

Fondazioni

prof. Luca PAGANO

Appunti di Riccardo Maria Polidoro
riccardo.polidoro.org

Sia le fondazioni che il terreno su cui esse insistono possono essere schematizzate come corpi continui (sarà dunque necessario tener conto delle nozioni di meccanica dei continui apprese nel corso di Scienza delle Costruzioni). In particolare:

- Il terreno può essere schematizzato come un continuo bi-fase, composto da uno scheletro solido e da acqua presente nei pori e negli spazi tra i grani (quando non occupati da aria), viene studiato dalla geotecnica, meccanica dei mezzi bi-fase;
- La fondazione rappresenta il vincolo al suolo di una qualsiasi struttura, ne segue che essa deve rispondere a requisiti di resistenza senza deformarsi eccessivamente. Poiché un buon terreno ha una resistenza di ≈ 1 MPa (decisamente ridotta rispetto alle tipiche tensioni che si generano in un edificio intelaiato), risulta evidente che le fondazioni debbano anche ripartire i carichi sul terreno!

1. Meccanica delle terre / Geotecnica

La Geotecnica è la disciplina che si occupa di studiare il comportamento meccanico di un terreno o di una roccia:

- Rocce: particelle o minerali legati tramite forti interazioni chimico-fisiche, resistono a modeste sollecitazioni ed all'immersione in acqua;
- Terreni: le particelle interagiscono unicamente dal punto di vista meccanico salvo che per deboli interazioni elettrolitiche. Si distinguono a loro volta in base a classificazioni funzionali in base al comportamento meccanico, di cui la più frequente è quella che valuta i terreni:
 - A grana grossa: le singole particelle sono visibili e distinguibili ad occhio nudo ($\approx 0,05 - 0,06$ mm);
 - A grana fine: le particelle non sono distinguibili ad occhio nudo (limi, argille).

Detta distinzione è efficace per i soli terreni con assorbimento monogranulare; consente però di comprendere le sostanziali differenze nel comportamento meccanico degli aggregati al variare della loro dimensione: i terreni a grana grossa sono caratterizzati da un'interazione tra i grani fornita dalla sola forza di contatto; quelli a grana fine presentano anche forze di legame elettrolitiche che influenzano il legame sforzo-deformazione a scala macroscopica. In altre parole, è possibile distinguere tra terreni granulari o incoerenti (trascurabile resistenza a compressione allo stato secco se non consolidata e coesione nulla se immersi in acqua) e terreni coesivi (considerabile resistenza a compressione non consolidata e significativa coesione se immersi in acqua).

Il terreno è fortemente influenzato dalla sua natura particellare e dall'eventuale presenza di acqua con una propria pressione; contemporaneamente però l'applicazione di carichi sul terreno implica deformazioni attive a 4 scale differenti:

- Deformazioni delle singole particelle;
- Plasticizzazione delle particelle nei punti di contatto;
- Rottura delle particelle;
- Spostamenti relativi tra particelle.

Detti fenomeni possono implicare deformazioni macroscopiche, si intuisce dunque l'approccio multiscale - micro e macroscopico - da considerare nella modellazione dei terreni.

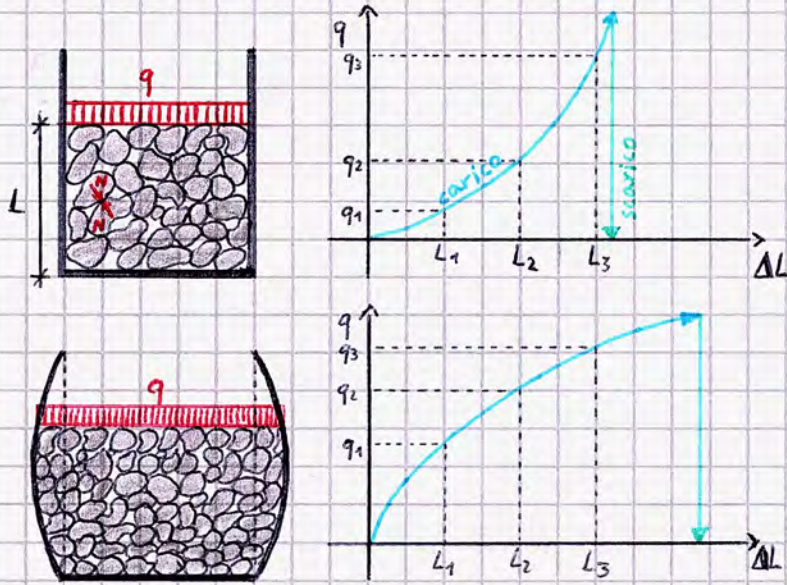
Tra questi, il meccanismo preponderante a livello microscopico è l'ultimo: le deformazioni nei terreni sono principalmente dovute a slittamenti e rotolamenti relativi tra particelle!

Anche se i singoli grani sono rigidi, lo scheletro solido del terreno è in genere piuttosto deformabile a causa dello scorrimento e del cambio di configurazione delle particelle; in un recipiente si possono simulare le condizioni di esercizio del terreno sotto carico. Gli spostamenti delle particelle non sono reversibili, dunque non vengono recuperati all'atto della rimozione del carico!

In un recipiente a pareti infinitamente rigide contenente particelle a loro volta infinitamente rigide, l'applicazione di un carico q indurrà una configurazione più addensata, dunque sempre più rigida, determinando un comportamento meccanico non lineare del materiale che tende a un progressivo aumento della rigidità E , allontanandosi dalle condizioni di rottura (le particelle occupano lo spazio precedentemente vuoto, dovuto ai pori).

Lo slittamento delle particelle, alla base del fenomeno, implica la necessità di superare le sollecitazioni attrittive tra i grani; all'aumentare del carico e del grado di incastrò nascono degli sforzi normali alle superfici di contatto sempre maggiori, implicando maggior attrito. Si ha quindi un comportamento a rigidità crescente.

In esercizio, il terreno soggetto a compressione può andare incontro a espansione libera o impedita; nel secondo caso si registra uno stato tensionale quasi sferico, in cui si registra una maggiore resistenza assiale.

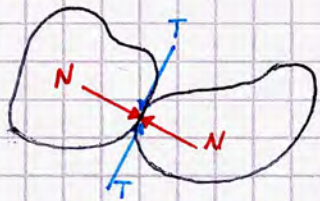


In un recipiente a pareti deformabili (corrispondente ad una condizione a spostamento orizzontale non impedito ma in cui è comunque garantita una minima coazione), a incrementi costanti di carico si associa un incremento dei ΔL , dunque un comportamento a rigidità decrescente; si raggiunge rottura in corrispondenza del punto ~~carico~~ a tangente orizzontale nel grafico $q-\Delta L$ (rottura per taglio dei grani).

Se aumenta la pressione dell'acqua di porosità, si riducono gli sforzi normali agenti tra i grani, rendendo più facili gli scorrimenti (Δ Non si riduce il coefficiente di attrito, si riduce l'entità della forza normale!). Ne segue che in Geotecnica è fondamentale determinare la pressione dell'acqua.

I pori possono infatti essere parzialmente o totalmente occupati da acqua, richiedendo l'adozione di tecniche sperimentali, principi e approcci idonei alla sperimentazione e allo studio di un mezzo bi- o tri-fase (solido, liquido, gassoso).

Gli slittamenti tra particelle si verificano per azioni taglianti T almeno pari al valore T_{lim} , corrispondente alla forza di attrito:



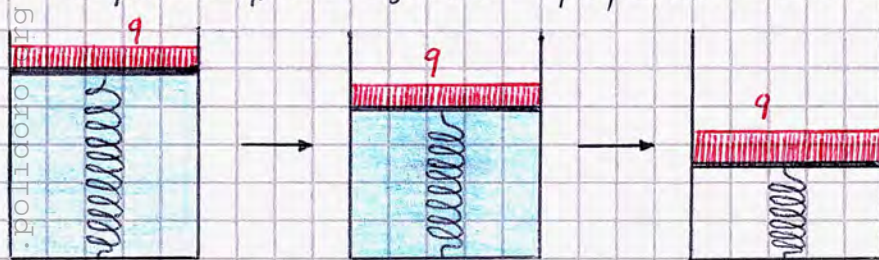
$$T \leq T_{lim} = \mu \cdot N$$

μ coefficiente di attrito

$$N^* = N - p_{H_2O} \cdot A_{contatto}$$

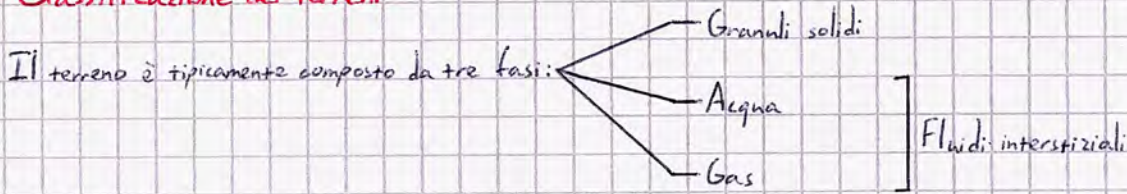
in presenza di acqua in pressione

In un recipiente a pareti rigide e impermeabili che contiene particelle infinitamente rigide di terreno immerse in acqua, un carico verticale applicato sarà equilibrato dalla sola fase liquida, che subisce un incremento di pressione ed impedisce deformazioni del sistema: in un sistema iperstatico infatti gli elementi più rigidi tendono ad assorbire alquanto maggiori di carico e lo scheletro solido può essere visto come una molla caratterizzata da una rigidità inferiore a quella volumetrica dell'acqua. Immaginando di consentire una graduale fuoriuscita di liquido, la pressione dell'acqua si riduce e la molla si carica, cedendo della quantità q/D . Ne segue che l'acqua può indurre cedimenti dilazionati nel tempo.



riccardo.polidoro

Classificazione dei terreni



L'insieme dei granuli solidi costituisce lo scheletro solido; in assenza di interazioni meccaniche con i fluidi interstiziali lo scheletro solido è il solo responsabile del comportamento complessivo del terreno.

Il comportamento tensio-deformativo (comportamento statico) e la resistenza che esso offre alla filtrazione dei fluidi nei pori (comportamento idraulico) dipendono dalla struttura dello scheletro solido, ovvero dalla disposizione dei granuli e dal tipo di interazione interparticellare, valutabili tramite lo studio di:

- Proprietà intrinseche:
 - Assortimento granulometrico
 - Forma dei grani
 - Forze particellari
- Condizioni di stato:
 - Rapporti tra le fasi

Proprietà intrinseche

grana fina	grana grossa	mm
10^{-6}	10^0	10^2
indistinguibile ad occhio nudo	visibile	
forma lamellare	tre dimensioni comparabili	
Intervengono forze di superficie (elettrochimiche) oltre che di massa	L'interazione tra grani è esclusivamente legata a forze di massa (meccaniche)	

Per quanto riguarda le dimensioni dei granuli, il rapporto tra diametro minimo e massimo di una particella che compone un terreno è paragonabile a quello tra il diametro di una biglia e quello del pianeta Terra.

Come osservabile dallo schema a fianco, in cui sono elencate le differenze tra aggregati a grana fine e a grana grossa, la regolarità della forma dipende anche dalla dimensione dei granuli.

Analogamente, i granuli di ridotto diametro aderiscono tra loro sia in ragione di forze di attrito che per interazioni di natura elettrochimica.

A parità di peso, è evidente che un cubo unico ha minor superficie di 8 cubetti (analogamente a parità di volume); ne segue che gli aggregati a grana fine hanno maggior superficie specifica:

Argilla
 $d < 0,002 \text{ mm}$

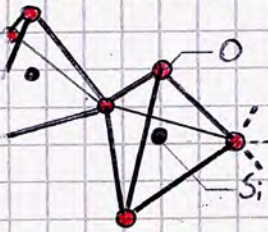
Sabbia
 $d \sim 2 \text{ mm}$

$S_s \leq 800 \text{ m}^2/\text{g}$

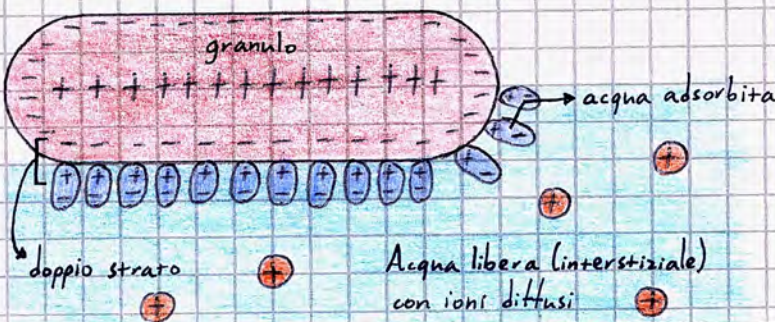
$S_s \sim 2,00 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{g}$

Superficie specifica maggiore

Maggior probabilità di incontrare particelle attive dal punto di vista elettrochimico.



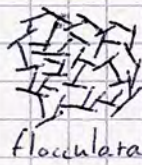
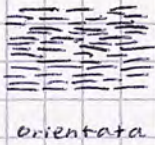
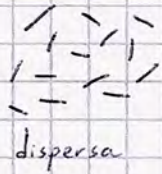
Le particelle di argilla - unità elementari formate da tetraedri ed ottaedri collegati in pacchetti che, combinati in successione, costituiscono la particella stessa - presentano cariche positive (Si, Al, Mg) all'interno e negative all'esterno (O^- o OH^-). La carica negativa superficiale tende ad essere saturata da molecole di H_2O , dipolari. Dette molecole d'acqua sono da considerare come facenti parte della struttura e non come acqua libera: il pacchetto - quindi il granulo - ha un eccesso di carica negativa superficiale, dunque in acqua viene idratato dal dipolo H_2O , costituendo i complessi di adsorbimento.



I complessi granuli + acqua adsorbita si scambiano azioni repulsive (decrementi con la distanza e la concentrazione elettrolitica) ed attrattive (forze di Van der Waals, dovute al campo magnetico indotto dal moto degli elettroni, decresce rapidamente con la distanza indipendentemente dalla concentrazione), si ha una risultante avente segno dipendente da distanza e concentrazione.

Struttura dei terreni a grana fine in fase deposizionale

In fase di deposizione (soprattutto se in acqua dolce) forti azioni repulsive possono dar luogo ad una struttura dispersa; se l'attività superficiale è molto intensa invece la struttura diventa orientata. Se le azioni repulsive sono ridotte (ad esempio per una ridotta concentrazione salina) tendono a formarsi strutture flocculate; la presenza di sali, riducendo le azioni repulsive, può dar luogo anche ad una struttura in cui le particelle si raggruppano a fiocchi, saturi di acqua adsorbita con spazi di acqua libera tra i fiocchi saturi.



La struttura di un terreno a grana fine in fase deposizionale è regolata essenzialmente dalle forze particellari e dipende pertanto dalla mineralogia della particella e dall'ambiente di deposizione.

Struttura dei terreni a grana grossa

Essendo i granuli inerti ed avendo essi bassa superficie specifica, mancano le interazioni di carattere elettrochimico; la struttura iniziale in questo caso è condizionata dall'assortimento granulometrico e dalla forma delle particelle.

⚠ La realtà è molto più complessa: granuli di grosse dimensioni sono spesso in combinazione con particelle di piccole dimensioni (assortimento granulometrico).

Condizioni di Stato (carichi, tempo, vibrazioni, temperatura)

L'azione di carichi, variazioni di temperatura, chimismo possono modificare in fase deposizionale la struttura dello scheletro solido. Nel tempo possono inoltre svilupparsi anche legami di cementazione; nei terreni a grana grossa l'assetto - sintetizzabile nell'addensamento - è molto sensibile alle vibrazioni.

Variazioni di carichi al contorno o variazioni di pressione della fase liquida producono variazioni di sforzi ai contatti. Per contatto è da intendersi quello diretto tra particelle nei materiali a grana grossa, mentre quello mediato dai complessi di adsorbimento nei terreni a grana fine.

Classificazione dei terreni

La prima distinzione da effettuare nella classificazione geotecnica è - come anticipato - quella tra rocce e terreni; per la definizione di Terzaghi e Peck si ha:

I terreni sono aggregati di grani minerali che possono essere separati con moderate azioni meccaniche, ad esempio con agitazione in acqua. Le rocce, d'altra parte, sono un insieme di minerali legati tra loro da legami coesivi forti e permanenti.

Perché i termini "forte" e "permanente" sono soggetti a differenti interpretazioni, il confine tra terreni e rocce è necessariamente arbitrario.

Un elemento di classificazione in geotecnica deve rispondere a più caratteristiche fondamentali:

- Deve influenzare in misura ingegneristicamente significativa le proprietà meccaniche dei terreni;
- Deve essere misurabile con tecniche sperimentali semplici e poco costose (più semplici di quelle necessarie a determinare le proprietà meccaniche).

Perché il comportamento meccanico di un terreno è regolato dalla struttura dello scheletro solido; gli elementi di classificazione adottati devono dunque descrivere le caratteristiche del terreno (assortimento granulometrico, forma dei granuli, forze particellari, rapporti tra le fasi).

Classificare significa suddividere e raggruppare una popolazione in relazione ad una proprietà o caratteristica. Per le rocce, le principali classificazioni sono:

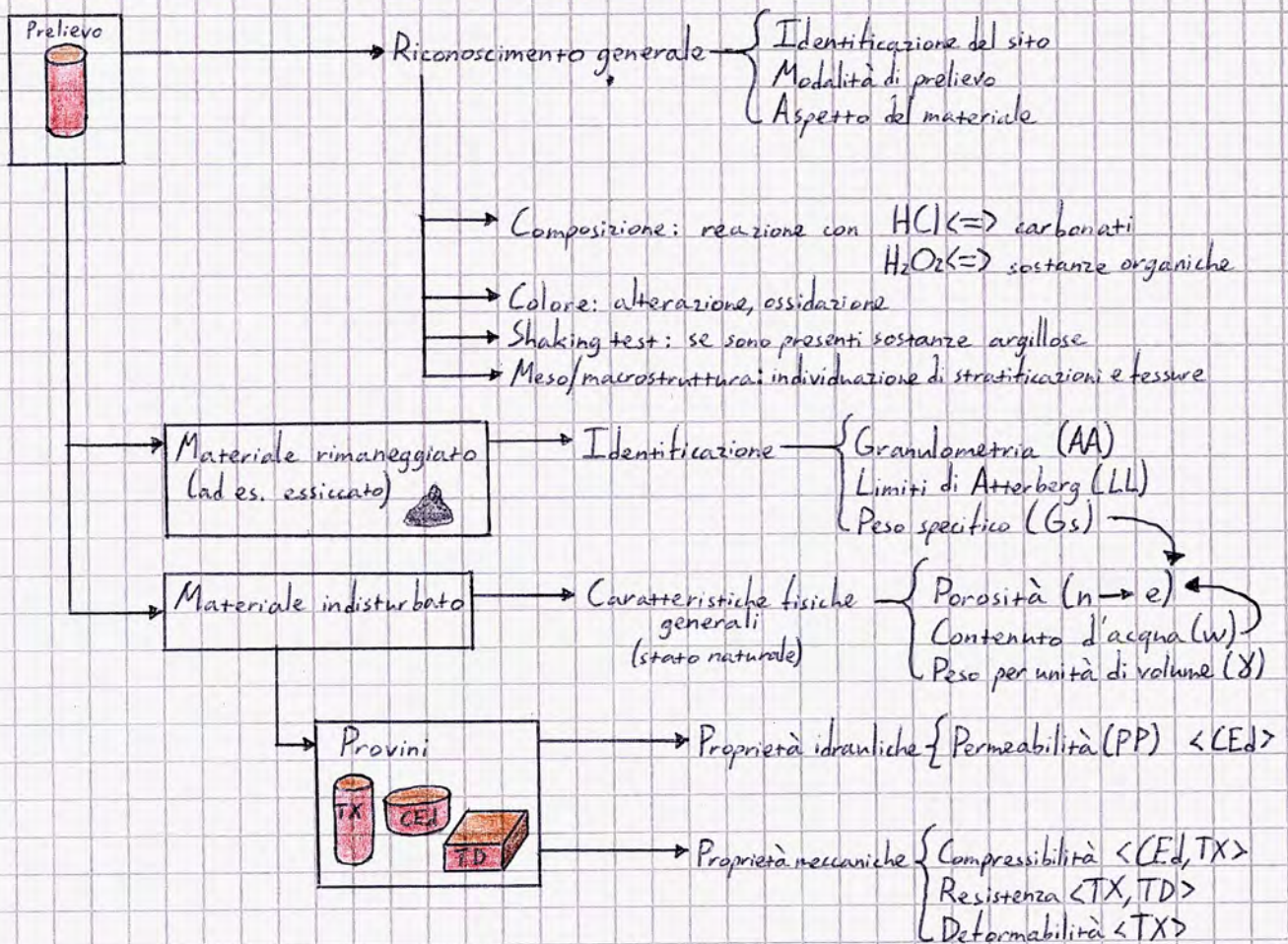
- Geologica: in funzione dell'origine della roccia e dei terreni (rocce ignee, sedimentarie, metamorfiche);
- Geotecnica: in funzione delle proprietà meccaniche e idrauliche (permeabilità, resistenza a rottura, deformabilità).

La classifica geotecnica tende a raggruppare i terreni in classi a comportamento meccanico omogeneo, servendo da guida nella risoluzione dei problemi geotecnici.

Detti elementi di classificazione possono essere suddivisi in:

- Proprietà intrinseche della fase solida (indipendenti dallo stato del terreno)
 - Asserimento granulometrico o granulometria;
 - Plasticità (misura indiretta delle forze particeolari);
- Proprietà fisiche di stato (legate al particolare assetto particellare presente in sito)
 - Porosità;
 - Contenuto d'acqua;
 - Densità relativa;
 - Indice di consistenza.

Una volta prelevato un campione, si procede come nell'ideogramma a flusso qui rappresentato per poter classificare il terreno:



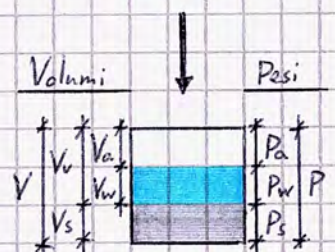
Considerando il generico terreno come un continuo trifase, si definiscono le seguenti grandezze:

Volumi

- $V \rightarrow$ Volume totale dell'elemento di terreno;
- $V_s \rightarrow$ Volume occupato dalla fase solida;
- $V_w \rightarrow$ Volume occupato dalla fase liquida;
- $V_a \rightarrow$ Volume occupato dalla fase gassosa;
- $V_v \rightarrow$ Volume dei vuoti ($= V - V_s$
 $= V_w + V_a$)

Pesi / Pressioni

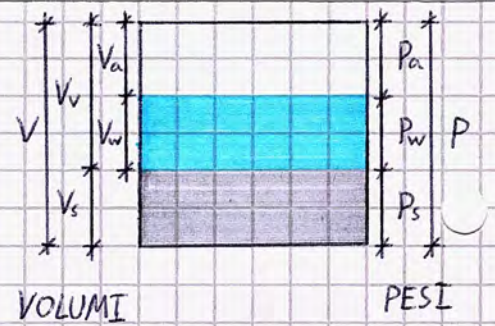
- $P_s \rightarrow$ Peso della fase solida
- $P_w \rightarrow$ Peso della fase liquida
- $P_a \rightarrow$ Peso della fase gassosa (NO)
- $P \rightarrow$ Peso totale



In base alle grandezze appena definite è possibile definire le seguenti proprietà delle fasi costituenti il terreno:

Peso specifico della sostanza solida: $s = \gamma_s = \frac{P_s}{V_s} \left[\frac{F}{L^3} \right]$
 [dei grani]

Minerale	γ_s [g/cm ³]
Quarzo	2,5 ÷ 2,7
Calcite	2,6 ÷ 2,8
Gesso	2,2 ÷ 2,4
Mica	2,7 ÷ 3,1
Feldspati	2,5 ÷ 2,8



(Proprietà di Stato)

Peso specifico dell'acqua: $s_0 = \gamma_w = \frac{P_w}{V_w}$ nelle applicazioni tecniche si considera generalmente $\gamma_w = 1,0 \text{ t/m}^3$

Analogamente, si definiscono le seguenti proprietà dell'aggregato di particelle con la fase liquida:

Peso dell'unità di volume: $\gamma = \frac{P}{V}$

⚠ Occorre definire SEMPRE γ_d e γ_{sat} , anche se il terreno prelevato non è realmente saturo/secco! Essi coincidono con γ se il terreno è saturo/secco.

Peso secco dell'unità di volume: $\gamma_d = \frac{P_s}{V}$

Peso saturo dell'unità di volume: $\gamma_{sat} = \frac{(P_s + P_{w,MAX})}{V}$ ↳ Peso dell'acqua nell'ipotesi che essa occupi tutti i vuoti ($V_w = V_v$)

Si definiscono inoltre delle importanti proprietà di stato relative ai rapporti volumetrici tra fasi:

Porosità: $n = \frac{V_v}{V} = \frac{V_v}{V_s + V_v} \cdot \frac{V_s}{V_s} = \frac{e}{1+e}$ (se $V_s = 1, V_v/V_s = V_v = e$)

Indice dei vuoti: $e = \frac{V_v}{V_s} = \frac{V_v}{V - V_v} \cdot \frac{V}{V} = \frac{n}{1-n}$ (se $V = 1, V_v/V = V_v = n$)

Grado di saturazione: $S_r = \frac{V_w}{V_v} = \frac{V_w}{V_v} \cdot \frac{\gamma_w P_s}{\gamma_w P_s} = \frac{w}{w_{MAX}}$

Contenuto d'acqua: $w = \frac{P_w}{P_s} = \frac{V_w \gamma_w}{V_s \gamma_s} = \frac{V_w S_r \gamma_w}{V_s \gamma_s} = \frac{e S_r \gamma_w}{\gamma_s}$; $w_{MAX} = \frac{P_{w,MAX}}{P_s} = \frac{V_v \gamma_w}{V_s \gamma_s} = \frac{e \gamma_w}{\gamma_s}$

Volume specifico: $v = \frac{V}{V_s} = \frac{V_s + V_v}{V_s} = 1+e$

Definite dette relazioni, è possibile ridefinire i pesi delle singole fasi:

$\gamma_d = \frac{P_s}{V} = \frac{P_s}{V} \cdot \frac{V_s}{V_s} = \gamma_s (1-n)$

$\gamma = \frac{P_s + P_w}{V} = \frac{P_s}{V} + \frac{P_w}{V} = \gamma_d (1+w) = \frac{P_s}{V} + \frac{P_w}{V} \frac{V_w V_v}{V_w V_v} = \gamma_d + n S_r \gamma_w$

$\gamma_{sat} = \gamma_s (1-n) (1+w_{MAX}) = \gamma_s (1-n) + n \gamma_w$

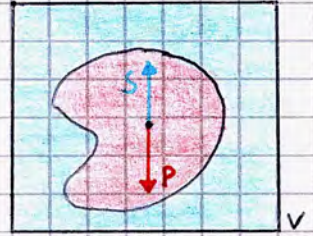
Terreno saturo immerso in acqua

In questo caso occorre valutare anche il peso immerso dell'unità di volume, essendo il terreno saturo alleggerito dalla spinta idrostatica:

$$\gamma' = \gamma_{sat} - \gamma_w$$

La formula equivale all'applicazione del Principio di Archimede:

Un corpo immerso in un liquido è soggetto ad una sottospinta pari al peso del liquido spostato (corrispondente al volume del corpo)



Infatti, se il corpo corrisponde al terreno saturo e il volume complessivo è unitario,

$$\left. \begin{array}{l} P = \gamma_{sat} - 1 \\ S = \gamma_w - 1 \end{array} \right\} \rightarrow P - S = \gamma_{sat} - \gamma_w \quad \blacksquare$$

Misura del peso specifico del solido γ_s

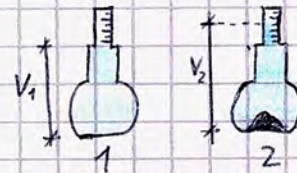
Il peso specifico della sola fase solida si misura attraverso il volumetro (misura il volume del solido attraverso la legge di Boyle, attuando due espansioni in condizioni note di pressione dell'aria contenuta in un recipiente atto a contenere il solido in esame, la prima volta utilizzando solo il recipiente e la seconda usando recipiente e solido insieme: dai valori della pressione si ricava il volume del corpo solido) o il picnometro (strumento in grado di misurare la densità di corpi solidi e liquidi, prevede di inserire un volume noto di acqua distillata e misurarne il peso per poi misurare il peso di acqua e terreno avendo cura di mantenere il volume costante o, per effettuare una misura del volume, valutando la differenza di volume): calcolato il volume spostato nel picnometro (Δ pesi) o nel volumetro (lettura buretta) e misurato il peso del materiale solido ad essiccazione avvenuta (120°C per 24h) si misura:

$$\gamma_s = \frac{P_s}{V_s}$$

L'utilizzo del volumetro (meno preciso) è per terreni a grana grossa, mentre il picnometro (più preciso) è utilizzato nei terreni a grana fine.

$$P_1 = \gamma_w \cdot V \Rightarrow V_1 = \frac{P_1}{\gamma_w} \quad ; \quad P_2 = \gamma_s \cdot V_s + \gamma_w (V - V_s)$$

$$\rightarrow \gamma_s = \frac{P_2 - \gamma_w \left(\frac{P_1}{\gamma_w} - V_s \right)}{V_s}$$



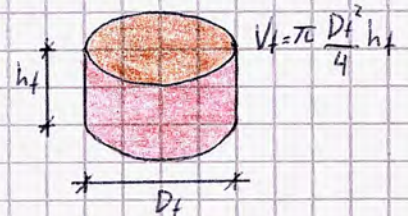
Misura del peso umido dell'unità di volume γ (Peso dell'unità di volume a contenuto d'acqua naturale)

Tra le caratteristiche fisiche geotecniche (CFG, sono n, γ, w), si determinano da prove in laboratorio per ripartire in pesi e volumi le fasi caratterizzanti lo stato naturale di un terreno.

