzo di acciai armonici a fronte di quanto detto, valutiamo i rendimenti di acciai ordinari e armonici:

• Acc. ordinario: $f_{yk} = 450 \text{ N/mm}^2 \rightarrow f_{yd} = \frac{450}{1,15} = 390 \text{ N/mm}^2$
 $f_{rottura} = 540 \text{ N/mm}^2$

Da cui, $\epsilon_{s0} = \frac{390}{210000} \approx 2 \cdot 10^{-3}$ corrispondente a ϵ_{c2} del diagramma parabola-rettangolo da cui la perfetta aderenza Acc-CLS nel c.a.

Ne segue che $\eta = 1 - \frac{\lambda}{\epsilon_{s0}} = 1 - \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{1,86 \cdot 10^{-3}} = 0,87$

• Acc. armonico: consideriamo un trefolo $\Rightarrow f_{yk} = 1620 \text{ N/mm}^2 \Rightarrow f_{yd} = \frac{1620}{1,15} = 1409 \text{ N/mm}^2$

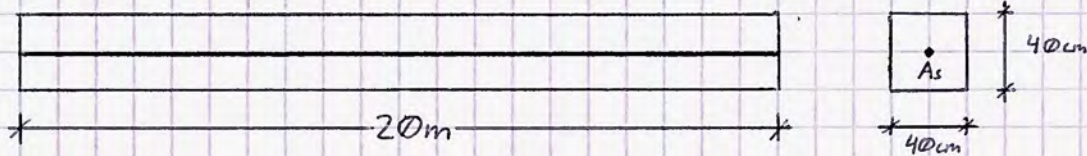
$\epsilon_{s0} = \frac{1409}{210000} = 6,71 \cdot 10^{-3}$

$\eta = 1 - \frac{0,25 \cdot 10^{-3}}{6,71 \cdot 10^{-3}} = 0,96$

Un acciaio armonico dunque ammette ϵ_{s0} maggiore e possiede un rendimento più alto.

Esempio

Consideriamo una trave a cavi aderenti e valutiamo gli effetti delle deformazioni lente sulle cadute di tensione.



$$A_s = 12 \text{ cm}^2 \quad \text{Tretoli} \longrightarrow f_{ptk} = 1800 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{so} = 1400 \text{ MPa} \longrightarrow N_0 = A_s \cdot \sigma_{so} = 1680 \text{ kN} \quad (1400 \cdot 12 \cdot 10^{-2})$$

$$\left. \begin{array}{l} E_s = 210000 \text{ MPa} \\ E_c = 30000 \text{ MPa} \end{array} \right\} n = 7$$

• Deformazione elastica

$$\Delta N_{el} = \frac{N_0}{\left(\frac{A_c}{n A_s} + 1\right)} = \frac{1680}{\left(\frac{40 \cdot 40}{7 \cdot 12} + 1\right)} = 83,8 \text{ kN} \Rightarrow \frac{\Delta N_{el}}{N_0} = 4,99\%$$

$$\epsilon_{el,s} = \frac{\Delta N_{el}}{A_s E_s} = \frac{83,8 \cdot 10^3}{1200 \cdot 210000} = 0,000333 = 3,33\% = \epsilon_c$$

$$\Delta \sigma_{el} = 0,00033 \cdot E_s = 69,8 \text{ MPa}$$

• Ritiro

$$\Delta N_{rit} = \epsilon_{rit} E_s A_s = 0,0003 \cdot 210000 \cdot 1200 = 75,6 \text{ kN}$$

$$\frac{\Delta N_{rit}}{N_0} = 4,50\%$$

• Fluage

$$\Delta N_{vis} = 2 \epsilon_{el} E_s A_s = 2 \cdot 0,00033 \cdot 210000 \cdot 1200 = 166,32 \text{ kN}$$

$$\frac{\Delta N_{vis}}{N_0} = 9,9\%$$

• Rilassamento

$$\sigma_{so} = f_{so} - \Delta \sigma_{el} = 1400 - 69,8 \approx 1330 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{so}}{f_{ptk}} = \frac{1330}{1800} = 0,738 \sim 0,75$$

$$\Delta \sigma_{ril,\infty} = 0,18 \sigma_{so} = 0,18 \cdot 1330 = 239,4 \text{ MPa}$$

Tenendo conto dell'interdipendenza di fluage, rilassamento e ritiro,

$$\Delta' \sigma_{ril,\infty} = \Delta \sigma_{ril,\infty} \left(1 - \frac{2,5 \cdot \Delta N_{sst}}{N_0}\right) = 239,4 \left(1 - \frac{2,5 (75,6 + 166,32)}{1680}\right) = 153,22 \text{ MPa}$$

$$\Delta' N_{ril,\infty} = \Delta' \sigma_{ril,\infty} \cdot A_s = 153,22 \cdot 1200 = 183,86 \text{ kN} \Rightarrow \frac{\Delta' N_{ril,\infty}}{N_0} = 10,94\%$$

In virtù della diversa tecnologia costruttiva, se la trave fosse a cavi scorrevoli mancherebbe la caduta per deformazione elastica mentre si dovrebbe aggiungere il rientro degli ancoraggi e la caduta per attrito:

• Rientro degli ancoraggi

Supponiamo che i cunei di ancoraggio rientrino di 2mm e che la tesatura del cavo avvenga da ambo i lati. Allora si ha che:

↳ di norma fornito dalle case produttrici degli ancoraggi

$$\epsilon_{r.a.} = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2+2}{20000} = 0,0002$$

$$\Delta N_{r.a.} = \epsilon_{r.a.} E_s A_s = 0,0002 \cdot 210000 \cdot 1200 = 50,4 \text{ kN}$$

$$\frac{\Delta N_{r.a.}}{N_0} = 3,00 \%$$



• Attrito

Essendo il cavo rettilineo, si ha: $\alpha = 0$; $f = 0,3$ (guaina metallica); $\beta = 0,01 \text{ rad/m}$

↳ coefficiente d'attrito filo-guaina

$$\sigma_{s \text{ L}/2} = \sigma_{s0} (1 - f(\alpha + \beta x))$$

↳ rapporto tra coefficiente di attrito di linea (per elementi rettilinei) e coeff. di attrito filo-guaina legato al caso generale di cavo con curvatura $\chi = 1/d$

$$\Downarrow$$

$$N_{L/2} = N_0 (1 - f\beta x) = 1680 (1 - 0,3 \cdot 0,01 \cdot 10) = 1629 \text{ kN}$$

$$\Delta N_{\text{attrito}} = N_0 - N_{L/2} = 51 \text{ kN}$$

$$\frac{\Delta N_{\text{attr.}}}{N_0} = 3,03 \%$$

Si è semplificato con N_0 il valore βN_0 , poiché β va applicato a seguito di questi tenononi.

Verifica di sezioni in c.a.p.

Le verifiche si effettuano con gli stessi modelli del c.a. ordinario, tenendo conto della presenza di due azioni (carichi + precompressione) tra loro linearmente indipendenti:

- La forza di precompressione è massima al tiro (βN_0), riducendosi nel tempo a causa delle cadute di trazione lente (fino a βN_0)
- Le caratteristiche di sollecitazione dovute ai carichi variano da un minimo sempre agente (valore caratteristico dei carichi permanenti) al valore dovuto ai carichi totali (col valore caratteristico) fino a un valore corrispondente al raggiungimento di E. limite.

Di conseguenza, mentre nel c.a. ordinario le verifiche agli stati limite di tensioni di esercizio e agli stati limite ultimi forniscono risultati sostanzialmente corrispondenti, nel c.a.p. non è possibile definire a priori la condizione più gravosa

Le verifiche da effettuare secondo l'EC2 sono:

- SLS: Ci si riferisce ai carichi di esercizio ed ai gradi di precompressione, adoperando i modelli del materiale al I stadio per precompressione totale o limitata, al II stadio per precompressione parziale. Si considerano le combinazioni più gravose di $N(N_{00}, N_0)$ e dei carichi (massimi, minimi). I limiti da rispettare sono:

CLS:	$0,60 f_{ck}$	al tiro ;	$0,50 \div 0,40 f_{ck}$	rara	$0,60 \div 0,45 f_{ck}$	quasi perm.	ambiente 3,4] in esercizio
							ambiente 1,2	

Acc: $0,85 \div 0,90 f_{p0tk}/f_{p1tk}/f_{yk}$ al tiro; $0,60 f_{pk}$ in esercizio

- Stato limite di Fessurazione: Vale quanto visto per il c.a.o.; la spaziatura tra le barre necessaria per limitare senza calcolo l'ampiezza delle lesioni è minore nel c.a.p. rispetto ai valori del c.a.o.
- SLU a flessione: Si usa il modello di materiale non lineare, tenendo conto che la E dell'armatura di precompressione differisce da quella del CLS adiacente di una quantità pari alla deformazione iniziale di precompressione.
Dall'equilibrio alla traslazione ($N=0$) si determina — con due distinti diagrammi di E , legati a compressione superiore e compressione inferiore — il limite massimo e minimo del momento flettente, da confrontare con i valori massimo e minimo del momento di calcolo.
- SLU per tagli: Valgono le stesse indicazioni del c.a.o. purché si consideri come taglio agente il valore ridotto per effetto della precompressione.

Sistema equivalente alla precompressione

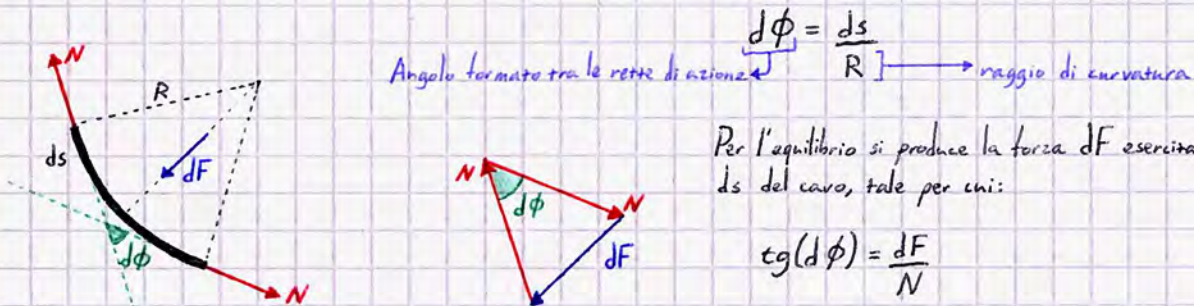
La tecnologia costruttiva del c.a.p. presenta innumerevoli vantaggi dal punto di vista dell'economia e della rapidità costruttiva; nel caso di applicazioni in zona sismica però non è tra le migliori scelte progettuali.

È utile valutare le forze che — applicate alla trave di CLS — sono in grado di produrre le stesse sollecitazioni prodotte dal cavo di precompressione, costituenti il sistema equivalente alla precompressione: si sostituisce il cavo interno alla trave con un sistema di forze applicate in testate.

Nel caso di cavo rettilineo lungo l'asse baricentrico della trave, ad esempio, il sistema equivalente alla precompressione è costituito da due forze di compressione applicate in corrispondenza del baricentro e normali alle testate:



Come è noto, in realtà i cavi di precompressione hanno un andamento parabolico (anche semplicemente per effetto del peso proprio); bisognerà dunque tener conto — oltre che delle azioni esercitate dal cavo sulle testate — delle azioni esercitate dal cavo all'interno della trave: la forma curva del cavo infatti determina azioni distribuite sul CLS lungo il proprio sviluppo. Immaginando di estrarre un elemento infinitesimo ds di cavo, applicando sulle sezioni di tale tratto le forze di precompressione N esplicitate dai tratti adiacenti si osserva che l'elemento di cavo non potrà essere in equilibrio a meno che non venga applicata su di esso un'altra forza in grado di chiudere il poligono di equilibrio: per effetto della curvatura del cavo infatti le due forze N che agiscono alle estremità del cavo non sono allineate. Si ha che:



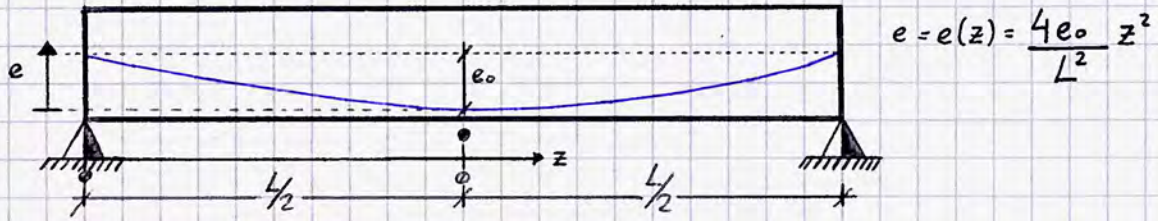
Essendo infinitesimo $d\phi$, $\operatorname{tg}(d\phi) \sim d\phi \Rightarrow d\phi = \frac{ds}{R} = \frac{dF}{N}$

Poiché la forza dF è diretta dal centro di curvatura verso l'esterno con direzione parallela alla normale del tratto curvo ds del cavo, essa coincide con la risultante delle pressioni p_n — dirette lungo la normale esterna alla curva ed esplicitate dal CLS al cavo — distribuite lungo il tratto ds . Ne segue che:

$$dF = p_n ds \Rightarrow p_n = \frac{N}{R} \quad \left(\frac{ds}{R} = \frac{p_n ds}{N} \Rightarrow p_n = \frac{N}{R} \right) \quad \text{pressione del CLS sul cavo}$$

Il carico p_n rappresenta l'azione esercitata dal CLS sul tratto di cavo; ne segue che l'azione esercitata dal cavo curvo sul CLS ($-p_n$, reazione) è diretta verso il centro di curvatura, avendo il verso della normale interna a ds . Ne segue che l'azione esercitata dal cavo, se curvo, sulla trave di CLS è un carico distribuito lungo il percorso del cavo. $p_n = -\frac{N}{R}$ reazione del cavo sul CLS

A causa del piccolo rapporto altezza/lunghezza nelle travi, nelle applicazioni pratiche il cavo assume una configurazione molto tesa, con angoli piccoli rispetto all'orizzontale; ciò consente di impiegare espressioni semplificate della curvatura: la configurazione di equilibrio $e=e(z)$ del cavo - che è una catenaria - può essere assimilata ad una parabola, come riproposto (cfr. p. 91) di seguito:



Si ha inoltre che, in ogni tratto infinitesimo ds , $e = \frac{L}{2} \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{e}{L/2} = \frac{2e}{L}$ ($\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$)

In virtù del fatto che gli angoli $\phi[\alpha]$ sono molto piccoli rispetto all'orizzontale, è possibile affermare che la curvatura della curva $e=e(z)$ può essere ritenuta coincidente con la derivata seconda della funzione, ovvero:

$$\chi = \frac{1}{R} \approx e''(z) = \frac{8e_0}{L^2}$$

Da cui, ricavato il raggio di curvatura e nota la sollecitazione di precompressione N , è possibile osservare che - atteso che la curva $e(z)$ è molto ribassata, con tangenti prossime all'orizzontale - le normali alla configurazione curva del cavo possono contendersi con la verticale; il carico distribuito p_n esercitato dal cavo sul CLS si riduce dunque ad un carico verticale diretto verso l'alto (centro di curvatura di $e(z)$):

$$p_{yc} = -N \frac{8e_0}{L^2}$$

Esaminiamo ora l'equilibrio della trave precompressa sotto le sole azioni esercitate dal cavo:



$$N \sin \alpha \approx N e' \left(\frac{L}{2} \right)$$

$$e' = \frac{de}{dz} \Rightarrow \alpha = e' \left(\frac{L}{2} \right) \approx \sin \alpha$$

La risultante del carico distribuito vale $p_{yc} \cdot L = -N \cdot \frac{8e_0}{L}$

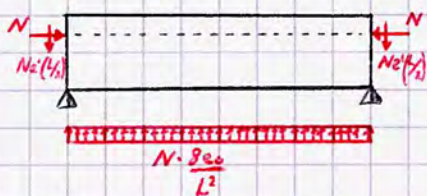
Alle testate, la componente verticale delle forze esercitate dal cavo vale:

$$N \sin \alpha \approx N e' \left(\frac{L}{2} \right) = N \left(\frac{8e_0 z}{L^2} \right) \Big|_{z=L/2} = N \cdot \frac{4e_0}{L}$$

Mentre la componente orizzontale, essendo α molto piccolo - dunque $\cos \alpha \approx 1$ - è circa pari a N .

Si osserva che la somma di tutte le forze verticali sul cavo è nulla, dunque l'equilibrio è soddisfatto:

$$2 \left(N \cdot \frac{4e_0}{L} \right) - N \cdot \frac{8e_0}{L} = 0$$



Sistema equivalente al cavo parabolico

L'effetto del cavo di precompressione è quello di ridurre il momento flettente e il taglio dovuto ai carichi verticali.

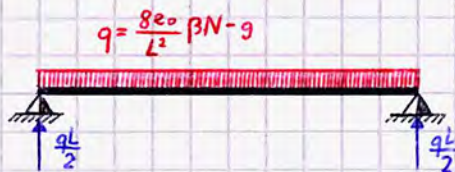
Detto esempio, tipico nell'ambito delle travi in c.a.p. ad armatura post-tesa, non costrinse il sistema equivalente alla precompressione di travi in c.a.p. a fili aderenti, in cui l'azione distribuita del cavo è trascurabile, valutando esclusivamente l'azione sulle testate (nel sistema a cavi scorrevoli si trascurano alcune componenti di coazione verticale sulle testate, essendo il carico distribuito dominante).

Una volta superato il momento

Durante la fase di tiro, la trave è posta sul piano di banchinaggio; essendo essa soggetta al peso proprio esiste una sollecitazione che contrasta la tendenza della trave a flettersi verso l'alto a seguito dell'atto di messa in tiro (per sollecitazioni anche inferiori ad N).

Col crescere dello sforzo di precompressione fino al valore βN , il carico distribuito dovuto all'azione del cavo sul CLS supera il peso della trave; in tal caso la trave sarà soggetta al carico assiale baricentrico βN , sollevandosi dal piano di banchinaggio in virtù dell'eccentricità del cavo che produce un momento che tende le fibre superiori della trave e assumendo l'assetto della trave appoggiata agli estremi sottoposta al carico uniformemente distribuito:

$$\frac{8e_0}{L^2} \beta N - g$$

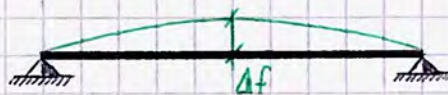


Da cui, le reazioni agli appoggi saranno ciascuna pari a:

$$\frac{4e}{L} \beta N - \frac{gL}{2}$$

Ne segue che la controflessa della trave al tiro - ricordando gli schemi notevoli - è pari a:

$$\Delta f = \frac{5}{384} \left(\beta N \frac{8e}{L^2} - g \right) \frac{L^4}{EI}$$

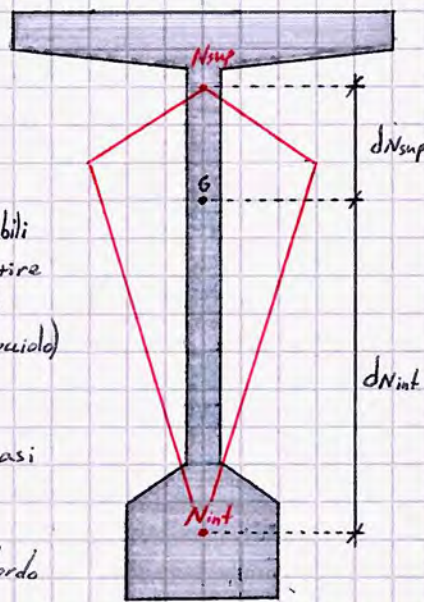


Nei casi reali, essendo il cavo curvo, bisogna individuare dei punti limite tali per cui il cavo sia in una posizione all'interno della sezione tale per cui la trave abbia un comportamento ottimale (sezione tutta compressa). Occorre dunque poter valutare i valori ammissibili di eccentricità del cavo sezione per sezione, sia in fase di tiro che in esercizio.

Definito il momento utile della sezione:

$$M_u = (dN_{int} + dN_{sup}) N$$

con dN_{int} [sup] raggio inferiore [superiore] del nocciolo



Il momento generato sulla trave dai carichi permanenti G_2 e dai carichi variabili Q - visti come carichi distribuiti $g_2 + q$ - deve essere al più pari a M_u per garantire un comportamento ottimale della trave; ne segue che, nelle sezioni in cui M_u è minore di $M_{g_2} + M_q$, si incrementa l'altezza della sezione (dunque i raggi di nocciolo) o, nel caso in cui nessuna sezione sia soddisfatta, si aumenta l'entità di N .

A questo momento utile va sommato il momento utile aggiunto M_{ua} nei casi in cui il cavo si trova all'interno del nocciolo:

$$M_{ua} = d_a \cdot N$$

con d_a pari alla distanza tra cavo e bordo del nocciolo.

Considerando il Momento utile complessivo $M_{u,tot} = (dN_{int} + dN_{sup} + d_a) N$, esso deve essere pari al momento prodotto dal peso proprio della trave (G_1), dai carichi permanenti (G_2) e dai carichi variabili; uguagliando i due valori di momento è dunque possibile determinare il valore ideale di progetto di N .

In fase di verifica, come già menzionato, bisognerà confrontare le due aliquote di momento per verificare se sia necessario incrementare l'altezza della sezione (dunque d_a) o l'entità di N .

In fase di tiro, non essendo applicati i carichi verticali alla trave, su ogni sezione agisce esclusivamente il momento dovuto al peso proprio della trave, determinando a parità di N elevati regimi di compressione.

In fase di esercizio, nella determinazione di N bisogna sempre tener conto delle cadute di tensione, dunque del fattore β , e delle azioni dei carichi accidentali e permanenti.

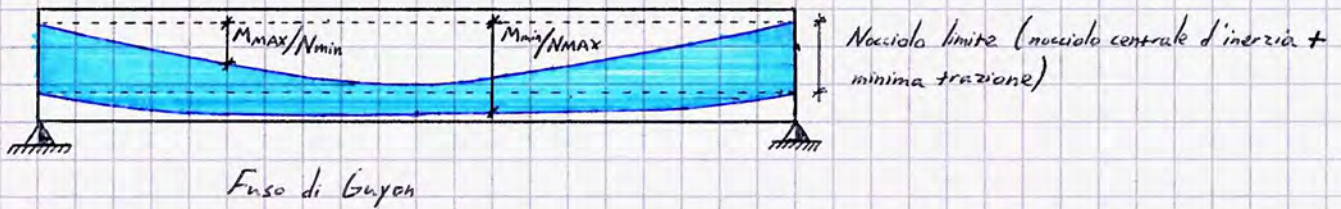
È possibile dunque definire sezione per sezione due punti limite:

- Punto limite inferiore: definito in fase di tiro (essendo minima l'entità delle azioni esterne e massimo il valore di precompressione), si studia la compressione al lembo inferiore e la trazione al lembo superiore, definendo il punto limite tale per cui la sezione sia tutta compressa (distribuzione triangolare).

- Punto limite superiore: ci si riferisce alla fase di esercizio.

I due punti limitano la zona all'interno della quale deve passare il cavo risultante affinché, per effetto delle azioni esterne, il centro di pressione ricada entro il nocciolo centrale d'inerzia. Componendo detta operazione sezione per sezione si individua una regione lungo lo sviluppo longitudinale della trave entro cui bisogna far passare il cavo risultante; detta zona prende il nome di fuso di Guyon.

(Chiaramente, detta condizione individua esclusivamente il caso ideale; considerando ammissibile una minima trazione (entro limiti di norma) e rispettando i limiti normativi di trazione e compressione si determina un fuso di area maggiore, consentendo di progettare sezioni più economiche, comunque efficaci).

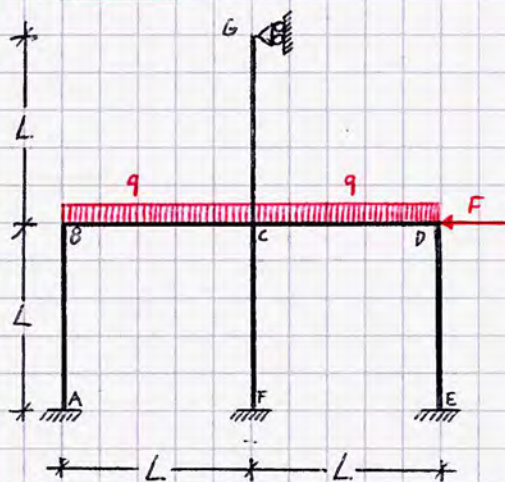


A livello di azioni interne dovute alla precompressione, oltre alle predette sollecitazioni di sforzo normale N (forza di precompressione $\cdot \cos \vartheta$), momento flettente M ($F_p \cos \vartheta \cdot e$), si generano anche degli sforzi di taglio:

- In fase di tiro, $T = T_0 - \beta N \sin \alpha$

- In fase di esercizio, $T = T_0 + q_2 + q - N \sin \alpha$ senza β , poiché si suppongono avvenute le cadute di tensione

Esercizi



Consideriamo la struttura a traliccio, costituita da aste aventi tutte una sezione rettangolare 30×50 cm e costituite da un materiale avente modulo elastico $E = 30000$ MPa.

Assumendo:

$$q = 100 \text{ kN/m}$$

$$F = 50 \text{ kN}$$

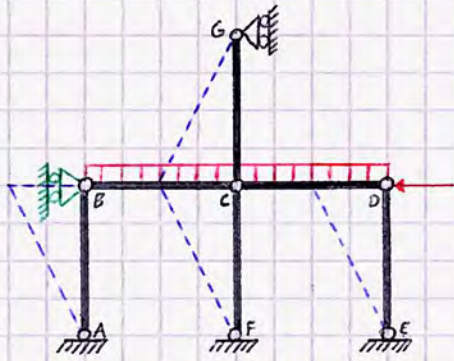
$$L = 4 \text{ m}$$

$$\delta = 10 \text{ mm}$$

Si risolva la struttura applicando il metodo di Cross.

Essendo l'esercizio svolto per meglio comprendere procedimenti e passaggi, lo svolgimento è alla pagina successiva.

① Bisogna considerare la trave reticolare associata, sostituendo ad ogni nodo una cerniera interna. In questo modo è possibile comprendere quanti schemi utilizzare per risolvere la struttura in Cross:



Analizziamo la labilità della struttura (evidente dalla rappresentazione delle deformate):

$$3t - s = l - i;$$

$$t = 6$$

$$3t - s = 0 = l - i;$$

$$s = 18$$

$$l = i$$

$i = 1$ in virtù della labilità alle azioni orizzontali evidenziata nello schema a

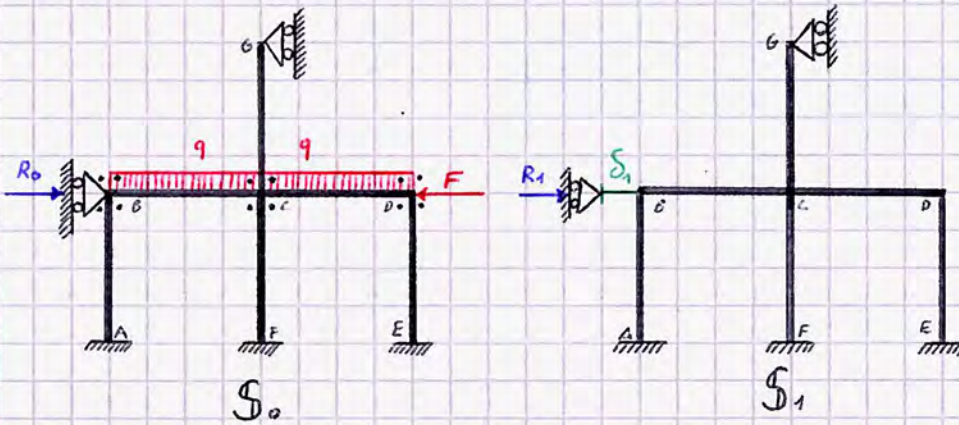
↳ I gradi di vincolo di una cerniera interna sono pari a $2(n-1)$, con n pari al numero di aste convergenti nel nodo → C determina 6 gradi di vincolo.

sinistra; inserendo un carrello ausiliario in B si impediscono gli spostamenti della struttura reticolare associata, rendendola isostatica.

Ne segue che allo schema S_0 dei carichi attivi si aggiunge uno schema S_1 - privo di carichi applicati - in cui si impone un cedimento S_1 al carrello ausiliario.

Logicamente, nel caso in cui siano presenti più labilità sarebbe necessario considerare più vincoli ausiliari, dunque più schemi a cui applicare cedimenti (1 vincolo).

② Delineazione degli schemi strutturali di riferimento per l'applicazione del Metodo di Cross:



Note R_0 ed R_1 , poiché nello schema originario il carrello è assente si ha che:

$$R = R_0 + \alpha R_1 = 0$$

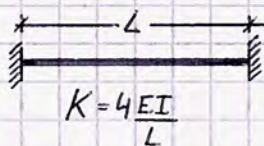
Dunque è possibile conoscere $\alpha = -R_0/R_1$, parametro rispetto cui poter attuare la sovrapposizione degli effetti e determinare dunque i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione nella struttura originaria. Nel caso del

momento flettente, ad esempio, definiti $M_0 \equiv M_{S_0}$ e $M_1 \equiv M_{S_1}$ si ha che $M = M_0 + \alpha M_1$.

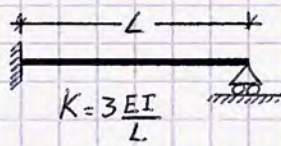
③ Bisogna ora determinare alcune grandezze caratteristiche per entrambi gli schemi di Cross, ovvero le rigidità delle aste, i coefficienti di ripartizione e i coefficienti di trasporto:

1) Rigidità flessionali delle aste K

Il loro calcolo consente di determinare come i momenti applicati a un nodo si ripartiscono nelle varie aste; essendo tutte le travi incastrate - incastrate ad eccezione di una trave incastro-carrello, utilizziamo i relativi schemi notevoli ottenendo:



$$K = \frac{4EI}{L}$$



$$K = \frac{3EI}{L}$$

Essendo L, E, I costanti nell'intera struttura (non variano al variare delle aste), calcolando il prodotto EI è possibile valutare rapidamente le rigidità delle aste convergenti in ciascun nodo.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{30 \cdot 50^3}{12} = 3,125 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$$

$$EI = 3,0 \cdot 10^5 \text{ MPa} \cdot 3,125 \cdot 10^9 \text{ mm}^4 = 93750 \text{ kNm}^2$$

In virtù dei passaggi successivi, si riportano di seguito le rigidità di ogni asta in relazione ai nodi in cui esse convergono.

$$\textcircled{B} \quad K_{BA} = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 93750}{4} = 93750 \text{ kNm}$$

$$K_{BC} = 93750 \text{ kNm}$$

$$\textcircled{C} \quad K_{CF} = K_{CB} = K_{CD} = 93750 \text{ kNm}$$

$$K_{CG} = \frac{3}{4} \cdot 93750 = 70312,5 \text{ kNm}$$

$$\textcircled{D} \quad K_{DC} = K_{DE} = 93750 \text{ kNm}$$

2) Note le rigidità, si calcolano i coefficienti di ripartizione per ogni nodo; si ha che:

$$\tau_{ij} = \frac{K_{ij}}{\sum_j K_{ij}} \quad ; \quad \sum_j \tau_{ij} = 1 \quad \forall \text{ nodo } i$$

$$\textcircled{B} \quad \tau_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \tau_{BC} = 0,5$$

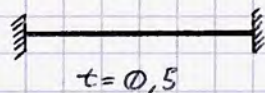
$$\textcircled{D} \quad \tau_{DC} = \tau_{DE} = 0,5 \quad \text{analogamente al nodo } \textcircled{B}$$

$$\textcircled{C} \quad \tau_{CB} = \frac{K_{CB}}{K_{CB} + K_{CD} + K_{CF} + K_{CG}} = \frac{K_{CB}}{3K_{CB} + \frac{3}{4}K_{CB}} = \frac{4}{15} = 0,267 = \tau_{CD} = \tau_{CF}$$

$$\tau_{CG} = \frac{\frac{3}{4}K_{CB}}{15/4 K_{CB}} = \frac{3 \cdot 4}{4 \cdot 15} = \frac{1}{5} \sim 0,199 \quad \text{in virtù dell'approssimazione su } \tau_{CB}, \tau_{CD}, \tau_{CF} \text{ dato che la somma dei coefficienti è, anche in questo caso, unitaria.}$$

3) Coefficienti di trasporto

I coefficienti di trasporto consentono di valutare come si trasferisce il momento da un nodo - in cui si immagina di rimuovere il morsetto nell'applicazione del Cross - al nodo adiacente; dipende dallo schema (notevole) considerato:



$t = 0$ (il momento nel carrello è nullo!).