Essendo i campioni inseriti in apposite fustelle, il peso specifico si ottiene effettivamente considerando l'influenza del peso della tara:

$$\gamma = \frac{P_u}{V} = \frac{(P_f + P_c)_u - P_f}{V_f}$$

f = fustella
 c = campione



Misura del peso secco dell'unità di volume γ_d

$$\gamma_d = \frac{P_s}{V_f} = \frac{P_u - P_w}{V_f} = \frac{(P_f + c)_d - P_f}{V_f}$$

con P_w pari al peso di acqua persa dopo essiccazione in stufa a 105°C

Misura del contenuto d'acqua w

$$w = \frac{P_w}{P_s} = \frac{P_u - P_s}{P_s} = \frac{P_u}{P_s} - 1 = \frac{V_t}{V_t} \cdot \frac{P_u}{P_s} - 1 \equiv \frac{\gamma}{\gamma_d} - 1$$

misura effettuata di norma sul provino adoperato per la misura di γ , può eseguirsi anche su un volume incognito.

Calcolo delle grandezze derivate n, e, S_r

γ_s, γ_d → $n = 1 - \frac{\gamma_d}{\gamma_s}$ porosità
 γ_s, γ_d → $e = \frac{\gamma_s}{\gamma_d} - 1$ indice dei vuoti
 w → $S_r = \frac{V_w}{V_v} = \frac{w}{e} \cdot \frac{\gamma_s}{\gamma_w}$ grado di saturazione

Valori di CFG per terreni tipici

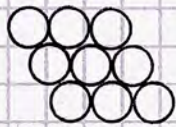
Materiale	G_s	n	e	w_{sat}	γ_d (kN/m^3)	γ (kN/m^3)
Sfere uniformi	-	0,26 ÷ 0,48	0,35 ÷ 0,92	-	-	-
Ghiaia	-	0,25 ÷ 0,40	0,30 ÷ 0,67	-	14 ÷ 21	18 ÷ 23
Sabbia	-	0,25 ÷ 0,50	0,30 ÷ 1,00	-	13 ÷ 18	16 ÷ 21
Limo	2,6 ÷ 2,7	0,35 ÷ 0,50	0,50 ÷ 1,00	-	13 ÷ 19	16 ÷ 21
Argilla tenera	-	0,40 ÷ 0,70	0,70 ÷ 2,30	0,4 ÷ 1,0	7 ÷ 13	14 ÷ 18
Argilla dura	-	0,30 ÷ 0,50	0,40 ÷ 1,00	0,2 ÷ 0,4	14 ÷ 18	18 ÷ 21
Torba	1,8 ÷ 2,2	0,75 ÷ 0,95	3 ÷ 19	2 ÷ 6	1 ÷ 5	10 ÷ 13

Porosità ed indice dei pori

In teoria la porosità varia tra 0% e 100% e l'indice dei pori è compreso tra 0 e ∞ ; in realtà il campo è più ristretto: considerando a titolo esemplificativo un gruppo di sfere uguali, si osserva che tra l'assetto più aperto (grande porosità) e quello ad alto grado di incastro (ridotta porosità) la porosità oscilla tra il 47% e il 25,9%.



$n = 47\%$
 $e = 0,920$
 (MAX)



$n = 25,9\%$
 $e = 0,350$
 (min)

Nei terreni naturali porosità ed indice dei vuoti variano in un campo più ampio, in quanto:

- Le particelle hanno dimensioni diverse tra loro, il che implica che le particelle più piccole possono riempire i vuoti lasciati da quelle più grandi;
- Le particelle hanno forma differente da quella sferica (in presenza di particelle appiattite il campo di variabilità della porosità è più ampio).

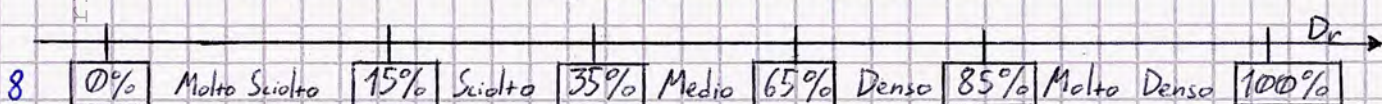
Densità relativa D_r

Più che il valore assoluto della porosità, è importante riferire detta grandezza ai suoi valori estremi per il terreno preso in esame: mentre per l'aggregato perfettamente sferico una porosità del 40% indica un basso grado di incastro, nel caso dell'argilla dura ci si trova alla massima compattezza possibile!

In tal senso si introduce la densità relativa D_r , parametro che descrive la compattezza del materiale, ovvero che si associa al comportamento meccanico - e, indirettamente, idraulico - dell'insieme:

$$D_r = \frac{e_{max} - e}{e_{max} - e_{min}}$$

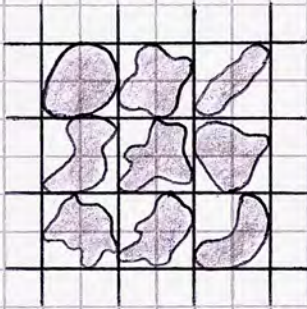
Detto indicatore, variabile tra 0 ed 1, consente di classificare gli aggregati a grana grossa in funzione dello stato:



Proprietà intrinseche

Nei terreni reali, le particelle hanno forme del tutto irregolari, difficilmente assimilabili a figure geometriche semplici come sfera e cubo; per determinare un'efficace classificazione geotecnica basata su proprietà intrinseche (principale classificazione nelle applicazioni) occorre definire un efficace parametro di dimensione.

Si definisce dimensione di una particella la dimensione caratteristica della forma regolare in cui essa è strettamente inscrivibile, convenzionalmente detta diametro (di norma l'iscrizione è in una maglia quadrata, dunque ci si riferisce al lato della maglia!), riferita alla dimensione intermedia della particella (non massima, non minima in virtù di ragionamenti probabilistici associati alla costruzione di un assortimento granulometrico).



La determinazione del diametro equivalente avviene attraverso due differenti metodi di misura:

- **Vagliatura meccanica:** eseguita per terreni a grana grossa, per terreni con particelle aventi diametro non inferiore a 0,075 mm (altrimenti i risultati non sarebbero attendibili in quanto

le particelle con diametro inferiore tenderebbero ad aderire ai setacci formando legami elettrochimici, soprattutto in caso di umidità essendo i grani superficialmente negativi).

A seconda della forma della maglia si distingue tra **crivelli** (⊗) e **setacci** (#); poiché l'attendibilità della misura dipende dalla sua **standardizzazione** (utilizzare la stessa procedura ovunque implica risultati confrontabili), si è assunta la seguente composizione operativa:

- **Crivelli:** impiegati in presenza di particelle di diametro superiore a 5 mm (apertura del crivello), associando alla dimensione delle particelle il diametro dei fori;
- **Setacci:** impiegati per particelle di diametro strettamente minore di 5 mm e maggiore o uguale a 0,075 mm (con apertura pari al lato della maglia), la differente geometria è dovuta al fatto che mentre gli aggregati di maggior dimensione assumono forme tendenzialmente isometriche, negli aggregati di minor diametro ciò non avviene.

La prova si effettua selezionando i crivelli e gli stacci da utilizzare (apertura maggiore del diametro massimo delle particelle), essiccando il campione e procedendo nella vagliatura; ne risulta che ogni filtro ha un trattenuto ed un passante ed è dunque possibile definire l'assortimento granulometrico.

Tra i vari possibili approcci di classificazione (ad es. peso del trattenuto su peso totale), si è assunta come standard la costruzione del **diagramma di frequenza cumulata**, in cui ad ogni apertura della maglia si associa la percentuale in peso del passante cumulato (ad esempio, se a un diametro di 5 mm si associa una percentuale del 60%, il 60% in peso del campione ha diametro minore di 5 mm), calcolato come segue:

$$P(d_i) = \sum_{d_j} T_j + P(d_{\min}) = 100 - \sum_{d_j} T_j$$

↑ Passante al diametro minimo

↑ $\sup\{dx: dx < d_i\}$
↑ $\inf\{dx: dx > d_i\}$

↓ Somma dei pesi dei trattenuti ai vagli di diametro inferiore a d_i
↓ Complemento al 100% dei trattenuti per $d > d_i$

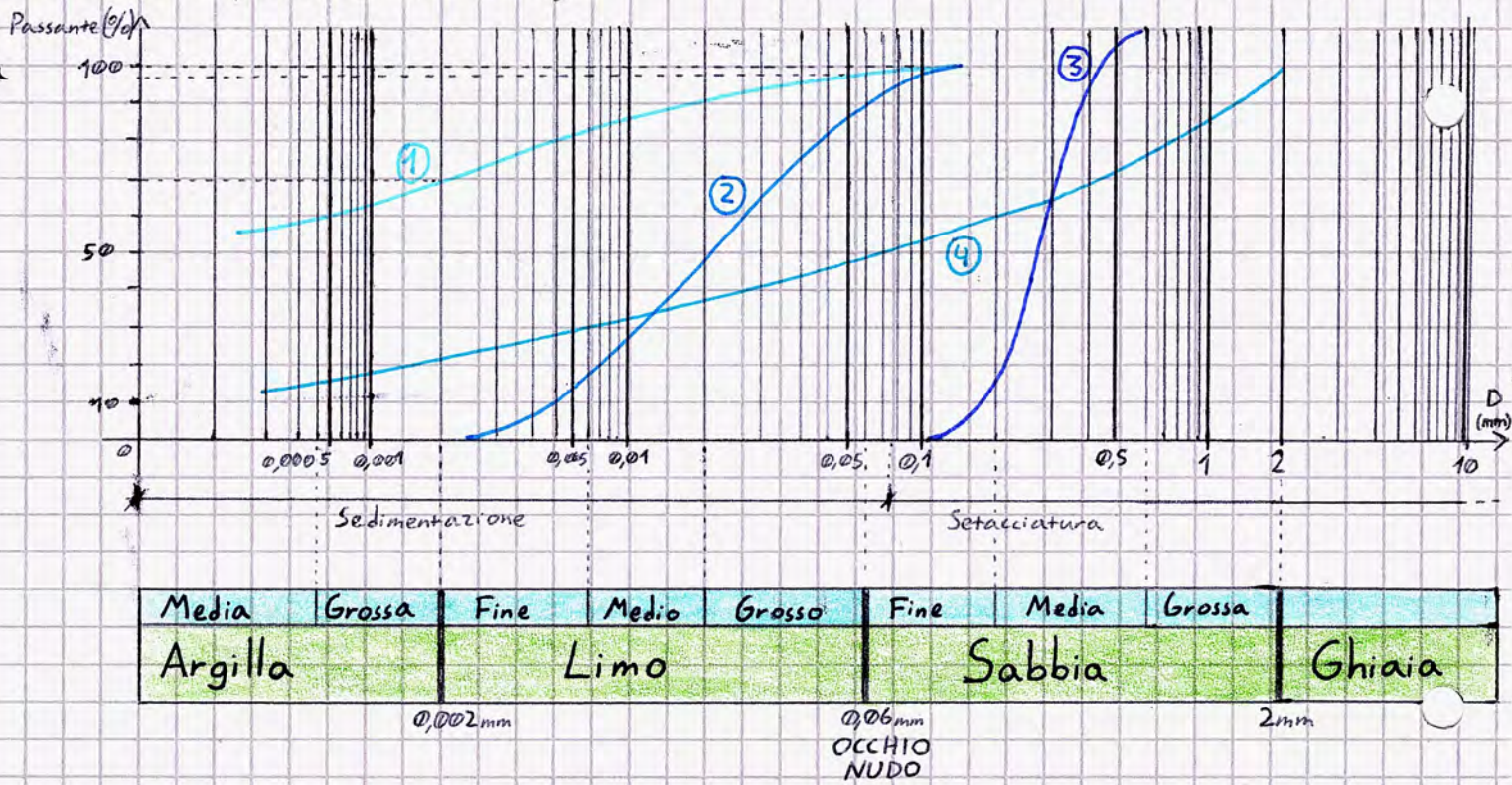
• **Analisi idrometrica:** per discriminare il quantitativo di aggregati di diametro inferiore a $\varnothing,075\text{mm}$ (solitamente superfino) si considera una miscela di acqua e terreno, applicando l'equazione di Stokes secondo cui la velocità di sedimentazione (caduta) di una sfera in un liquido viscoso dipende da varie caratteristiche, tra cui il diametro: le forze resistenti sono maggiori su elementi con un elevato rapporto superficie-peso, ovvero per grani di dimensione ridotta:

$$V = \frac{\gamma_s - \gamma_w}{1800 \eta} \cdot d^2 \Rightarrow d = \sqrt{\frac{1800 \eta \cdot v}{\gamma_s - \gamma_w}}$$

Nota il tempo di caduta dunque si può conoscere il diametro dei grani; ciò che è depositato sul fondo rappresenta il **trattenuto**, mentre ciò che è ancora in sospensione rappresenta il **passante**, di cui è noto il diametro ($< \varnothing,075\text{mm}$) ma non il peso.

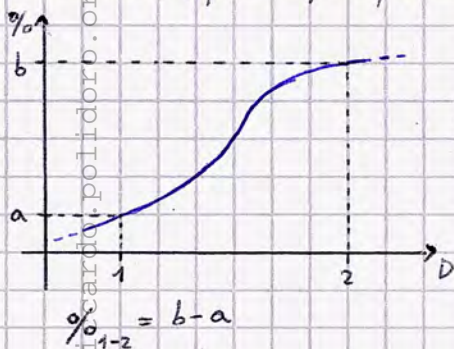
Si utilizza dunque un **aerometro** - galleggiante graduato - che, definendo la densità della miscela, misura il peso degli aggregati di diametro inferiore (è questa la misura: Stokes misura unicamente la relazione tempo di caduta - diametro).

Effettuare dette misure, si costruisce il diagramma di frequenza cumulata, ponendo sulle ascisse i diametri in scala logaritmica e sulle ordinate le percentuali, distinte come segue:



Come visibile dal diagramma, la scala logaritmica consente di dettagliare le differenze per piccoli valori del diametro e trascurarle per grossi valori; infatti, quando i diametri sono piccoli, piccole variazioni possono comportare cambiamenti significativi nelle forze di natura elettrochimica con conseguenti variazioni nel comportamento meccanico.

Per definire la distinzione tra fasi granulometriche si valutano le percentuali di passante agli estremi della fase per valutarne la differenza, pari al peso percentuale della trazione; ad esempio, nella curva ①:



Materiale	%
Ghiaia	0
Sabbia	3
Limo	28
Argilla	69

⚠ Per l'argilla, occorre valutare la percentuale al solo estremo superiore: il termine della curva mostra unicamente il diametro minimo registrato nella misura!

È dunque possibile determinare dei criteri di denominazione dei terreni, in maniera tale da poter identificare terreni con assortimenti granulometrici simili. Si impiega la seguente classificazione:

- Nome della frazione maggiormente presente;
- Se è presente una frazione non prevalente in percentuale compresa tra 25% e 50% → "con <frazione>"
- Se è presente una frazione tra il 10% - 25% → "<frazione>-oso"
- Se è presente una frazione al 5% - 10% → "debolmente <frazione>-oso"
- Sotto il 5% non si indica la frazione nel nome.

Esempi





- 1 Argilla con limo;
- 2 Limo sabbioso;
- 3 Sabbia;
- 4 Sabbia con limo argilloso.

Per definire la variabilità di diametri all'interno di un assortimento granulometrico, è importante definire il coefficiente di uniformità, definito in base a due diametri significativi: quello corrispondente al 60% del passante e quello al 10% del passante:



$$U = \frac{d_{60}}{d_{10}} \quad \text{variabile tra } 0 \text{ ed } 1$$

Forma e grado di arrotondamento delle particelle

Oltre alla dimensione, un altro parametro di classificazione degli aggregati in base alle proprietà intrinseche di natura geometrica riguarda la forma delle particelle e il loro arrotondamento. In particolare, per quanto riguarda la forma si distinguono 4 classi in base ai rapporti tra le tre dimensioni dell'aggregato:

- Rotonda: le tre dimensioni sono tra loro confrontabili; 
- Appiattita: due dimensioni confrontabili e molto maggiori della terza; 
- Allungata: due dimensioni confrontabili e molto minori della terza; 
- Appiattita^(ed)-allungata: tre dimensioni diverse tra loro. 

In base al grado di arrotondamento, si distingue tra:

- Particelle a spigoli vivi; 
- Particelle a spigoli arrotondati. 

Consistenza dei terreni a grana fine

Nei terreni a grana grossa lo stato del materiale è stato descritto essenzialmente attraverso la densità relativa D_r , ovvero il valore dell'indice dei vuoti in relazione ai suoi estremi di variabilità.

Nei terreni a grana fine invece lo stato del materiale è descritto dal contenuto d'acqua in relazione a valori significativi (proprietà intrinseche).

Terraghi suggerì di adoperare alcuni dei limiti proposti dall'agronomo svedese Atterberg (1911) in relazione a problemi propri della disciplina agraria: l'interazione solido-acqua, dipendente dalla granulometria e dalla mineralogia del mezzo, viene caratterizzata attraverso l'identificazione di alcuni stati fisici di riferimento che esprimono transizioni di comportamento del terreno al variare del contenuto d'acqua.

In altre parole, il contenuto d'acqua viene riferito a valori di riferimento che esprimono le dinamiche di natura elettrochimica che si instaurano tra i grani.

In particolare, nei nostri studi i limiti di riferimento sono i limiti del campo di lavorabilità, il che implica che il contenuto d'acqua sarà limitato superiormente ed inferiormente.

Si distinguono gli stati individuati nella seguente tabella:

Stato	Descrizione	Limite	Grado di Saturazione
Liquido	Il terreno si comporta come un fluido viscoso		100%
Plastico	Il terreno può essere modellato e mantiene la sua forma	Limite liquido W_L	100%
		Limite plastico W_p	
Semi-solido	Il terreno è fragile e non modellabile	Limite di ritiro W_s	100%
Solido	Il terreno è duro		100%

Allo stato plastico si osserva la presenza di due condizioni limite, W_p e W_L ; è dunque possibile definire un indice di plasticità del materiale:

$$I_p = W_L - W_p$$

Proprietà intrinseca

(⚠ A differenza del contenuto d'acqua, **VARIABILE DI STATO!**)

Sottraendo acqua a un materiale allo stato plastico si passa allo stato prima semi-solido e poi solido; in quest'ultimo la diminuzione del contenuto d'acqua non implica variazione di volume → si definisce così il limite di ritiro W_s .

Dall'indice di plasticità è possibile definire una proprietà di stato, detta indice di consistenza del materiale:

$$I_c = \frac{W_L - W}{I_p}$$

I_c ← Solido | Semisolido | Plastico | Liquido
 $I_c > 1$ $I_c = 1$ $I_c = 0$ $I_c < 0$

Dunque un materiale è nel campo di lavorabilità se e soltanto se $I_c \in [0, 1]$

I limiti W_L , W_p , W_s si determinano su campioni rimanecciati sulla frazione granulometrica allo staccio n°40 (ASTM) di apertura pari a $\varnothing 425$ mm (o equivalenti).

Limite plastico W_p : è convenzionalmente fissato dal contenuto d'acqua in corrispondenza del quale un provino di terreno, ridotto in bastoncini fatti rotolare sotto il palmo della mano su una superficie liscia (ad esempio una lastra di vetro) inizia a fessurarsi ad un diametro di 3mm.

Si articolano le seguenti fasi:

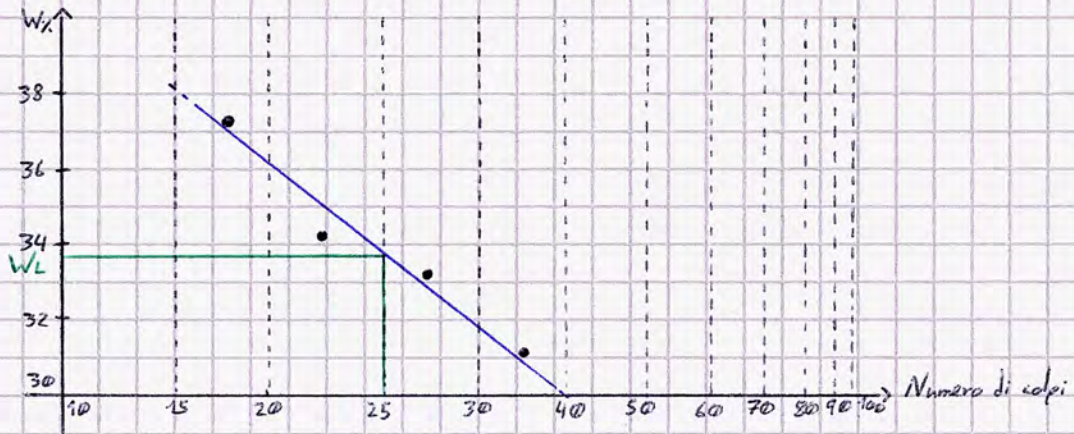
- 1) Preparazione del materiale (pallottola umida di circa 20g)
- 2) Operazione di rotolamento ($\varnothing 3$ mm in circa 10 movimenti)
- 3) Misura di W_p in corrispondenza della fessurazione dei bastoncini (nell'esecuzione della prova le mani assorbono acqua, riducendo il contenuto d'acqua del materiale e portando al passaggio in fase semi-solida).

Dipendendo dalla manualità dell'operatore, la prova deve essere condotta più volte.

Limite liquido W_L : si utilizza la coppetta di Casagrande secondo le seguenti fasi:

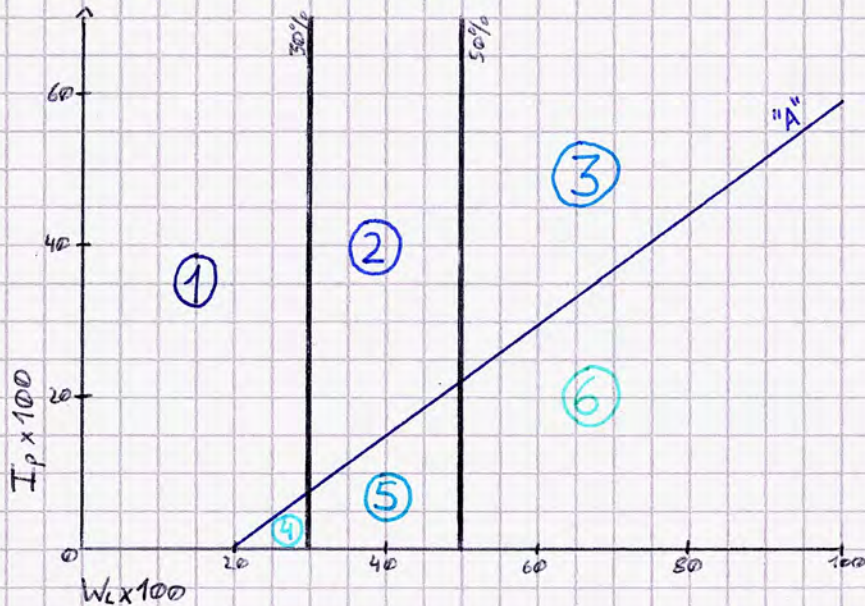
- 1) Impasto del terreno con acqua;
- 2) Disposizione della pasta nella coppetta;
- 3) Tracciamento di un solco con attrezzo standardizzato,
- 4) Caduta ripetuta della coppetta sulla base dello strumento.

La prova termina quando il solco è rinchiuso per una lunghezza di 13 mm. Il terreno ha contenuto d'acqua pari al limite quando il solco si chiude in corrispondenza di 25 colpi; ripetendo più volte la prova con diversi contenuti d'acqua riportando i risultati in un apposito diagramma semilogaritmico (se il terreno è molto solido sono necessari più di 25 colpi, alla prova successiva occorrerà aggiungere acqua; in caso contrario il ragionamento è inverso).



Limite di ritiro W_s : Si verifica il punto in cui la riduzione del contenuto d'acqua non implica variazioni apprezzabili di volume.

Carta di plasticità di Casagrande



È un diagramma cartesiano con il limite liquido sullo asse delle ascisse e l'indice di plasticità sull'asse delle ordinate in cui un terreno è caratterizzato da un punto.

Il grafico è diviso in 6 zone dalle rette:

• $W_L = 30\%$

• $W_L = 50\%$

• $I_p = 0,73(W_L - 0,2) \rightarrow "A"$

Le zone più a destra definiscono terreni più scadenti.

L'utilizzo di W_L e I_p è dovuto alla limitata variazione in natura dei valori di W_p .

Un terreno omogeneo dà luogo a punti allineati circa parallelamente ad "A".

Per una data mineralogia, sia W_L che I_p aumentano con la frazione argillosa (CF).

Al di sopra di A vi sono le argille inorganiche di [sotto] ① Bassa plasticità ② Media plasticità ③ Alta plasticità [i limi e le argille organiche] ④ Bassa compressibilità ⑤ Media compressibilità ⑥ Alta compressibilità

Poiché la capacità di legare l'acqua dipende dall'attività elettrochimica di una particella, è utile caratterizzare tale aspetto tramite un indice di attività

$$A = \frac{I_p}{CF}$$

↳ frazione granulometrica di argilla (passante a 2 μm)

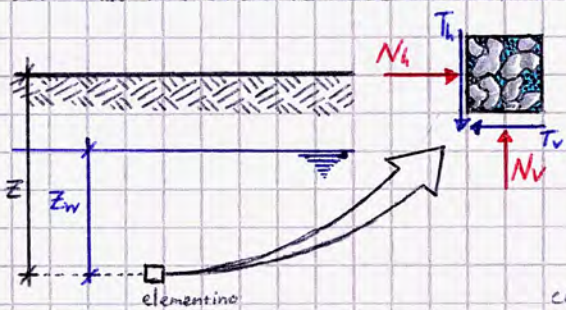
All' aumentare di A aumenta l'attività elettrochimica dell'argilla:

- $A < 0,5$ argilla poco attiva
- $0,5 < A < 1,0$ argilla mediamente attiva
- $A > 1,0$ argilla molto attiva

Principio delle Tensioni Efficaci

Si definisce continuo (in prima approssimazione) un corpo in cui qualunque intorno di ciascun suo punto è caratterizzato da materia; ne segue che un suo "punto" è in realtà un volume con un certo numero di particelle.

Anche il terreno può essere trattato come un continuo; considerando un elementino infinitesimo nel sottosuolo in equilibrio, esso permane nel suo stato di equilibrio se su di esso agiscono le stesse forze cui era sottoposto; assumendo le direzioni verticale e orizzontale come direzioni principali di tensione, si ha:



$$\sigma = \frac{N}{\Omega} \quad \text{tensioni normali}$$

$$\tau = \frac{T}{\Omega} \quad \text{tensioni tangenziali}$$

con Ω frontiera del continuo, superficie su cui agisce N

Queste componenti derivano dagli sforzi trasmessi dalle sole particelle nel caso di mezzo asciutto [particelle e fluido interstiziale in caso di fluido saturo] e prendono il nome di **tensioni totali**; ha senso parlare di tensione solo se essa varia poco nell'ambito di distanze dell'ordine di grandezza delle dimensioni dell'elemento più grande del continuo; pur avendo mezzi particellari si può parlare di mezzo continuo se le tensioni non subiscono grandi variazioni.

- Terreno asciutto: lo scheletro solido si assimila a mezzo continuo;

- Mezzo saturo: si considerano due continui sovrapposti → scheletro solido
→ fluido di porosità.

In caso di presenza d'aria, i continui sovrapposti saranno 3 ⇒ si assume che ogni punto del mezzo ha 3 fasi contemporaneamente.

Tensioni totali σ_{ij} e pressione della fase liquida u_w sono definite in tutto il dominio. Il terreno saturo può essere assimilato ad una molla (scheletro solido) immersa in acqua (fluido di porosità); le deformazioni del sistema (pareti rigide) si verificano solo se viene sollecitata la molla (schema p.2).

Per uno scheletro solido si hanno 9 componenti di tensione, di cui solo 6 indipendenti. In presenza di acqua, a queste componenti occorrerà aggiungere le componenti di tensione che caratterizzano lo stato tensionale sterico - tipico dell'acqua - ovvero 3 componenti normali.

Secondo la schematizzazione a p.2, per l'equilibrio ad ogni istante si ha che:

$$q \cdot \Omega = \sigma_{tot} \cdot \Omega = u_w \cdot \Omega + F'$$

↗ reazione della molla
 ↘ reazione dell'acqua

In termini tensionali, si ha: $q = \sigma_{tot} = u_w + \frac{F'}{\Omega}$

In presenza di uno stato tensionale σ sull'elementino lo sforzo viene principalmente assorbito dall'elemento più rigido, ovvero l'acqua; in presenza di un "foro" (v. schema a p.2) l'acqua fuoriesce per effetto del carico q applicato e il carico viene assorbito in maniera non trascurabile dalla molla ⇒ F' diventa maggiore di 0 e il mezzo si deforma.

$$\frac{F'}{\Omega} = \sigma' \Rightarrow \sigma_t = u_w + \sigma' \Rightarrow \sigma' = \sigma_t - u_w \quad \sigma' \text{ si definisce stato tensionale efficace.}$$

Nell'analogia con un terreno saturo, concettualmente sono le variazioni di stato tensionale nello scheletro solido a generare le deformazioni.

Principio delle tensioni efficaci:
Terzaghi, 1923

Le tensioni in ogni punto di una sezione attraverso una massa di terreno possono essere determinate dalla conoscenza delle tensioni totali principali ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) che agiscono in quel punto. Se i pori sono pieni d'acqua ad una pressione u_w , le tensioni totali si dividono in due parti. Una di esse, u , agisce nell'acqua e nei grani in ogni direzione con uguale intensità.

Le differenze $\sigma_1 - u_w, \sigma_2 - u_w, \sigma_3 - u_w$ rappresentano l'aliquota di tensione in eccedenza alla pressione neutra u_w ed hanno sede esclusivamente nella fase solida; questa aliquota della tensione principale si chiama **tensione efficace**.

Tutti gli effetti misurabili della variazione dello stato tensionale come la compressione, la distorsione e la variazione di resistenza al taglio sono dovuti **esclusivamente a variazioni di tensioni efficaci**.

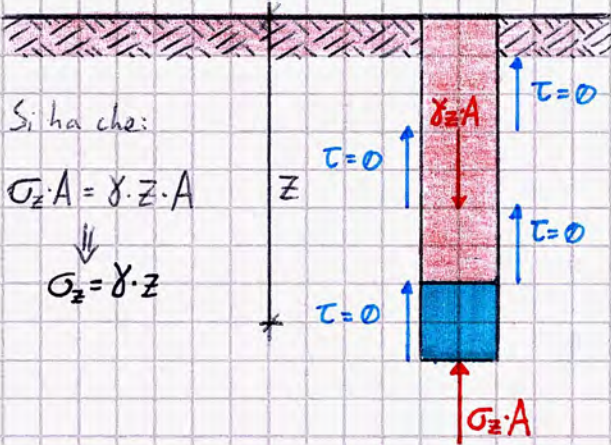
$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_w & 0 & 0 \\ 0 & u_w & 0 \\ 0 & 0 & u_w \end{bmatrix} \quad \tau'_{ij} = \tau_{ij}$$

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} u_w$$

operatori di Kronecker

Calcolato σ_{ij} dunque è possibile conoscere σ'_{ij} applicando detta relazione.