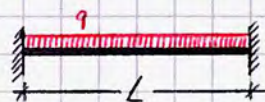
4) Risoluzione degli schemi di Cross

S₀

I momenti agenti sui nodi sono determinati dalle sollecitazioni attive:

• F scarica direttamente sul nodo, non generando momento;

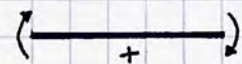
• q genera momento come da schema notevole:



$$\textcircled{BC} \quad M_{BC} = M_{CB} = \frac{qL^2}{12} = \frac{100 \text{ kNm} (4\text{m})^2}{12} = 133,33 \text{ kNm}$$

$$\textcircled{CD} \quad \text{Analogamente, } M_{CD} = M_{DC} = 133,33 \text{ kNm}$$

Nella convenzione di Cross



Si osserva che:



$$M_{BC} < 0$$

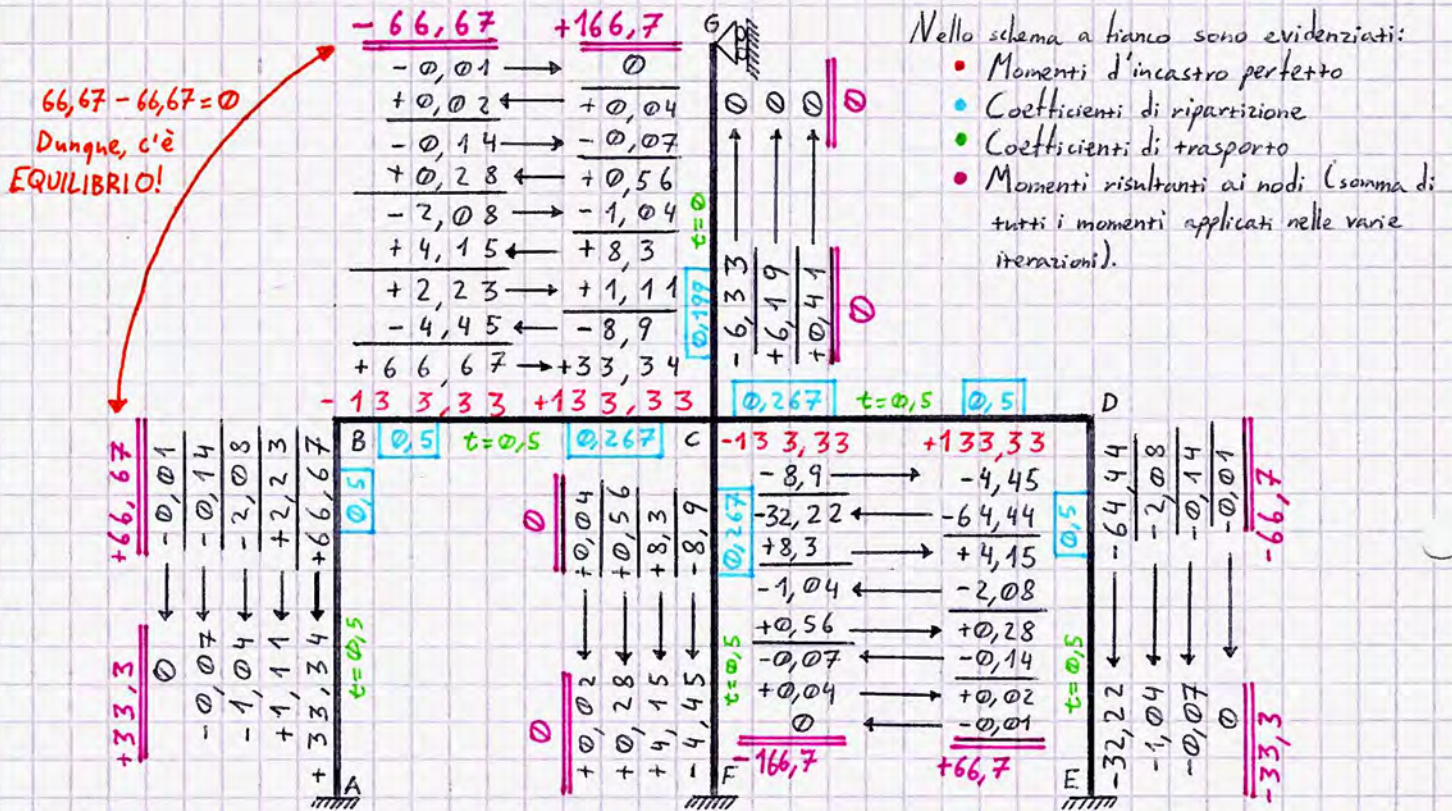
$$M_{CD} < 0$$

$$M_{CB} > 0$$

$$M_{DC} > 0$$

Attenzione ai segni nell'applicazione del metodo!

Avendo definito i momenti d'incastro perfetto, agenti sui nodi in presenza di morsetti, si procede nella risoluzione dello schema di Cross applicando il metodo iterativo di risoluzione, che prevede di immaginare di liberare volta per volta un nodo dal relativo morsetto, determinando l'applicazione (trasmissione) di un momento che viene equilibrato da un momento di segno opposto che si ripartisce sulle aste convergenti nel nodo per poi trasportarsi nei nodi adiacenti. Eccettuando i nodi di estremità, che "ricevono" esclusivamente momento, si fissa un ordine di risoluzione. In questo caso, fissiamo come ordine $B \rightarrow C \rightarrow D$. Allora:



Si riporta di seguito il procedimento analitico alla base della risoluzione dello schema di Cross:

- (B-1) Al nodo è applicato un momento d'incastro perfetto di $-133,33 \text{ kNm}$. Ne segue che il nodo va riequilibrato con un momento di $+133,33 \text{ kNm}$ che si ripartisce nelle aste convergenti nel nodo secondo i relativi coefficienti di ripartizione, entrambi pari a $0,5$:

$$+133,33 \cdot 0,5 = +66,67 \text{ kNm}$$

Detti momenti, ripartiti nelle aste, si trasmettono ai nodi adiacenti al nodo B tramite le aste convergenti in esse secondo i coefficienti di trasporto, in questo caso entrambi di $0,5$:

$$B \rightarrow A = +66,67 \cdot 0,5 = +33,34 \text{ kNm}$$

$$B \rightarrow C = +66,67 \cdot 0,5 = +33,34 \text{ kNm}$$

A questo punto, il nodo B è equilibrato; si traccia una linea sui momenti ripartiti nel nodo ($+66,67$) per indicarne l'equilibrio ed il trasporto avvenuto; in questo modo è possibile orientarsi più agevolmente nella risoluzione dello schema. Si passa ora al nodo successivo.

- (C-1) ⚠ Si sommano tutti i momenti non equilibrati agenti sul nodo, ovvero tutti i nodi e momenti non racchiusi da una "linea di equilibrio del nodo" per ogni asta convergente nel nodo stesso. In questo caso, si ha che:

$$133,33 + (-133,33) + 33,34 = +33,34 \text{ kNm}$$

Detto momento coincide col momento complessivo agente sul nodo, da equilibrare con un momento uguale e opposto che si ripartisce nelle aste secondo i relativi coefficienti di ripartizione:

$$-33,34 \begin{cases} \text{CB, CF, CD} \rightarrow -33,34 \cdot 0,267 = -8,9 \\ \text{CG} \rightarrow -33,34 \cdot 0,199 = -6,33 \end{cases}$$

Si intrinsece chiaramente l'iteratività del metodo: si trasportano i momenti ottenuti nei nodi adiacenti e si passa al nodo successivo:

$$C \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow B \\ \rightarrow F \\ \rightarrow D \end{array} \right\} = -8,9 \cdot 0,5 = -4,45 ; \quad C \rightarrow F = -8,9 \cdot 0 = 0$$

(D-1) Momento agente: $133,33 - 4,45 = 2 \cdot (+64,44) \text{ kNm}$

Momento ripartito nelle aste (equilibrante): $M_{DE} = M_{DC} = -64,44 \text{ kNm}$

Trasporto ai nodi adiacenti: $D \rightarrow E = D \rightarrow C = -32,22 \text{ kNm}$

(B-2) Come per il nodo C, si considerano come momenti agenti sul nodo esclusivamente i momenti fuori linea:

$M_{\text{Agente}} = -4,45$

$M_{\text{Rip, aste}} = 4,45 \cdot 0,5 = 2,23 \xrightarrow[\text{Nodi adiacenti}]{\text{Trasporto ai}} 2,23 \cdot 0,5 = 1,11$

(C-2) $1,11 - 32,22 = -31,11$ Agente

$+31,11 \begin{cases} \cdot 0,267 = +8,3 \rightarrow 4,15 \\ \cdot 0,199 = +6,19 \rightarrow 0 \end{cases}$

(D-2) $+4,15$ Agente

$-4,15 \cdot 0,5 = -2,08 \rightarrow -1,04$

(B-3) $+4,15 \Rightarrow -4,15 \cdot 0,5 = -2,08 \rightarrow -1,04$

(C-3) $-2,08 \Rightarrow +2,08 \begin{cases} \cdot 0,267 = +0,56 \rightarrow +0,28 \\ \cdot 0,199 = +0,41 \rightarrow 0 \end{cases}$

(D-3) $0,28 \Rightarrow -0,28 \cdot 0,5 = -0,14 \rightarrow -0,07$

Si prosegue con le iterazioni fino al raggiungimento di un congruo limite di approssimazione, sotto il quale si ritiene che il trasporto sia nullo e che dunque la struttura sia globalmente in equilibrio.

I momenti risultanti si calcolano sommando algebricamente tutti i momenti riportati su una stessa colonna. Risulta quindi che:

M_0	A	B	C	D	E	F	G
A		66,7					
B	33,3		166,7				
C		-66,7		66,7		0	0
D			-166,7		-33,3		
E				-66,7			
F			0				
G			0				

Ovvero: $M_{0AB} = +33,3 \text{ kNm}$

$M_{0BA} = +66,7 \text{ kNm}$

$M_{0BC} = -66,7 \text{ kNm}$

$M_{0CB} = +166,7 \text{ kNm}$

$M_{0CF} = 0 \text{ kNm}$

$M_{0CD} = -166,7 \text{ kNm}$

$M_{0CG} = 0 \text{ kNm}$

$M_{0DC} = +66,7 \text{ kNm}$

$M_{0DE} = -66,7 \text{ kNm}$

$M_{0ED} = -33,3 \text{ kNm}$

$M_{0FC} = 0 \text{ kNm}$

$M_{0GC} = 0 \text{ kNm}$

⚠ I segni sono in riferimento alla CONVENZIONE DI CROSS.

Essendo noti tutti i momenti agenti nello schema, è possibile calcolare R_0 . In questa prima fase infatti, piuttosto che ricavare e determinare i diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione nello schema (o inutile, dovendole comparire con d : S1!) conviene ricavare unicamente le sollecitazioni interne necessarie alla determinazione di R_0 , in maniera tale da poter determinare d in maniera più spedita.

Logicamente, essendo il diagramma delle caratteristiche della sollecitazione nella struttura complessiva lo scopo ultimo dell'esercizio, è di vitale importanza "ricordare" tutti i valori di M_0 nodo per nodo, riportandoli a parte in maniera tale da poterli richiamare agevolmente.

In questo caso dunque è sufficiente calcolare:

- Il taglio in BA (asta AB)
- Lo sforzo normale in BC (davvnto ad F)

Come visibile, il segno dei momenti calcolati in Cross ne determina il verso in relazione alle aste (opposto sui nodi!); in questo modo è possibile calcolare il taglio e, indirettamente, lo sforzo normale in ogni asta.

Infatti, il taglio nell'asta AB riequilibra la coppia valutata col Cross e applicata all'asta. Ne segue che:

Concordi

$$T_B = \frac{(33,3 + 66,7)}{4m} = 25 \text{ kN}$$

Per l'equilibrio alla rotazione infatti si ha:

$\textcircled{A} \quad V_B \cdot L - 66,7 - 33,3 = 0 \Rightarrow V_B = \frac{66,7 + 33,3}{L}$

Le sollecitazioni che influiscono sullo sforzo normale in BC sono:

- Taglio in CG
- Taglio in CF
- Sforzo normale in CD

$\textcircled{CF} \quad M_{CF} = M_{FC} = 0 \Rightarrow T_{C,CF} = 0$

$\textcircled{CG} \quad \text{Analogo a CF, } T_{C,CG} = 0$

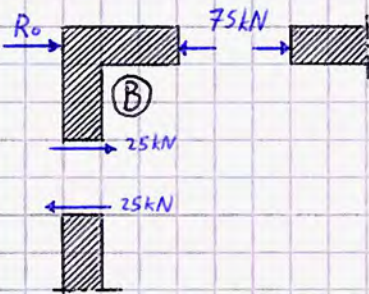
$\textcircled{CD} \quad N_{CD}$ dipende da:

• $F = 50 \text{ kN}$

• $T_{D,DE}$

$T_{D,DE}$ è valutabile come fatto in AB; si ha che $T_{D,DE} = 25 \text{ kN}$

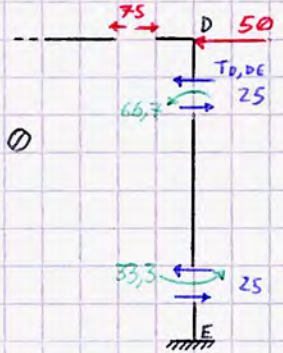
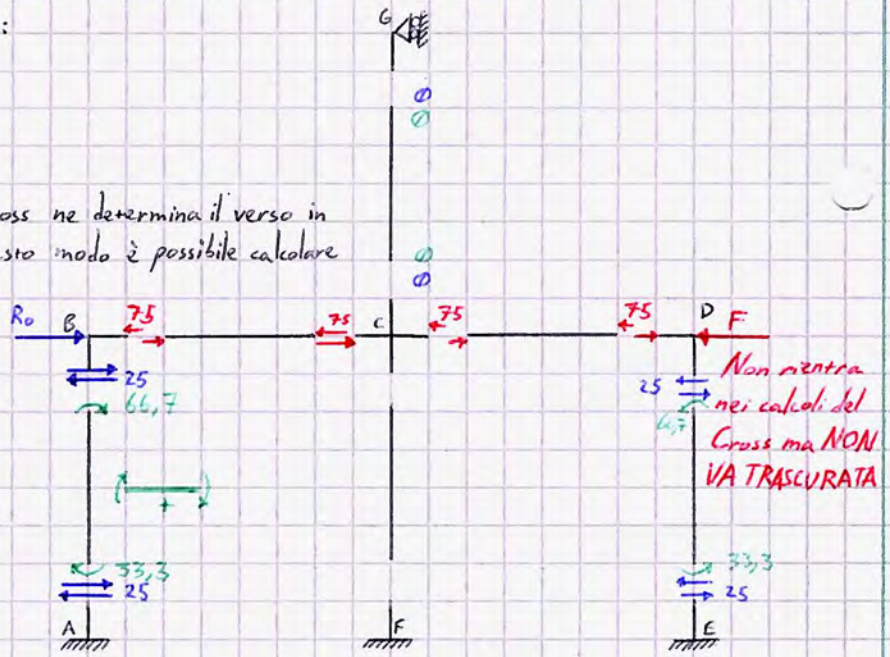
Dunque, $N_{CD} = 50 + 25 = 75 \text{ kN}$



Dall'equilibrio a traslazione al nodo B, risulta:

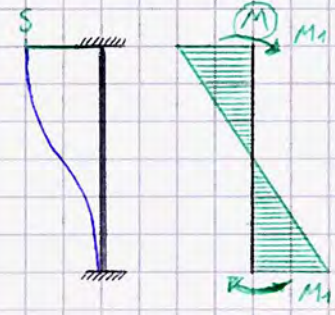
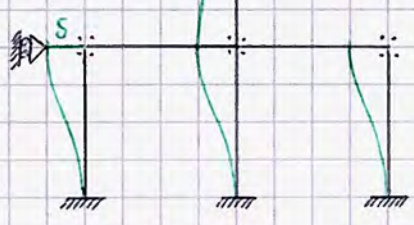
$$R_0 - 75 + 25 = 0 \Rightarrow R_0 = 75 - 25 = 50 \text{ kN}$$

Avendo risolto lo schema S_0 , occorre valutare lo schema S_1 .



S_1

Come visibile dallo schema a fianco, variando le deformate ed essendo imposto un cedimento $S = 10\text{mm}$ in assenza di carichi agenti, occorre valutare i momenti di incastro perfetto in questo schema:

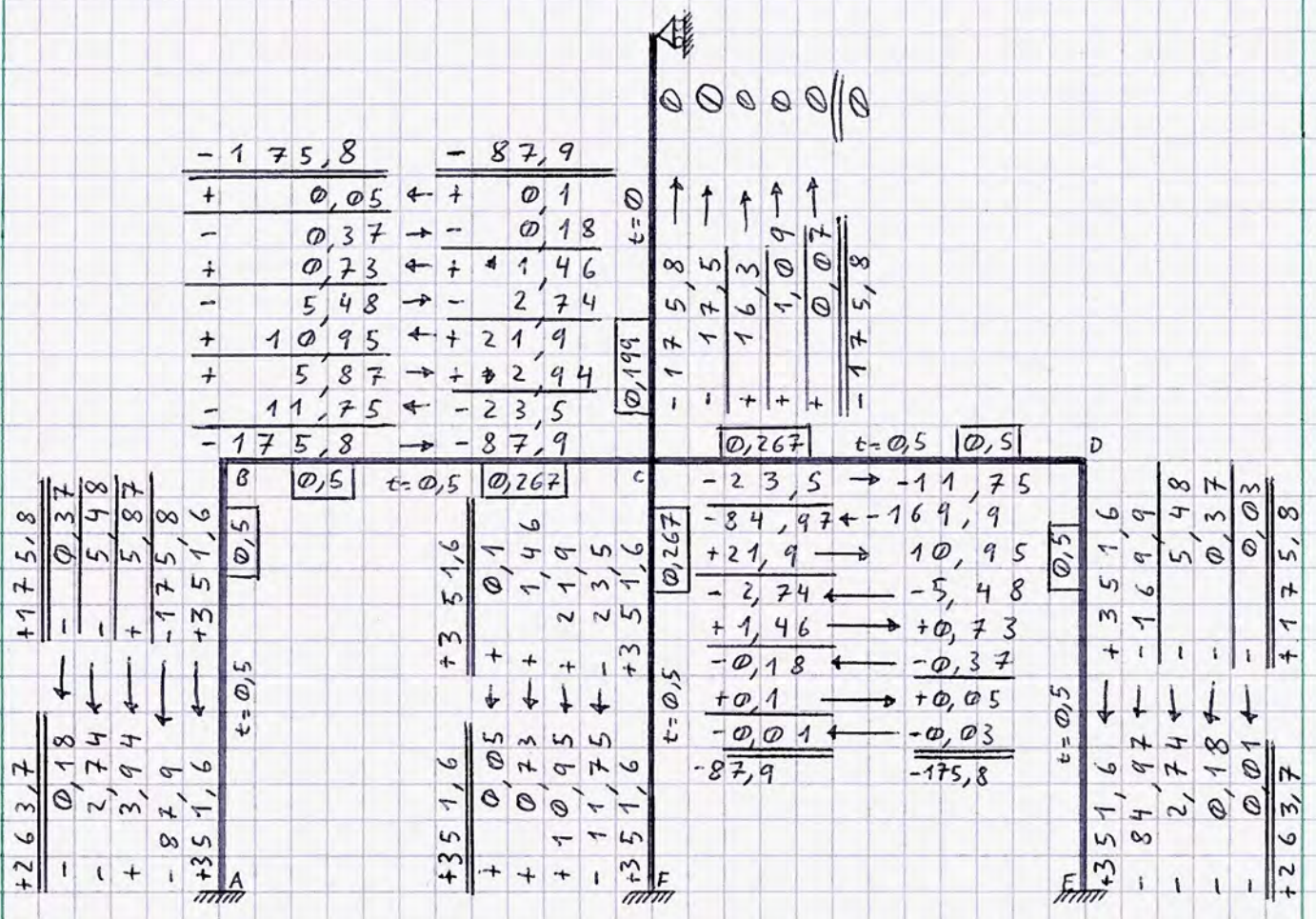


$$M_1 = \frac{6EI}{L^2} S = \frac{6}{16} \cdot 93750 \cdot 0,01 = 351,6 \text{ kNm}$$

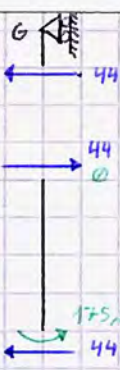
Noti i momenti d'incastro perfetto, essendo le rigidzze flessionali, i coefficienti di ripartizione ed i coefficienti di trasporto indipendenti dallo schema, è possibile risolvere anche questo schema di Cross. Per semplicità, la risoluzione è riportata senza passaggi analitici.



$$M_2 = \frac{3EI}{L^2} S = \frac{3}{16} \cdot 93750 \cdot 0,01 = 175,8 \text{ kNm}$$



Come nel caso precedente, si riportano i valori di momento calcolati e si ricava R_1 , determinando unicamente le azioni che concorrono alla sua determinazione. Per semplicità, le azioni interne necessarie per il calcolo di R_1 sono riportate senza passaggi analitici.