Esercizi



Si ha che:

$$\sigma_z \cdot A = \gamma \cdot z \cdot A$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma_z = \gamma \cdot z$$

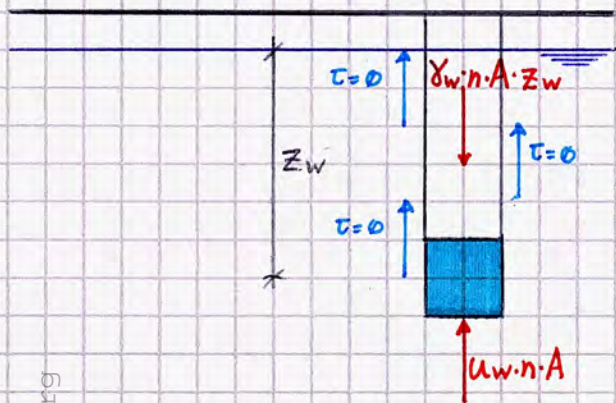
$\tau = 0$ per l'asse verticale radiale di simmetria

$$\sigma_z \cdot A = \gamma \cdot z \cdot A \Rightarrow \sigma_z = \frac{\gamma \cdot z \cdot A}{A} = \gamma \cdot z \quad \text{equazione di equilibrio}$$

Essendo la tensione caratterizzata da una direzione verticale, il suo calcolo va condotto su una faccia dell'elementino considerato avente normale verticale.

Si osserva inoltre che, essendo il terreno in equilibrio, la tensione agente sulla colonna verticale si equilibra con il peso della colonna stessa.

$\tau = 0$ in ragione della loro classica distribuzione emisimmetrica, non compatibile con le condizioni di simmetria del sistema.

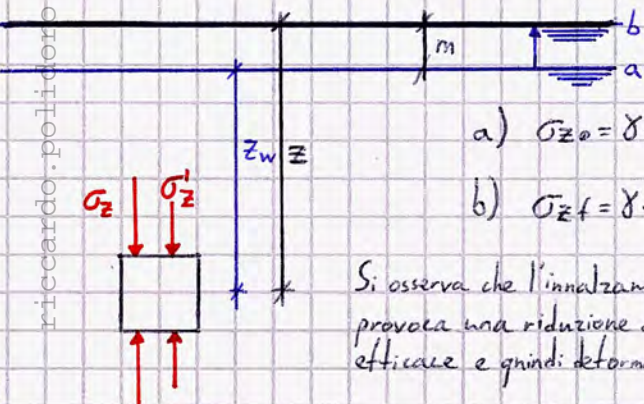


In questo caso è presente una falda in condizioni di acqua ferma, ovvero in equilibrio. È possibile scrivere l'equazione di equilibrio parziale dell'acqua:

$$u_w \cdot n \cdot A = \gamma_w \cdot n \cdot A \cdot z_w$$

forza sulla superficie battente

Per considerare anche il terreno, si considera γ del terreno saturo per poi calcolare σ_{totale} .



Valutiamo ora gli effetti della variazione del livello di falda:

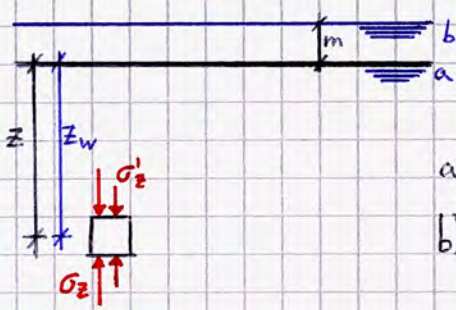
a) $\sigma_{z0} = \gamma \cdot z$; $u_{w0} = \gamma_w \cdot z_w \Rightarrow \sigma'_{z0} = \gamma \cdot z - \gamma_w \cdot z_w$

b) $\sigma_{zf} = \gamma \cdot z$; $u_{wf} = \gamma_w (z_w + m) \Rightarrow \sigma'_{zf} = \gamma \cdot z - \gamma_w (z_w + m)$

$$\Downarrow$$

$$\Delta \sigma'_z = -\gamma_w \cdot m < 0$$

Si osserva che l'innalzamento del livello di falda provoca una riduzione della stato tensionale efficace e quindi deformazioni dell'elementino.



In questo caso, il livello di falda supera il piano campagna (ad es. in caso di alluvione).

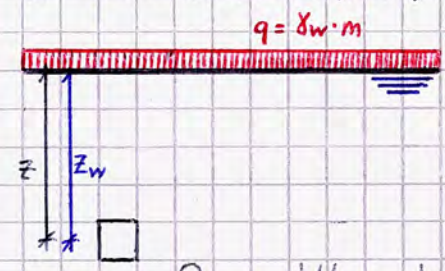
a) $\sigma_{z0} = \gamma \cdot z$; $u_{w0} = \gamma_w \cdot z_w \Rightarrow \sigma'_{z0} = \gamma \cdot z - \gamma_w \cdot z_w$

b) $\sigma_{z1} = \gamma \cdot z + \gamma_w \cdot m$; $u_{w1} = \gamma_w \cdot z_w + \gamma_w \cdot m \Rightarrow \sigma'_{z1} = \gamma \cdot z + \gamma_w \cdot m - \gamma_w \cdot z_w - \gamma_w \cdot m = \gamma \cdot z - \gamma_w \cdot z_w$

carico applicato al terreno per effetto dello innalzamento

\Downarrow
 $\Delta \sigma'_z = 0$

In queste condizioni non si osservano gli effetti di processi deformativi (spostamenti). Il carico dovuto alla variazione del livello d'acqua, oltre il piano di campagna non varia lo stato tensionale efficace, non si verificano processi deformativi e conseguenti cedimenti.



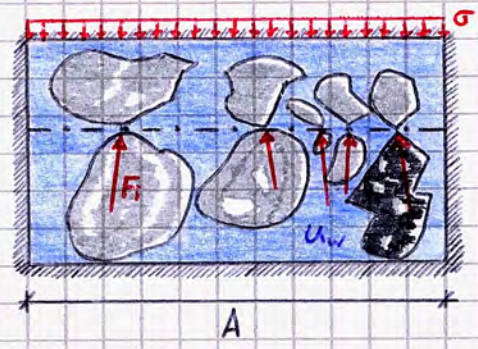
In questa condizione, apparentemente equivalente alla precedente, il carico $\gamma_w \cdot m$ viene trasmesso attraverso un mezzo solido. Ciò determina una variazione dello stato tensionale efficace nel tempo, implicando deformazioni e cedimenti!

Questa differenza di effetti è dovuta al fatto che l'incremento del battente d'acqua incrementa sia le tensioni totali che gli stati tensionali interstiziali, non provocando cedimenti; il carico invece incrementa le sole tensioni totali (dunque le tensioni efficaci) e provoca cedimenti.

Significato fisico delle tensioni efficaci

La validità del principio delle tensioni efficaci - cui Terzaghi non attribuì alcun significato fisico - deriva dall'osservazione di risultati sperimentali e rappresenta un'ipotesi sufficientemente accurata per gli scopi ingegneristici (pur valendo, a rigore, per i soli terreni saturi). La pressione dell'acqua viene anche detta **pressione neutra** perché non influenza direttamente il comportamento del terreno.

Dal punto di vista fisico, lo stato tensionale efficace è affidato allo scheletro solido ed è l'unico stato da cui dipendono gli effetti deformativi del terreno:



Consideriamo un volume di terreno saturo con elementi a contatto tra loro che formano lo scheletro f. solido; ne segue logicamente che gli sforzi sono trasmessi nella fase solida tramite le aree di contatto. Fissata una sezione rispetto cui valutare l'equilibrio, definiamo:

- A: superficie complessiva di riferimento, passante per le aree di contatto tra i granuli.
- $A_{c,i}$: superficie di contatto i-ma $\Rightarrow A_c = \sum A_{c,i}$
- F_i : forza i-ma trasmessa dal contatto

$N'_i =$ componente verticale di $F'_i \Rightarrow N' = \sum N'_i$

Valutiamo l'equilibrio:

$\sigma \cdot A = N' + u_w (A - A_c)$

$\sigma = \frac{N'}{A} + u_w \left(1 - \frac{A_c}{A}\right)$; A_c è trascurabile rispetto ad $A \Rightarrow A_c/A \sim 0$

$\sigma = \frac{N'}{A} + u_w$

$\sigma = \sigma' + u_w$ (Terzaghi)

Ne segue che σ' è uno stato tensionale convenzionale definito come rapporto tra gli sforzi che si esplicano tra i punti di contatto e l'area totale, dunque è inferiore alla tensione media di contatto ($\sigma'_i = N'_i/A_c$).

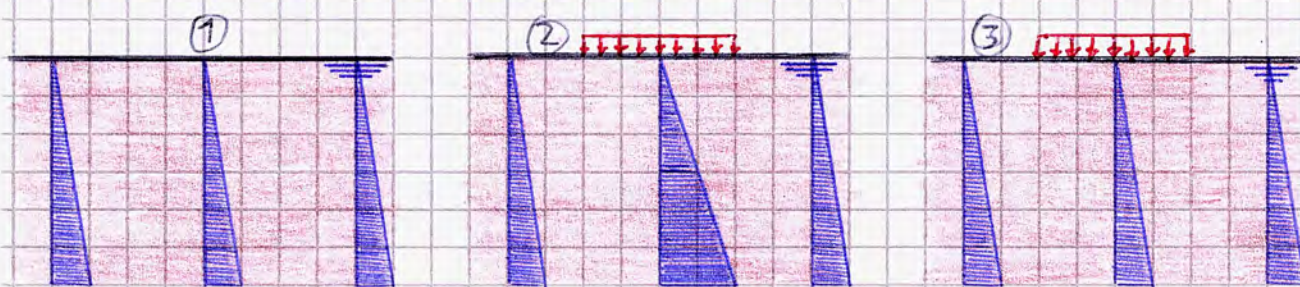
Condizioni di drenaggio

Si consideri un sottosuolo saturo d'acqua (con linea di falda coincidente col piano di campagna) in quiete (distribuzione idrostatica di pressione) e soggetto a un carico progressivamente crescente (ad esempio dovuto all'evoluzione di un cantiere). Tenuto conto che lo scheletro solido e la fase liquida sono soggetti ad un loro stato tensionale (peso proprio), il carico applicato si ripartisce tra fase liquida e scheletro solido.

Rispetto al caso ideale raffigurato a p. 2 (sistema a pareti rigide, acqua che assorbe tutto il carico), gli incrementi di pressione nella fase liquida conseguenti all'applicazione del carico tendono a riequilibrarsi nel tempo: la fase liquida in pressione tende ad equilibrarsi con la fase liquida circostante, non perturbata.

Variazioni di condizioni al contorno di tipo statico o idraulico che incrementano le pressioni interstiziali rendendo la loro distribuzione non in equilibrio nello spazio possono dar luogo ad un comportamento - detto accoppiato - nel quale i processi deformativi si sviluppano lentamente nel tempo. Ciò deriva da:

- L'interazione tra fase solida e liquida (principio delle tensioni efficaci);
- La tendenza della fase liquida a muoversi per riequilibrarsi (schema p. 2 in fondo);
- La resistenza incontrata dall'acqua in moto.



Come evidente dall'esperienza, il carico istantaneo è un concetto astratto; infatti, le condizioni di applicazione di un carico su un terreno variano tra due casi estremi:

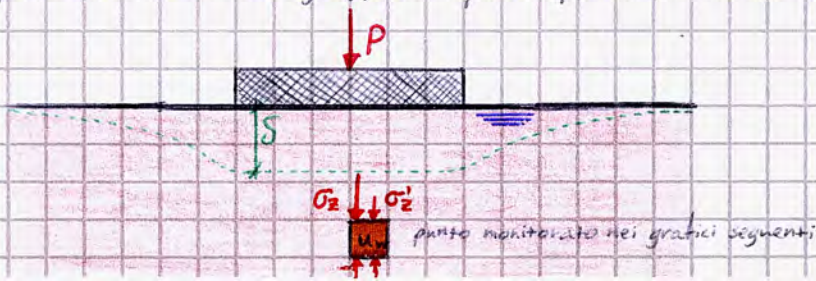
- Il carico è applicato in un tempo così rapido da non consentire all'acqua di riequilibrarsi; ne segue che il mezzo dissipa le Δu_w con velocità sensibilmente più ridotta rispetto a quella con cui tendono a crescere (velocità di costruzione), definendo condizioni non drenate (parzialmente drenate se nel tempo di costruzione si sono verificate parziali variazioni di contenuto d'acqua $\rightarrow \Delta w \neq 0$).
- Il carico è applicato con progressione sufficientemente lenta da garantire il riequilibrio dell'acqua progressivo con le condizioni idrauliche al contorno, senza alterazioni sensibili dell'equilibrio idrostatico; ne segue che il mezzo dissipa le Δu_w con velocità molto più elevate rispetto alle velocità con cui esse tendono ad incrementarsi, definendo condizioni drenate.

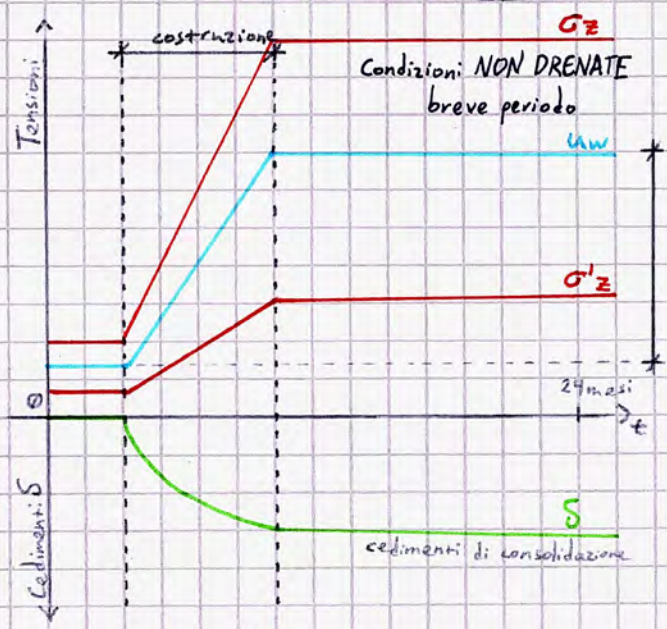
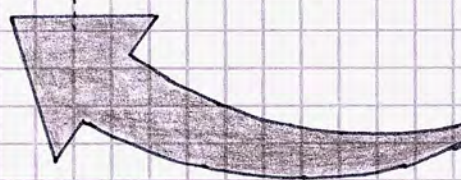
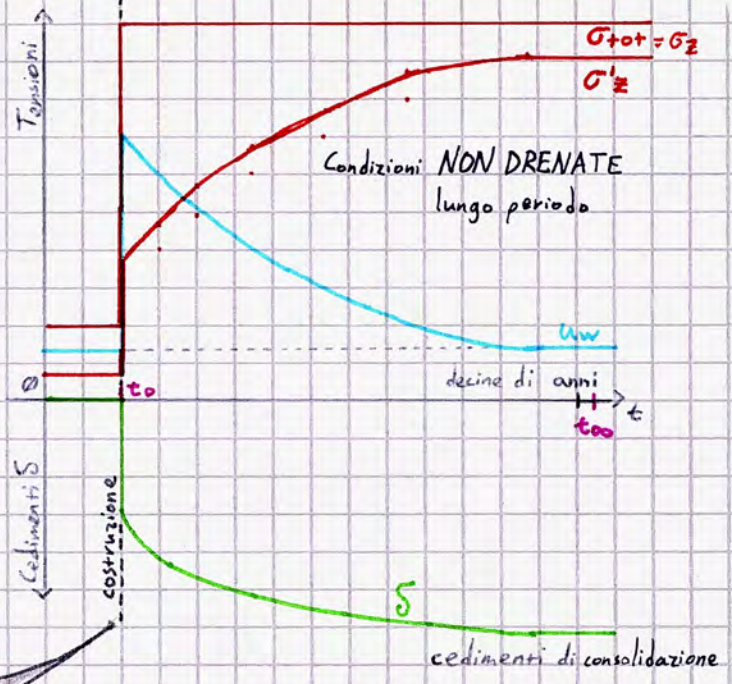
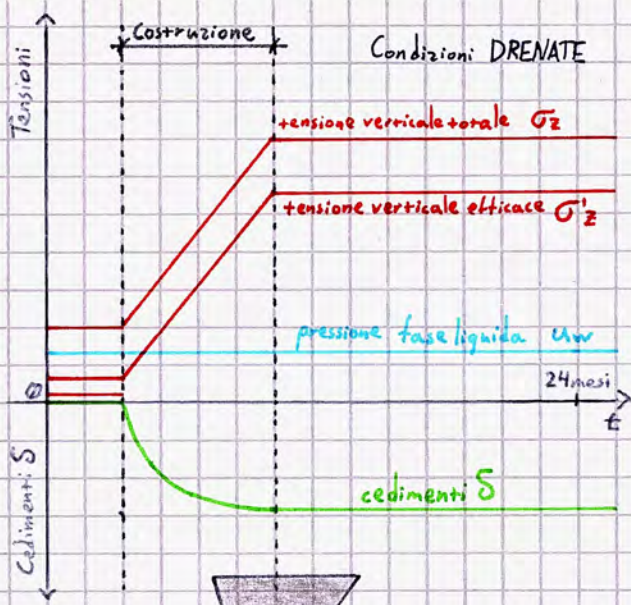
La distinzione tra le due condizioni dipende da:

- Velocità di applicazione del carico;
- Velocità con cui il mezzo è in grado di equilibrarsi, legata alla resistenza alla filtrazione del terreno, a sua volta dipendente dalla dimensione media dei vuoti, dello stesso ordine di grandezza della dimensione dei grani.

Ne segue che, rispetto alla velocità di applicazione di un carico dovuto alla realizzazione di un edificio, i terreni a grana fine - offrendo maggiori resistenze - determinano condizioni non drenate mentre quelli a grana grossa definiscono condizioni drenate; infatti le argille tendono a riequilibrarsi idraulicamente in diversi anni, mentre la sabbia in minutifora.

Come ormai noto, il carico dovuto ad una costruzione è assorbito nel tempo in parte dall'acqua, in parte dallo scheletro solido (p. 2, schema a pareti deformabili \rightarrow Argilla); ciò implica un parziale incremento delle tensioni efficaci che induce cedimenti:





Sovrappressione neutra nel punto considerato, tende ad equilibrarsi nel lungo periodo con le condizioni idrauliche al contorno, determinando un flusso d'acqua per decomprimere la fase liquida. Ciò implica che lo scheletro solido si carica, aumentando σ'_z ; ne segue che si producono cedimenti dilazionati nel tempo.

In genere è preferibile nelle applicazioni che il cedimento si esaurisca nella fase costruttiva in maniera tale da interessare un CLS ancora duttile che può assorbire cedimenti senza incrementi sensibili dello stato tensionale interno; se si verificano cedimenti dilazionati nel tempo, oltre ad un incremento delle tensioni interne possono danneggiarsi gli elementi non strutturali (tampagni, tramezzi, ...); ne segue che i terreni di fondazione a grana fine offrono particolari problematiche.

Come evidente dai grafici, un terreno in condizioni drenate determina cedimenti nella sola fase costruttiva in quanto il carico non definisce una sovrappressione Δu_w (dissipata "istantaneamente"); ne segue che tutto l'incremento di tensione totale σ_z costituisce un incremento di tensione efficace σ'_z e si determinano cedimenti nella sola fase costruttiva dell'opera.

Nel caso di un problema di fondazioni legato ad un terreno in condizioni drenate, sia per problemi di deformazioni che di rottura è spesso sufficiente analizzare le condizioni non drenate iniziali (t_0) e le condizioni drenate finali (t_{∞}), mentre le condizioni parzialmente drenate costituiscono casi intermedi di superflua valutazione.

A volte invece è necessario studiare l'evoluzione del processo di consolidazione, che vede nel tempo migrazioni tensionali dalla fase liquida allo scheletro solido e quindi, per il principio delle tensioni efficaci, lo sviluppo di processi deformativi — che danno luogo a cedimenti.

Filtrazione

Studio della fase liquida

Come osservato, il comportamento di un terreno dipende dagli stati tensionali efficaci, non misurabili e calcolabili direttamente ma che si ottengono dalla differenza tra stati tensionali totali e pressione della fase liquida (sia teoricamente che sperimentalmente); bisogna dunque definire delle leggi di variazione temporale della tensione totale e della pressione della fase liquida. Ciò richiede delle ricapitolazioni di:

- Idraulica $\rightarrow u_w$
- Meccanica del continuo (SdC) $\rightarrow \sigma_z$

Per studiare il moto dell'acqua nel terreno bisogna definire alcuni aspetti e procedimenti:

- Fondamenti di base dell'approccio seguito;
- Variabili fisiche che governano il processo;
- Relazioni tra le variabili fisiche;
- Generalizzazione delle relazioni.

Fondamenti dell'approccio seguito: Il terreno può essere considerato saturo o parzialmente saturo, definendo la compresenza di fase solida, liquida ed aeriforme; ciò viene modellato considerando tre continui sovrapposti, il che implica che per ogni punto esistono variabili tensionali relative alla fase solida (σ_s), liquida (u_w), gassosa (pressione del gas) — ovvero un'astrazione del caso reale — ed è altrettanto possibile definire proprietà che regolano i rapporti tra le fasi (come la porosità).

Variabili fisiche che regolano il comportamento dell'acqua nel sottosuolo: simili alle variabili che governano il comportamento dell'acqua in superficie, negli alvei e nelle tubazioni, sono aliquote di energia della fase liquida, comunemente espresse con riferimento all'unità di peso così da definire una variabile avente le dimensioni di una lunghezza, definita carico idraulico.

L'energia dell'acqua si compone di una componente di energia potenziale (dipende dalla quota), una di energia di pressione (dipende dalla pressione della fase liquida) e una di energia cinetica (dipende dalla velocità del punto):

$$E_p = mgz \rightarrow z \quad \text{altezza geodetica}$$

\rightarrow variabile rispetto ad una posizione di riferimento z_0

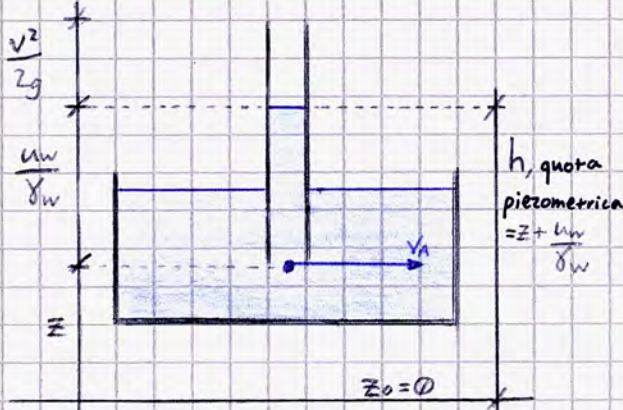
$$E_u = u_w \cdot \gamma_w \rightarrow \frac{u_w}{\gamma_w} \quad \text{altezza piezometrica, altezza della colonna verticale di liquido (con peso per unità di volume } \gamma_w) \text{ che esercita sulla propria base la pressione } u_w \text{ per effetto del solo peso proprio.}$$

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \frac{v^2}{2g} \quad \text{altezza cinetica}$$

$$[F \cdot L] \xrightarrow{\text{Grandezze fisiche di riferimento}} [L] \quad \text{energia per unità di peso}$$

⚠ La pressione dipende dall'altezza della colonna, non dal suo volume!

L'energia totale per unità di peso di un punto, ovvero il suo carico idraulico, è dunque pari a $z + \frac{u_w}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g}$; anche se z dipende dalla superficie di riferimento, essendo il comportamento dell'acqua governato dalle differenze spaziali di energia per ogni punto è importante definire la variazione spaziale di energia, che resta costante al variare del riferimento.



In generale, dunque anche in un terreno, l'acqua può trovarsi in 3 diverse condizioni:

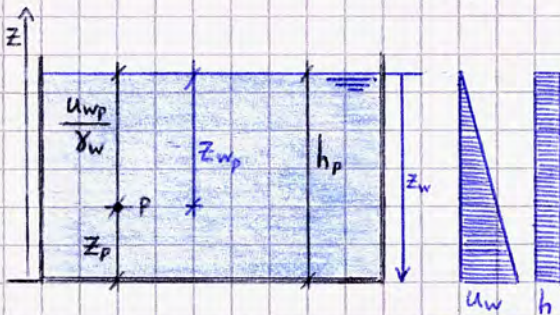
- In quiete;
- In moto stazionario o permanente, ovvero in cui le grandezze fisiche non dipendono dal tempo **PUR VARIANDO NELLO SPAZIO** ($v \neq 0$);
- In moto transitorio (termine più appropriato in geotecnica) o vario, in cui la velocità dipende sia dalla posizione che dal tempo.

In geotecnica la pressione neutra viene generalmente espressa come pressione relativa rispetto alla pressione atmosferica, dunque $p_{atm} = 0$.

Acqua in quiete (condizioni idrostatiche)

Fissato un piano equipotenziale di riferimento, in base alla legge di Stevino si osserva che tutti i punti di un dominio sono allo stesso livello energetico ($z + u_w / \gamma_w = h = \text{cost.}$); si ha dunque un gradiente di energia nulla; pur essendo il carico idraulico costante, come è noto, la pressione aumenta con la profondità. Nel caso di acqua in quiete dunque la quota piezometrica permane costante in ogni punto.

Se h è costante, lo è anche sul pelo libero; fissato un riferimento tale per cui $p_{atm} = 0$, si ha che sul pelo libero $u_w = 0$; essendo per $z = h_p$ $u_w = 0$ ed essendo h_p dunque la costante della quota piezometrica, si ha che:



Se h è costante, lo è anche sul pelo libero; fissato un riferimento tale per cui $p_{atm} = 0$, si ha che sul pelo libero $u_w = 0$; essendo per $z = h_p$ $u_w = 0$ ed essendo h_p dunque la costante della quota piezometrica, si ha che:

$$z + \frac{u_w}{\gamma_w} = \text{cost.} = h_p$$

$$\gamma_w = 1 \frac{\text{tonnellata}}{\text{m}^3}$$

Ne segue che $u_w = \gamma_w (h_p - z) = \gamma_w \cdot z_w$

Profondità a partire dal pelo libero

Al di sopra del pelo libero della falda, in un terreno si ha di norma una zona nella quale l'acqua risale per capillarità, fenomeno fisico dovuto alla presenza - all'interfaccia aria-acqua - della tensione superficiale.

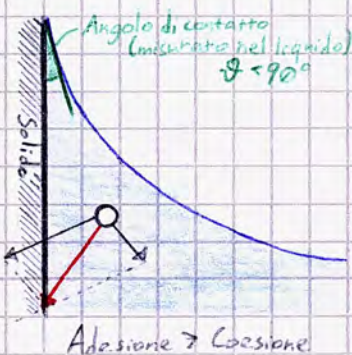
Le molecole di H_2O interagiscono tra loro scambiandosi forze di attrazione (di Van der Waals), anche note come forze di coesione, uguali in tutte le direzioni per una molecola immersa; sul pelo libero invece le molecole sono soggette ad una distribuzione dissimmetrica in quanto le forze di attrazione aria-acqua sono minori in entità, determinando una risultante diretta verso il liquido ed ortogonale all'interfase stessa; l'interfaccia si comporta dunque come una membrana tesa soggetta a un carico verticale uniforme che si traduce in uno sforzo uniforme di trazione detto tensione superficiale.

È proprio la tensione superficiale T - costante a temperatura costante e tipicamente espressa in milliNewton/metro $[F/L]$ - a garantire l'equilibrio all'interfaccia.

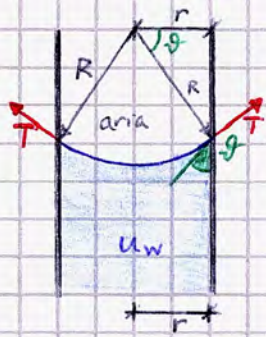
In prossimità dell'interfase solido-gas-liquido si ingenera un'ulteriore dissimmetria tensionale dovuta alla presenza del solido:



Definire le forze di coesione (tra due molecole dello stesso tipo) e di adesione (tra molecole di tipo diverso) si osserva che in base alla prevalenza di un tipo di forza sull'altra nella interfaccia solido-liquido si definiscono due diverse condizioni; nelle nostre applicazioni la prima è più frequente, con $\theta \sim 90^\circ$



Effetto della curvatura dell'interfaccia acqua-aria



Consideriamo dell'acqua in un capillare verticale di raggio r tale per cui le forze di adesione solido-liquido superino quelle di coesione; valutiamo l'equilibrio sull'interfaccia aria-acqua ipotizzando che essa formi in sezione un arco di circonferenza di raggio R .
Valutiamo le sollecitazioni agenti:

$$\begin{matrix} T \cos \vartheta \cdot 2\pi r \\ [F/L] \cdot [L] = [F] \end{matrix} ; \begin{matrix} u_w \cdot \pi r^2 \\ [F/L^2] \cdot [L^2] = [F] \end{matrix} ; \begin{matrix} u_a \cdot \pi r^2 \\ \text{la pressione dell'aria a} \\ \text{rigore ha una distribuzione} \\ \text{uniforme ortogonale alla superficie curva;} \\ \text{per valutare l'equilibrio però si ha interesse} \\ \text{solo verso la sua componente verticale, che} \\ \text{assume l'espressione suddetta.} \end{matrix}$$

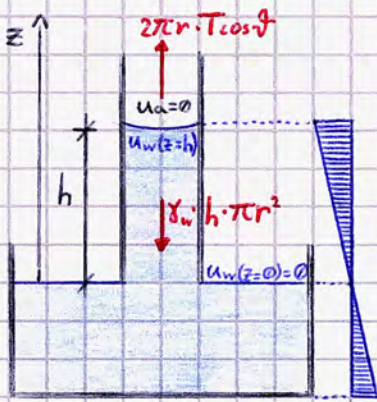
Complessivamente, si ha che: $u_a \pi r^2 = u_w \pi r^2 + 2\pi r T \cos \vartheta$

$$\Downarrow$$

$$u_w - u_a = -\frac{2T \cos \vartheta}{r} = -\frac{2T}{R}$$

Si osserva quindi che, se $\vartheta < 90^\circ$, $u_w - u_a < 0$ e dunque $u_w < u_a$; l'acqua nel capillare è in depressione rispetto al pelo libero della falda.
Si comprende inoltre come la depressione aumenta riducendo la sezione del capillare (essendo T ed u_a costanti nelle applicazioni).