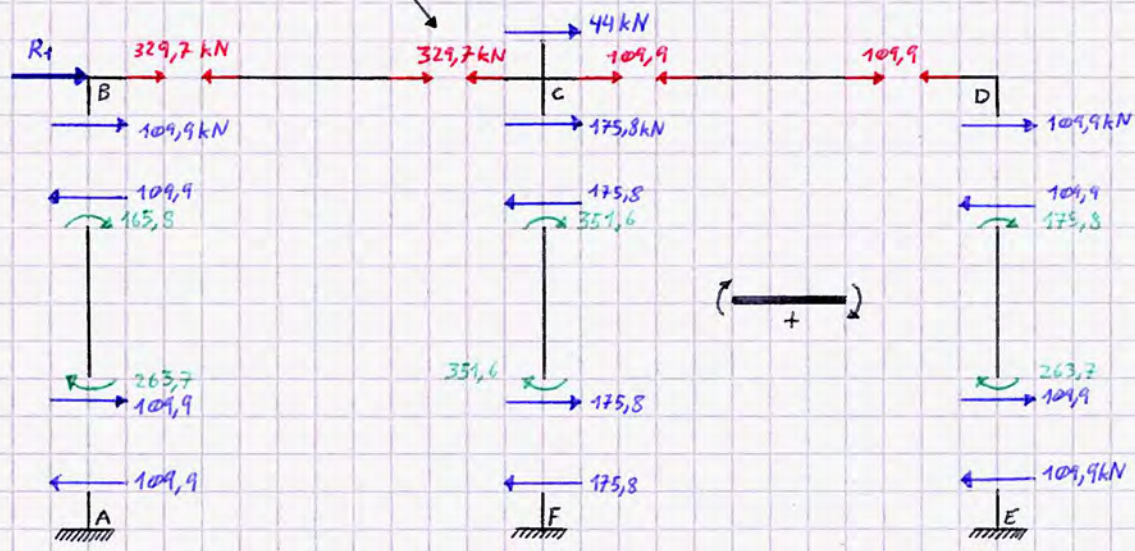


Per l'equilibrio alla traslazione, si ha che:

$$R_1 + 329,7 + 109,9 = 0 \Rightarrow R_1 = 439,6 \text{ kN}$$

Da cui è possibile calcolare d .

$$44 \text{ kN} + 109,9 \text{ kN} + 175,8 \text{ kN} = 329,7 \text{ kN}$$



M_{ij}	A	B	C	D	E	F	G
A		+175,8					
B	+263,7		-87,9				
C		-175,8		-175,8	+351,6	0	
D			-87,9		+263,7		
E				+175,8			
F			+351,6				
G			-175,8				

Nel calcolo di d si adotta la convenzione usuale sul segno delle sollecitazioni, non adoperando la convenzione di Cross:



$$R_0 = 50 \text{ kN}$$

$$R_1 = -439,9 \text{ kN}$$

$$R_0 + d R_1 = 0 \Rightarrow d = \frac{-R_0}{R_1} = \frac{50}{439,9} = 0,11$$

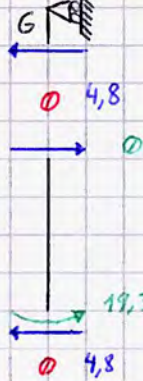
Nota d è possibile calcolare $M_{ij} = M_{ij}^0 + d M_{ij}^I V_{ij}$; ricordando che il calcolo di detti momenti risulta valido nella convenzione di Cross e va riportato alla classica convenzione sul concio elementare per la determinazione dei diagrammi delle caratteristiche di sollecitazione.

- $M_{AB} = M_{AB}^0 + d M_{AB}^I = +33,3 + 0,11(+263,7) = +62,3 \text{ kNm}$
- * $M_{BA} = -66,7 + d(-175,8) = -86 \text{ kNm}$
- $M_{BC} = -66,7 + 0,11(-175,8) = -86 \text{ kNm}$
- * $M_{CB} = -166,7 + 0,11(+87,9) = -157 \text{ kNm}$
- $M_{CD} = -166,7 + 0,11(+175,8) = -176,4 \text{ kNm}$
- * $M_{DC} = -66,7 + 0,11(+175,8) = -47,4 \text{ kNm}$
- * $M_{DE} = +66,7 + 0,11(-175,8) = +47,4 \text{ kNm}$
- $M_{ED} = -33,3 + 0,11(+263,7) = -4,3 \text{ kNm}$
- $M_{CG} = 0 + 0,11(-175,8) = -19,3 \text{ kNm}$
- $M_{GC} = 0 + 0,11(0) = 0 \text{ kNm}$

* In questi calcoli sono stati invertiti i segni rispetto ai momenti valutati in Cross in maniera tale da rispettare direttamente la convenzione positiva al concio infinitesimo, assumendo per le aste verticali momento positivo se le fibre tese sono a destra.

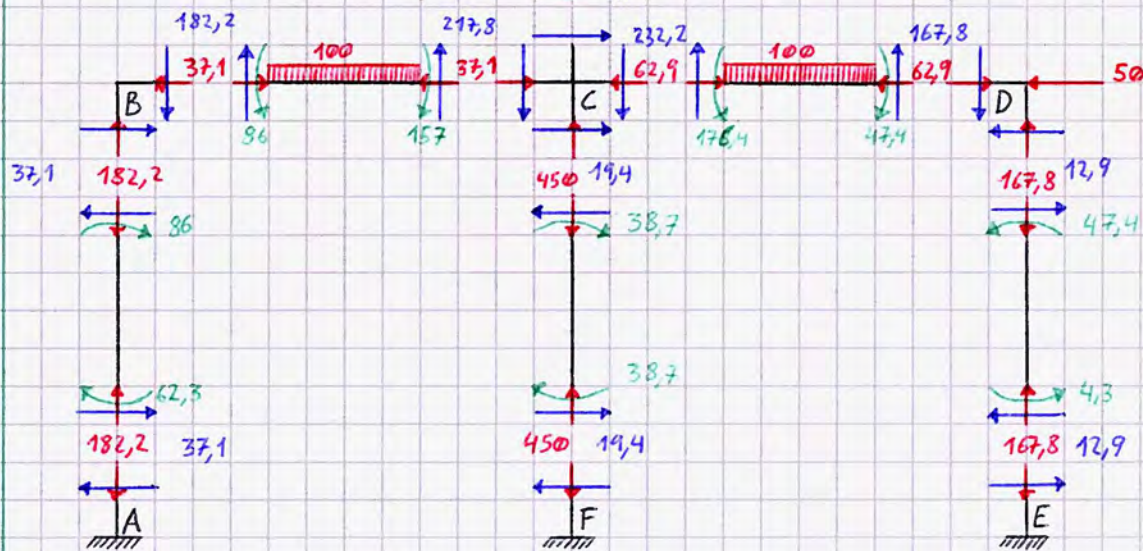
⚠ Per minimizzare gli errori di calcolo, si consiglia di conservare la convenzione di Cross nel calcolo per poi determinare in un secondo momento il segno dei momenti nella convenzione al concio infinitesimo. In questo modo, eventuali errori sono anche di più semplice e rapida individuazione!

È ora possibile valutare tutte le sollecitazioni interne dello schema complessivo, tramite le quali è possibile tracciare tutti i diagrammi delle caratteristiche interne della sollecitazione e risolvere l'esercizio.



- Procedimento:
- 1) Riportare i momenti sul diagramma
 - 2) Calcolare il taglio nelle aste
 - 3) Calcolare lo sforzo normale imponendo l'equilibrio nei vari nodi (nei nodi D e C, il taglio di un'asta diventa lo sforzo normale nell'altra asta)

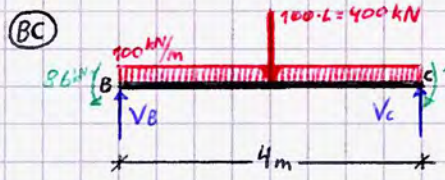
Si riportano i calcoli di seguito, procedendo da B a D



$$T_{AB} = \frac{M_{AB} + M_{BA}}{L} = \frac{62,3 + 86}{4} = 37,1 \text{ kN} ; T_{CG} = \frac{M_{CG} + M_{GC}}{L} = \frac{19,3}{4} = 4,8$$

$$N_{CD} = N_{BC} + T_{CG} + T_{CF} = 37,1 + 4,8 + 19,4 = 62,9 \text{ kN} \rightarrow \text{Da verificare con l'equilibrio al nodo D}$$

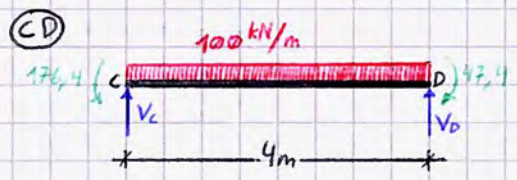
⚠ Nelle aste soggette a un carico distribuito, il taglio non dipende solo dal momento!



Equilibrio a rotazione

(Polo B) $V_C \cdot L - (qL) \frac{L}{2} - 157 + 86 = 0;$
 $V_C = \frac{400 \cdot 2 + 157 - 86}{4} = 217,8 \text{ kN}$

Per l'equilibrio a traslazione verticale, $V_B + V_C - qL = 0 \Rightarrow V_B = 400 - 217,8 = 182,2 \text{ kN}$

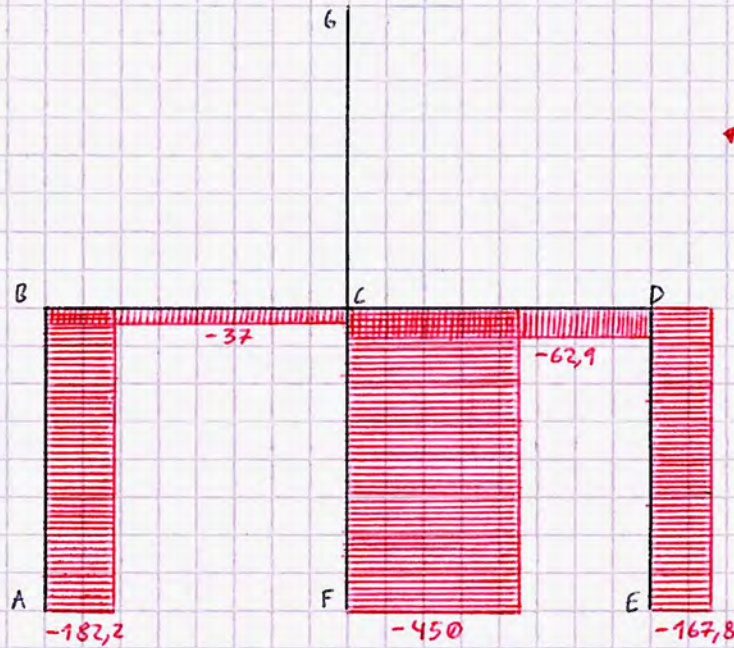
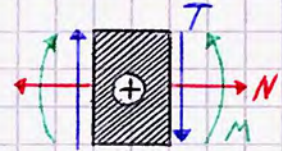


(C) $4V_D + 176,4 - 47,4 - 100 \cdot 4 \cdot 2 = 0 \Rightarrow V_D = 167,8 \text{ kN}$

(D) $V_C + V_D - 400 = 0 \Rightarrow V_C = 232,2 \text{ kN}$

Note le sollecitazioni di estremità e l'andamento dei diagrammi delle Caratteristiche della Sollecitazione è possibile procedere ora al tracciamento dei diagrammi e risolvere l'esercizio.

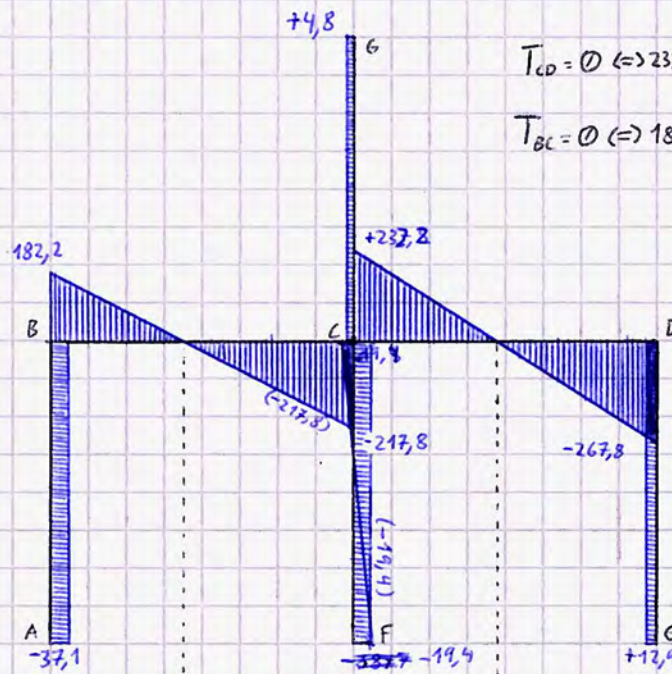
(N)



(T)

$$T_{CD} = 0 \Leftrightarrow 232,2 - 100x = 0 \Leftrightarrow x = 2,32\text{m}$$

$$T_{BC} = 0 \Leftrightarrow 182,2 - 100x = 0 \Leftrightarrow x = 1,82\text{m}$$

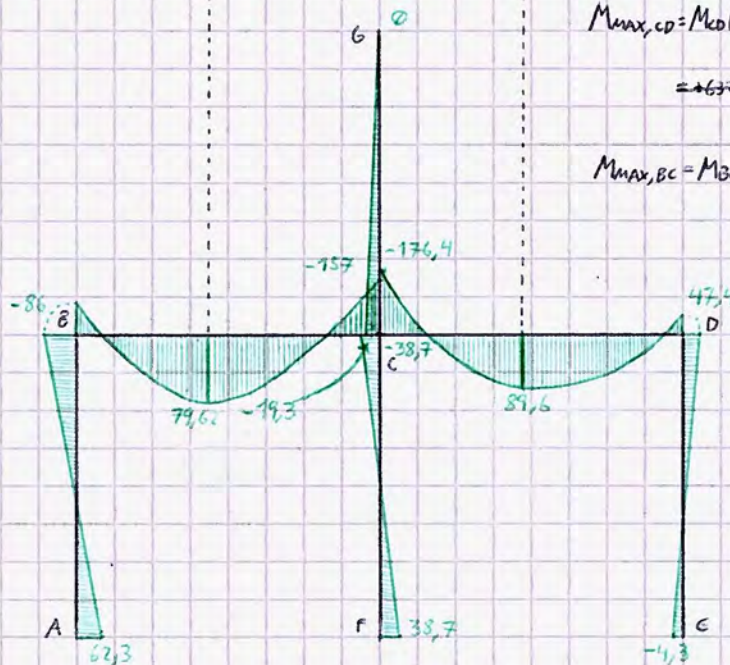


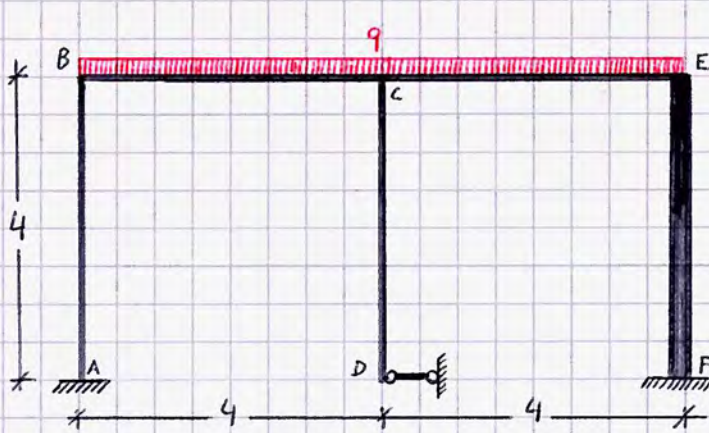
$$-176,4 + 100 \frac{x^2}{2} = 89,6 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{max, CD}} = M_{CD}(x=2,32) = (182,2 + 4,8 + 100 \cdot \frac{x^2}{2}) - 100 \cdot \frac{x^2}{2} = 365 \text{ kNm}$$

$$M_{\text{max, BC}} = M_{BC}(x=1,82) = -86 + 100 \frac{x^2}{2} = 79,62 \text{ kNm}$$

(M)

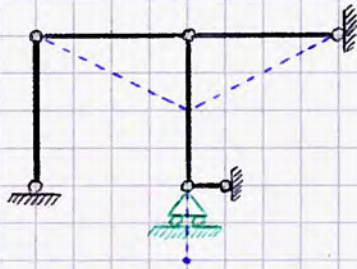




$b \times h = 300 \times 300 \text{ mm}$
 $E = 30\,000 \text{ MPa}$
 $q = 100 \text{ kN/m}$

La colonna EF è infinitamente rigida (ipotesi di Grinler); ne segue che nello schema di Cross essa può essere rappresentata come un incastro in E.

① Reticolare associata:



Risulta evidente la necessità di posizionare un carrello ausiliario in D per evitare i cinematismi verticali, in virtù del singolo grado di libertà della struttura.

② Rigidezze flessionali:

③ $K_{BA} = K_{BC} = \frac{4EI}{L} = \frac{4 \cdot 20250}{4} = 20250 \text{ kNm}$

$EI = 30\,000 \cdot \frac{300 \cdot (300)^3}{12} = 20250 \text{ kNm}$

Da cui,

$\tau_{BA} = \frac{K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = 0,5 = \tau_{BC}$

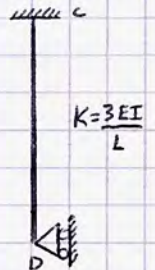
④ $K_{CB} = K_{CE} = \frac{4EI}{L} = 20250 \text{ kNm}$

$K_{CD} = \frac{3EI}{L} = \frac{3}{4} \cdot 20250 = 15187,5 \text{ kNm}$

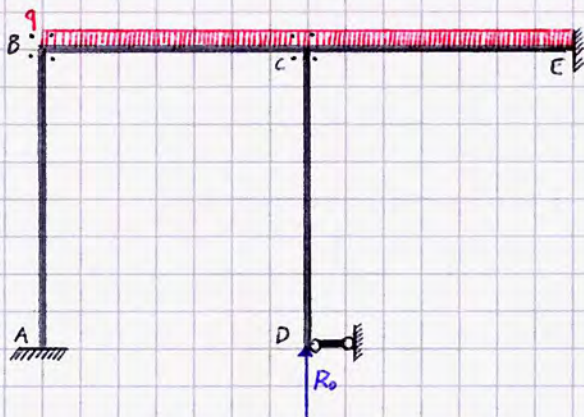
Da cui, $\tau_{CB} = \tau_{CE} = \frac{20250}{50687,5} = 0,364$

$\tau_{CD} = 1 - (2 \cdot 0,364) = 0,272$

Tutte le aste si riconducono a schemi notevoli visti nello scorso esercizio, dunque sono noti anche i coefficienti di trasporto.



S_0



Valutiamo i momenti d'incastro perfetto:

③ = ④



$M = \frac{qL^2}{12} = \frac{100 \cdot 4^2}{12} = 200 \text{ kNm}$

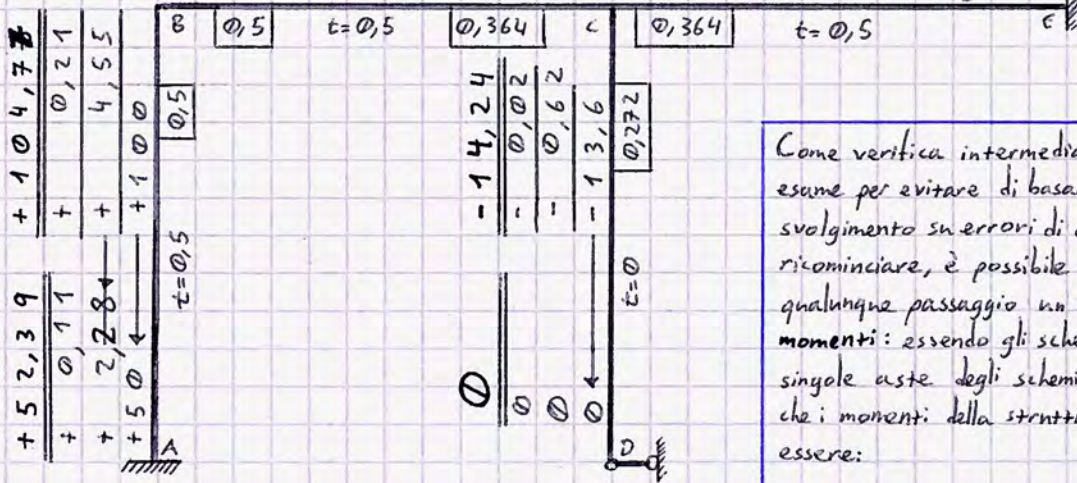
È dunque possibile operare sullo schema di Cross per determinare i momenti complessivi agenti nello schema S_0 .

$M_{CB} = M_{EC} = 200 \text{ kNm}$
 $M_{BC} = M_{CE} = -200 \text{ kNm}$

Convenzione di Cross

Ordine:
B → C

- 104,77	+ 233,32		
- 0,02	- 0,04		
+ 0,21	+ 0,11		
- 0,42	- 0,83	- 219,07	+ 190,46
+ 4,55	+ 2,28	- 0,04	- 0,02
- 9,1	- 18,2	- 0,83	- 0,42
+ 100	+ 50	- 18,2	- 9,1
- 200	+ 200	- 200	+ 200



M ₀	A	B	C	D	E
A		+104,77			
B	+52,39		+233,32		
C		-104,77		0	+190,46
D			-14,24		
E			-219,07		

Da cui è possibile determinare R₀.

Il procedimento è equivalente all'esercizio precedente, con l'unica eccezione di dover considerare nuovamente

l'asta EF una volta definite tutte le caratteristiche interne della sollecitazione:

Come verifica intermedia, utile in sede di esame per evitare di basare il proprio svolgimento su errori di calcolo e dover ricominciare, è possibile effettuare in qualunque passaggio un controllo sui momenti: essendo gli schemi statici delle singole aste degli schemi notevoli, si ha che i momenti della struttura devono essere:

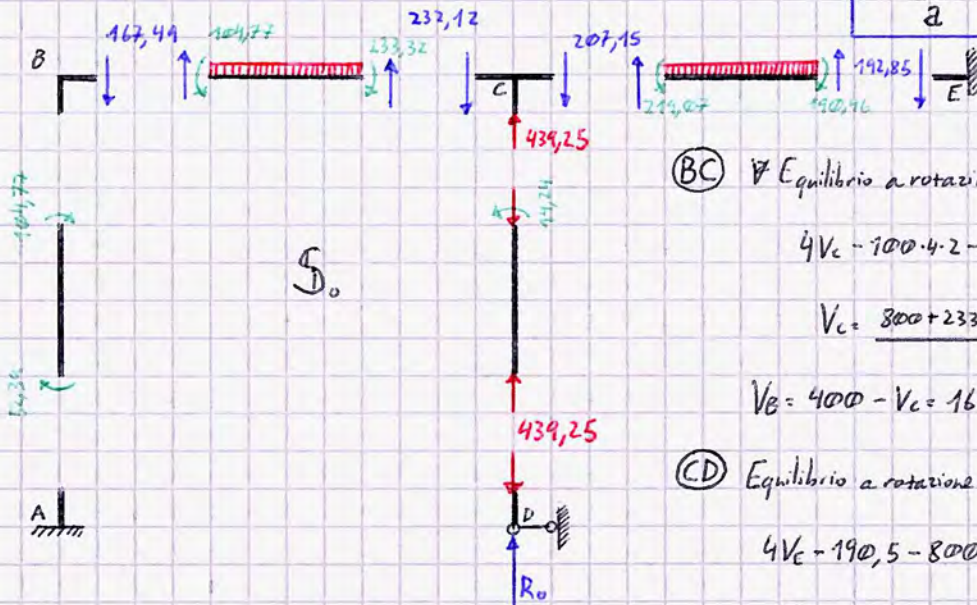
In campata, minori di $qL^2/24$; $qL^2/8$

Sull'appoggio, minori di $qL^2/12$; 0

Ovvero compresi tra i momenti massimi in campata e all'appoggio degli schemi di trave che compongono la struttura.

È possibile in altre parole definire un parametro a tale per cui $M = qL^2/a$ e verificare che a sia compreso tra i valori del denominatore dei due schemi:

$$M = \frac{qL^2}{a} = 341 \Rightarrow a = \frac{qL^2}{M} = \frac{100 \cdot 16}{341} = 4,69$$



(BC) Equilibrio a rotazione in (B):

$$4V_C - 100 \cdot 4 - 233,32 + 104,77 = 0;$$

$$V_C = \frac{800 + 233,3 - 104,8}{4} = 232,12 \text{ kN}$$

$$V_B = 400 - V_C = 167,9 \text{ kN}$$

(CD) Equilibrio a rotazione in (C):

$$4V_C - 190,5 - 800 + 219,1 = 0$$

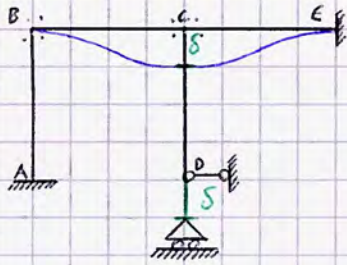
$$V_C = 192,85 \text{ kN}$$

$$V_C = 400 - V_E = 207,15 \text{ kN}$$

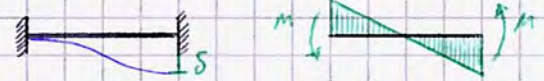
Si osserva facilmente che $R_0 = 439,25 \text{ kN}$.

S₁

Valutiamo i momenti d'incastro perfetto:



$BC = -CE$

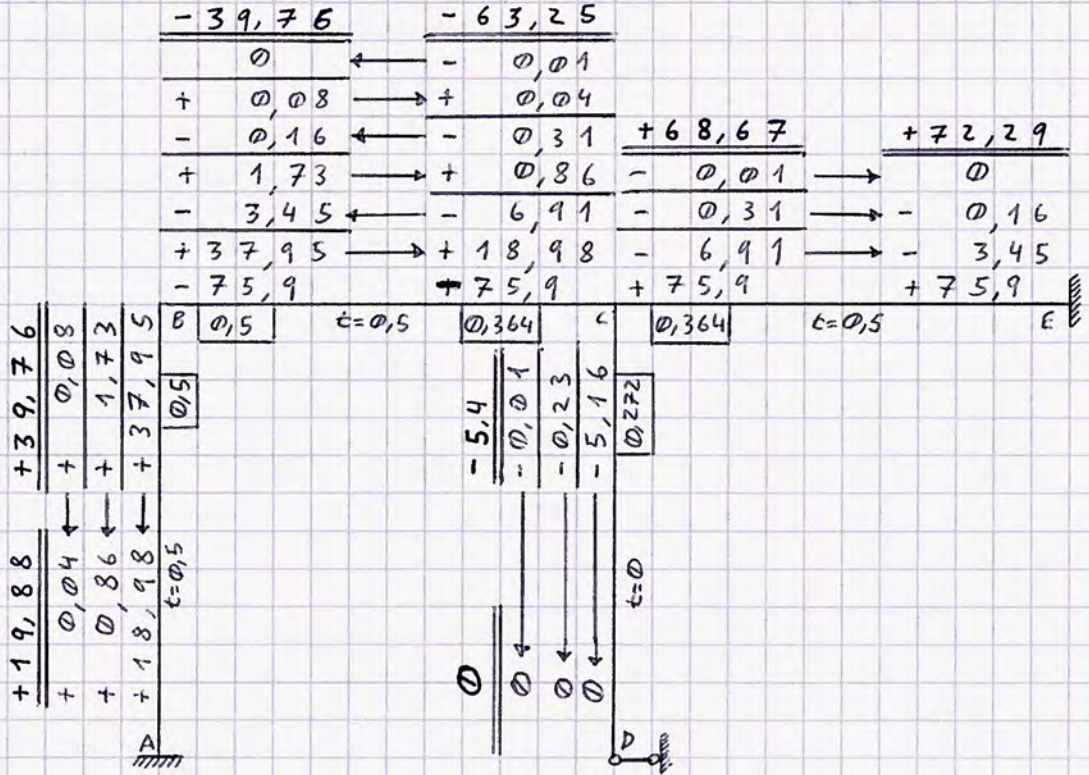


$$M = \frac{6EI\delta}{L^2} = \frac{6 \cdot 20250 \cdot 1}{4^2} = 75,9 \text{ kNm}$$

→ fissiamo un cedimento unitario

Da cui è possibile operare col metodo iterativo di Cross:

Ordine B → C



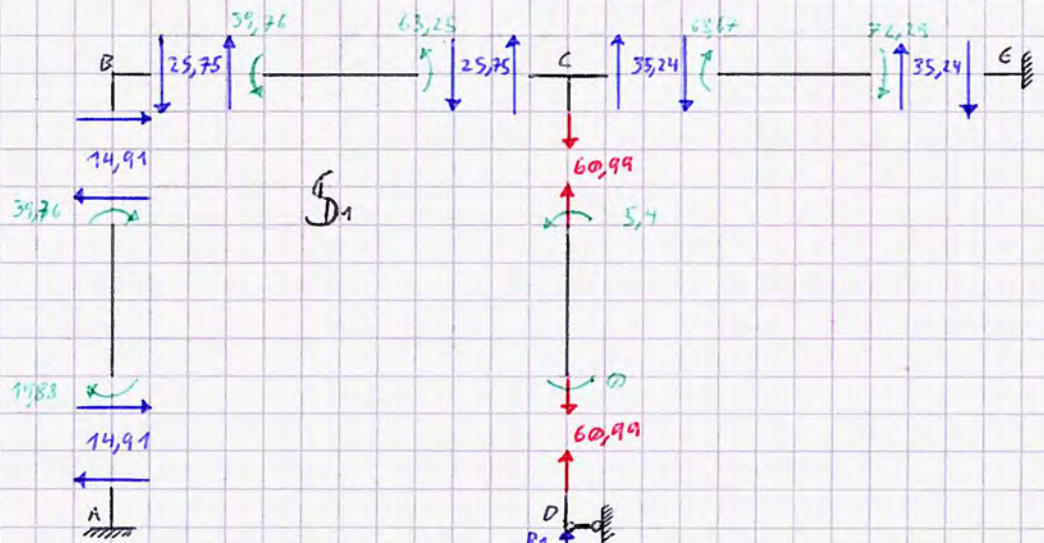
M _i	A	B	C	D	E
A		+39,76			
B	+19,88		-63,25		
C		-39,76		0	+72,29
D			+68,67	-5,4	
E			+68,67		

Dai calcoli effettuati sullo schema in basso risulta $R_1 = -60,99$.

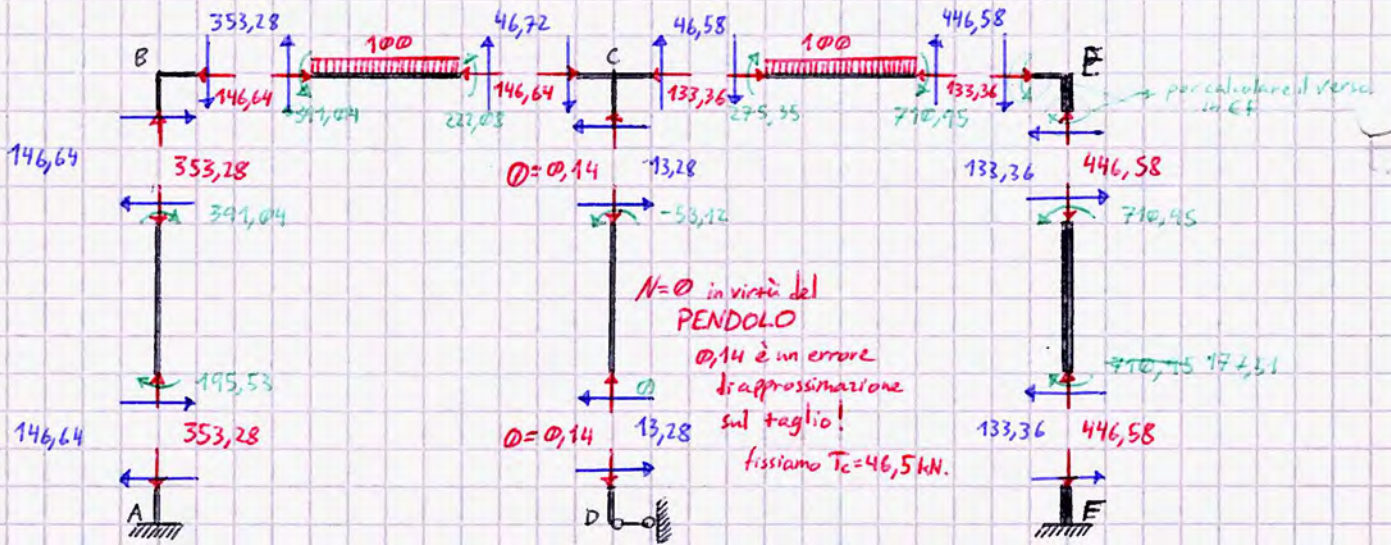
Poiché $R_0 + dR_1 = 0$, $d = -\frac{R_0}{R_1} = \frac{439,25}{60,99} = 7,20$

È dunque possibile valutare i momenti complessivi agenti sulla struttura.