Considerando il fenomeno complessivo della risalita capillare, e valutare quindi l'altezza raggiunta dall'acqua, occorre valutare l'equilibrio della colonna d'acqua:



Per l'equilibrio sulla colonna d'acqua,

$$T \cos \vartheta \cdot 2\pi r = \gamma_w \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{2T \cos \vartheta}{r \cdot \gamma_w}$$

all'aumentare della sezione aumenta il volume - dunque il peso proprio della colonna - riferito all'unità di lunghezza verticale $\rightarrow h$ si riduce.

Occorre ora valutare l'andamento delle pressioni nella colonna per caratterizzare u_w alla generica quota z .

In un generico punto della colonna d'acqua (e non sul suo pelo libero come fatto in precedenza) si ha:

$$u_w \cdot \pi r^2 = \gamma_w \pi r^2 \cdot z$$

$$\Downarrow$$

$$u_w = -\gamma_w \cdot z$$

il peso della colonna è diretto verso il basso, la pressione - essendo negativa - verso l'alto.

Le considerazioni concettuali effettuate finora si riflettono analogamente in un terreno, in cui la risalita capillare interessa strati superiori del terreno; poiché diversi terreni presentano vuoti di dimensioni differenti, detta risalita ha entità differenti!

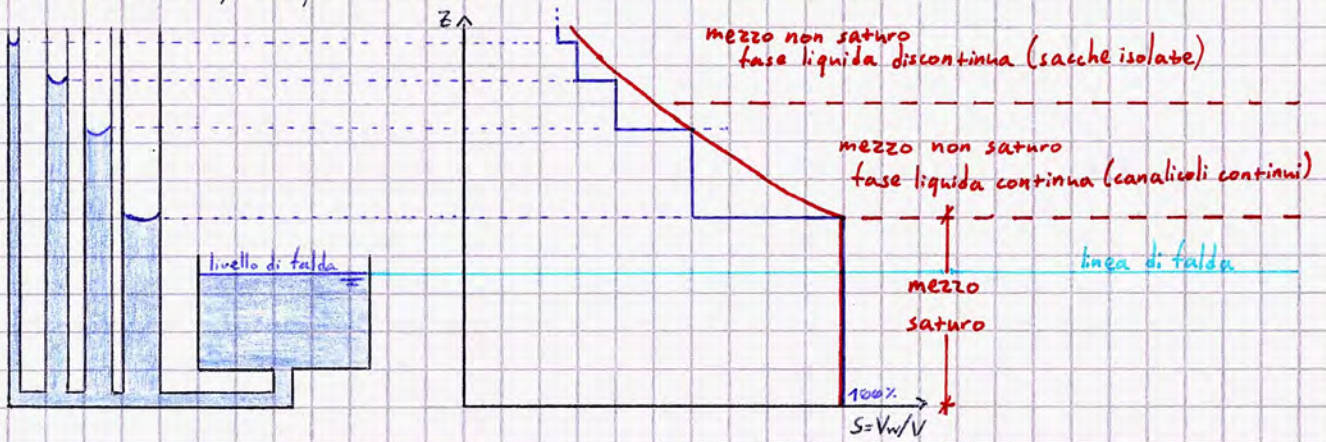
- Assumendo:
- $\cos \vartheta = 1$ (il menisco si verticalizza in corrispondenza dei grani);
 - $T = 20^\circ C$;
 - $r \approx$ dimensioni delle particelle (stesso ordine di grandezza)

Si ricorre a:

	Sabbia	Limo	Argilla
r (mm)	$6 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$
$u_w - u_a$ (kPa)	-2,4	-73	-1460
u_w (kPa)	97,64	27	-1360

La pressione assoluta dell'acqua può essere negativa, ovvero l'acqua può essere soggetta a sforzi di trazione.

Schematizzando il terreno come un sistema di tubi capillari a diametro variabile, si comprende come sia possibile definire sopra il piano di campagna una parte satura, poi parzialmente satura secondo una legge di variazione del grado di saturazione V_w/V specifica per il terreno in esame:



È possibile stimare l'altezza della risalita considerando la seguente formula empirica:

$$h_c = \frac{C_0}{e \cdot D_{10}}$$

C_0 → Costante del terreno (10-50 mm²)
 e → Indice dei vuoti
 D_{10} → D_i diametro delle particelle corrispondenti al 10% del passante in peso

- Sabbie = 10-30 cm
- Limi = 50-100 cm
- Argille = 5-15 m

Acqua in moto

Come è noto dal corso di idraulica, in assenza di fenomeni dissipativi la somma dei contributi di energia cinetica, potenziale e di pressione è costante in un fluido, come regolato nell'equazione di Bernoulli (1738). Essendo l'acqua dotata di una propria viscosità non nulla, in condizioni dinamiche si determinano degli sforzi tangenziali con le pareti (di un canale o di una tubazione) che implicano l'esistenza di un fenomeno dissipativo; rispetto all'equazione di Bernoulli si considera una perdita di carico ΔH_{AB} :

$$z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} + \frac{v_A^2}{2g} = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w} + \frac{v_B^2}{2g} + \Delta H_{AB} \quad \text{implica che l'acqua si muove da A a B, essendo } H_B < H_A$$

In un terreno, l'acqua si muove con velocità tale da rendere il termine ~~cinetico~~ trascurabile rispetto agli altri due: le velocità dell'acqua in un terreno solitamente non eccedono i ~~10~~ 0,02 m/s, implicando un'altezza cinetica entro i $2 \cdot 10^{-5}$ m, trascurabile rispetto agli altri contributi energetici; si può quindi scrivere:

$$z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} + \cancel{\frac{v_A^2}{2g}} = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w} + \cancel{\frac{v_B^2}{2g}} + \Delta H_{AB} \Rightarrow h_A = h_B + \Delta h_{AB}$$

essendo la relazione tra sole quote piezometriche

Ne segue che la prima variabile fisica che definisce il moto dell'acqua è la quota piezometrica.

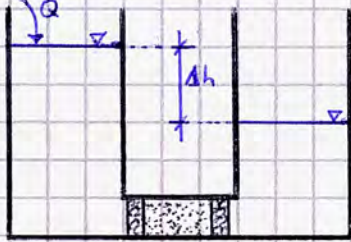
Un'altra grandezza importante nello studio del comportamento dell'acqua è la velocità di filtrazione, utile soprattutto per definire la distribuzione delle pressioni nell'acqua e le sue evoluzioni nel tempo (dunque per la definizione delle tensioni efficaci nel tempo). In analogia con l'idraulica, la velocità di filtrazione può essere definita come portata che filtra per unità di sezione $n \cdot A_{tot}$ (con n = porosità), confondendo la porosità volumetrica con quella superficiale:

$$\frac{V_{vuoti}}{V_{tot}} \sim \frac{A_{vuoti}}{A_{tot}} \Rightarrow v_n = \frac{\partial Q}{\partial A_n} = \frac{\partial Q}{n \cdot \partial A_{tot}} \quad \text{area dei vuoti}$$

È però più conveniente definire una grandezza che prescinde dalle proprietà del terreno; per questo motivo si considera la velocità apparente attraverso l'area totale - ovvero la sezione unitaria dello scheletro solido - chiaramente minore di quella effettiva:

$$v = \frac{\partial Q}{\partial A_{tot}} = n \cdot v_n$$

Per definire la legge costitutiva del mezzo si adoperano le evidenze sperimentali della esperienza di Darcy, in cui sono presenti due provini cilindrici, con sfiori a diverse altezze su quello di valle, per fissare il battente, che definiscono una differenza di quota piezometrica che si vuole mantenere costante erogando una portata. Inserendo un mezzo poroso nel collegamento tra i due vasi - opportunamente racchiuso entro due pietre porose che fungano da filtro - è possibile legare la velocità apparente filtrante nel mezzo al rapporto $\Delta h/L$ - detto gradiente idraulico in forma infinitesimale - in particolare la relazione è lineare, di diretta proporzionalità.



$v = k \cdot i$

- gradiente idraulico/cadente piezometrica $\frac{\partial h}{\partial s}$
- Coefficiente di permeabilità del terreno, pari alla velocità della filtrazione nel terreno che si determina in virtù di un gradiente unitario. Si misura in $m/s / cm/s / mm/h$, di cui l'ultima grandezza è utile nella valutazione di frane e smottamenti perché correlabile all'intensità di pioggia in occasione di eventi meteorici.

È importante tener conto del fatto che la velocità di filtrazione non dipende dalla sola differenza di quota piezometrica; bisogna riferirla alla lunghezza del tratto occupato dal mezzo (in cui si concentrano gran parte delle perdite di carico). Il ragionamento è simile a quello delle previsioni meteo, in cui le velocità del vento dipendono dal gradiente di pressione, ovvero dalla distanza tra due isobare immediatamente successive.

Da un'analisi dimensionale si osserva che sia v che K sono delle velocità; il gradiente idraulico invece rapporta la variazione di quota piezometrica allo spazio in cui essa avviene, è adimensionale ma, in quanto gradiente, è una grandezza vettoriale; risulta definita se sono noti modulo, direzione, verso (positivo nella direzione del moto).

Nel caso di un mezzo anisotropo rispetto alla permeabilità, detta relazione vettoriale viene generalizzata nella Legge di Darcy generalizzata:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\partial h/\partial x \\ -\partial h/\partial y \\ -\partial h/\partial z \end{pmatrix} \leftrightarrow \vec{v} = [k] \cdot \text{grad}(-h) \leftrightarrow v_i = -k_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

→ matrice di permeabilità

In riferimento alle sole direzioni principali di permeabilità:

$$\begin{aligned} v_x &= -k_{xx} \frac{\partial h}{\partial x} \\ v_y &= -k_{yy} \frac{\partial h}{\partial y} \\ v_z &= -k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z} \end{aligned}$$

Se la permeabilità è costante nello spazio e indipendente dalla direzione del flusso, il mezzo è isotropo rispetto ad essa; ne segue che la matrice di permeabilità è una matrice diagonale con un valore unico per ogni elemento non nullo. Per motivi deposizionali, solitamente la permeabilità in verticale è diversa da quella in orizzontale.

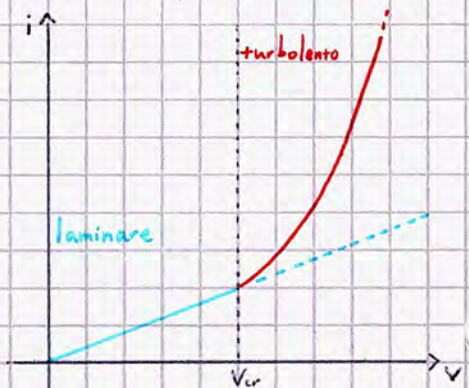
La relazione tra quota piezometrica e velocità è osservata quando il moto dell'acqua è laminare, ovvero quando i filetti fluidi non si intersecano tra loro; ciò si verifica in idraulica per tubazioni in cui la velocità del fluido è inferiore ad una velocità critica, definita in base al numero di Reynolds:

$$Re = \frac{v \cdot D \cdot \gamma_w}{\eta \cdot g}$$

↳ viscosità cinematica

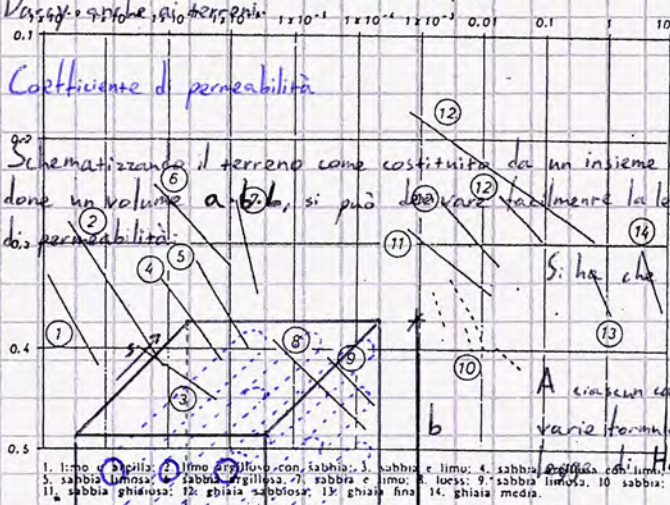
↑ viscosità
↓ velocità
↓ diametro

→ moto laminare



Nelle condotte si ha passaggio da moto laminare a moto turbolento per $Re = 2500$, ovvero $v_{cr} = \frac{2500 \cdot \eta \cdot g}{D \cdot \gamma_w}$. Come visibile nel grafico a fianco, a parità di i un moto turbolento ha velocità minore dell'ipotetico corrispettivo nel moto laminare; ciò denuncia l'insorgenza di fenomeni dissipativi. Nei terreni, il diametro D dipende dalle frazioni granulometriche più fini ed è di norma posto pari al d_{10} ; il numero di Reynolds è conseguentemente più basso - tra 1 e 10 - anche in virtù del fatto che i canali nel terreno si intersecano intrinsecamente; essendo però le velocità di filtrazione molto basse di norma il moto è laminare.

Ad eccezione delle ghiaie in cui $Re > 100$ e occorre verificare l'applicabilità della formula, si può quindi applicare la legge di Darcy, anche, sia per, sia 1×10^{-1} 1×10^{-2} 1×10^{-3} 0.01 0.1 1 10



Coefficiente di permeabilità

Schematizzando il terreno come costituito da un insieme di canalicoli tra loro paralleli e dello stesso diametro e considerando un volume $a \cdot b$, si può derivare facilmente la legge di Darcy e comprendere i fattori da cui dipende il coefficiente di permeabilità:

Si ha che la velocità apparente è $v = \frac{Q}{a \cdot b}$ nella direzione s

A ciascun canalicolo si possono applicare le proprietà dell'idraulica; tra le varie formule che legano il gradiente idraulico alla portata si considera la

Hagen-Poiseuille:

$$Q_s = -\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma_w d^2}{32 \eta} \cdot \frac{\partial h}{\partial s}$$

velocità $\frac{[F] \cdot [F]}{[L^2]}$

si osserva che il diametro è un termine dissipativo: riducendo il diametro si riduce la velocità perché aumenta la superficie specifica di contatto tra acqua e parete laterale.

Definito N il numero di canalicoli, si ha che:

$$Q = N Q_s \Rightarrow v = \frac{N Q_s}{a \cdot b} = \frac{N}{ab} \left(-\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma_w d^2}{32 \eta} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \right)$$

La porosità può essere espressa in forma superficiale, che in questo caso ha espressione:

$$n = \frac{A_{voti}}{A_{tot}} = \frac{N \cdot \frac{\pi d^2}{4}}{ab} \Rightarrow ab = \frac{N \pi d^2}{4n}$$

$$v = \frac{N}{\left(\frac{N \pi d^2}{4n} \right)} \left(-\frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{\gamma_w d^2}{32 \eta} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} \right)$$

$$\Downarrow$$

$$v = -\frac{n \gamma_w d^2}{32 \eta} \cdot \frac{\partial h}{\partial s} = -k \cdot s$$

Si osserva che il coefficiente di permeabilità dipende sostanzialmente da due alignote:

$$\frac{n d^2}{32} \cdot \frac{\gamma_w}{\eta} = k$$

$\frac{n d^2}{32}$ \rightarrow Proprietà del fluido permeante!
 K \rightarrow Permeabilità assoluta, non dipende dalle caratteristiche del fluido permeante, ha le dimensioni di una lunghezza al quadrato

Il coefficiente di permeabilità dunque dipende da:

- Dimensione dei vuoti nel terreno ($d^2 \rightarrow$ regola l'ordine di grandezza);
- Porosità

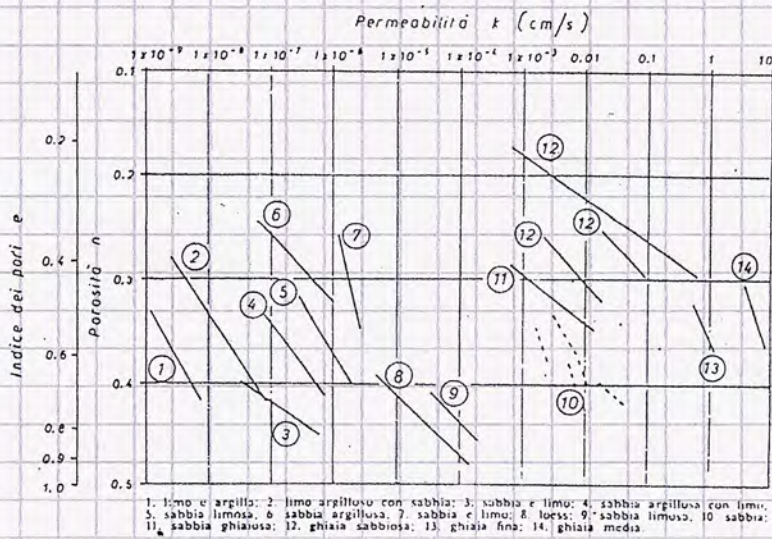
⚠ Nel definire le (variabili) grandezze rispetto cui varia una determinata variabile fisica occorre definire un ordine GERARCHICO in base all'impatto definito da esse!

In un terreno saturo, il coefficiente di permeabilità viene definito come segue:

$$k = K \frac{\gamma_w}{\eta} = \frac{n d_{10}^2}{T^2} \frac{\gamma_w}{\eta}$$

$\frac{n d_{10}^2}{T^2}$ \rightarrow coefficiente di tortuosità, tiene conto della geometria dei canalicoli e delle loro intersezioni

Come osservabile dai diagrammi sperimentali che legano l'indice dei pori (o la porosità) al coefficiente di permeabilità, a parità di n il coefficiente può variare anche di diversi ordini di grandezza al variare della granulometria!



La relazione spesso utilizzata per stimare l'ordine di grandezza del coefficiente di permeabilità è la formula di Hazen:

$$k = \frac{d_s^2}{100} \cdot c$$

↳ varia in un campo molto esteso, tra 1 e 100.

Permeabilità in un mezzo non saturo

In questo caso il flusso d'acqua interessa solo parte dei vuoti; occorre definire una nuova legge costitutiva: considerando un terreno sciolto a granulometria variabile si ha che l'acqua tende ad occupare i pori più piccoli, tendendo a minimizzare il proprio livello energetico (grazie alla capillarità infatti al ridursi della dimensione dei vuoti aumenta l'angolo di contatto, puntando ad una verticalizzazione del menisco e ad una riduzione

ne della pressione dell'acqua a valori negativi); ciò significa che all'aumentare del grado di saturazione aumenta la dimensione dei vuoti occupati e indirettamente la pressione della fase liquida (meglio definita come suzione, essendo negativa). La relazione tra suzione e grado di saturazione del terreno definisce la curva caratteristica del terreno [curva di ritenzione idrica].

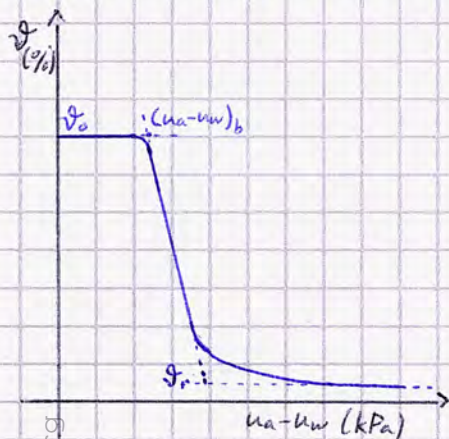


La curva può anche essere definita in base al parametro θ , detto **contenuto volumetrico d'acqua**, importante perché parametro proprio degli strumenti di misurazione in continuo e pari a:

$$\theta = S_r \cdot n = \frac{V_w}{V_{vuoti}} \cdot \frac{V_{vuoti}}{V_{tot}} = \frac{V_w}{V_{tot}}$$

A seconda che si costruisca la curva per saturazione o desaturazione, poiché per desaturare un terreno di una certa quantità bisogna applicare una suzione corrispondente al diametro dei pori piccoli mentre per risaturarlo è sufficiente applicare quella corrispondente al diametro dei pori più grandi, la curva caratteristica assume in realtà due possibili forme.

La curva caratteristica in desaturazione si modella definendo alcuni parametri:



θ_0 → contenuto volumetrico d'acqua di saturazione, costante fino al raggiungimento della suzione d'ingresso d'aria $(u_a - u_w)_b$, definita dal la tangente al primo ramo e quella al flesso del secondo.

θ_r → contenuto d'acqua residuo, a partire dal quale è molto difficile rimuovere l'acqua dal terreno, che occupa i soli pori di minori dimensioni. tratto intermedio → schematizzabile come lineare, la sua pendenza è un parametro funzione dello specifico terreno.

La modellazione matematica più accettata della curva è definita dalla Relazione di van Genuchten (1980):

$$\theta = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) \left[\frac{1}{1 + (d(u_a - u_w))^n} \right]^m$$

↳ parametro in funzione della suzione, varia tra 0 e 1

Alcune curve caratteristiche:

Sabbia: $(u_a - u_w)_b \sim 10 \text{ kPa}$
ripida riduzione di S_r
 θ_r ridotto

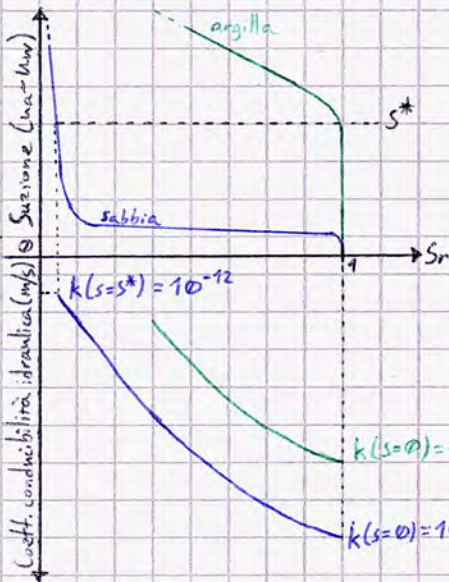
d : reciproco della pressione d'ingresso dell'aria
 n, m : regolano la pendenza del tratto intermedio
 θ_s, θ_r : definiscono gli estremi dell'intervallo

Argilla: $(u_a - u_w)_b \sim 10^3 - 10^5 \text{ kPa}$
lenta riduzione di S_r → minor pendenza
 θ_r maggiore

Al diminuire del grado di saturazione del terreno si riduce anche la permeabilità, in quanto il flusso d'acqua si concentra nei vuoti più piccoli:

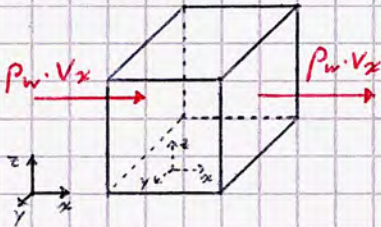
$$k = k_{sat} \cdot S_r^3 \quad (\text{esistono anche relazioni più complesse})$$

In virtù della curva caratteristica del terreno, si può anche affermare che la permeabilità decresce al crescere della suzione:



Dal grafico a fianco si osserva che, nel caso di una strato di argilla che sovrasta uno di sabbia, per un grado di saturazione anche leggermente inferiore all'unità poiché all'interfaccia aria-acqua e a quella tra i due terreni la suzione deve essere uguale (e negativa), ne segue che il grado di saturazione è diverso nei due mezzi. Per $s = s^*$ la sabbia non è più drenante ma una strato che blocca il flusso d'acqua fino al raggiungimento della saturazione.

Avendo definito la legge di Darcy generalizzata, si osserva che essa costituisce un sistema di 3 equazioni differenziali in 4 funzioni incognite, ovvero le 3 componenti di velocità e la quota piezometrica h ; occorre dunque aggiungere un'altra relazione, identificata nel principio di conservazione della massa:



Consideriamo un volume infinitesimo attraversato da un flusso d'acqua monodirezionale e poniamoci un osservatore esterno ed interno al volume:

Esterno: si osserva l'acqua in ingresso, l'acqua in uscita e una differenza tra le due quantità;

Interno: si osserva una variazione del contenuto d'acqua nel medesimo intervallo di tempo in cui si è misurata la differenza tra H_2O_{IN} e H_2O_{OUT} .

Il principio di bilancio della massa si può sintetizzare nell'imporre che ciò che viene misurato dall'osservatore interno coincida con ciò che viene misurato all'esterno.

Osservatore esterno

$$Q_{IN} = V_x \int dy dz \rightarrow Q_{massica, IN} = \rho_w \cdot V_x \int dy dz \rightarrow \text{Volume che attraversa l'interfaccia nell'unità di tempo: } V = \rho_w V_x dx dy dz dt$$

$$Q_{OUT} = V_x \int dy dz \rightarrow Q_{m, OUT} = \rho_w \cdot V_x \cdot dy \cdot dz + \frac{\partial(\rho_w \cdot V_x)}{\partial x} dx$$

Variazione

Ne segue che la differenza tra massa entrante e uscente nel tempo dt è pari a:

$$-\frac{\partial(\rho_w \cdot V_x)}{\partial x} dx dy dz dt$$

Analogamente nelle altre due direzioni:

$$-\frac{\partial(\rho_w \cdot V_y)}{\partial y} dx dy dz dt$$

$$-\frac{\partial(\rho_w \cdot V_z)}{\partial z} dx dy dz dt$$

La somma di questi tre termini costituisce la differenza complessiva tra massa entrante e uscente:

$$-\left(\frac{\partial(\rho_w v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho_w v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho_w v_z)}{\partial z}\right) dx dy dz dt = -\operatorname{div}(\rho_w \cdot \vec{v}) dx dy dz dt$$

Osservatore interno

$$\frac{\partial m_w}{\partial t} dt$$

Principio di conservazione della massa

$$-\operatorname{div}(\rho_w \cdot \vec{v}) dx dy dz dt = \frac{\partial m_w}{\partial t} dt$$

$$n \cdot S_r \cdot \rho_w \stackrel{[=]}{\left[\frac{V_{ruori}}{V_{tot}}, \frac{V_w}{V_{ruoti}}, \frac{m}{V_w} \right]} = \left[\frac{m}{V_{tot}} \right] \Rightarrow m_w = n \cdot S_r \cdot \rho_w \cdot dx dy dz$$

$$-\operatorname{div}(\rho_w \cdot \vec{v}) dx dy dz dt = \frac{\partial (n \cdot S_r \cdot \rho_w)}{\partial t} dx dy dz dt \quad \text{derivata di un prodotto}$$

$$-\operatorname{div}(\rho_w \cdot \vec{v}) dx dy dz dt = \rho_w \cdot n \cdot \frac{\partial S_r}{\partial t} + n \cdot S_r \cdot \frac{\partial \rho_w}{\partial t} + S_r \cdot \rho_w \cdot \frac{\partial n}{\partial t}$$

Ad eccezione di ρ_w , solitamente assunta costante, le incognite qui evidenziate sono soluzioni di un transitorio

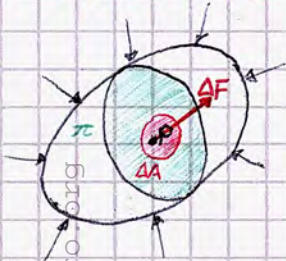
Per risolvere compiutamente la formula di Darcy dunque il bilancio di massa di solito in generale non è sufficiente; sono necessarie altre tre equazioni.

S_r \longrightarrow equazione ^{ella curva} caratteristica del terreno

ρ_w \longrightarrow equazione di stato dell'acqua ($\rho_w = \beta_w w$)

n \longrightarrow se varia la porosità il terreno si deforma; in questo caso dunque non si può prescindere dal problema meccanico, il problema idraulico si accoppia al problema meccanico (tensioni, equazioni costitutive del mezzo...), trattandosi di un problema accoppiato di consolidamento: la risoluzione del problema meccanico restituisce n come termine noto.

Richiami di Meccanica del Continuo



Per definire lo stato tensionale di un punto appartenente ad un continuo, occorre innanzitutto definire la forza ΔF , definita in un punto P a partire da una sezione del continuo con un generico piano π , che equilibra una porzione di continuo ipotizzando l'asportazione della regione adiacente per effetto del sezionamento avendo postulato l'equilibrio globale del continuo stesso.

Definendo un'area A attorno al punto P su π , nel punto agisce uno stato di sforzo $\Delta F/\Delta A$; facendo tendere ΔA a 0 si ottiene lo stato di sforzo puntuale (infinitesimo):

tensione sulla superficie di normale \vec{n} $\vec{t}_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}$ scomponibile in $\begin{cases} \sigma_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} & \text{componente normale di tensione} \\ \tau_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} & \text{componente tangenziale di tensione} \end{cases}$

Se la sezione ha una giacitura particolare (ad esempio ha normale parallela all'asse x) si definiscono:

\vec{t}_x tensione sulla superficie di normale x ; σ_x componente normale; τ_x componenti tangenziali (nei piani xy e xz)

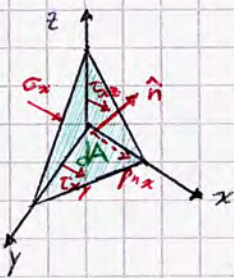
Sviluppando analogamente nelle direzioni y e z , si ottengono 9 componenti, dette componenti speciali di tensione, di cui solo 6 sono tra loro indipendenti, essendo la matrice delle tensioni S simmetrica ($T_{ij} = T_{ji}$):

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

Per l'equilibrio, note le 9 componenti speciali di tensione è possibile ricavare le tensioni agenti sul generico piano di normale \hat{n} : ne segue che al variare della giacitura della superficie le tensioni variano ma sono determinabili una volta noto uno stato di sforzo.

Definito il tetraedro di Cauchy (composto dall'intersezione tra la faccia di normale \hat{n} e i piani coordinati) e supponendo che l'ampiezza della superficie genericamente inclinata sia pari a dA , le superfici staccate dai piani coordinati si ottengono moltiplicando dA per i coseni direttori tra dA e i piani di riferimento:

$$dA_x = dA \cdot \cos(n, x) ; \quad dA_y = dA \cdot \cos(n, y) ; \quad dA_z = dA \cdot \cos(n, z)$$



Lungo l'asse x si ha:

$$P_{n,x} \cdot dA = \sigma_x \cdot dA_x + \tau_{xy} \cdot dA_y + \tau_{xz} \cdot dA_z$$

essendo un equilibrio, le grandezze coinvolte devono essere forze!

Componente di sforzo agente su dA in direzione x

Lo sforzo agente sul punto rispetto ad una superficie genericamente inclinata dipende dalle 9 componenti speciali di tensione in una terna di riferimento.

Sostituendo le espressioni di dA_x, dA_y, dA_z :

$$P_{n,x} = \sigma_x \cdot \cos(n, x) + \tau_{xy} \cdot \cos(n, y) + \tau_{xz} \cdot \cos(n, z)$$

Analogamente, nelle altre direzioni:

$$P_{n,y} = \tau_{yx} \cdot \cos(n, x) + \sigma_y \cdot \cos(n, y) + \tau_{yz} \cdot \cos(n, z)$$

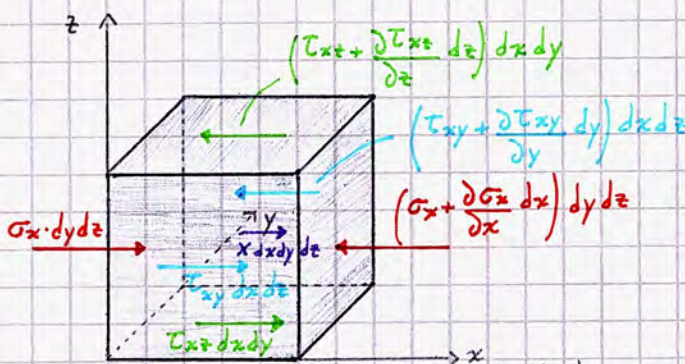
$$P_{n,z} = \tau_{zx} \cdot \cos(n, x) + \tau_{zy} \cdot \cos(n, y) + \sigma_z \cdot \cos(n, z)$$

$$\vec{P}_n = S \cdot \vec{n}$$

direzione della superficie in esame
componenti speciali di tensione

Un'altra importante condizione da verificare è l'equilibrio locale: si consideri un intorno infinitesimo di un punto; per garantire l'equilibrio è necessario che le componenti degli sforzi agenti siano uguali e opposte alle azioni dovute agli intorni adiacenti; ciò equivale allo studio delle 9 componenti di sforzo, che in un intorno variano, in generale; facce opposte hanno incrementi infinitesimi.

Considerando unicamente la direzione x , si ha equilibrio se:



$$\sigma_x dy dz + \tau_{xy} dx dz + \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz =$$

$$= \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dx dz + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy$$

Oppure se:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} - X = 0$$

Analogamente per le altre direzioni:

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} - Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - Z = 0$$

Per convenzione, si hanno tensioni positive:

• Normali, se di compressione (σ)

• Tangenziali, se producono rotazioni antiorarie (τ)

discorsi: all'asse j sulla faccia di normale concorde all'asse i e viceversa

Per definire l'equilibrio locale si hanno dunque 3 equazioni in 6 incognite, il che costituisce un problema staticamente indeterminato che richiede l'aggiunta di altre tre condizioni.

Per farlo occorre definire le tensioni e direzioni principali, ovvero direzioni triortogonali tali per cui lo stato tensionale nel punto è composto da soli sforzi normali. Per determinarle è sufficiente partire dal tetraedro di Cauchy e impostare le p_{nx} , p_{ny} , p_{nz} in maniera tale da determinare una risultante parallela ad \hat{n} , ovvero:

$$\underline{\sigma} \cdot \hat{n} = S \cdot \hat{n} \xrightarrow{\text{in } x} \sigma \cos(n,x) = \sigma_x \cos(n,x) + \tau_{xy} \cos(n,y) + \tau_{xz} \cos(n,z);$$

\hookrightarrow incognita (condizione di parallelismo)

$$0 = (\sigma_x - \sigma) \cos(n,x) + \tau_{xy} \cos(n,y) + \tau_{xz} \cos(n,z)$$

Analogamente per le altre direzioni. Ad eccezione della soluzione banale $\cos(n,i) = 0 \forall i$ — che non ha alcun senso fisico — l'unica soluzione possibile richiede di imporre che le tre equazioni non siano tra loro indipendenti; ciò è possibile solo imponendo che il determinante dei coefficienti sia nullo:

$$\det \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} = 0$$

Da cui si ottiene la relazione cubica:

$$\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma + I_3 = 0$$

La soluzione è costituita da una terna di tensioni normali principali, ovvero tensioni agenti su piani triortogonali tali per cui gli sforzi tangenziali sono nulli (piani principali). In particolare, per convenienza si impongono σ_1 e σ_3 rispettivamente come tensione massima e minima.

Poiché le tensioni principali non variano al variare del riferimento, I_1, I_2 e I_3 sono degli invarianti rispetto al sistema di riferimento. Di particolare rilevanza per le applicazioni è I_1 — invariante scalare, pari alla traccia del tensore delle tensioni — rispetto al quale è spesso possibile sintetizzare lo stato tensionale.

Cerchi di Mohr

Dal sistema di equazioni definito con la trattazione del tetraedro di Cauchy ($\vec{p}_n = S \cdot \hat{n}$) riferito alla terna principale (in cui le componenti tangenziali sono nulle):

$$\begin{aligned} p_{n1} &= \sigma_1 \cos(n,1) \\ p_{n2} &= \sigma_2 \cos(n,2) \\ p_{n3} &= \sigma_3 \cos(n,3) \end{aligned}$$

È possibile definire la tensione risultante p_n^2 :

$$p_n^2 = p_{n1}^2 + p_{n2}^2 + p_{n3}^2 = \sigma_1^2 \cos^2(n,1) + \sigma_2^2 \cos^2(n,2) + \sigma_3^2 \cos^2(n,3)$$

Che può essere scomposta in una componente normale ed una tangenziale:

$$p_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2$$

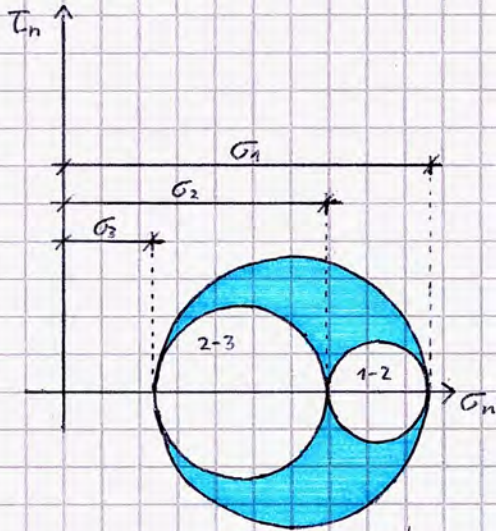
Si può dimostrare la validità di tre disuguaglianze che coinvolgono le componenti principali di tensione e le componenti della tensione risultante appena definite; esse definiscono delle condizioni di esistenza in relazione a circonferenze che, una volta composte nel piano $\tau_n - \sigma_n$ — detto piano di Mohr — danno luogo ad un dominio detto arbelo di Mohr in cui sono identificati gli stati tensionali possibili nel punto al variare del riferimento.

$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$ lo stato tensionale cade al di fuori del cerchio 2-3 o su di esso;

$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2$ lo stato tensionale cade all'interno del cerchio 2-3 o sulla sua frontiera;

$\tau_n^2 + \left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2$ lo stato tensionale cade all'esterno del cerchio 1-2 o sulla sua frontiera.

Graficamente, si ha:

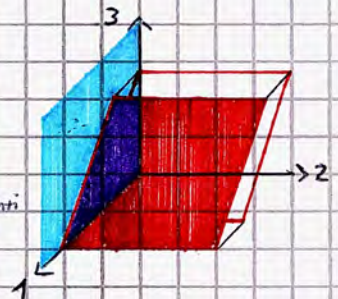
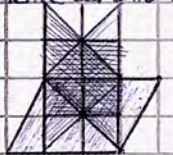


Nella quasi totalità dei problemi di geotecnica si considera un insieme di giaciture ortogonali ad un piano principale; gli stati tensionali che agiscono in detti piani sono contenuti nel piano principale e sono dunque rappresentati da un punto del corrispondente cerchio di Mohr.

Ad esempio, lo stato tensionale agente su un piano normale al piano 1-3 è contenuta nel piano stesso e rappresentata nel corrispondente cerchio di Mohr: detto piano ha per costruzione normale ortogonale all'asse 1-2, il che implica che:

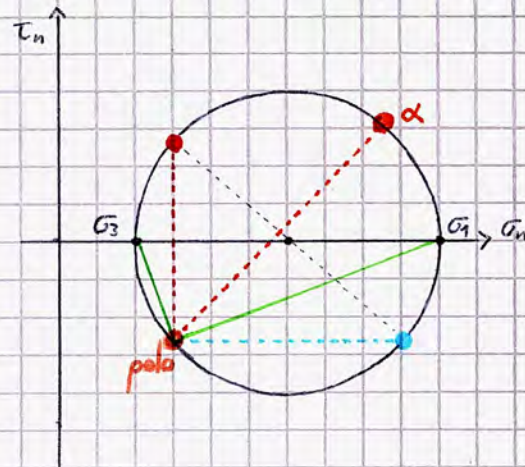
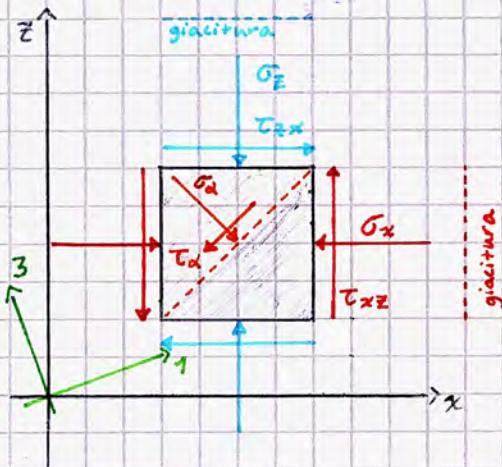
$$\begin{cases} \cos(n,1) \neq 0 \\ \cos(n,2) = 0 \Rightarrow p_{n2} = p_n \cos(n,2) = 0 \\ \cos(n,3) \neq 0 \end{cases}$$

Dunque lo stato tensionale avrà solo componenti p_{n1} e p_{n3} .



Consideriamo due assi x e z di riferimento nel piano 1-3. Per definizione, gli stati tensionali agenti sui piani normali a xz sono contenuti nel piano xz e giacciono sul cerchio 1-3; ne segue che, al ruotare della giacitura del singolo piano normale, si determinano più punti del relativo Cerchio di Mohr.

Considerando l'intorno del punto in esame e determiniamo punti del Cerchio corrispondenti a giaciture parallele agli assi coordinati: essendo il centro del Cerchio appartenente all'asse σ_n è possibile tracciarlo compiutamente.



In notazione geotecnica sono positive le tensioni normali di compressione e le tensioni tangenziali che producono una rotazione antioraria dello elemento su cui agiscono.

Una volta determinato il cerchio, la definizione delle tensioni principali è elementare (giacciono sull'asse σ_n).

Il Cerchio di Mohr è però anche dotato di un polo, ovvero un punto a partire dal quale è possibile identificare lo stato tensionale di una generica giacitura (corrispondente a un piano normale al piano di riferimento) tracciando una retta parallela alla giacitura passante per il polo ed identificandone l'intersezione col Cerchio.

Essendo già note due giaciture e i punti corrispondenti nel piano di Mohr, la definizione del polo è elementare: è sufficiente condurre rette parallele alle giaciture dai punti corrispondenti.

A partire da un riferimento generico è dunque possibile conoscere, noto il Cerchio di Mohr, le giaciture corrispondenti alle tensioni principali σ_2 e σ_3 ; logicamente ciò vale per ciascuna giacitura.

Lo stato tensionale riferito alle 9 componenti speciali di tensione (di cui 6 indipendenti) può essere scomposto in due stati tensionali (la cui somma restituisce lo stato tensionale iniziale):

• Stato tensionale sferico:
$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & & \\ & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & \\ & & \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{bmatrix}$$
 Produce come effetto variazioni di volume

• Stato tensionale deviatorico:
$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \end{bmatrix}$$
 Produce come effetto distorsioni nel punto, ovvero variazioni di forma.

Entrambi i tensori consentono di valutare, in base alla prevalenza dell'uno o dell'altro, il fenomeno deformativo prevalente in un punto. Si osserva inoltre che le tensioni principali del tensore deviatorico hanno le stesse direzioni di quelle del tensore S (si sottrae una costante in tutte le direzioni).

Analogamente a quanto fatto in precedenza, è possibile definire le componenti principali del tensore delle tensioni nelle sue componenti: definito p lo stato tensionale sferico e s lo stato tensionale deviatorico si ottiene, con il medesimo procedimento delle pp. 29-30:

$$S = p + s \Rightarrow s^3 - J_1 s^2 - J_2 s - J_3 = 0 \quad (J_1 = s_x + s_y + s_z = 0)$$

Tra gli invarianti, J_2 descrive soprattutto le variazioni di forma:

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2$$

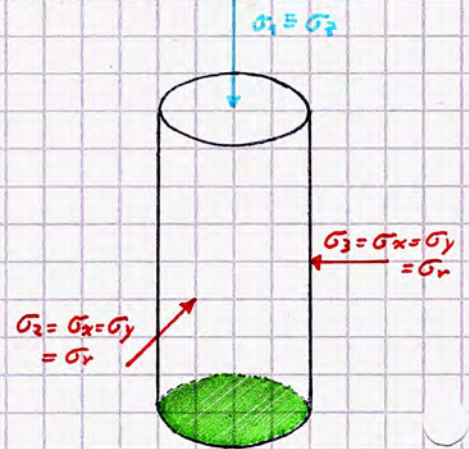
Poiché I_1 consente di sintetizzare indirettamente le variazioni di volume, da I_1 e J_2 è possibile sintetizzare gli effetti di una variazione di stato tensionale (storia di sollecitazione):

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{I_1}{3} && \text{tensione media} \\ q &= \sqrt{3J_2} && \text{tensione deviatorica} \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{Non dipendono dal sistema di riferimento!}$$

In geotecnica sono ricorrenti le condizioni di assialsimmetria, ovvero di stato tensionale cilindrico, in cui $\sigma_1 \neq \sigma_2 = \sigma_3 \equiv \sigma_r$ (tensione radiale). In dette condizioni le espressioni di p e q si semplificano particolarmente:

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_r}{3}$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_r$$



Intatti:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{3J_2} = \left(\frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] + 3\tau_{xy}^2 + 3\tau_{xz}^2 + 3\tau_{yz}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \left[(\sigma_r - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_r)^2 + (\sigma_r - \sigma_r)^2 \right] + 0 + 0 + 0 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{2} \left[2(\sigma_r - \sigma_r)^2 \right] \right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_r - \sigma_r \equiv \sigma_1 - \sigma_r \end{aligned}$$

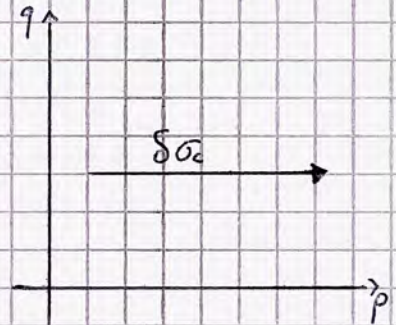
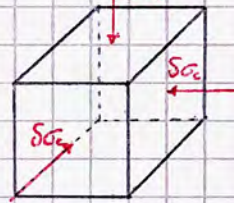
In base a dette espressioni è possibile riprodurre i percorsi di sollecitazione (stress-path), ovvero le variazioni di stato tensionale in un punto che, conseguentemente, consentono di valutarne gli effetti deformativi in un grafico $q-p$, una retta orizzontale determina effetti principalmente volumetrici ($q = \text{cost}$); analogamente, una retta verticale è indicativa di effetti prevalentemente distorsionali.

Esempi

① Elementino soggetto a variazioni di stato tensionale sferico $\delta\sigma_c$:

$$\delta p = \frac{\delta\sigma_1 + 2\delta\sigma_3}{3} = \frac{\delta\sigma_c + 2\delta\sigma_c}{3} = \delta\sigma_c$$

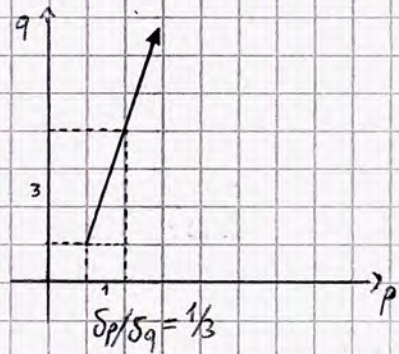
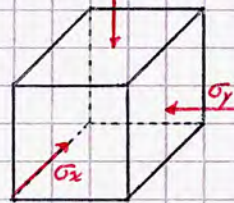
$$\delta q = \delta\sigma_1 - \delta\sigma_3 = \delta\sigma_c - \delta\sigma_c = 0$$



② Elementino soggetto solo a variazione della tensione principale verticale; le altre, uguali tra loro, restano costanti.

$$\delta p = \frac{\delta\sigma_1 + 2\delta\sigma_3}{3} = \frac{\delta\sigma_1 + 0}{3} = \frac{\delta\sigma_1}{3}$$

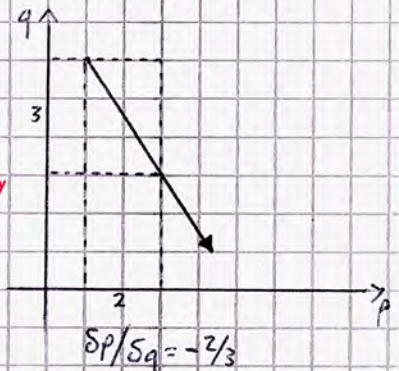
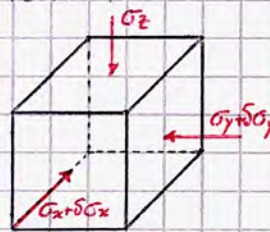
$$\delta q = \delta\sigma_1 - \delta\sigma_3 = \delta\sigma_1 - 0 = \delta\sigma_1$$



③ Elementino soggetto a variazione delle sole tensioni radiali; la terza resta costante.

$$\delta p = \frac{\delta\sigma_1 + 2\delta\sigma_3}{3} = \frac{0 + 2\delta\sigma_3}{3} = \frac{2}{3} \delta\sigma_3$$

$$\delta q = \delta\sigma_1 - \delta\sigma_3 = 0 - \delta\sigma_3 = -\delta\sigma_3$$



Tornando alle equazioni definite dell'equilibrio, è possibile esprimere le componenti di tensione totale in funzione della tensione efficace, essendo la tensione normale pari a $\sigma'_i + u_w$ (le tensioni tangenziali logicamente non variano, essendo l'acqua assoggettabile unicamente a stati tensionali sferici). È dunque possibile definire delle equazioni di equilibrio dello scheletro solido considerando i termini $\frac{\partial u_w}{\partial x_i}$ come termini noti, ovvero come forze di massa agenti sullo scheletro solido dette forze di filtrazione (sussistono solo in presenza di un gradiente idraulico!).

$$\begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma'_x & \tau'_{xy} & \tau'_{xz} \\ \tau'_{yx} & \sigma'_y & \tau'_{yz} \\ \tau'_{zx} & \tau'_{zy} & \sigma'_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_w & & \\ & u_w & \\ & & u_w \end{bmatrix}$$

Da cui:

$$\left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial u_w}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} - X = 0$$

$$\frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial u_w}{\partial y} \right) + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} - Y = 0$$

$$\frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \left(\frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + \frac{\partial u_w}{\partial z} \right) - Z = 0$$

termini noti \Rightarrow II membro

In condizioni litostatiche, le forze di massa lungo x e lungo y sono nulle, mentre lungo z si ha un gradiente dovuto al peso per unità di volume γ_{sat} , con $X=Y=0$ o $Z=\gamma_{sat}$.

In condizioni di emungimento da falda, le forze di massa lungo x e lungo y sono costanti; lungo z si ha che $\frac{\partial u_w}{\partial z} = \gamma_w$.

Per effetto della variazione delle componenti di tensione varia anche la configurazione del dominio, preso in esame; si introducono dunque delle componenti di deformazione analogamente a quanto fatto per le componenti di tensione:

Valutiamo innanzitutto le componenti normali di deformazione:

Considerando un elementino di lati dx e dy che si trasforma in un rombo a seguito di un allungamento dei suoi lati e una variazione della forma, è possibile valutare le componenti deformative lungo gli assi come segue:

$$\epsilon_x = \frac{O'B' - OB}{OB} = \frac{(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx) - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \left(\frac{L_{fin} - L_0}{L_0} \right)$$

Analogamente, $\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$; $\epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$

Per valutare le componenti tangenziali di deformazione occorre caratterizzare la variazione di forma dell'elementino in conseguenza della deviazione dei lati di angoli α e β rispetto alla direzione originaria.

Essendo ∂v per definizione coincidente con lo spostamento prodotto lungo y , ed essendo α e β angoli piccoli a piacere, si può osservare che:

$$\beta \cong \text{tg} \beta = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} \cong \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{definisce la variazione in } x \text{ dello spostamento lungo } y \text{ dell'elementino.}$$

↳ Nell'ipotesi di piccoli spostamenti, il termine $\frac{\partial u}{\partial x}$ è trascurabile rispetto agli altri due.

Analogamente, $\alpha \cong \frac{\partial u}{\partial y}$

Si può dunque definire la variazione di forma (deformazione angolare) nel piano xy :

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} ; \quad \text{Analogamente, } \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial x} ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Si può dunque costruire il tensore delle deformazioni, avendo cura di dimezzare le componenti fuori diagonale per una congrua espressione del lavoro, tramite il quale è possibile costruire un Cerchio di Mohr delle deformazioni nel piano $\epsilon - \gamma/2$ oltre che esprimere gli effetti sferici e deviatorici di deformazione tramite gli invarianti:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_x & \frac{1}{2} \gamma_{xy} & \frac{1}{2} \gamma_{xz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{yx} & \epsilon_y & \frac{1}{2} \gamma_{yz} \\ \frac{1}{2} \gamma_{zx} & \frac{1}{2} \gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Gli effetti sferici di deformazione, ovvero le ^{deformazioni} variazioni di volume, possono essere espressi come segue:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{V - V_0}{V_0}$$

Considerando un elementino infinitesimo di dimensioni $dx; dy; dz$ trasformato in un elementino di dimensioni $dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx; dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy; dz + \frac{\partial w}{\partial z} dz$, valgono le seguenti espressioni:

$$V_{finale} = (dx + \epsilon_x \cdot dx) \cdot (dy + \epsilon_y \cdot dy) \cdot (dz + \epsilon_z \cdot dz) = dx(1 + \epsilon_x) dy(1 + \epsilon_y) dz(1 + \epsilon_z)$$

$$V_0 = dx \cdot dy \cdot dz$$

Da cui risulta facilmente che $\epsilon_v = (1 + \epsilon_x)(1 + \epsilon_y)(1 + \epsilon_z) - 1$; essendo valida l'ipotesi di piccole deformazioni sono trascurabili le componenti $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$ ($i \neq j$) rispetto alle rimanenti, dunque risulta che:

$$\epsilon_v = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z$$

Anche il tensore delle deformazioni è simmetrico rispetto alla diagonale principale; ne segue che le componenti di deformazione si riducono anch'esse a 6. La variabilità nello spazio delle deformazioni deve però essere tale da garantire che non si formino distacchi o scorrimenti, il che equivale ad imporre il rispetto di equazioni di congruenza, qui riportate, che coinvolgono le derivate seconde delle componenti deformative:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Per descrivere i percorsi di deformazione, come fatto in precedenza, è possibile ricorrere agli invarianti del tensore delle deformazioni:

* Invariante di ^{deformazione} ~~tensione~~ volumetrica:

$$\epsilon_v = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3$$

* Invariante di deformazione distorsionale/deviatorica:

$$\epsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$$

In condizioni di assialsimmetria, l'espressione di ϵ_s può essere semplificata come segue:

$$\epsilon_s = \frac{2}{3} (\underbrace{\epsilon_a}_{\text{assiale}} - \underbrace{\epsilon_r}_{\text{radiale}})$$

Infatti:

$$\epsilon_s = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\epsilon_a - \epsilon_r)^2 + (\epsilon_r - \epsilon_r)^2 + (\epsilon_a - \epsilon_r)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{2(\epsilon_a - \epsilon_r)^2} \quad \square$$

Come fatto in precedenza (p. 33), valutiamo ora dei casi elementari di percorsi di deformazione.

Esempi

① Elementino soggetto a variazioni di stato tensionale sterico $\delta \sigma_c$

$$\delta p = \delta \sigma_c; \delta q = 0$$

SOLO SE il mezzo ha comportamento elastico lineare ed è ISOTROPO, allora il percorso deformativo è orizzontale.

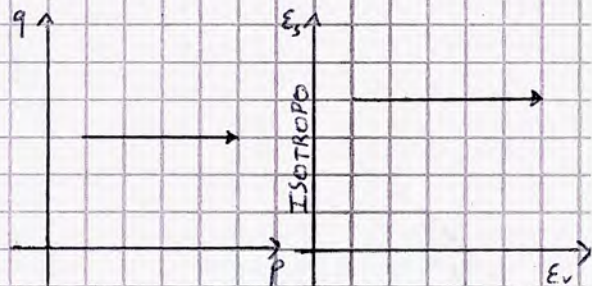
In presenza di anisotropia un percorso di carichi orizzontale

NON definisce un percorso di deformazioni orizzontale.

Nelle ipotesi che inquadrano un percorso deformativo orizzontale infatti si ha che:

$$\delta \epsilon_1 = \delta \epsilon_r = \delta \epsilon_c \Rightarrow \delta \epsilon_v = \delta \epsilon_1 + 2\delta \epsilon_r = 3\delta \epsilon_r; \delta \epsilon_s = \frac{2}{3}(\delta \epsilon_1 - \delta \epsilon_r) = 0$$

Isotropia



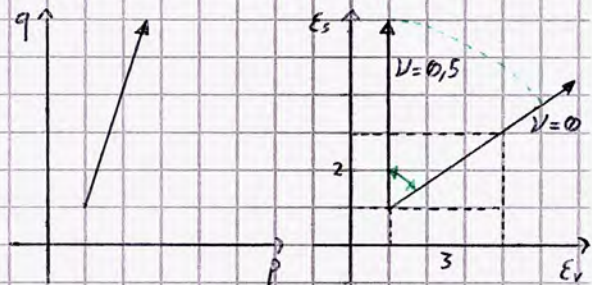
② Elementino soggette a variazioni della tensione principale massima; le altre, uguali tra loro, restano costanti.

In generale si hanno risposte differenti indipendentemente dalla isotropia; assumendo che il materiale sia ^{isotropio} ortotropo nel piano di applicazione di σ_r si ha che:

$$\delta \epsilon_r = -\nu \delta \epsilon_1 \Rightarrow \delta \epsilon_v = \delta \epsilon_1 + 2\delta \epsilon_r = \delta \epsilon_1 (1 - 2\nu);$$

$$\delta \epsilon_s = \frac{2}{3}(\delta \epsilon_1 - \delta \epsilon_r) = \frac{2}{3} \delta \epsilon_1 (1 + \nu)$$

$$\frac{\delta \epsilon_s}{\delta \epsilon_v} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} = \frac{2}{3} \frac{1 + \nu}{1 - 2\nu} \frac{E}{E} = \frac{2G}{3K}$$



Gli invarianti di tensione e deformazione esplicitati sinora ($p, q, \epsilon_v, \epsilon_s$) consentono di esprimere il lavoro per unità di volume compiuto dalle sollecitazioni interne in maniera particolarmente agevole:

$$\frac{\delta W}{V} = \sigma_1 \delta \epsilon_1 + \sigma_2 \delta \epsilon_2 + \sigma_3 \delta \epsilon_3 = p \cdot \delta \epsilon_v + q \delta \epsilon_s$$

nel riferimento principale di tensione compaiono unicamente σ_i, ϵ_i , in generale no!

Avendo definito 3 condizioni di equilibrio locale (pp. 29-30) e 3 condizioni di congruenza (p. 35), risulta un totale di 6 equazioni costitutive per 12 funzioni incognite (6+6 componenti di tensione/deformazione indipendenti); per garantire che il sistema sia determinato occorre quindi introdurre le 6 condizioni del legame costitutivo, equazioni differenziali (ad eccezione del caso elementare del legame costitutivo elastico lineare, in cui le equazioni sono algebriche) che correlano le componenti di tensione a quelle di deformazione.

Legame Costitutivo Elastico Lineare (L.C.E.L.)

Tipico del materiale ideale soggetto alla teoria dell'elasticità, avente le seguenti caratteristiche:

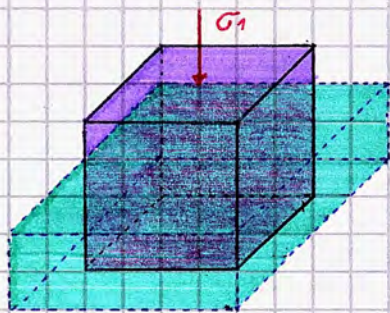
- Continuo, omogeneo e isotropo;
 - stessa risposta deformativa a parità di sollecitazione al variare della direzione di carico
 - caratteristiche fisico-meccaniche costanti nel dominio
- Elastico: il comportamento tensioni-deformazioni è reversibile e non dipende dalla storia deformativa;
- Lineare: il comportamento tensioni-deformazioni è lineare.