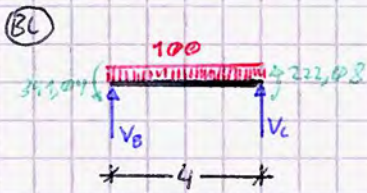
- $M_{AB} = 52,39 + 7,20(19,88) = 195,53 \text{ kNm}$
- $M_{BA} = 391,04 \text{ kNm}$
- $M_{BC} = -391,04 \text{ kNm}$
- $M_{CB} = -222,08 \text{ kNm}$
- $M_{CD} = -53,12 \text{ kNm}$
- $M_{CE} = +275,35 \text{ kNm}$
- $M_{DC} = 0 \text{ kNm}$
- $M_{EC} = 710,95 \text{ kNm}$



È ora possibile conoscere tutte le caratteristiche di sollecitazione dello schema originario:



Nelle aste (BC), (CE) influisce il carico distribuito nella determinazione del taglio:



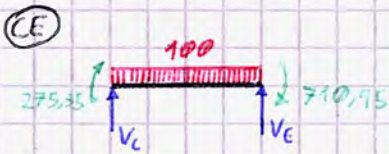
Equilibrio a rotazione in (B)

$$V_C \cdot 4 + 391,04 + 222,08 - 100 \cdot 4 \cdot 2 = 0;$$

Eq. a transl.

$$V_C = \frac{800 - 613,12}{4} = 46,72 \text{ kN} \Rightarrow V_B + V_C - 100 \cdot 4 = 0;$$

$$V_B = 353,28 \text{ kN}$$



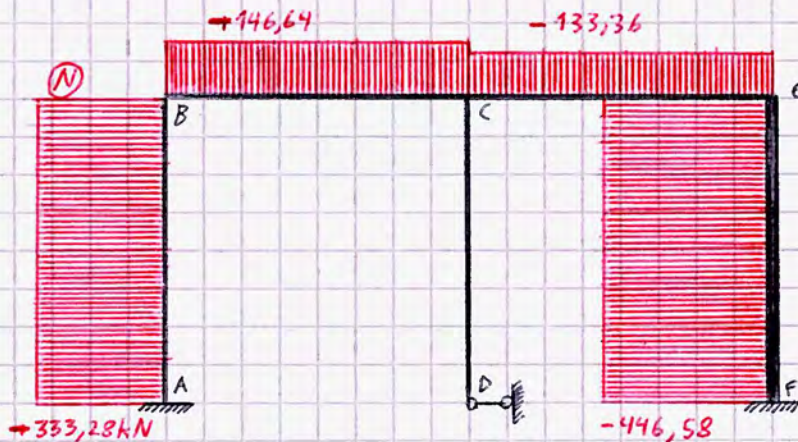
Equil. rot. in (C)

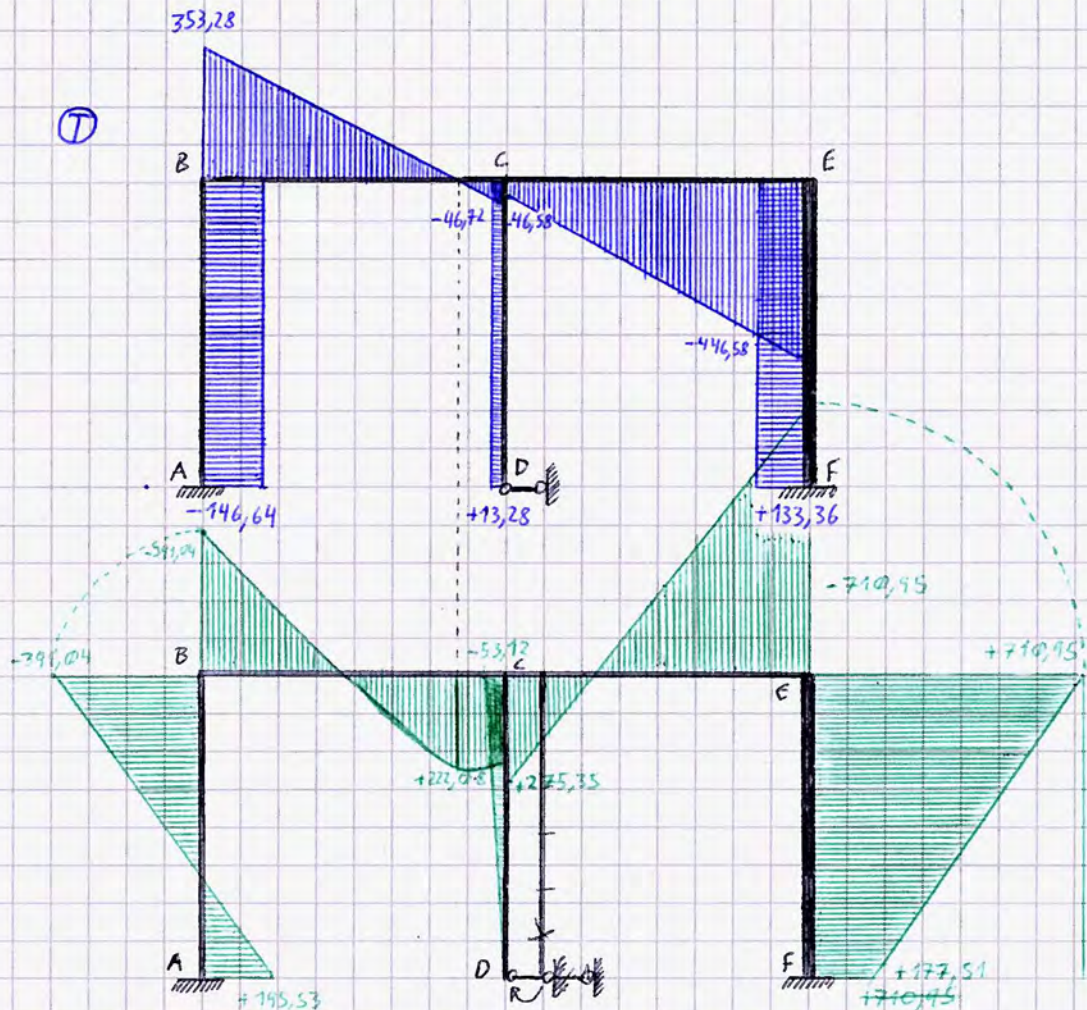
$$V_E \cdot 4 - 275,35 - 710,95 - 800 = 0;$$

$$V_E = \frac{800 + 710,95 + 275,35}{4} = 446,575 = 446,58 \text{ kN}$$

$$V_C + V_E - 400 = 0 \Rightarrow V_C = 400 - 446,58 = -46,58 \text{ kN} \quad (\text{verso il basso!})$$

Osservazione: essendo l'asta EF infinitamente rigida, essa non fa altro che trasmettere identicamente le Cds dal nodo E al nodo F, ad eccezione del momento (valutato alla pagina successiva).



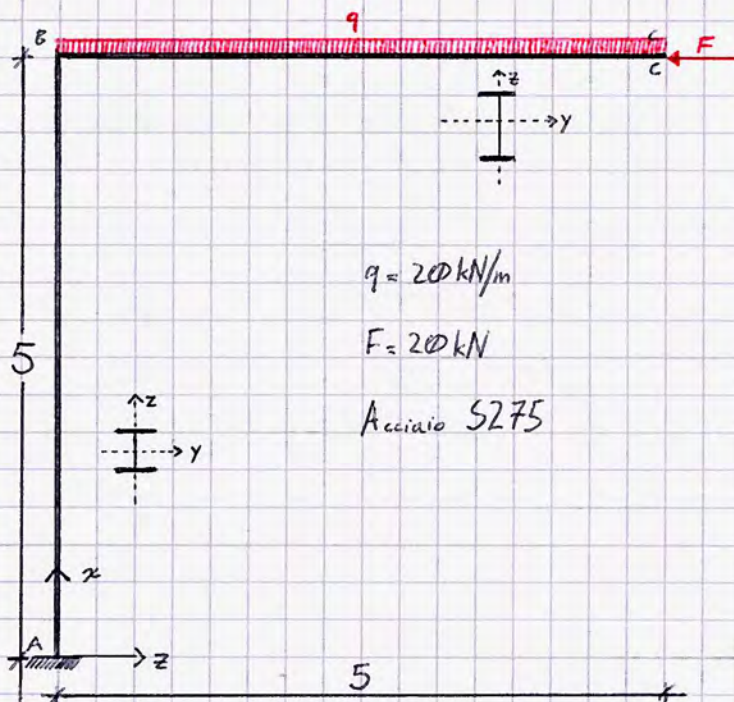


Calcolo del momento in \textcircled{E} : attraverso l'equilibrio a rotazione nel nodo E, si ha:

$$-710,95 + 133,36 \cdot 4 + M_F = 0; \quad M_F = 710,95 - 133,36 \cdot 4 = 177,51 \text{ kNm}$$



L'esercizio è risolto.



$$q = 20 \text{ kN/m}$$

$$F = 20 \text{ kN}$$

Acciaio S275

Questo esercizio verte sulla risoluzione di una struttura in acciaio, richiedendo:

- 1) Diagrammi delle CDS;
- 2) Verifica a taglio e flessione in BC
- 3) Verifica a pressoflessione nella colonna AB nel piano ZX.

Consideriamo le seguenti sezioni:

BC \rightarrow IPE 400

AB \rightarrow HEB 260

Si elencano di seguito delle caratteristiche utili delle due sezioni:

BC IPE400

$$W_{pl,y} = 1307 \text{ cm}^3$$

$$A = 8450 \text{ mm}^2$$

$$b_f = 180 \text{ mm}$$

$$t_f = 13,5 \text{ mm}$$

$$t_w = 8,6 \text{ mm}$$

$$r = 21 \text{ mm}$$

$$I_y = 23130 \text{ cm}^4$$

AB HEB 260

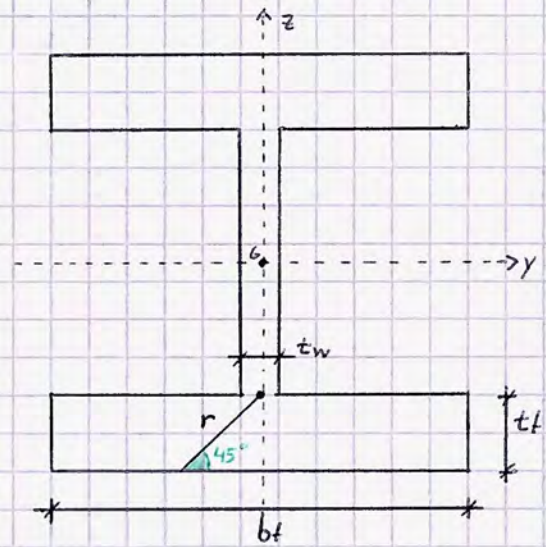
$$W_{pl,y} = 1283 \text{ cm}^3$$

$$A = 11840 \text{ mm}^2$$

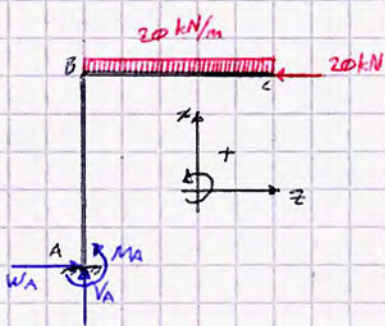
$$b_f = 260 \text{ mm}$$

$$t_f = 17,5 \text{ mm}$$

modulo plastico di resistenza rispetto all'asse y



① Essendo la struttura isostatica, la determinazione dei diagrammi delle caratteristiche interne della sollecitazione è particolarmente agevole:



Dall'equilibrio alla traslazione,

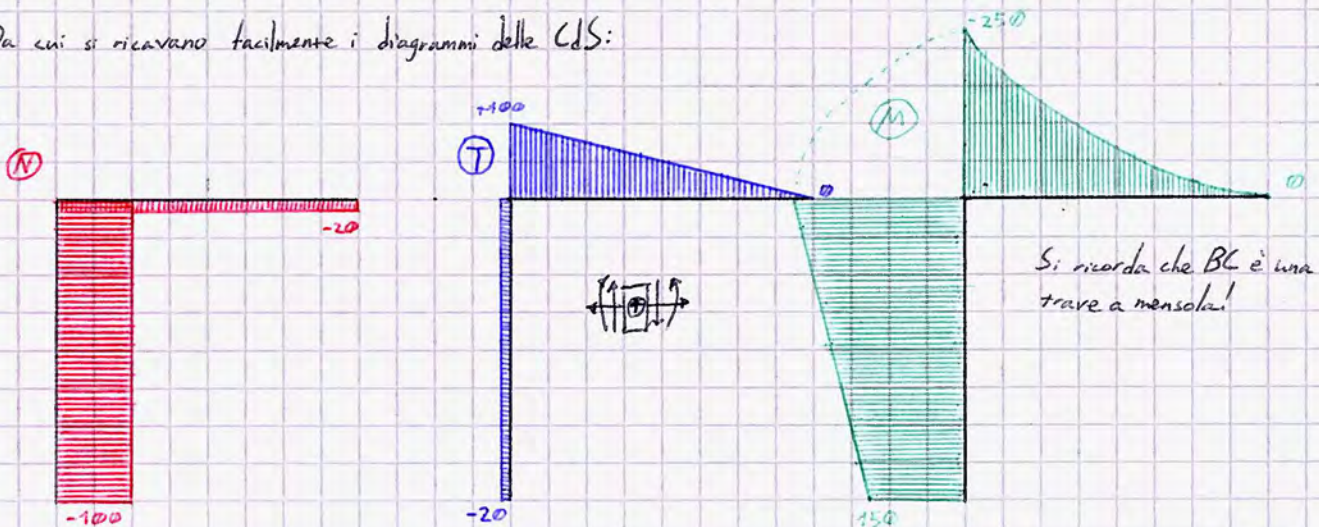
$$W_A = 20 \text{ kN}$$

$$V_A = 20 \cdot 5 = 100 \text{ kN}$$

Valutando l'equilibrio alla rotazione intorno al polo (A), si ha:

$$M_A + 20 \cdot 5 - 20 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = 0 \Rightarrow M_A = 150 \text{ kNm}$$

Da cui si ricavano facilmente i diagrammi delle CDS:



② Le verifiche a taglio e a flessione in BC sono evidentemente verifiche $E_d \leq R_d$.

Taglio

$$V_{Rd} = \frac{A_v \cdot f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{mo}} = \frac{4273,1 \text{ mm}^2 \cdot 275 \text{ MPa}}{\sqrt{3} \cdot 1,05} = 646 \text{ kN}$$

Area resistente a taglio
1,05

$$S275 \rightarrow f_{yk} = 275 \text{ MPa}$$

$$\text{In quanto } A_v = A - 2(b \cdot t_f) + (t_w + 2r) \cdot t_f$$

$$A_v = 8450 \text{ mm}^2 - 2(180 \text{ mm} \cdot 13,5 \text{ mm}) + (8,6 \text{ mm} + 2 \cdot 21 \text{ mm}) \cdot 13,5 \text{ mm} = 4223,1 \text{ mm}^2$$

Come V_{Ed} si considera il taglio massimo agente in BC $\rightarrow \frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{100}{646} = 15,5\%$ Verificato

Flessione

$$M_{Ed} = 250 \text{ kNm}$$

Verifica: $M_{Ed} \leq M_{pl,y,Rd}$

Verifica a flessione per sezioni di CLASSE 1 (duttile)
v. teoria, p. 34

$$M_{pl,y,Rd} = \frac{W_{pl,y} \cdot f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{1307 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}{1,05 \cdot 10^6} = 342,3 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{250}{342,3} = 73,0\% \text{ Verificato}$$

Le verifiche sulla trave BC e la relativa sezione sono ultimate; consideriamo la colonna AB.