Le equazioni costitutive di un materiale siffatto possono essere scritte in forme diverse in funzione dei parametri meccanici di interesse: la trattazione classica della teoria dell'elasticità considera i seguenti parametri:

E modulo di rigidezza assiale [di Young] $\left[\frac{F}{L \cdot L} \right]$
 ↳ questa denominazione è valida unicamente per parametri aventi le dimensioni di una forza su lunghezza al quadrato

ν coefficiente di Poisson $[-]$
 a dimensionale

Si richiama per completezza il significato fisico dei due parametri:



$$\epsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} \quad \epsilon_2 = \epsilon_3 = -\nu \epsilon_1$$

Da cui risultano le relazioni in termini di E e ν del LCEL come segue:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z))$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z))$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y))$$

↳ le deformazioni trasversali possono determinare dagli sforzi

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}$$

$$G = \frac{E}{1+\nu} \quad \text{modulo di rigidezza a taglio [tangenziale]}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}$$

Un altro modo per esprimere il LCEL in un continuo omogeneo isotropo prevede l'utilizzo degli invarianti:

$$E_v = \frac{p}{K} \rightarrow \text{tensione media} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

modulo di rigidità volumetrica; $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

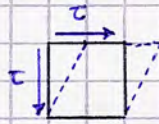
Legame costitutivo nella pura deformazione volumetrica, deriva dal fatto che $E_v = \sigma_e / K$.

$$E_s = \frac{q}{3G} \rightarrow \text{invariante di tensione deviatorica} = \sigma_1 - \sigma_3 \text{ in assialsimmetria}$$

Legame costitutivo nella pura deformazione distorsionale, deriva dal fatto che $\gamma = \tau / G$.

modulo di rigidità deviatorica/tagliante

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Le due scritture del legame costitutivo sono ovviamente equivalenti: considerando un elemento in condizioni di assialsimmetria si ha che:

$$E_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - 2\nu \sigma_r]$$

$$p = \frac{\sigma_1 + 2\sigma_r}{3}$$

$$E_2 = E_3 = E_r = \frac{1}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_1 + \sigma_r)]$$

$$q = \sigma_1 - \sigma_r$$

Da cui:

$$\begin{aligned} E_v = E_1 + 2E_r &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - 2\nu \sigma_r] + \frac{2}{E} [\sigma_r - \nu(\sigma_1 + \sigma_r)] = \\ &= \sigma_1 \left(\frac{1}{E} - \frac{2\nu}{E} \right) + \sigma_r \left(\frac{2}{E} - \frac{2\nu}{E} - \frac{2\nu}{E} \right) = \\ &= \sigma_1 \cdot \frac{1-2\nu}{E} + 2\sigma_r \cdot \frac{1-2\nu}{E} = \\ &= \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_1 + 2\sigma_r) = \\ &= \frac{3(1-2\nu)}{E} \cdot p \end{aligned}$$

Applicando la definizione di E_v volumetrica = $E_x + E_y + E_z = E_1 + E_2 + E_3$ assialsim $E_1 + 2E_3$ e sostituendo alle E la legge di Hooke generalizzata da cui esse si ricavano, mettendo in evidenza σ_1 e σ_3 si ottiene il penultimo passaggio, da cui si dimostra l'equivalenza delle relazioni scritte.

Essendo $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ per definizione, si ha che $E_v = \frac{p}{K}$ QED

Per quanto riguarda le componenti tangenziali,

$$\begin{aligned} E_s = \frac{2}{3} (E_1 - E_r) &= \frac{2}{3} \left(\frac{1}{E} (\sigma_1 - 2\nu \sigma_r) - \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu(\sigma_1 + \sigma_r)) \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\sigma_1 \left(\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E} \right) - \sigma_r \left(\frac{2\nu}{E} + \frac{1}{E} - \frac{\nu}{E} \right) \right) = \\ &= \frac{2}{3} \left(\sigma_1 \cdot \frac{1+\nu}{E} - \sigma_r \cdot \frac{1+\nu}{E} \right) = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1+\nu}{E} (\sigma_1 - \sigma_r) = \\ &= \frac{2(1+\nu)}{3E} \cdot q \end{aligned}$$

Essendo $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ per definizione, si ha che $E_s = \frac{q}{3G}$ QED

Le equazioni costitutive scritte rispetto agli invarianti evidenziano che per il materiale ideale della teoria dell'elasticità:

- Le deformazioni volumetriche sono associate esclusivamente a variazioni della parte volumetrica dello stato tensionale;
- Le deformazioni distorsionali (a volume costante) derivano esclusivamente da variazioni della parte deviatorica dello stato tensionale.

Il LCEL è dunque esprimibile come segue:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_v \\ \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K \\ 1/3G \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix}$$

La matrice delle rigidità è una matrice diagonale con elementi fuori diagonale nulli: ciò implica che cause distorsionali (q) [volumetriche] che (p)] definiscono variazioni unicamente in termini di deformazioni distorsionali [di forma] [volumetriche], non c'è accoppiamento tra i due.

I quattro parametri elastici definiti sinora sono a due a due indipendenti, essendo regolati dalle seguenti relazioni:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

($\nu=0,5 \Rightarrow K=\infty$
mezzo incompressibile)

Nota: due parametri, lo sono anche i restanti due (E, ν, K, G).

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$E = \frac{9 \cdot K \cdot G}{3K+G}$$

$$\nu = \frac{3K-2G}{2(3K+G)}$$

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{9K} + \frac{1}{3G}$$

$$-\frac{\nu}{E} = \frac{1}{9K} - \frac{1}{6G}$$

Si osserva che $\nu \in [0, 1/2]$: se fosse $> 1/2$ ciò implicherebbe $K < 0$, il che implica che ad una compressione dell'elementino corrisponderebbe una dilatazione volumetrica, il che è evidentemente un assurdo fisico ($K > 0$ per definizione).

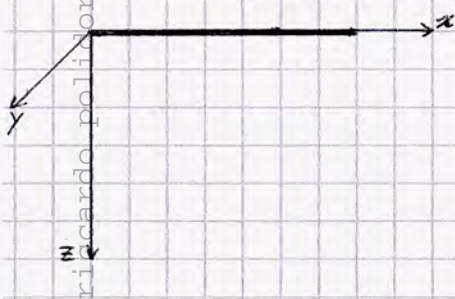
Sono state dunque richiamate le equazioni locali che governano un continuo (3 equazioni di equilibrio - in condizioni di assialsimmetria - con 6 incognite di tensione, 3 equazioni di congruenza - che impongono l'assenza di tranciamenti e sovrapposizioni di materia - in 6 incognite di deformazione e le leggi del legame costitutivo che, legando le componenti di tensione con quelle di deformazione - equilibrano il numero di equazioni con il numero di incognite, rendendo il sistema determinato), si osserva che il problema di un solido continuo è governato da 12 equazioni differenziali in 12 funzioni incognite, in cui dalle deformazioni è possibile ricavare gli spostamenti.

Il legame costitutivo più semplice, come è noto, è il legame costitutivo

elastico lineare (LCEL), che assume una formulazione particolarmente semplificata se il mezzo è omogeneo ed isotropo, ovvero se:

- Omogeneo: il mezzo possiede le stesse proprietà meccaniche in ogni suo punto;
- Isotropo: fissato un qualsivoglia punto del mezzo, il suo comportamento non dipende dalla direzione in cui è applicato il carico;
- Elastico: il comportamento tensiodetormativo del mezzo è reversibile e non dipende dalla storia deformativa;
- Lineare: il legame sforzo-deformazione nel mezzo è lineare.

Stato tensionale nel semispazio



Ricordando quanto fatto nel definire l'equilibrio di una colonna di terreno, in cui si è osservato che gli sforzi tangenziali sono nulli in virtù della condizione di (assiale) simmetria (da cui deriva che $\sigma_z = \gamma \cdot z$), si possono ora definire le equazioni indefinite dello equilibrio: nel semispazio tutte le colonne verticali si presentano nelle medesime condizioni, il che implica che le componenti di tensione sono indipendenti da x e y e variano solo con z ; per l'ipotesi di simmetria, anche le τ con pedice z sono necessariamente nulle per quanto richiamato in precedenza; risulta quindi che lo stato tensionale nel semispazio si specializza rispetto a quello definito in generale come segue:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma = 0 \quad \text{integrando in } z, \text{ si ottiene:}$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad (\sigma_z)_H = \int_0^H \gamma dz \quad \text{QED}$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} - \gamma = 0$$

Unico termine non nullo

Nel semispazio, ipotizzando valida la condizione di espansione impedita in virtù del principio della congruenza (le colonne verticali non possono espandersi tutte contemporaneamente), si possono particularizzare le relazioni elastiche:

Congruenza $\Rightarrow E_x = E_y = 0$

Ricordando che $E_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z))$, risulta:

$$E_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) = 0;$$

$1/E$ è una costante

$$\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) = 0;$$

In condizioni di simmetria radiale, $\sigma_x = \sigma_y$

$$\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_z) = 0;$$

$$\sigma_x (1 - \nu) - \nu \sigma_z = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z$$

Ne segue che, nel semispazio, nota σ_z e definito il parametro elastico ν si possono ricavare σ_x e σ_y , proporzionali a ν . Dal punto di vista fisico ciò è indicativo del fatto che all'aumentare del coefficiente di Poisson aumentano - a parità di σ_z - le

deformazioni in x ed y , equilibrate da σ_x e σ_y maggiori in ragione della congruenza e della condizione di espansione impedita.

Analogamente, occorre precisare che $E = \sigma_1 / \epsilon_1$ in condizioni di espansione libera; in condizioni di espansione impedita bisogna definire un modulo parente al Modulo di Young, detta modulo edometrico E_{ed} .

anche noto come modulo di compressione edometrica

In condizioni di espansione impedita, $E_x = E_y = 0$.

Partendo dalla definizione di E_z , sostituendo a σ_x e σ_y la relazione $\sigma_x = \sigma_y = \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z$ si ottiene:

$$E_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)); \quad \sigma_x = \sigma_y$$

$$E_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - 2\nu \sigma_x);$$

$$E_z = \frac{1}{E} \left(\sigma_z - 2\nu \cdot \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_z \right) = \frac{\sigma_z}{E} \left(\frac{1 - \nu - 2\nu^2}{1 - \nu} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow E_{ed} = \frac{\sigma_z}{E_z} = E \cdot \frac{1 - \nu}{1 - \nu - 2\nu^2}$$

il rapporto è > 1

ne risulta che $E_{ed} > E$, ad eccezione del caso in cui $\nu = 0,5$, in cui E_{ed} tende a ∞ .

Il rapporto $\nu / (1 - \nu)$ si definisce coefficiente di spinta a riposo k_0 ($k_0 = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$; $k_0 = 1 \Leftrightarrow \nu = 0,5$)

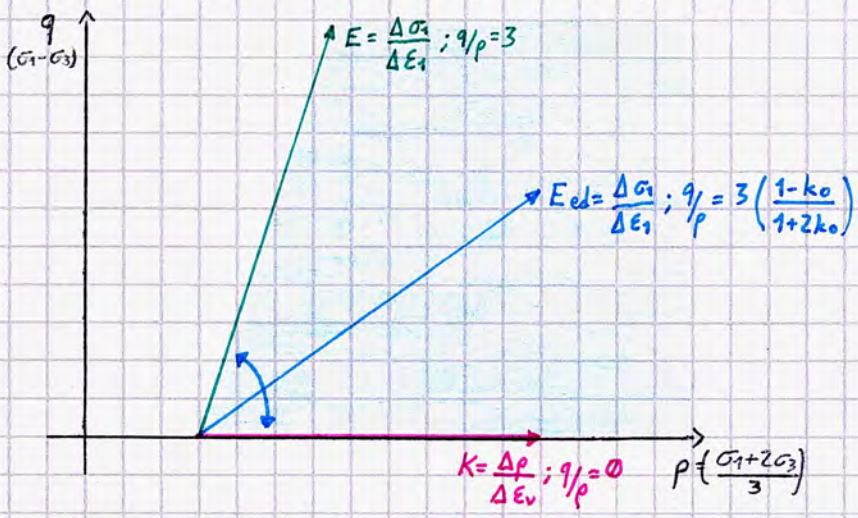
Ricordando i percorsi di sollecitazione (uno stato tensionale sterico corrisponde a una retta orizzontale nel piano $q-p$ - ovvero per $k_0 = 0$ - mentre in caso di espansione libera - ovvero per $k_0 = 1$ - il percorso segue un andamento lineare nel piano $q-p$ con rapporto 3:1), il percorso di sollecitazione di un provino in uno stato di compressione edometrica dipende da ν : definito k_0 , si ha infatti che:

$$\sigma_x = k_0 \sigma_z \quad \text{da cui si possono definire } p \text{ e } q$$

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{k_0 \sigma_z + k_0 \sigma_z + \sigma_z}{3} = \frac{(1+2k_0) \sigma_z}{3}$$

$$q = \frac{\sigma_z - \sigma_x}{3} = \frac{\sigma_z - k_0 \sigma_z}{3} = \frac{(1-k_0) \sigma_z}{3} \Rightarrow \frac{q}{p} = 3 \frac{(1-k_0) \sigma_z}{(1+2k_0) \sigma_z} = 3 \frac{1-k_0}{1+2k_0}$$

Si osserva che per $k_0 = 0$, $q/p = 3$; per $k_0 = 1$, $q/p = 0$; il percorso dipende da k_0 , ovvero da ν .



Stato piano di deformazione

Considerando un asse longitudinale ortogonale a un piano, si definisce stato piano di deformazione uno stato deformativo in cui tutte le sezioni ortogonali all'asse longitudinale si comportano allo stesso modo (dal punto di vista deformativo).

Ne segue che, in presenza di uno stato piano di deformazione, è possibile studiare una sola sezione per caratterizzare il comportamento dell'intero sistema.

⚠ Non bisogna assolutamente confondere lo stato piano di deformazione con lo stato piano di tensione: sono indipendenti!

Si definisce stato piano di tensione uno stato tensionale in cui le componenti di tensione agiscono tutte su uno stesso piano.

In diverse applicazioni geotecniche — come un rilevato stradale o un muro di sostegno, ma anche alcune strutture di fondazione (travi rovesce) se caricate uniformemente — è possibile schematizzare il problema ipotizzando di trovarsi nelle condizioni di stato piano di deformazione.

Definita y la direzione longitudinale (in cui, ad esempio, una struttura geotecnica ha sviluppo preponderante), valgono le seguenti relazioni:

$$\left. \begin{array}{l} \nu = 0 \\ u \text{ indipendente da } y \\ w \text{ indipendente da } y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{(tutte le sezioni si comportano)} \\ \text{(alla stessa maniera)} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \epsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = 0 \\ \gamma_{zy} = 0 \end{array}$$

Le altre componenti di deformazione non dipendono da y , ovvero:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

⚠ $\sigma_y \neq 0$! Lo stato piano deformativo NON È un problema piano di tensione.

Dalla legge di Hooke generalizzata, si ha che:

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_x + \sigma_z)) = 0 \Rightarrow \sigma_y = \nu (\sigma_x + \sigma_z) \neq 0$$

indipendente da y , dipende dalle altre componenti di tensione.

Risulta quindi che in un problema piano di deformazione le componenti indipendenti di tensione sono 3:

- σ_x
 - σ_z
 - τ_{xz}
- σ_y dipende da σ_x e σ_z
- $\tau_{xy} = \tau_{yz} = 0$

Le condizioni di equilibrio quindi si riducono da 3 a 2:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

Le ~~tre~~ condizioni di congruenza invece si riducono a una sola:

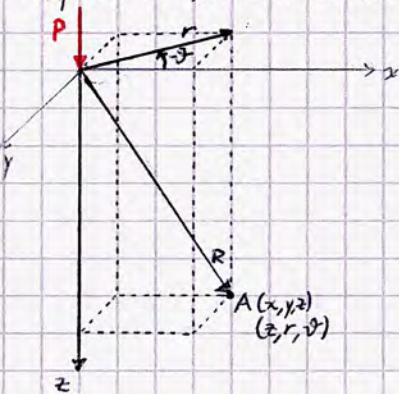
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z - \gamma}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z}$$

Un altro problema ricorrente è il problema tensio-deformativo assialsimmetrico (tipico nello studio di pali di fondazione), in cui le tensioni orizzontali sono uguali tra loro così come le componenti di deformazione. Essendo l'asse verticale z di simmetria radiale, si ha:

- $\epsilon_z = \epsilon_\theta$ e $\sigma_z = \sigma_\theta$ ovunque
- $\tau = 0$ in asse \Rightarrow le direzioni orizzontale e verticale sono principali (in generale non è verificato)

In questo caso, lo stato tensionale può essere espresso anche in coordinate cilindriche:



Il sistema di coordinate è costituito da:

- Asse z
- Asse radiale r
- Anomalia θ

In detto sistema è possibile valutare il sistema di equazioni di governo (equazioni indefinite dell'equilibrio, equazioni di congruenza, legame costitutivo elastico lineare in mezzo omogeneo ed isotropo); considerando il caso più elementare di un carico concentrato P applicato ortogonalmente al piano limite di un semispazio elastico privo di peso (ovvero in cui non si considera l'influenza del peso proprio del terreno) si ha che:

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi R^5}$$

$$\sigma_r = -\frac{P}{2\pi R^2} \left[-\frac{3r^2 z}{R^3} + \frac{(1-2\nu)R}{R+z} \right]$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi R^2} \left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z} \right]$$

$$\tau_{rz} = 3 \frac{P \cdot r \cdot z^3}{2\pi R^5}$$

Si osserva che le azioni in z non dipendono dalle proprietà elastiche del mezzo; in altre parole le componenti verticali di sforzo dipendono unicamente dalla posizione del punto e dalla intensità di carico, non richiedendo prove di laboratorio preliminari sul materiale.



Si intrinsece come il carico trasmesso da una fondazione abbia effetti sul sottosuolo: variano le componenti dello stato tensionale, implicando deformazioni locali e spostamenti globali, dunque cedimenti e/o rottura. Il calcolo di questi effetti è fondamentale per definire la porzione di sottosuolo interessata.

Il problema appena presentato è stato studiato da Moissinesq che, analizzando l'applicazione di una forza sul piano limite di un semispazio, ha studiato le variazioni nello stato tensionale del terreno dovute alla sola forza applicata (non considerando il peso proprio).

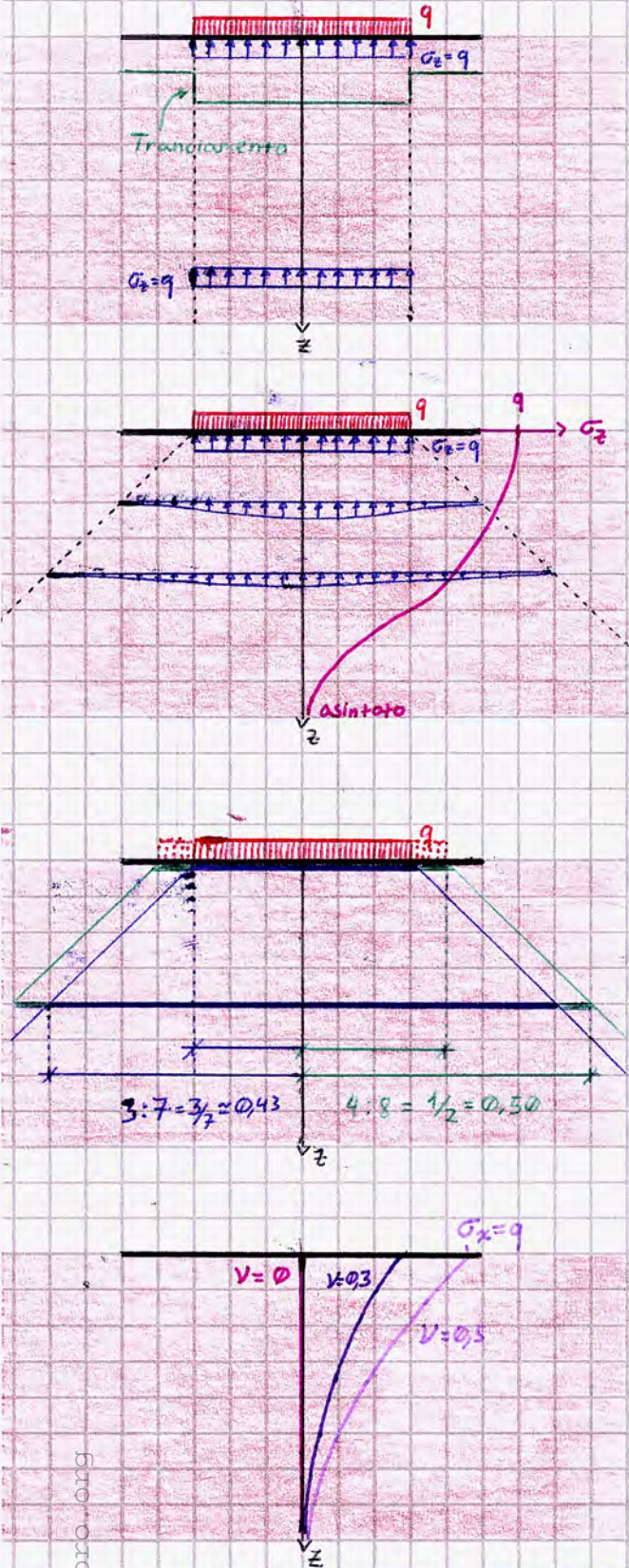
Da questa soluzione di base, valendo il principio di sovrapposizione degli effetti, si ottiene una soluzione generalizzata per il calcolo dello stato tensionale generato da un carico distribuito, consentendo di individuare soluzioni per carichi circolari, nastroforni, etc. Per un carico circolare q in asse z di raggio R :

$$\sigma_r = \frac{q}{2} \left((1+2\nu) - \frac{2(1+\nu)z}{\sqrt{R^2+z^2}} + \frac{z^3}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \right); \quad \sigma_z = q \left(1 - \frac{z^3}{\sqrt{(R^2+z^2)^3}} \right); \quad \tau_{rz} = \tau_{\theta y} = \tau_{yz} = 0$$

E si ha analogamente che $\sigma_r = f(\text{posizione}, \nu)$; $\sigma_z = f(\text{posizione})$

Effetto sismico

Consideriamo un problema assialsimmetrico con un carico circolare di intensità q e definiamo un semispazio; sezioniamo il suddetto con un piano passante per l'asse di assialsimmetria e valutiamo il comportamento del sottosuolo.



Per l'equilibrio, si può ipotizzare che l'applicazione del carico determini delle σ_z costanti al di sotto del piano di impronta del carico e nulle sulla restante parte, riproducendo identicamente le condizioni del piano campagna. In questa ipotesi, l'equilibrio è rispettato; ricordando l'assenza di peso proprio, ogni elementino del semispazio è equilibrato e l'equilibrio globale è verificato; analizzando la deformata del terreno però si osserva che la soluzione non rispetta la congruenza: essendo la deformata a scalino, si verifica un tranciamento del continuo!

Per garantire la congruenza, all'aumentare della profondità il carico deve essere ripartito lungo una sezione più ampia, coinvolgendo le aree non direttamente soggette al carico; per l'equilibrio, ogni distribuzione di sforzi di reazione deve presentare la stessa area.

Si produce una diffusione della perturbazione meccanica secondo un cono di angolo circa pari a 45° ; estendendosi l'area logicamente si riducono i valori massimi di tensione, registrati sull'asse.

Per individuare il diagramma delle tensioni massime con la profondità (in fucina) occorre conoscere unicamente il valore del carico, non i parametri elastici del mezzo!

Mantenendo inalterata l'intensità di carico e aumentandone l'area di impronta, si osserva che, in percentuale, l'allargamento ~~max~~ del cono di diffusione rispetto al piano campagna è minore a parità di profondità, il che implica che le tensioni si riducono più lentamente con la profondità.

Di fatto, se l'area di carico fosse infinita la distribuzione delle tensioni sarebbe costante lungo l'altezza; ne segue che, a parità di intensità di carico applicato sul suolo, una struttura di fondazione più larga determina un incremento dei cedimenti, essendo i cedimenti pari alla sommatoria degli spostamenti al di sotto del piano fondale e atteso il fatto che una struttura di fondazione più larga coinvolge tensioni a strati più profondi.

⚠ A differenza del caso precedente, si ricorda che in questo caso NON ci si trova in condizioni di espansione laterale impedita (essa è parzialmente impedita), dunque le σ_x risultano dalle equazioni di Moissinesq.

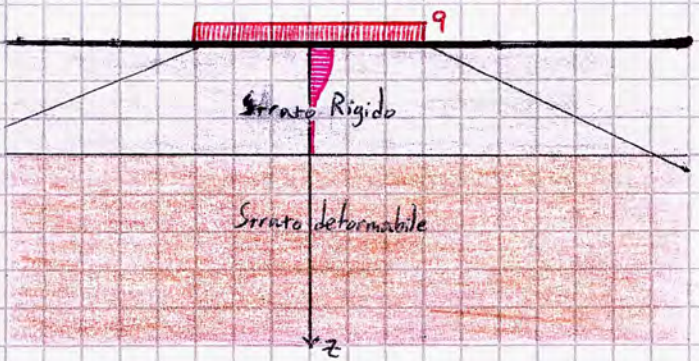
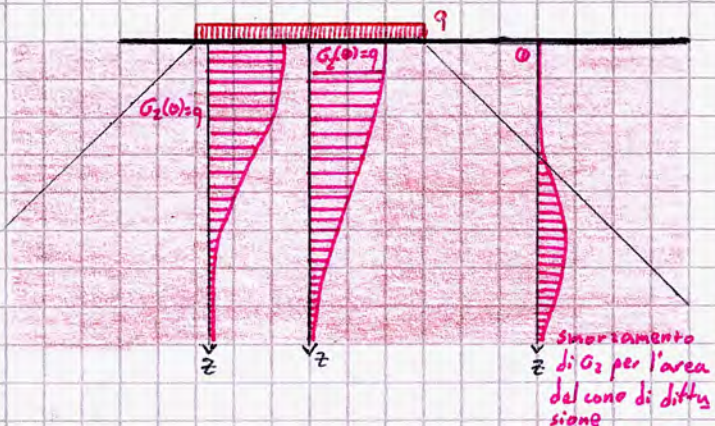
Nel calcolo delle σ_x con le equazioni di Moissinesq, essendo in condizioni di espansione laterale parzialmente impedita si osserva che, per lo stesso ragionamento fatto nella valutazione delle tensioni orizzontali in condizioni di espansione impedita, all'aumentare di ν - a parità di σ_z - aumenta l'espansione laterale di un elementino e quindi le reazioni degli elementi adiacenti. In particolare,

$$\nu = 0 \Rightarrow \sigma_x \text{ identicamente nullo}$$

$$\nu = 0,5 \Rightarrow \sigma_x(0) = q$$

Quando, a parità di intensità, si aumenta l'area di carico, anche σ_z è maggiore a parità di profondità poiché le tensioni si attenuano più lentamente, essendo esse legate all'incremento percentuale della sezione ottenuta dal cono di diffusione: ne segue che un'area di impronta del carico maggiore implica effetti deformativi maggiori in profondità e quindi cedimenti maggiori.

Nel caso di un carico uniforme infinitamente esteso, risulta che σ_z è costante in z e che tutte le verticali sono tra loro uguali, il che implica che valgono le condizioni di espansione laterale impedita; ci si trova in condizioni edometriche.



Valutiamo ora l'andamento delle tensioni verticali con la profondità su assi non assial-simmetrici.

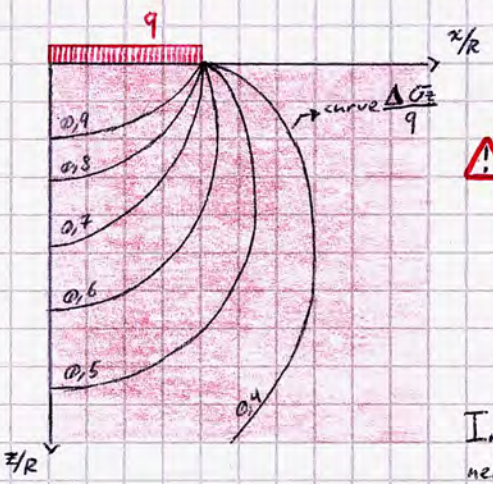
Si osserva evidentemente che possono verificarsi cedimenti anche all'interno dell'area di carico.

L'ipotesi di mezzo omogeneo, pur non essendo realistica, è ritenuta accettabile se la variazione di rigidità negli strati del sottosuolo non è molto accentratata.

In alcuni casi però questa schematizzazione non è ammissibile in virtù di un'elevata variazione di rigidità: supponiamo di avere uno strato rigido (roccia) che sovrasta uno strato deformabile (argilla); come è noto dai corsi di Scienza e Tecnica delle Costruzioni, lo strato più rigido tende ad assorbire una maggior aliquota di sforzo; in questo caso particolare lo strato rigido assorbe la quasi totalità delle tensioni, che si riducono molto rapidamente con la profondità; il cono di diffusione quindi si allarga sensibilmente.

Per ricavare gli stati tensionali totali agenti complessivamente nei punti del semispazio occorre sommare gli sforzi appena valutati alle tensioni litostatiche, "reintegrando" l'effetto del peso proprio nel semispazio.

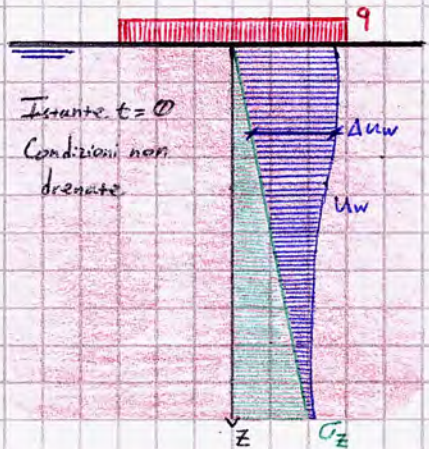
Un metodo più efficace per diagrammare l'andamento delle tensioni dovute a un carico applicato sul semispazio prevede la rappresentazione nel semispazio stesso delle linee a ugual valore di σ_z normalizzata rispetto all'intensità di q , così da poter osservare facilmente gli effetti globali del carico e definire al meglio la zona che risente della perturbazione: la zona perturbata assume la forma di un bulbo, detto **bulbo delle tensioni**, la cui individuazione consente di definire al meglio dove concentrare le indagini preliminari alla realizzazione di una fondazione; il grafico può essere costruito sia per le tensioni principali massime che per le tensioni principali minime (σ_1 e σ_3 , rispettivamente).



I risultati finora ottenuti, ricavati per il carico circolare, sono concettualmente analoghi anche nei calcoli relativi a carichi aventi diversa geometria; cambiano le formule che governano lo stato tensionale nel semispazio.

! In ambito geotecnico - nel quadro della meccanica dei continui - si definiscono più stati tensoriali e quindi più di un tensore delle tensioni (σ_i principio delle tensioni efficaci); le perturbazioni calcolate finora, associandosi in ogni punto all'equilibrio globale dell'elementino, coincidono con una variazione delle tensioni totali nel punto; logicamente, nel caso di terreni privi d'acqua, detta variazione incide direttamente sulle tensioni efficaci.

In presenza d'acqua, le condizioni di drenaggio introducono un'ulteriore discriminante nella determinazione dello stato tensionale in un punto, particolarmente per quanto riguarda i parametri elastici da utilizzare nel calcolo delle tensioni totali (logicamente le condizioni di drenaggio non influiscono sulle σ_z , dipendenti dalla forma del carico, dalla sua intensità e dalla posizione del punto in esame).



- In condizioni non drenate, l'acqua in un primo momento impedisce all'insieme di deformarsi volumetricamente; ne segue che nel calcolo degli stati tensionali totali si assume $\nu = 0,5$;

- In condizioni drenate si considera ν' , proprio dello scheletro solido e certamente minore di $0,5$.

Ciò è dovuto al fatto che, in condizioni non drenate, l'acqua, incompressibile, partecipa nel resistere al carico applicato; nel riequilibrarsi (l'acqua) con le condizioni al contorno, le tensioni orizzontali dovute al carico si riducono ($\nu_0 = 0,5 \rightarrow \nu_t = \nu'$).

Ricordando che in un terreno si verificano cedimenti esclusivamente in presenza di variazioni di tensioni efficaci, per valutare le pressioni interstiziali Δu_w indotte dal carico si ricorre in letteratura geotecnica alle formule di pressione interstiziale.

Richiamando le relazioni dell'equilibrio elastico nello scheletro solido ed il LCEL nella sua forma matriciale per invarianti (v.p. 38), da cui si legge il disaccoppiamento tra effetti volumetrici e cause distorsionali (e viceversa) indotto dall'ipotesi di isotropia (ipotesi non valida nei terreni reali!), si può riscrivere la relazione tenendo conto di un termine di accoppiamento $1/J_1'$ non nullo così da considerare l'anisotropia del comportamento meccanico di un terreno:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_v \\ \Delta \epsilon_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/K' & 1/J_1' \\ 1/J_1' & 1/3G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta p' \\ \Delta q \end{Bmatrix}$$

Considerando un mezzo saturo, poiché in condizioni non drenate le deformazioni volumetriche indotte dal carico sono inizialmente nulle, si ha che:

$$\Delta \epsilon_v = \frac{\Delta p'}{K'} + \frac{1}{J_1'} \Delta q = 0$$

Esprimendo gli incrementi di tensione media efficace come differenza tra incrementi di tensione media totale e di pressione neutra, si ha:

$$\frac{\Delta p - \Delta u_w}{K'} + \frac{1}{J_1'} \Delta q = 0 \implies \Delta u_w = \Delta p + \frac{K'}{J_1'} \Delta q \implies \Delta u_w = \underbrace{\Delta p}_{\text{noto}} + a \underbrace{\Delta q}_{\text{noto (dallo stato tensionale)}}$$

La formula di Atkinson e Brasby, valida per stati tensionali qualsiasi, può essere particolarizzata in condizioni di assial-simmetria (ovvero, ad esempio, in corrispondenza dell'asse centrale di un carico circolare); in assialsimmetria si ha infatti che, esprimendo Δp e Δq in termini di tensioni principali totali:

→ valutato sperimentalmente, consente di conoscere gli incrementi di pressione interstiziale indotti dal carico q punto per punto

$$\Delta p = \frac{\Delta \sigma_1 + 2\Delta \sigma_3}{3}; \quad \Delta q = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3 \quad \text{riscrivendo la relazione di Atkinson e Brasby,}$$

$$\Delta u_w = \frac{\Delta \sigma_1}{3} + \frac{\Delta \sigma_3}{3} + \frac{\Delta \sigma_3}{3} + a \Delta \sigma_1 - a \Delta \sigma_3 = \text{aggiungendo e sottraendo } \frac{\Delta \sigma_3}{3},$$

$$= \frac{\Delta \sigma_1}{3} + \frac{\Delta \sigma_3}{3} + \frac{\Delta \sigma_3}{3} + \frac{\Delta \sigma_3}{3} + a \Delta \sigma_1 - a \Delta \sigma_3 - \frac{\Delta \sigma_3}{3} =$$

$$= \Delta \sigma_3 + \frac{1}{3} (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) + a (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) =$$

$$= \Delta \sigma_3 + \left(\frac{1}{3} + a\right) (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3);$$

$$\Delta u_w = \Delta \sigma_3 + A (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3) \quad \text{Formula di Skempton}$$

→ coefficiente di Skempton

valida solo nell'asse di un carico di area circolare o in prove sperimentali specifiche, condotte in assialsimmetria.

Per mezzi elastici isotropi, $a = 0$
 $A = 1/3$

La formula è stata ricavata nell'ipotesi che il mezzo sia saturo e che la fase liquida e le particelle siano incompressibili rispetto allo scheletro solido, la relazione $\Delta \epsilon_v = 0$ contiene implicitamente l'ipotesi di fluido avente rigidità volumetrica infinita, che quindi assorbe per intero la tensione totale sterica ($\Delta u = \Delta \sigma_3$).

La formula si estende alle condizioni di parziale saturazione introducendo un coefficiente b che esemplifica il fatto che non tutto il Δp viene assorbito dall'acqua (implica anche che il fluido, ovvero l'insieme acqua-aria, è compressibile).

$$\Delta u_w = b (\Delta p + a \Delta q)$$

$$\Delta u_w = B [\Delta \sigma_3 + A (\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)]$$

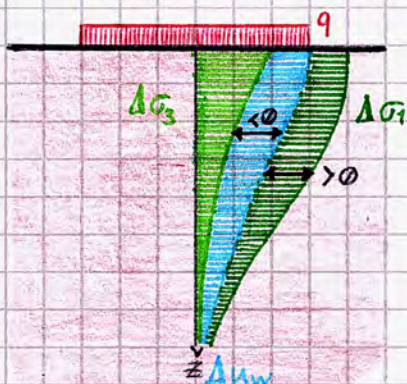
$B = b$ per mezzi elastici isotropi

$$b = \frac{1}{1 + \frac{K'n}{K_f}}$$

$K_f \gg K'$ se il mezzo è saturo
 $\implies b = 1$; altrimenti $b < 1$
e parte dello sterico è assorbito dallo scheletro solido.

I coefficienti $A[a]$ e $B[b]$ in generale assumono valori diversi da quelli ricavati nella teoria dell'elasticità; devono essere determinati sperimentalmente e inseriti nella formulazione analitica determinata in caso di comportamento elastico. Calcolati gli incrementi $\Delta \sigma_{ij}$ delle componenti di tensione totale indotte dal sovraccarico attraverso le soluzioni basate sulla ipotesi di semispazio elastico (derivate assumendo i parametri del mezzo monofase equivalente), è possibile stimare la distribuzione spaziale di sovrappressioni neutre indotte dal sovraccarico. È possibile infine calcolare gli incrementi delle componenti di tensione efficace $\Delta \sigma'_{ij} = \Delta \sigma_{ij} - \Delta u_w$.

Possiamo ora tracciare l'andamento delle Δu_w :



Le Δu_w sono definite dal diagramma costituito dai punti medi tra il diagramma di $\Delta \sigma_3$ e quello di $\Delta \sigma_1$, supponendo $A=0,5$. Infatti:

$$\Delta q = \Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3; \quad \Delta p = \frac{\Delta \sigma_1 + 2\Delta \sigma_3}{3}$$

$$\Delta u_w = \Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)$$

\downarrow
0,5

Con questo esempio, si osserva in particolare che variano le tensioni efficaci:

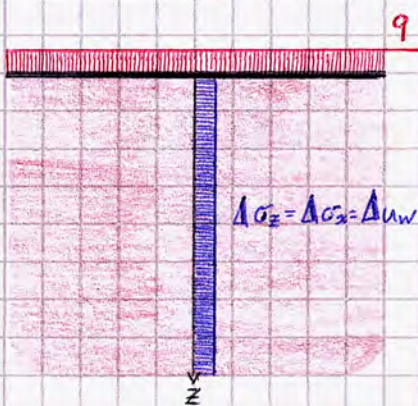
$$\Delta \sigma'_1 = \Delta \sigma'_x = \Delta \sigma_1 - \Delta u_w > 0$$

$$\Delta \sigma'_3 = \Delta \sigma'_z = \Delta \sigma_3 - \Delta u_w < 0$$

Il mezzo subisce quindi dei processi deformativi, in quanto variano sia le tensioni efficaci orizzontali che quelle verticali.

Esempio (caso particolare)

Consideriamo un carico infinitamente esteso e valutiamo come variano gli stati tensionali in condizioni drenate e non drenate.



In condizioni generiche, essendo il carico infinitamente esteso ogni verticale è di simmetria per il sistema; il mezzo quindi non può espandersi lateralmente. Ne segue che

$$\Delta \sigma_x = k_0 \Delta \sigma_z$$

Proprietà dello scheletro solido; poiché $E_x = 0$ è possibile applicarlo anche al mezzo monofase equivalente del terreno: $k_0 = \frac{\nu}{1-\nu}$

In condizioni non drenate, $\nu = 0,5 \Rightarrow k_0 = 1$; ciò implica che $\Delta \sigma_x = \Delta \sigma_z$, o, vero che, in un semispazio in condizioni non drenate soggetto a un carico uniforme infinitamente esteso, lo stato tensionale totale è sferico.

Applicando la formula di Skempton estesa alle condizioni di parziale saturazione, applicabile all'intero semispazio in quanto ogni verticale è in condizioni di assialsimmetria, considerando un mezzo saturo ($B=1$) risulta $\Delta u_w = \Delta \sigma_z = \Delta \sigma_x$. Poiché σ_z è costante nell'approfondirsi, $\Delta \sigma_z$ coincide con l'intensità del carico applicato; risulta che il carico è equilibrato esclusivamente dall'acqua (CONDIZIONE SPECIFICA del carico infinitamente esteso: in un carico di limitata estensione a $t=0$ convergono variano le tensioni efficaci e quindi si determinano processi deformativi). In altre parole, gli incrementi delle componenti di tensione efficace sono nulli e quindi il sovraccarico, in condizioni non drenate, non produce cedimenti. La particolare geometria del problema in sostanza determina l'impossibilità che si sviluppino cedimenti senza che si verifichino variazioni di volume. Poiché tali variazioni a $t=0$ non possono avvenire, il cedimento deve essere nullo; tutto il carico viene assorbito dall'acqua e, conseguentemente, l'incremento di stato tensionale totale è di tipo sferico.

In condizioni drenate, ovvero a $t=\infty$, quando $\Delta u_w = 0$ e la fase liquida si riporta in equilibrio con le condizioni idrauliche al contorno, ovvero si trova nel caso litostatico, il carico q si trasferisce sullo scheletro solido e produce un cedimento regolato dal modulo edometrico E_d . Infatti,

$$\Delta \sigma'_z = \Delta \sigma'_z = q; \quad \Delta \sigma'_x = k_0 \Delta \sigma'_z = \frac{\nu'}{1-\nu'} \Delta \sigma'_z < \Delta \sigma'_z \quad (\text{perché } \nu', \text{ proprio dello scheletro solido, è minore di } 0,5).$$

Nell'applicare un carico su un terreno a grana fine saturo, le condizioni sono inizialmente non drenate; si produce quindi un cedimento iniziale; in fase finale, dissipandosi le sovrappressioni dell'acqua, aumentano le tensioni efficaci e si producono cedimenti finali. In numerosi problemi ingegneristici non è sufficiente considerare i cedimenti iniziali e finali, occorre comprendere piuttosto la loro evoluzione nel tempo: ad esempio, nella realizzazione di un rilevato stradale, essendo il manto costoso e soggetto a rottura in caso di eccessive deformazioni, è utile calcolare il momento in cui i cedimenti si esauriscono e raggiungono l'80-90% del totale; analogo è il calcolo per individuare il momento in cui conviene realizzare tempagni e finiture di un edificio... Diventa rilevante quindi il calcolo del decorso dei cedimenti nel tempo. Richiamando il problema idraulico e quello meccanico,

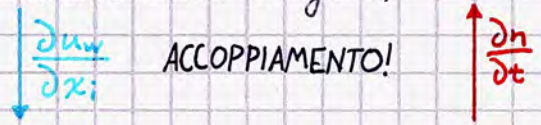
PROBLEMA IDRAULICO
Ip: pressioni dell'acqua identificate in tutto nel terreno

Equazione di continuità della fase liquida: $-\text{div}(p_w \vec{v}) = p_w n \frac{\partial S_r}{\partial t} + n S_r \frac{\partial p_w}{\partial t} + S_r p_w \frac{\partial n}{\partial t}$ tre incognite di velocità + S_r, p, n

Legge di Darcy: $v_{x_i} = -k_{x_i} x_i \frac{\partial h}{\partial x_i}$ tre equazioni con unica incognita h

Equazione di stato dell'acqua: $p_w = p_0 + B \cdot u_w$

Curva caratteristica: $S_r = f(u_w)$



Se $n = \text{cost.}$ (sistema rigido), il sistema di equazioni è determinato, altrimenti bisogna introdurre il problema meccanico per definire la legge di deformazione del mezzo nel tempo. Se il mezzo si deforma, per definire $\frac{\partial n}{\partial t}$ occorre richiamare le equazioni del problema meccanico, a loro volta indeterminate nelle variazioni spaziali di pressione interstiziale $\frac{\partial u_w}{\partial x_i}$, che implicano forze agenti sullo scheletro solido.

PROBLEMA MECCANICO

Equazioni indefinite dell'equilibrio: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = X_i - \frac{\partial u_w}{\partial x_i}$

Legame costitutivo dello scheletro solido: $d \sigma_{ij} = C_{ijkl} d \epsilon_{kl}$

Equazione di congruenza: $d \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{d u_i}{d x_j} + \frac{d u_j}{d x_i} \right)$

Prima dell'elaborazione di strumenti di modellazione agli elementi finiti, la soluzione al problema di consolidazione è stata ottenuta in forma chiusa solo con l'adozione di modelli semplificati, utilizzati ancora oggi per sviluppare una sensibilità al problema e per un controllo della soluzione restituita dal codice di calcolo. Tra queste semplificazioni, particolarmente importante è lo studio della teoria monodimensionale della consolidazione di Terzaghi, che semplifica e riduce il problema fino ad una forma risolvibile in forma chiusa, facendo valere le seguenti ipotesi semplificative (che consentono di trasformare il problema in un'equazione, con soluzioni direttamente applicabili in molti casi pratici):

- Mezzo omogeneo e saturo: $S_r = 1 = \text{cost.}$, non è funzione di u_w , $\frac{\partial S_r}{\partial t} = 0$;
- Acqua e particelle solide incompressibili: $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$, p determinata;
- Flusso e deformazioni monodimensionali in direzione z : $(v_x = v_y = 0)$
 - derivate spaziali:*
 - Tra le derivate della velocità, l'unica non nulla è $-\frac{\partial v_z}{\partial z}$
 - Nella legge di Darcy, l'unica relazione non identicamente nulla è $v_z = k_{zz} \frac{\partial h}{\partial z}$
 - L'equilibrio meccanico diventa di banale risoluzione (come nell'esempio di carico infinitamente esteso).
- Comportamento elastico lineare dello scheletro solido.

In un problema tridimensionale, quando il mezzo si deforma si ridistribuiscono anche le componenti dello stato tensionale totale; in un problema monodimensionale ciò non è possibile.

Nell'ipotesi di mezzo saturo e fase liquida incompressibile, l'equazione di continuità diventa:

$$-\text{div}(\vec{v}) = \frac{\partial n}{\partial t}$$

Per l'ipotesi di flusso monodirezionale in z si ha: $-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial t}$

È vale inoltre $\sigma_z = q$, $\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$, $\epsilon_x = \epsilon_y = 0$
↳ lo stato tensionale totale non cambia nel tempo
↳ problema monodimensionale condizioni EDOMETRICHE

Risulta quindi che $-\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial n}{\partial t}$ → ricavabile dalla legge (elastica lineare) del mezzo
 → ricavabile dalla legge di Darcy in z

È possibile quindi ricavare esplicitamente l'equazione:

$$v_z = k \frac{\partial h}{\partial z}; \quad h = z + \frac{u_w}{\gamma_w}$$

$$v_z = -k \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_w}{\gamma_w} \right) \Rightarrow -\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{k}{\gamma_w} = \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}$$

scomponibile in:

- una parte u_w in equilibrio con le condizioni idrauliche al contorno; la sua variazione in z è nulla poiché in regime idrostatico la quota piezometrica è costante.
- una parte Δu_w in eccesso rispetto alle condizioni al contorno, indicata per semplicità con u_w .

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial e}{1+e} \cdot \frac{1}{\partial t}$$

ricordiamo che $\frac{1}{1+e} = \frac{V_{secco}}{V_{totale}}$, che si può considerare costante (ipotesi di piccoli spostamenti).

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{E_{ed}} \cdot \frac{\partial u_w}{\partial t}$$

essendo in condizioni edometriche, $\partial \epsilon_z = \frac{1}{E_{ed}} \partial \sigma'_z$

$\sigma'_z = \sigma_z - u_w$
MA $\frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} = 0$ per ipotesi!

L'equazione reggente della consolidazione monodimensionale è quindi:

$$\frac{k E_{ed}}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = \frac{\partial u_w}{\partial t};$$

$$c_v \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} = \frac{\partial u_w}{\partial t} \quad \text{con } c_v = \frac{k E_{ed}}{\gamma_w} \quad \text{coefficiente di consolidazione}$$

Dalla relazione si osserva che, in un punto qualunque, la variazione temporale della u_w , che si dissipa con una certa velocità, dipende dal gradiente spaziale della pressione nell'intorno del punto, è proporzionale ad alcune caratteristiche del mezzo:

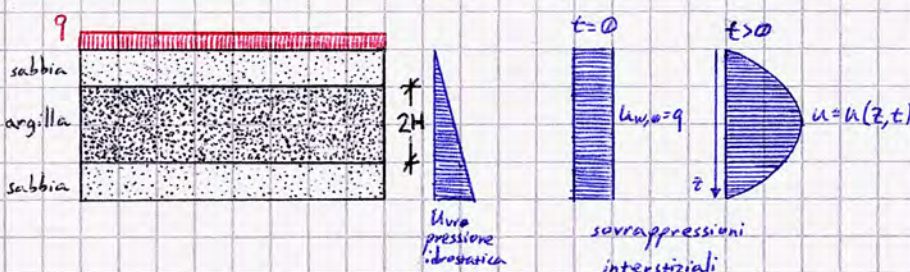
- k : più il mezzo è permeabile, più è veloce il processo;
- E_{ed} : più il mezzo è rigido, più è veloce il processo: la rigidità infatti controlla il volume d'acqua necessario da espellere per raggiungere l'equilibrio, dunque più il mezzo è rigido minore è il volume d'acqua da espellere. Uno scheletro solido infinitamente rigido infatti si equilibra istantaneamente!

Terraghi introduce come condizioni al contorno delle condizioni in termini di u_w o la sua derivata (velocità); oltre alle condizioni al contorno (spaziali $\rightarrow u_w$ e velocità) occorre definire rispetto alla derivata temporale delle condizioni iniziali:

- Condizioni iniziali: coincidono con quelle del problema del carico infinitamente esteso che determinano il flusso: a $t=0$, tutto il carico è assorbito dall'acqua.
- Condizioni al contorno: assumiamo delle condizioni di drenaggio al contorno.

Il caso più semplice è quello caratterizzato da una isocrona iniziale costante con la profondità, con possibilità di drenaggio sia dalla base che dal tetto dello strato soggetto a consolidazione. Assumiamo che il dominio deformabile uniaxialmente abbia spessore [potenza] $2H$ e che sia drenante da ambo i lati (contorni drenanti); ne segue che sui bordi del dominio si ha $u_w = 0$ (con u_w incremento di pressione rispetto a u_w).

Ne segue che H è l'altezza di drenaggio, ovvero la massima distanza di drenaggio percorsa dalla particella d'acqua. La soluzione al problema di consolidamento può essere ottenuta trasformando l'equazione tramite variabili adimensionali, riferendo la z al semispessore del banco e il tempo t a c_v/H^2 .



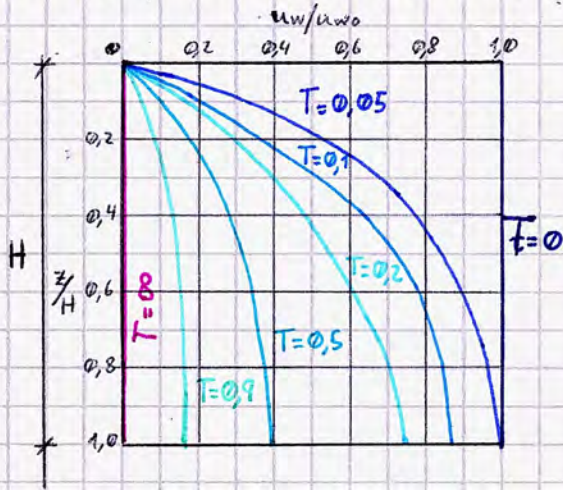
Definite quindi:

$$Z = \frac{z}{H} \quad ; \quad T = \frac{C_v \cdot t}{H^2}$$

L'equazione diventa $\frac{\partial^2 u_w}{\partial Z^2} = \frac{\partial u_w}{\partial T}$, la cui soluzione analitica è esprimibile nella forma:

$$u(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2u_0}{M} \sin(M \cdot Z) \cdot e^{-M^2 T}$$

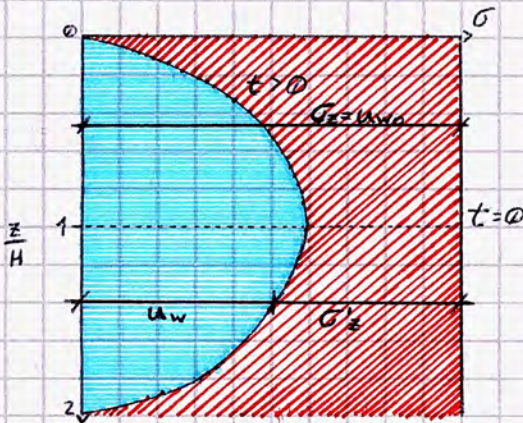
Le soluzioni possono essere rappresentate in un piano avente per ascisse u_w/u_{w0} e per ordinate z/H ; per $T=0$ si ha $u_w/u_{w0}=1$ perché tutto il carico è assorbito dall'acqua; nel tempo, le isocrone di sovrappressione interstiziale si riducono fino al completo annullamento, per $T=\infty$ (l'equilibrio avviene infatti all'infinito).



Il diagramma è facilmente interpretabile fisicamente considerando u_w in ascissa e z in ordinata; a metà spessore del banco ($z=H$), le isocrone di consolidazione hanno tangente verticale, implicando che $\frac{\partial u_w}{\partial t} \Big|_{z=H} = 0$, ovvero $v_z = 0$; ne segue che il piano di mezzera del banco si comporta da superficie impermeabile (sotto di esso le particelle scendono, sopra salgono). Questo risultato si può estendere a un banco con singolo contorno drenante supponendo che l'altezza dello strato sia propria pari ad H .

Per rappresentare in maniera ancor più efficace e pratica per le applicazioni ingegneristiche i risultati della consolidazione occorre definire il grado di consolidazione, ovvero lo stadio raggiunto dal processo di consolidazione in un dato istante. Per definirlo esistono due metodi differenti, che per un mezzo elastico lineare pervengono allo stesso risultato:

1. Rispetto a $t=0$, all'istante generico $t > 0$ si registra una riduzione delle sovrappressioni interstiziali; il diagramma in rosso "superiore" rappresenta le σ'_z (ricordiamo che $\frac{\partial \sigma'_z}{\partial t} = 0$), si può quindi rappresentare il processo in base all'area del diagramma delle tensioni efficaci ("quanto si è scoperto")



$$\text{Area in rosso: } \int_0^{2H} (\sigma'_z - u_w) dz = \int_0^{2H} (u_{w0} - u_w) dz = \int_0^{2H} u_{w0} dz - \int_0^{2H} u_w dz$$

$$\text{Area del rettangolo: } 2H \cdot u_{w0}$$

$$\text{Grado di consolidazione} = \frac{\text{Area rossa}}{\text{Area rettangolo}} = \frac{\int_0^{2H} u_{w0} dz - \int_0^{2H} u_w dz}{2H u_{w0}} = \frac{2H u_{w0} - \int_0^{2H} u_w dz}{2H u_{w0}} = 1 - \frac{\int_0^{2H} u_w dz}{2H u_{w0}}$$

2. Si può calcolare il cedimento w all'istante t conseguente ad un incremento di tensioni efficaci, riferito ad un cedimento finale

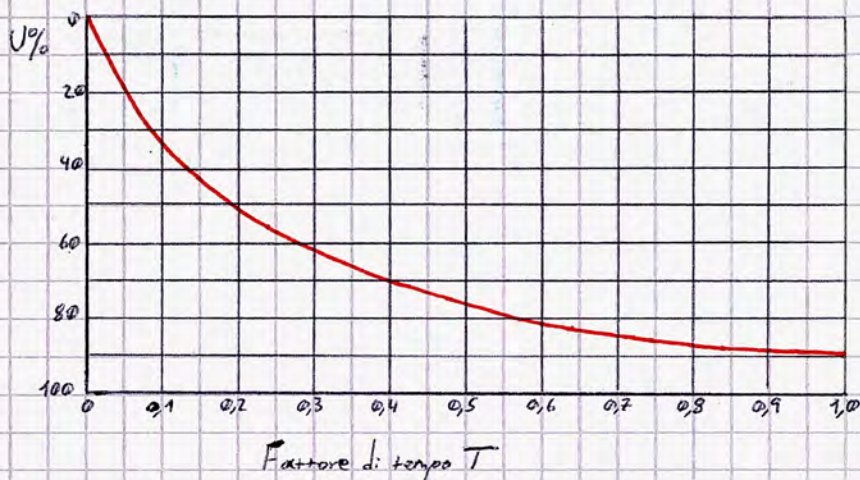
$$w_c: \quad w(t) = \int_0^{2H} \epsilon_z dz = \int_0^{2H} \frac{\sigma'_z}{E_{ed}} dz = \frac{1}{E_{ed}} \int_0^{2H} (\sigma'_z - u_w) dz = \frac{u_{w0}}{E_{ed}} \int_0^{2H} dz - \frac{1}{E_{ed}} \int_0^{2H} u_w dz = \frac{u_{w0} \cdot 2H}{E_{ed}} - \frac{1}{E_{ed}} \int_0^{2H} u_w dz$$

$$w_c = \int_0^{2H} \epsilon_{z,tin} dz = \int_0^{2H} \frac{\sigma'_{z,tin}}{E_{ed}} dz = \frac{1}{E_{ed}} \int_0^{2H} (\sigma'_z - u_{w,tin}) dz = \frac{1}{E_{ed}} \int_0^{2H} u_{w0} dz = \frac{u_{w0} \cdot 2H}{E_{ed}}$$

$$\frac{w(t)}{w_c} = 1 - \frac{\int_0^{2H} u_w dz}{2H u_{w0}}$$

coincidente con il risultato del primo metodo in regime elastico lineare

In riferimento al grado di consolidazione, la soluzione dell'equazione di Terzaghi, in funzione del fattore di tempo T e con il grado suddetto espresso in termini di pressioni neutre o - ancor meglio - di cedimenti, può essere rappresentata in un diagramma particolarmente utile:



$U\%$ è in questo caso indicativo anche del cedimento di consolidazione riferito a quello finale.

$T = \frac{C_v \cdot t}{H^2}$ tempo adimensionalizzato rispetto alle proprietà geometriche e del materiale preso in esame. Per calcolare il tempo effettivo, $t = TH^2/C_v$.

H distanza massima di drenaggio, distanza massima che si ha per raggiungere un contorno drenante.

Essendo possibile calcolare a monte l'entità del cedimento finale, dal grafico è possibile com...

prendere in quanto tempo si raggiunge una certa aliquota percentuale del cedimento totale.

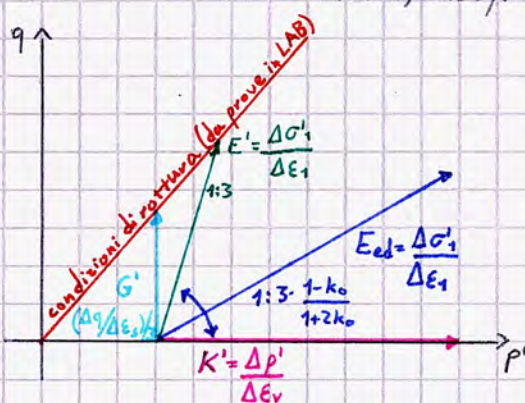
Prove meccaniche di laboratorio sui terreni

Sono prove utili per determinare e caratterizzare diverse proprietà dei terreni, tra cui:

- Deformabilità;
- Resistenza a rottura;
- Velocità con cui avviene il processo di riequilibrio delle sovrappressioni nel sottosuolo.

Le prove meccaniche si possono dividere in due macrocategorie:

- Determinazione del regime di sforzi di taglio fino alla rottura (prove uniassiali, consentono di definire la deformabilità nello specifico percorso di carico oltre alla resistenza a rottura);
- Prova di compressibilità: non necessariamente triassiale, sollecita il comportamento volumetrico del materiale per valutarne la compressibilità, valutando la deformabilità del terreno conseguente a semplici variazioni di volume, senza portare il provino a rottura.