③ Essendo AB un'asta tozza ($h/L = \frac{26}{500} = 0,052 > \frac{1}{20} = 0,050$) non è necessario effettuare alcuna verifica di instabilità/inestensibilità nel problema di pressoflessione; ne segue che:

$$M_{N,y,Rd} = \frac{M_{pl,y,Rd} (1-n)}{1-0,5a} \quad (\text{p. 37})$$

$$1) n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}}$$

$$N_{Ed} = 100 \text{ kN}$$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{11840 \text{ mm}^2 \cdot 275 \text{ MPa}}{1,05} = 3101 \text{ kN}$$

$$n = \frac{100}{3101} = 0,032$$

$$2) a = \frac{A - 2b \cdot t_f}{A} \leq 0,5 = \frac{11840 - 2 \cdot 260 \cdot 17,5}{11840} = 0,23$$

Dunque:

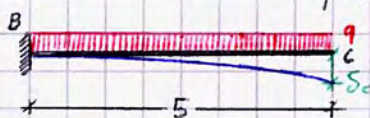
$$M_{pl,y,Rd} = \frac{W_{pl,y} \cdot f_{yk}}{\gamma_{M0}} = \frac{1283 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ MPa}}{1,05} = 336 \text{ kNm}$$

$$M_{N,y,Rd} = \frac{336 (1 - 0,032)}{1 - (0,5 \cdot 0,23)} = 367,89 \text{ kNm}$$

Se $M_{N,y,Rd} \leq M_{pl,y,Rd}$, si considera $M_{Rd} \equiv M_{N,y,Rd}$. Altrimenti, come in questo caso, la verifica si effettua considerando come valore limite di resistenza il momento limite plastico:

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{250}{336} = 74,4\% \text{ Verificato}$$

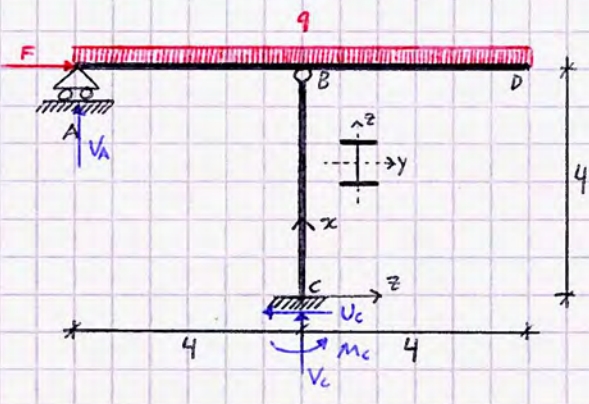
Ricapitolazione schemi notevoli: consideriamo l'asta BC assumendo $q = 14 \text{ kN/m}$ e valutiamo l'abbassamento δ del punto C:



$$\delta_c = \frac{qL^4}{8EI}$$

$$\delta_c = \frac{14 \text{ kN/m} \cdot (5 \text{ m})^4}{8 \cdot 210000 \cdot 23130 \cdot 10^4 \text{ mm}^4} = 22,52 \text{ mm}$$

⚠ È fondamentale in sede di esame ricordare quanti più schemi notevoli possibili!



H_o
 $F = 10 \text{ kN}$
 $q = 100 \text{ kN/m}$
 $M = 80 \text{ kNm}$
 Acciaio S275
 ABD \rightarrow IPE600
 BC \rightarrow HEB240

T_h
 1) Diagrammi CDS;
 2) Verifica taglio/flessione in ABD;
 3) Verifica a pressoflessione (M, N) in BC nei piani xz e xy (INSTABILITÀ)

ABD
 IPE 600

BC
 HEB 240

① Per la sovrapposibilità lineare degli schemi nei due piani ortogonali xz e xy, la struttura è globalmente isostatica. Ne segue che è possibile ricavare in maniera elementare i diagrammi delle CDS considerando i due schemi:

$W_{pl,y} = 3512 \text{ cm}^3$
 $A = 15600 \text{ mm}^2$
 $b_t = 220 \text{ mm}$
 $t_f = 19 \text{ mm}$
 $t_w = 12 \text{ mm}$
 $r = 24 \text{ mm}$

$W_{pl,y} = 1053 \text{ cm}^3$
 $W_{pl,z} = 498 \text{ cm}^3$
 $A = 10600 \text{ mm}^2$
 $I_y = 11259 \text{ cm}^4$
 $I_z = 3924 \text{ cm}^4$

xz Equilibrio a traslazione $\Rightarrow U_c = F = 10 \text{ kN}$

$V_c + V_A = qL \Rightarrow V_A = 0$

$V_c = qL = 800 \text{ kN}$ perché la risultante del carico distribuito è applicata esattamente in C.

Equilibrio a rotazione: polo C

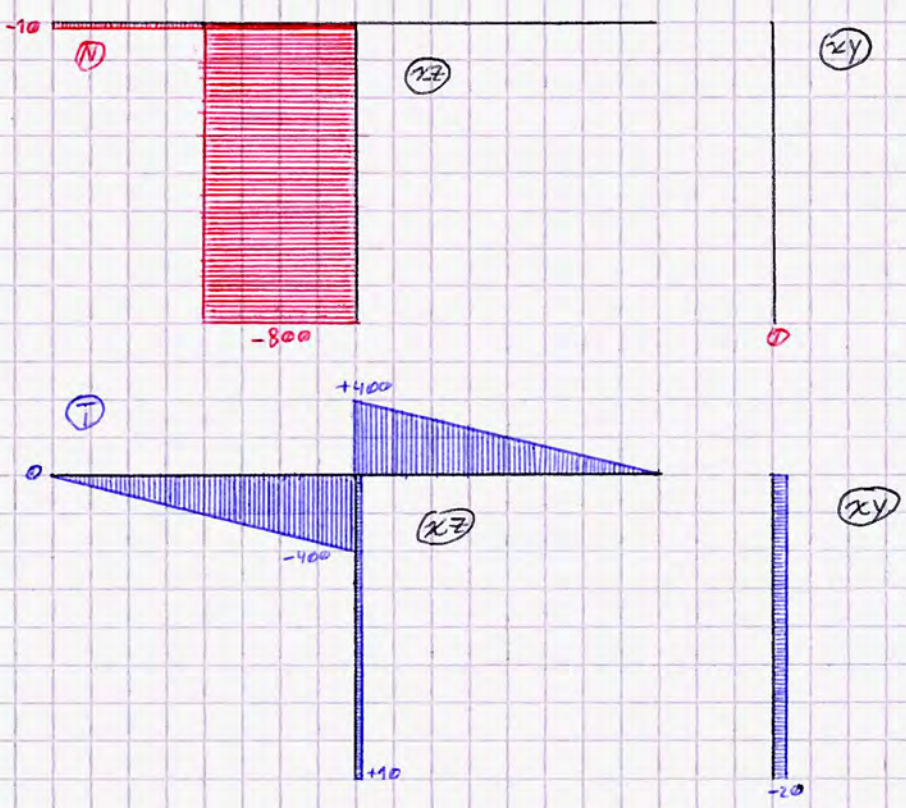
$M_c - F \cdot L = 0 \Rightarrow M_c = 10 \cdot 4 = 40 \text{ kNm}$

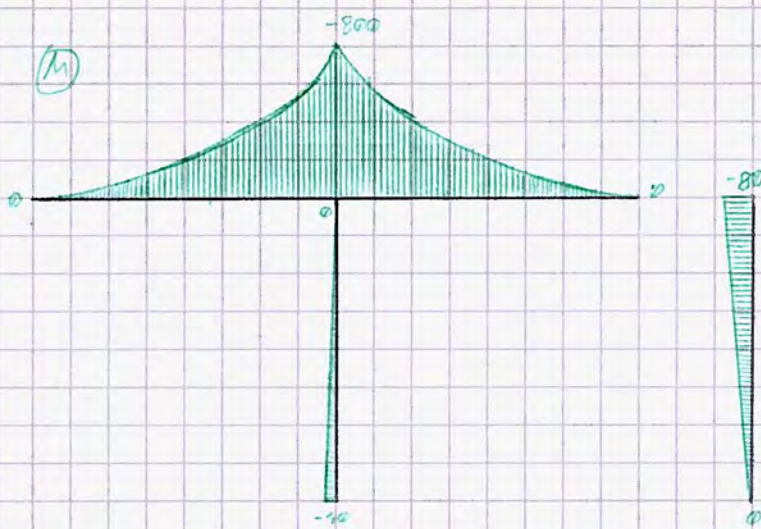
xy Equilibrio a traslazione $\Rightarrow V'_c = 0$

$W_c = W_B = \frac{M}{L} = \frac{80}{4} = 20 \text{ kN}$

$\Delta V_c \neq V'_c$: sono reazioni indipendenti assorbite dal vincolo!

È ora possibile tracciare i diagrammi delle CDS:





② Verifica a taglio e flessione in ABD

Flessione: $M_{Ed} \leq M_{pl,y,Rd}$

$M_{Ed} = 8000 \text{ kNm}$ valore massimo dell'azione

$$M_{pl,y,Rd} = W_{pl,y} \cdot \frac{f_{yk}}{\gamma_{M0}} = 3512 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot \frac{275 \text{ MPa}}{1,05} = 920 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{8000}{920} = 87,0\%$$

Taglio: $V_{Ed} \leq V_{Rd}$

$$V_{Ed} = 4000 \text{ kN}$$

$$V_{Rd} = \frac{A_v f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot 1,05} = \frac{8380 \cdot 275}{\sqrt{3} \cdot 1,05} = 1267 \text{ kN}$$

$$A_v = A - 2b \cdot t_f + (t_w + 2r) \cdot t_f = 15600 - 2 \cdot 200 \cdot 19 + (12 + 2 \cdot 24) \cdot 19 = 8380 \text{ mm}^2$$

$$\frac{V_{Ed}}{V_{Rd}} = \frac{4000}{1267} = 31,6\%$$

③ Pressoflessione (M-N) nella colonna BC nei due piani xz; xy (INSTABILITÀ)

Si effettua la verifica nei due piani in maniera congiunta, ponendo:

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{\min} \cdot f_{yk} \cdot A} + \frac{M_{y,eqEd} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_{pl,y} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eqEd} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_{pl,z} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)} \leq 1$$

Momento equivalente agente sull'asta, schematizza la distribuzione di M come una singola coppia.

χ_{\min} → Resistenza a buckling per sezioni di classe 1, 2, 3; v. p. 32
 $N_{cr,y}$ → Critico (p. 31)
 $N_{cr,z}$ → Critico (p. 31)
 $\frac{N_{Ed}}{N_{b,Rd}}$ → Resistenza a buckling per sezioni di classe 1, 2, 3; v. p. 32
 $\frac{G_{MAX}}{f_{yd} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr}}\right)}$ → riduce f_{yd} in virtù dell'aliquota di N già legata all'attivazione del meccanismo instabile
] → Massima tensione agente nella sezione, p. 33

In generale, il momento equivalente si calcola come segue:

$$M_{eq,Ed} = 0,6 M_a - 0,4 M_b \geq 0,4 M_a$$

→ Valore MINIMO da considerare di M_{Ed}

→ Valore minimo di momento nella distribuzione

→ Valore massimo di momento nella distribuzione

Dunque, si ha:

$$M_{y,eq,Ed} = 0,6 \cdot 40 \text{ kNm} - 0,4 \cdot 0 \text{ kNm} = 24 \text{ kNm} (> 0,4 M_a = 16 \text{ kNm})$$

$$M_{z,eq,Ed} = 0,6 \cdot 80 \text{ kNm} - 0,4 \cdot 0 \text{ kNm} = 48 \text{ kNm} (> 0,4 M_a = 32 \text{ kNm})$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

→ lunghezza di libera inflessione, p. 31

$l_0 = \beta \cdot L$; $\beta_{xz} = 2$ in virtù dei relativi
 $\beta_{xy} = 1$ schemi strutturali (notevoli)

$$N_{cr,y} = \frac{\pi^2 E I_y}{l_{0y}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ MPa} \cdot 3924 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(4000 \text{ mm} \cdot 1)^2} = 5083 \text{ kN}$$

$$N_{cr,z} = \frac{\pi^2 E I_z}{l_{0z}^2} = \frac{\pi^2 \cdot 21000 \text{ MPa} \cdot 11259 \cdot 10^4 \text{ mm}^4}{(4000 \text{ mm} \cdot 2)^2} = 3646 \text{ kN}$$

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \lambda^2}} \leq 1; \quad \chi_{min} = \min \{ \chi_y; \chi_z \} \quad (\text{p. 33})$$

$$\phi = 0,5 [1 + \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$$

$$\bar{\lambda} = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr}}} \quad \text{snellezza}$$

α è il fattore di imperfezione menzionato tra le ipotesi.

$$\phi_y = 0,5 [1 + 0,34 (\bar{\lambda}_y - 0,2) + \bar{\lambda}_y^2] = 1,01$$

$$\phi_z = 0,5 [1 + 0,49 (\bar{\lambda}_z - 0,2) + \bar{\lambda}_z^2] = 0,93$$

$$\bar{\lambda}_y = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr,y}}} = \sqrt{\frac{10600 \cdot 275}{3646}} = 0,89$$

$$\bar{\lambda}_z = \sqrt{\frac{A \cdot f_{yk}}{N_{cr,z}}} = \sqrt{\frac{10600 \cdot 275}{5083}} = 0,76$$

$$\chi_y = \frac{1}{1,01 + \sqrt{1,01^2 - 0,89^2}} = 0,672 < 1 \rightarrow \text{OK} \quad (\text{verifica sui calcoli!!})$$

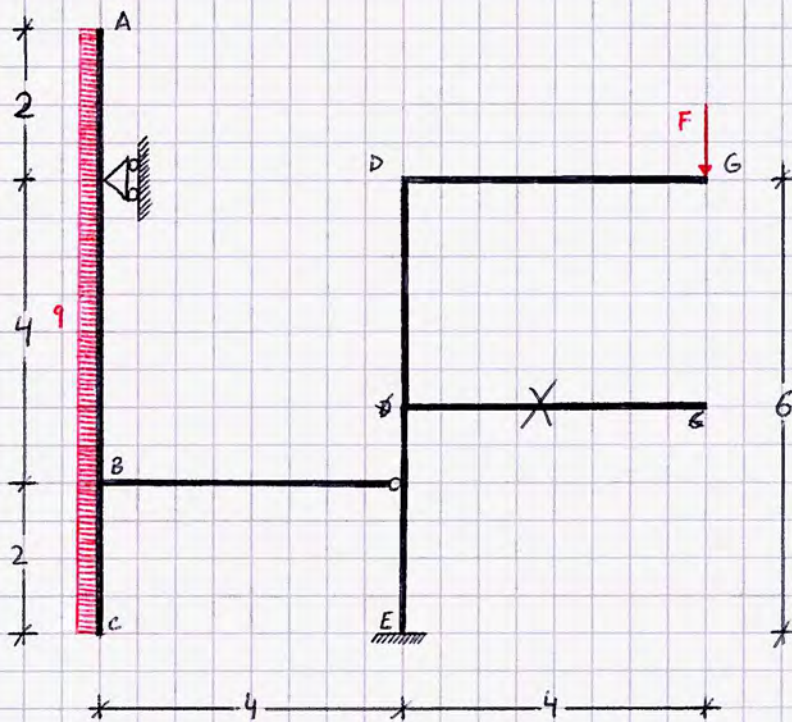
$$\chi_z = \frac{1}{0,93 + \sqrt{0,93^2 - 0,76^2}} = 0,682 < 1 \rightarrow \text{OK}$$

$$\chi_{min} \equiv \chi_y = 0,672$$

È ora possibile condurre la verifica a pressoflessione:

$$\frac{800 \cdot 1,05}{0,672 \cdot 275 \cdot 10600} + \frac{24 \cdot 1,05}{275 \cdot 1053 \left(\frac{1-800}{3646} \right)} + \frac{48 \cdot 1,05}{275 \cdot 498 \left(\frac{1-800}{5083} \right)} = 0,98 < 1 \quad \text{OK}$$

La verifica è soddisfatta, l'esercizio è risolto.



Sezioni:	Azioni:
ABC ; DG IPE500	$q = 40 \text{ kN/m}$ $F = 30 \text{ kN}$
$W_{pl,y} = 2194 \text{ cm}^3$ $A = 11600 \text{ mm}^2$ $b_t = 200 \text{ mm}$ $t_t = 16 \text{ mm}$ $t_w = 10,2 \text{ mm}$ $r = 21 \text{ mm}$ $I_y = 48200 \text{ mm}^4$	Materiale: Acciaio S275
BD ; DE HEB450	
$W_{pl,y} = 3982 \text{ cm}^3$ $A = 21800 \text{ mm}^2$ $b_t = 300 \text{ mm}$ $t_t = 26 \text{ mm}$	

Si riportano nella traccia le seguenti formule:

$$A_v = A - 2b \cdot t_t + (t_w + 2r) \cdot t_t$$

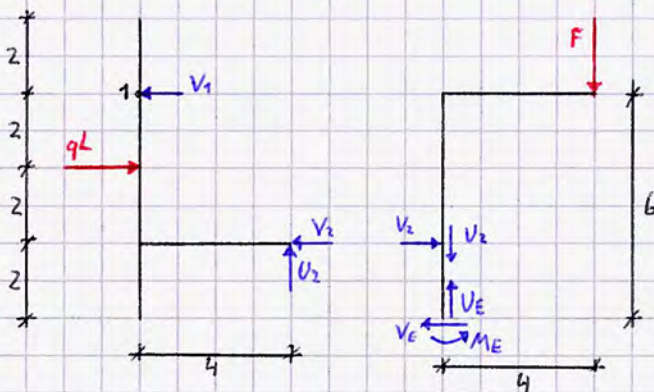
$$M_{N_y, Rd} = \frac{M_{pl,y, Rd} (1 - n)}{1 - \omega_s a} \leq M_{pl,y, Rd}$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl, Rd}}; \quad a = \frac{A - 2b t_t}{A} \leq 0,5$$

Si richiede di determinare:

- ① Diagrammi delle CDS;
- ② Verifica a flessione e taglio nelle travi ABE e DG
- ③ Verifica a pressoflessione in BD* e DE

① La struttura è evidentemente isostatica. Dividendola in due sottostutture, risulta:



①

$$V_1 + V_2 = qL = 40 \cdot 8 = 320$$

Polo 1 Equilibrio alla rotazione

$$qL \cdot 2 - V_2 \cdot 4 = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{qL}{2} = 160 \text{ kN}$$

$$V_1 = 40 \cdot 8 - 160 = 160 \text{ kN}$$

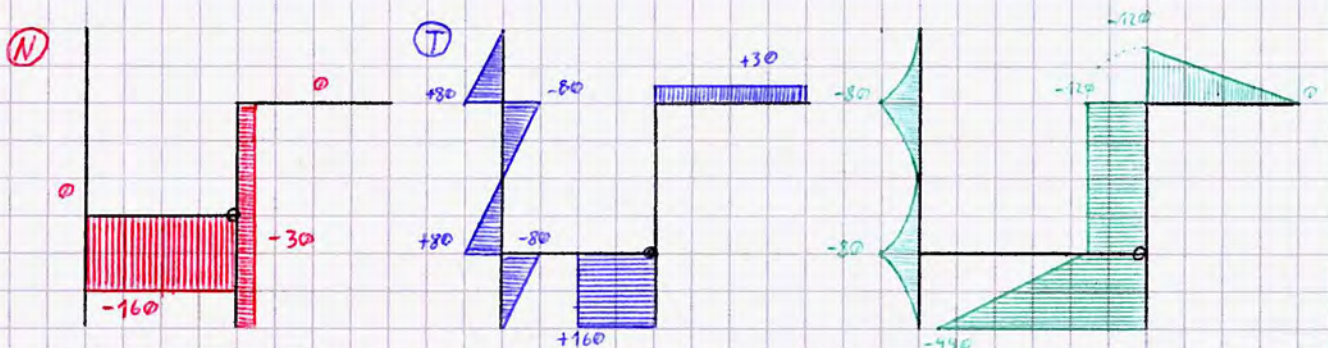
②

$$U_E = F = 30 \text{ kN}$$

$$V_E = V_2 = 160 \text{ kN}$$

Polo E

$$M_E - V_2 \cdot 2 - 30 \cdot 4 = 0 \Rightarrow M_E = 320 + 120 = 440 \text{ kNm}$$



② Verifica a flessione e taglio in ABC e in DG:

$$ABC \rightarrow M_{Ed} = 80 \text{ kNm} ; \quad DG \rightarrow M_{Ed} = 120 \text{ kNm}$$

Essendo la sezione coincidente tra le due travi, M_{Rd} è unico e pari a:

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{ply} \cdot f_{yk}}{\gamma_{mo}} = \frac{2194 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}{1,05} = 574 \text{ kNm}$$

$$\frac{M_{Ed,ABC}}{M_{Rd}} = \frac{80}{574} = 13,9\%$$

$$\frac{M_{Ed,DG}}{M_{Rd}} = \frac{120}{574} = 20,9\%$$

OK

Taglio

$$ABC \rightarrow V_{Ed} = 80 \text{ kN} ; \quad DG \rightarrow V_{Ed} = 30 \text{ kN}$$

$$V_{Rd} = \frac{A_v \cdot f_{yk}}{\sqrt{3} \gamma_{mo}} = \frac{6035,2 \text{ mm}^2 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}{\sqrt{3} \cdot 1,05} = 912,6 \text{ kN}$$

$$\frac{V_{Ed,ABC}}{V_{Rd}} = \frac{80}{912,6} = 8,8\%$$

$$\frac{V_{Ed,DG}}{V_{Rd}} = \frac{30}{912,6} = 3,3\%$$

$$A_v = 11600 - 2 \cdot 200 \cdot 16 + (10,2 + 2,21) \cdot 16 = 6035,2 \text{ mm}^2$$

③ Verifica M-N in BD e DE

$$BD: \quad N_{Ed} = 160 \text{ kN} ; \quad M_{Ed} = 0 \text{ kNm}$$

BD è l'asta orizzontale tra B e la cerniera interna

$$DE: \quad N_{Ed} = 30 \text{ kN} ; \quad M_{Ed} = 440 \text{ kNm}$$

ⓑ $M_{Ed} = 0 \rightarrow$ la verifica degenera in una verifica a puro sforzo normale $N_{Ed} \leq N_{pl,Rd}$

$$N_{pl,Rd} = \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{mo}} = \frac{21800 \text{ mm}^2 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}{1,05} = 5709,5 \text{ kN}$$

$$\frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} = \frac{160}{5709,5} = 2,8\% \quad \text{OK}$$

Ⓓ $N_{Ed} = 30 \text{ kN}$ è certamente minore di $N_{pl,Rd} = 5709,5 \text{ kN}$, occorre verificare ora la resistenza rispetto al contributo flessionale di N_{Ed} .

$$n = \frac{N_{Ed}}{N_{pl,Rd}} = \frac{30}{5709,5} = 5,25 \cdot 10^{-3} = 0,005$$

$$\alpha = \frac{(A - 2b t_f)}{A} = \frac{21800 - 2 \cdot 300 \cdot 26}{21800} = 0,28 < 0,5 \quad (\text{limite superiore ad } \alpha)$$

Dunque, essendo

$$M_{pl,y,Rd} = \frac{W_{ply} \cdot f_{yk}}{\gamma_{mo}} = \frac{3982 \cdot 10^3 \text{ mm}^3 \cdot 275 \text{ N/mm}^2}{1,05} = 1042,9 \text{ kNm}$$

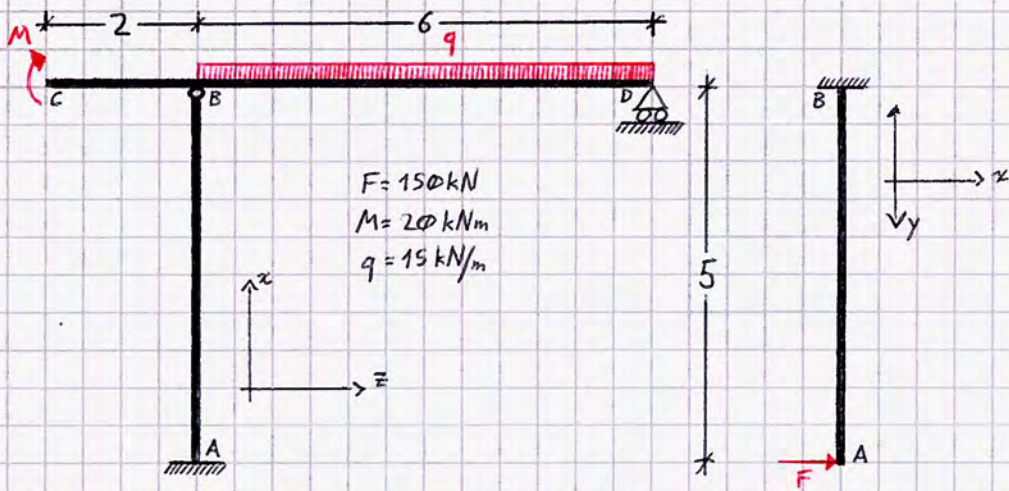
Si ha che

$$M_{N,y,Rd} = \frac{M_{pl,y,Rd} (1 - n)}{1 - 0,5\alpha} = \frac{1042,9 \text{ kNm} (1 - 0,005)}{1 - 0,5 \cdot 0,28} = 1206,6 \text{ kNm}$$

Poiché $M_{N,y,Rd} > M_{pl,y,Rd}$, $M_{Rd} = M_{pl,y,Rd}$. Dunque,

$$\frac{M_{Ed}}{M_{Rd}} = \frac{440}{1042,9} = 42,2\%$$

L'esercizio è risolto.



Materiali:
Acciaio S355

Sezioni:

[CBD]
IPE 330
 $W_{pl} = 804330,7 \text{ mm}^3$
 $A = 6260 \text{ mm}^2$
 $b_t = 160 \text{ mm}$
 $t_w = 7,5 \text{ mm}$
 $t_f = 11,5 \text{ mm}$
 $r = 18 \text{ mm}$
 $I_y = 1170 \text{ cm}^4$

[AB]
HEM 400
 $W_{pl,y} = 5570619 \text{ mm}^3$
 $W_{pl,z} = 1934133 \text{ mm}^3$
 $A = 32580 \text{ mm}^2$
 $I_y = 104119 \text{ cm}^4$
 $I_z = 19335 \text{ cm}^4$
Fattori di imperfezione
 $\alpha_y = 0,21$
 $\alpha_z = 0,34$

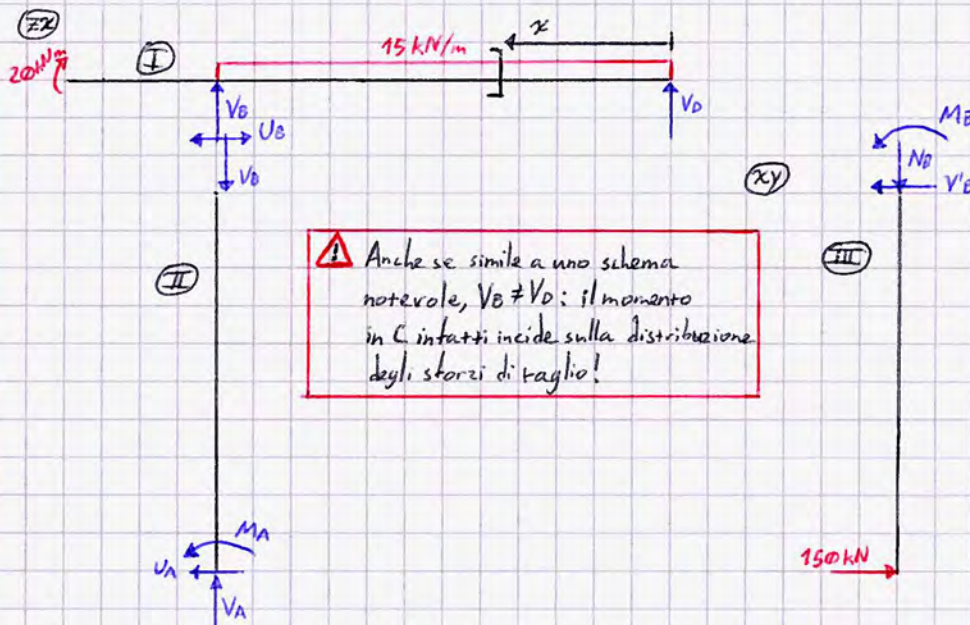
Sapendo che $A_v = A - 2b_t t_f (t_w + 2r) \cdot t_f$

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_{M1}}{\chi_{min} \cdot f_{yk} \cdot A} + \frac{M_{y,eq Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_{pl,y} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,y}}\right)} + \frac{M_{z,eq Ed} \cdot \gamma_{M1}}{f_{yk} \cdot W_{pl,z} \left(1 - \frac{N_{Ed}}{N_{cr,z}}\right)}$$

$$M_{eq} = 0,6 M_a - 0,4 M_b \geq 0,4 M_a$$

- Valutare: ① Diagrammi delle C.d.S.;
② Verifica a flessione e taglio in CBD e calcolo dell'abbassamento S_c ;
③ Verifica M-N sulla colonna AB

- ① Scomponiamo la struttura - globalmente isostatica - nei tronchi che la compongono per valutare le reazioni vincolari:



① $V_D + V_B - 15 \cdot 6 = 0$ DOPO Eq. a ROTAZIONE in B $\Rightarrow V_B = 15 \cdot 6 - 48,3 = 41,7 \text{ kN}$

② $V_D \cdot 6m - (15 \text{ kN/m} \cdot 6m) \cdot 3m - 20 \text{ kNm} = 0 \Rightarrow V_D = 48,3 \text{ kN}$

$U_B = 0$

③ $V_A = V_B = 41,7 \text{ kN}$

$M_A = 0$; $U_A = U_B = 0$

④ $V'_B = F = 150 \text{ kN}$; $M_B = F \cdot 5m = 750 \text{ kNm}$

$N_B = 0$

Applicando la formula della verifica all'instabilità,

$$\frac{41,7 \text{ kN} \cdot 1,05 \cdot 10^3 \frac{\text{N}}{\text{kN}}}{0,2 \cdot 355 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 32580 \text{ mm}^2} + \frac{450 \text{ kNm} \cdot 10^6 \frac{\text{Nmm}}{\text{kNm}} \cdot 1,05}{355 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 1934133 \text{ mm}^3 \left(1 - \frac{41,7 \text{ kN}}{4003 \text{ kN}}\right)} = 0,02 < 1 \quad \text{OK}$$

⚠ ATTENZIONE ALLE UNITÀ DI MISURA

Può essere utile riportare nella formula le unità di misura (anche sui coefficienti di conversione) per non essere indotti all'errore di calcolo.

L'esercizio è risolto.

08.06.2023 - Fine

Tecnica delle Costruzioni

prof. Antonio Formisano

28.09.23 - 30L

Schemi Notevoli

Rigidezze Flessionali



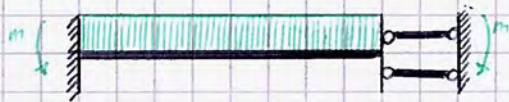
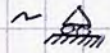
$$K = \frac{4EI}{L}$$

$$t = 0,5$$



$$K = \frac{3EI}{L}$$

$$t = 0$$



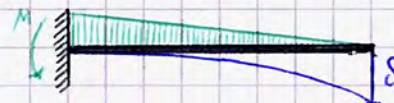
$$K = \frac{EI}{L}$$

$$t = 1$$

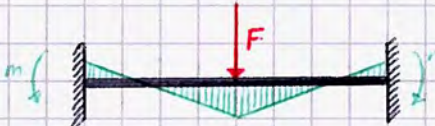
Momenti di incastro perfetto



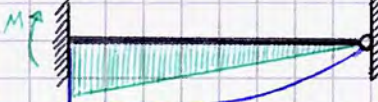
$$M = \frac{qL^2}{12}$$



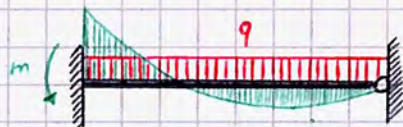
$$M = \frac{2EI}{L^2} S$$



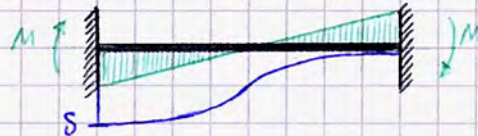
$$M = \frac{FL}{8}$$



$$M = \frac{3EI}{L^2} S$$

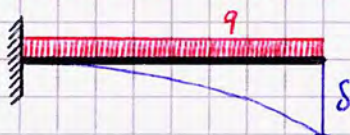


$$M = \frac{qL^2}{8}$$



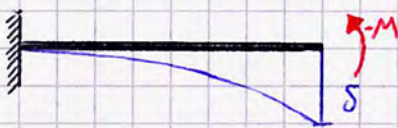
$$M = \frac{6EI}{L^2} S$$

Abbassamenti di travi a mensola

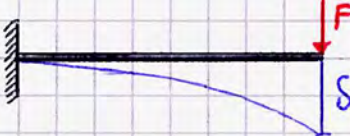


$$S = \frac{qL^4}{8EI}$$

Se il S provoca un decentramento di una F assiale, nasce un momento $F \cdot S$ da dover valutare: il S effettivo aumenta!

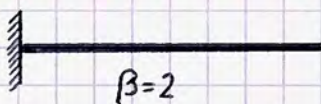


$$S = \frac{ML^2}{2EI}$$

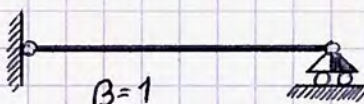


$$S = \frac{FL^3}{3EI}$$

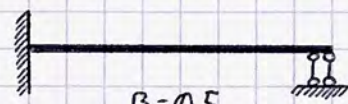
Lunghezze di libera inflessione



$$\beta = 2$$

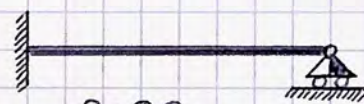


$$\beta = 1$$



$$\beta = 0,5$$

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(\beta L)^2}$$



$$\beta = 0,7$$

Verifiche a Compressione (Acciaio)

$$N_{c,Rd} = \frac{A \cdot f_{yk}}{\gamma_{m0}}$$

$$N_{b,Rd} = \chi \frac{f_{yk} A}{\gamma_{m2}}$$

Verifiche a Flessione (Acciaio)

$$M_{pl,Rd} = \frac{W_{pl} \cdot f_{yk}}{\gamma_{m1}} \quad \text{per sezioni di classe 1, 2, 3}$$

$$M_{b,Rd} = M_{pl,Rd} \left(1 - \frac{1-n}{1-0,5a} \right)$$

$$a = \frac{A - 2bt_w}{A}$$

$$n = \frac{N_{Ed}}{M_{pl,Rd}}$$

Verifiche a Taglio (Acciaio)

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{m0}} \quad \text{sezioni ad anima tozza}$$

$$V_{pl,Rd} = \frac{A_v \cdot f_{yk}}{\sqrt{3} \cdot \gamma_{m0}} \cdot \chi_v \quad \text{anima snella } (\Leftrightarrow c/t \mid \text{ classe 4})$$