Compressibilità

Per testare la compressibilità si utilizzano due tipologie di prove:

- Prova di compressibilità sferica: si applica uno stato tensionale sferico, la tensione deviatorica è nulla e il percorso di carico è orizzontale;
- Prova di compressibilità edometrica: si testa un provino di terreno in condizioni edometriche (se compresso, l'espansione laterale è impedita), che segue quindi un percorso di carico con inclinazione dipendente dal coefficiente di spinta a riposo k_0 , proprietà del materiale che deve essere definita e che varia tra 1 (per $\nu = 0,5$; coincide con uno sferico) e, per $\nu = 0,0$ (il percorso di carichi coincide con quello di un provino a espansione laterale libera, pur essendo confinato, con un'inclinazione di 1:3). Logicamente la condizione $\nu = 0$ non è fisicamente raggiungibile, ne segue che in una prova edometrica ci si allontana sempre progressivamente dalla rottura. Dalla prova edometrica è inoltre possibile ricavare E_{ed} .

con inclinazione dipendente dal coefficiente di spinta a riposo k_0 , proprietà del materiale che deve essere definita e che varia tra 1 (per $\nu = 0,5$; coincide con uno sferico) e, per $\nu = 0,0$ (il percorso di carichi coincide con quello di un provino a espansione laterale libera, pur essendo confinato, con un'inclinazione di 1:3). Logicamente la condizione $\nu = 0$ non è fisicamente raggiungibile, ne segue che in una prova edometrica ci si allontana sempre progressivamente dalla rottura. Dalla prova edometrica è inoltre possibile ricavare E_{ed} .

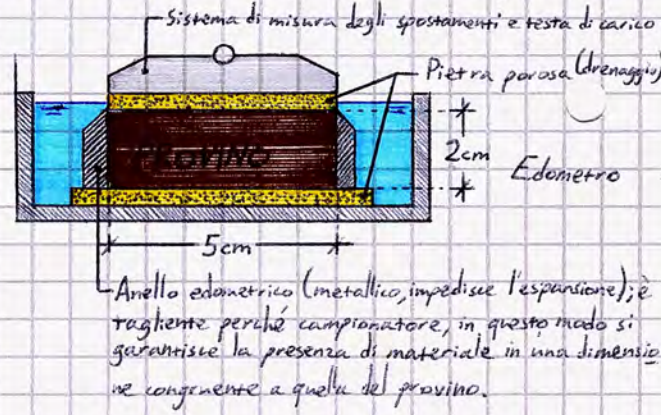
Dalla teoria monodimensionale della consolidazione di Terzaghi risulta che, essendo la prova edometrica realizzata in condizioni di flusso e tensioni monodimensionali, è possibile valutare tramite la prova il C_v , che definisce la velocità di riequilibrio delle sovrappressioni nel sottosuolo.

La prova edometrica simula le condizioni litostatiche; ne segue che il prelievo di un campione di sottosuolo in condizioni indisturbate consente di ricostruirne la storia di carico.

Il provino è tozzo, di altezza ridotta: l'altezza di 2cm è necessaria per preservare delle σ_z pressappoco costanti e pari al carico unitario impartito; poiché si generano degli sforzi di taglio tra provino ed anello edometrico (lettura collaterale da minimizzare: il materiale metallico dell'anello contribuisce in tal senso perché, favorendo lo scorrimento, riduce le T), il provino è particolarmente largo rispetto all'altezza, così da garantire uniformità in gran parte della sezione e rendere lo effetto delle T una condizione di bordo.

Il rapporto di $2:5$ è dovuto, oltre ad esigenze pratiche di campionamento e applicazione del carico standardizzate, ad un'altra condizione: essendo il provino saturo, ad ogni incremento di carico bisogna attendere che il processo di consolidazione si esaurisca (il provino è saturo e di ridotta altezza; si può assumere che la pressione interstiziale sia nulla sul contorno); poiché la durata del processo dipende dal quadrato della distanza massima di drenaggio (raddoppiare lo spessore implicherebbe una quadruplicazione dei tempi di attesa) si tende a minimizzare lo spessore del provino.

Nella prova, i carichi vengono incrementati "a step" (applico il carico, attendo l'esaurirsi della consolidazione e poi applico l'incremento di carico) secondo una **progressione geometrica** - in cui il carico viene sempre raddoppiato - in quanto in una prova edometrica, allontanandosi dalle condizioni di rottura, l'aumento di carico corrisponde ad un aumento di rigidità del provino: un incremento di carico fissato porterebbe con l'aumento di rigidità a non consentire la lettura degli spostamenti, che per essere dello stesso ordine di grandezza ad ogni misura richiedono un raddoppiamento del carico.



In condizioni edometriche, $E_z \cong E_v$; essendo l'applicazione del carico istantanea il provino si trova inizialmente in condizioni non drenate. Ne segue che il provino a $t=0$ non può sviluppare deformazioni volumetriche, coincidenti con $\Delta E_z = 0$. Mancando effetti deformativi, non variano le tensioni efficaci: tutto il carico è assorbito dall'acqua.

Poiché l'acqua assorbe unicamente lo stato tensionale sterico, in questa fase iniziale lo stato tensionale totale è sterico, implicando:

$$\Delta \sigma_x = \Delta \sigma_y = \Delta \sigma_z = \Delta \text{carico applicato}$$

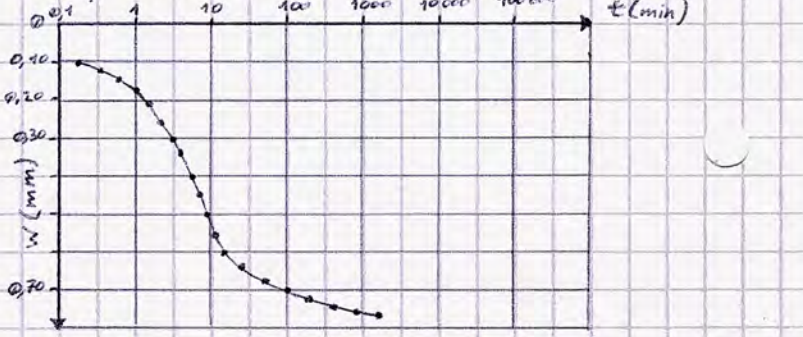
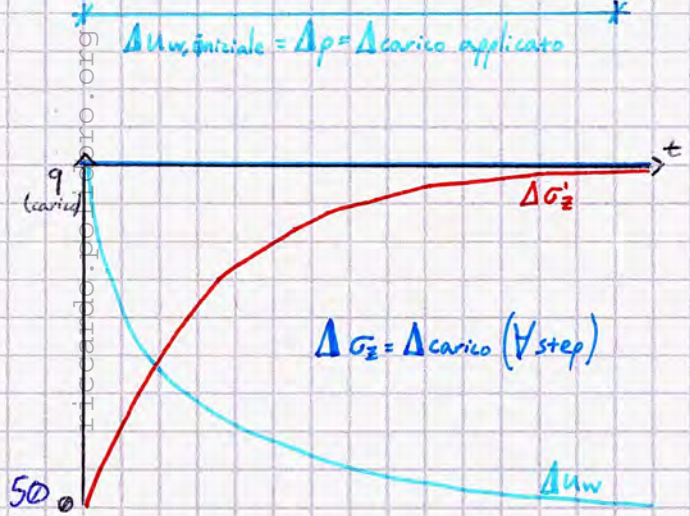
Ne segue che il percorso di carico è inizialmente orizzontale nel piano $p-q$.



Nel processo di consolidazione, le sovrappressioni interstiziali Δu_w si riducono e lo scheletro solido inizia a deformarsi (variano le tensioni efficaci); poiché la tensione deviatorica è tutta assorbita dallo scheletro solido, $q \cong q'$.

Per ciascun incremento di carico condotta nella prova si registra la curva cedimenti-tempo; anche in questo caso la **progressione delle letture è geometrica**: a $t=0$ si registrano grossi incrementi di tensioni efficaci (e riduzioni delle sovrappressioni interstiziali, che però NON si misurano), di intensità progressivamente più ridotta.

La rappresentazione dei dati sui cedimenti in funzione del tempo viene presentata alla scala naturale (accentuata all'inizio, la curva tende ad avere incrementi sempre più ridotti nel tempo) o, per le comuni applicazioni ingegneristiche, alla scala semilogaritmica (logaritmica solo nel tempo), che distorce la forma naturale ma è utile per l'interpretazione dei dati.



La curva sperimentale della prova edometrica presenta delle incongruenze rispetto a quella risultante dalla teoria della consolidazione di Terzaghi:

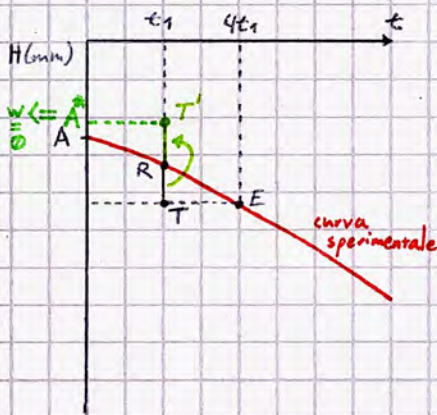
- Il cedimento all'istante $t=0$ potrebbe non essere nullo per motivi sub-sperimentali (perché la superficie del provino inizialmente non è piana o per la deformabilità della strumentazione), non misurabile direttamente perché la prima misura si registra di norma a $t=8s$ (il $t=0$ non può essere rappresentato in scala logaritmica: $\log 0 = -\infty$);
- Alla fine della consolidazione e raggiunto il riequilibrio, i cedimenti dovrebbero esaurirsi, ma in realtà nascono ulteriori cedimenti nel tempo - a carico efficace costante - detti cedimenti di consolidazione di creep (cedimenti di consolidazione secondari):

Per eliminare il cedimento iniziale si parte dall'osservazione che la curva teorica della consolidazione è approssimabile nel suo primo tratto con una curva di uguaglianze:

$$U = \sqrt{\frac{4T}{\pi L}}$$

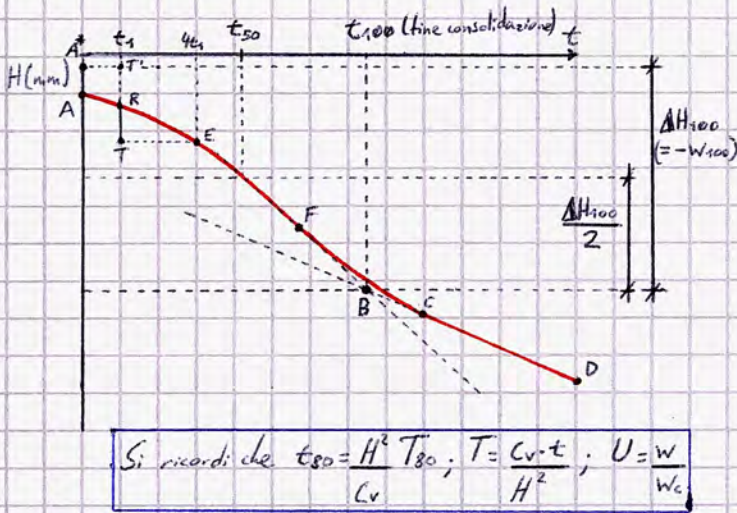
Nella fase iniziale, quadruplicando i tempi raddoppia U (e quindi il cedimento); ne segue che, definiti T_1 e $T_2 = 4T_1$, si può imporre che il cedimento in questa fase debba raddoppiarsi:

Per la condizione appena imposta, nel grafico sarà sufficiente ribaltare il segmento R-T per individuare il punto A, effettiva origine dei cedimenti, depurata del cedimento iniziale.



Per eliminare i cedimenti di creep si segue una procedura grafica, considerando i cedimenti di creep associati al tratto lineare finale della curva in scala semilogaritmica: prolungando il tratto e intersecandolo con la tangente nel punto di flesso si individua il punto B, punto in cui $\Delta u_w = 0$ e si è raggiunta la fine della consolidazione; eliminando i cedimenti successivi si è certi di aver rimosso dalla valutazione i cedimenti di creep.

I due punti A* e B così identificati definiscono l'accorciamento ΔH_{100} (cui si associa il t_{50}), negativo, opposto al cedimento complessivo W_{100} dovuta alla consolidazione.



Si ricordi che $t_{50} = \frac{H^2}{C_v} T_{50}$; $T = \frac{C_v \cdot t}{H^2}$; $U = \frac{w}{w_c}$

Dalla prova edometrica si ricavano diversi parametri; particolarmente utile ai fini applicativi è la determinazione del C_v :

Sapendo che $U = f(T)$, soluzione teorica del problema di Terzaghi dipendente da variabili adimensionalizzate rispetto alle caratteristiche geometriche del problema, introducendo le variabili geometriche proprie della prova è possibile trasformare la relazione di Terzaghi in una del tipo:

$$U = f(T) \iff w = f(t) \text{ (sperimentale)}$$

$$w = U \cdot \frac{H_{100}}{w_c}$$

$$t = \frac{H^2}{C_v} \cdot T$$

incognito, si ricava per tentativi finché la curva teorica non si sovrappone a quella sperimentale

Poiché un'effettiva sovrapposizione della curva teorica con quella sperimentale non è possibile, si impone nel calcolo di C_v la coincidenza delle due curve per $U=50\%$, ovvero:

$$C_v = C_{v50} = \frac{T_{50} \cdot H^2}{t_{50}}$$

⚠ Il calcolo del C_v è legato sempre e solo al semispessore del provino della prova edometrica (attenzione nei problemi relativi a banchi di terreno)

Completata la prova, si può definire il legame tra sforzi efficaci e deformazioni verticali in condizioni edometriche del provino per ciascun incremento di carico:

$$\Delta \epsilon_{zL} = \frac{\Delta w_L}{H_0} = \frac{-\Delta H_{100}(L)}{H_0}$$

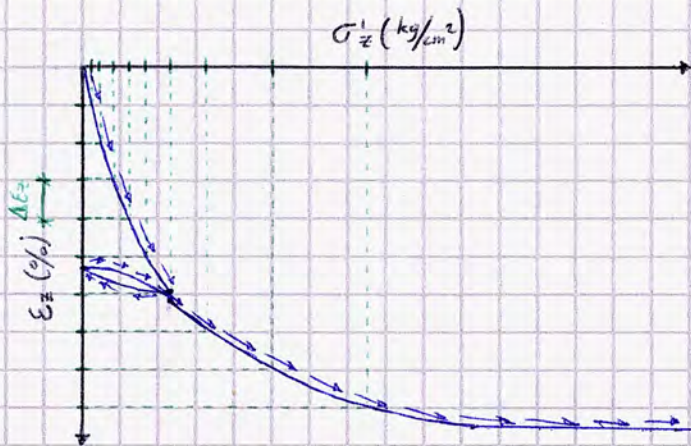
riccardo.polidoro.org

Volendo definire la deformazione raggiunta allo step i -mo di carico,

$$\epsilon_{zi} = \sum_1^i \Delta \epsilon_{zi} = \sum_1^i \frac{\Delta W_i L}{H_0} = \sum_1^i -\frac{\Delta H_{100}(i)}{H_0}$$

Allo step i -mo si associa anche il livello di tensione verticale raggiunta, coincidente con le tensioni efficaci applicate sul provino; è così possibile costruire la curva sforzi-deformazioni, rappresentabile in due modi:

- Diagramma tensioni verticali efficaci - deformazioni verticali



Si osserva che il materiale ha:

- Comportamento a rigidità crescente: la curva è concava verso l'asse delle tensioni, a incrementi costanti di $\Delta \sigma$ coincidono incrementi progressivamente minori di $\Delta \epsilon$.
- Comportamento non lineare;
- Comportamento non elastico e leggermente isteretico nel processo di scarico-ricarico;
- Il raggiungimento nel ricarico del livello di tensione precedente allo scarico porta nuovamente il materiale a seguire il trend precedente, come se conservasse memoria del massimo valore di tensione raggiunta nella sua storia.

Nella pratica ingegneristica si preferisce rappresentare la curva tensioni verticali efficaci - indice dei vuoti: in condizioni di espansione laterale impedita, $\epsilon_z \equiv \epsilon_v$, il che implica che la variazione dell'indice dei vuoti (che si riduce all'aumentare delle tensioni efficaci) è direttamente proporzionale a ϵ_z .

Per quantificare l'indice dei vuoti nel corso della prova edometrica, si ricorre alla seguente relazione, ricavata immaginando (nelle ipotesi di mezzo saturo) di accoppiare il volume della fase liquida (in questo caso pari al volume dei vuoti V_v , per ipotesi) e il volume della fase solida V_s :

$$\Delta \epsilon_z = \frac{-\Delta e}{1+e}$$



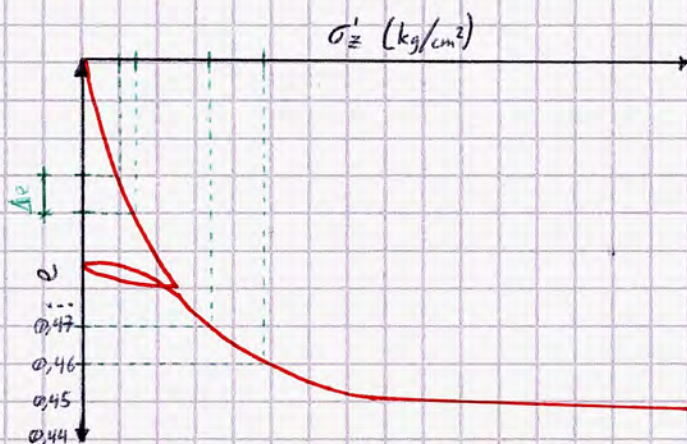
$$n = \frac{e}{1+e}$$

Imponendo $V_s = 1$, si ha che $V_v = e$ (essendo $e = V_v/V_s$), da cui il volume totale $V_{tot} = 1+e$.

Ne risulta che:

$$\epsilon_v = \frac{\Delta V}{V_{tot}} = \frac{-\Delta e}{1+e}; \text{ essendo } \epsilon_v \equiv \epsilon_z \text{ per ipotesi,}$$

- Diagramma tensioni verticali efficaci - indice dei vuoti



Valgono le stesse ipotesi del caso precedente; ad ogni step di carico è possibile aggiornare l'indice dei vuoti attraverso le relazioni:

$$\frac{-\Delta e}{1+e_{iniz.}} = \Delta \epsilon_v = \Delta \epsilon_z = -\frac{\Delta H_{100}}{H_0} \quad e = e_{iniz.} + \Delta e$$

Partendo da $e_{iniziale}$, misurato prima della prova, è possibile determinare e rappresentare l'indice dei vuoti nel corso della prova e rappresentarlo in funzione della tensione verticale efficace.

Modellazione matematica del modello

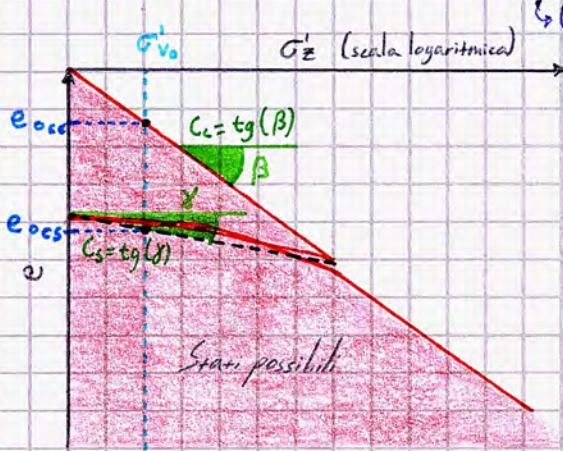
Se le tensioni vengono rappresentate in scala logaritmica, il comportamento del materiale sia in fase di primo carico che in fase di scarico-ricarico si linearizza, rendendo possibile una schematizzazione matematica del comportamento del materiale definendo delle rette passanti per un punto e con pendenza nota.

• Retta di primo carico: $e = e_{o_{cc}} = C_c \cdot \log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}$

utilizzando come riferimento lo stesso valore di σ'_{v0} , si può scrivere la retta di scarico-ricarico come segue.

• Retta di scarico-ricarico: $e = e_{o_{cs}} - C_s \log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}$

cambia il punto di riferimento e la pendenza è minore; si trascura l'isteresi.



La retta di primo carico si associa ai massimi sforzi vissuti dal provino nella sua storia di carico, è **unica** e **univoca**.

• Le rette di scarico-ricarico sono infinite, in genere tra loro **parallele**.

Da queste due equazioni è possibile ricavare il modulo edometrico E_{ed} matematicamente: infatti, sapendo che

$$e = e_o - C_x \log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}$$

→ a seconda delle condizioni in cui ci si trova, ci si riferisce a C_c o a C_s .

⚠ Rispetto a questo tipo di compressione, la linea inclinata di C_c è una **linea di stato**, che divide gli stati possibili (a sinistra) da quelli impossibili da raggiungere in questa conformazione (a destra e in alto)

Passando da \log_{10} a \ln effettuando un cambio di base,

$$\log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}} = \ln \left(\frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}} \right) \cdot \frac{1}{\ln 10} \rightarrow 2,302$$

Da cui risulta: $e = e_o - \frac{C_x}{\ln 10} \ln \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}$

differenziando la relazione,

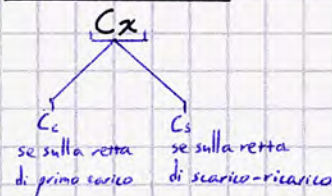
$$de = - \frac{C_x}{2,302} \frac{\sigma'_{v0}}{\sigma'_v} \cdot \frac{d\sigma'_v}{\sigma'_{v0}} = - \frac{C_x}{2,302} \frac{d\sigma'_v}{\sigma'_v}$$

Sapendo che $dE_z = -de / (1+e_{iniz})$ (ΔE_z in termini infinitesimali)

$$\Downarrow$$

$$dE_z = -de / (1+e_{iniz}) = \frac{1}{1+e_{iniz}} \cdot \left(\frac{C_x}{2,302} \cdot \frac{d\sigma'_v}{\sigma'_v} \right);$$

$$\frac{dE_z}{d\sigma'_v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{E_{ed}} = \frac{1}{1+e_{iniz}} \cdot \frac{C_x}{2,302} \cdot \frac{1}{\sigma'_v} \Rightarrow E_{ed} = \frac{(1+e_{iniz}) \cdot 2,302 \cdot C_x}{\sigma'_v}$$



Osservazione: C_c e C_s sono proprietà intrinseche del materiale, mentre E_{ed} è una proprietà di stato: aumenta all'aumentare della tensione verticale efficace!

È stato finora caratterizzato il comportamento relativo a un provino privo di una storia progressiva di carico (provino costruito in laboratorio); per quanto riguarda un provino naturale, estratto a una certa profondità nel sottosuolo e che ha vissuto una storia geologica e di carico; il campione potrebbe aver subito un processo di carico (sedimentazione) e scarico (erosione), e non si è certi se esso si trova sulla linea di primo carico, in totale scarico o in un punto intermedio della linea di ricarico; con la prova edometrica si può comprendere la storia di carico e tentare di ricostruirla.

Lo stato tensionale del campione in sito si può esprimere in termini di p' e q :

$$p' = \frac{1+2k_0}{3} \frac{\sigma'_z}{\gamma' \cdot z}$$

$$q = (1-k_0) \gamma' \cdot z$$

perché $\sigma'_x = \sigma'_y = k_0 \sigma'_z$

Quando il provino è campionato, si annullano al contorno del campione le componenti dello stato tensionale totale; ne segue che le variazioni di tensione media totale, tensione deviatorica e pressione neutra si ottengono dai

$$\Delta p = \frac{p_{fin}}{\phi} - p_{iniz} = -(p'_{iniz} + u_w,_{iniz}) = - \left(\frac{1+2k_0}{3} \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z \right)$$

$$\Delta q = \frac{q_{fin}}{\phi} - q_{iniz} = -(1-k_0) \gamma' \cdot z$$

Le Δu_w indotte risultano dalla formula di Atkinson e Bresby:

$$\Delta u_w = \Delta p + a \Delta q = - \left(\frac{1+2k_0}{3} \cdot \gamma' \cdot z + \gamma_w \cdot z \right) - a (1-k_0) \gamma' \cdot z \quad \text{pressioni interstiziali indotte dal campionamento}$$

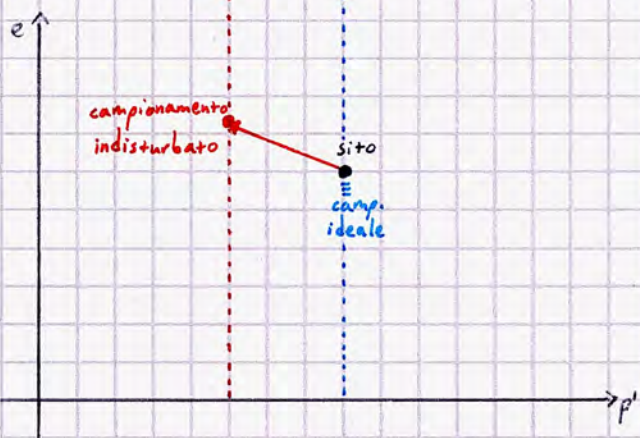
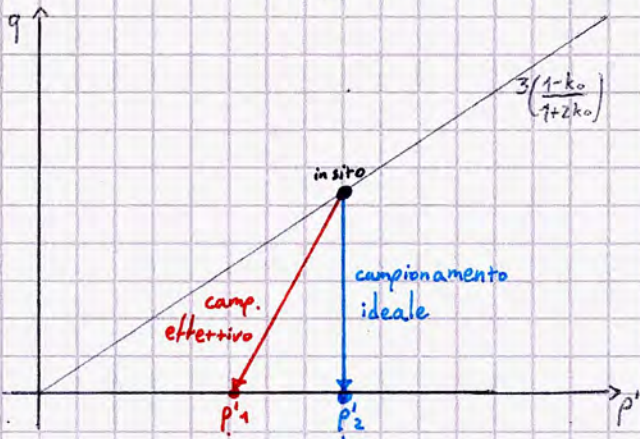
La pressione agente nel provino u_w sarà quindi pari a:

$$u_w = \gamma_w \cdot z - \Delta u_w = - \left(\frac{1+2k_0}{3} + \frac{a(1-k_0)}{3} \right) \gamma' \cdot z$$

il termine è in genere trascurabile: in generale la u_w residua è pari alla tensione efficace media in sito p'_i

pressione negativa residua nel provino, garantisce che il provino "resta insieme" ed è quindi indisturbato.

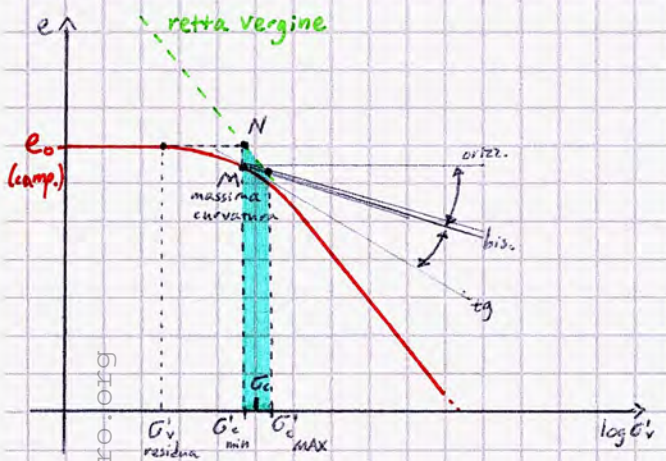
Ciò implica la conservazione dell'indice dei vuoti; rispetto al campionamento ideale in realtà la tensione efficace media è leggermente inferiore, implicando un leggero aumento dell'indice dei vuoti nelle sue condizioni naturali. Essendo le tensioni totali nulle, ciò implica che la pressione interstiziale media è anch'essa quasi uguale al p' allo stato naturale.



Nell'edometro, come visto, è presente acqua; ne segue che inizialmente il provino, se soggetto a pressione interstiziale nulla, tenderebbe a gonfiarsi in virtù della assenza di carico iniziale, puntando a riportare p' a 0 e incrementando l'indice dei vuoti.

Per questo motivo nei primi step della prova si applica un carico per opporsi al rigonfiamento, incrementando le tensioni totali attraverso l'applicazione di un carico uniforme di entità necessaria a impedire variazioni volumetriche, rendendo il primo tratto del ramo di ricarica orizzontale (la tensione media efficace del provino non varia; la tensione media efficace residua viene applicata al provino tramite il carico, mentre la pressione neutra residua si annulla). Superato il valore della tensione media residua, il provino inizia a deformarsi e l'indice dei vuoti decresce; quando nella scala semilogaritmica il grafico $e - \log \sigma'_v$ si linearizza si è certi di aver raggiunto il valore massimo di tensione cui il provino è stato soggetto nella sua storia, identificando la linea di primo carico.

Si può definire un metodo grafico convenzionale per identificare l'intervallo tensionale in cui si assume si verifichi il passaggio tra la fase di ricarica e quella di primo carico (metodo grafico/costruzione di Casagrande). Si definiscono graficamente gli estremi dell'intervallo di passaggio come segue:



• Estremo inferiore: intersezione tra la tangente alla curva in e_0 e la retta vergine (di primo carico)

• Estremo superiore: tracciando l'orizzontale e la tangente alla curva nel punto di massima curvatura M e definita la bisettrice dell'angolo formato, l'estremo è definito dall'intersezione tra la bisettrice e la retta vergine.

La media di queste due tensioni, detta tensione di preconsolidazione, rappresenta la tensione in corrispondenza del passaggio tra la linea di ricarica e la retta vergine, ovvero la tensione massima cui è stato soggetto il provino nella sua storia.

Da ciò segue che la tensione efficace di un provino in sito può essere:

• Minore della tensione di preconsolidazione: materiale sovraconsolidato

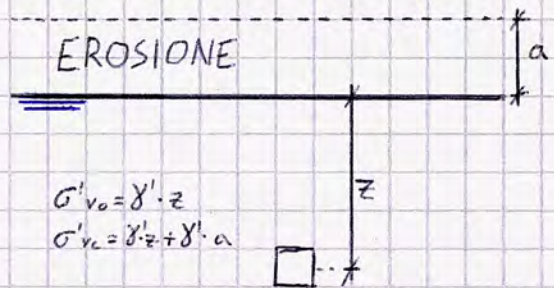
• Uguale alla tensione di preconsolidazione: materiale normal consolidato

⚠ Il provino non può trovarsi a una tensione maggiore di quella di preconsolidazione, valore massimo raggiunto nella storia di carico del provino; se si registrano valori superiori o c'è un errore nella prova o il banco è in fase di deposizione e scarica parte del suo peso proprio sull'acqua (condizioni parzialmente drenate); in generale il tutto si associa ad errori.

In un banco sovraconsolidato esteso, il grado di consolidazione $OCR = \sigma'_{vc} / \sigma'_{vo}$ si riduce con la profondità:

- $OCR > 1 \rightarrow$ sovraconsolidato;
- $OCR = 1 \rightarrow$ normalconsolidato

Infatti, $OCR = \frac{\sigma'_{vc}}{\sigma'_{vo}} = \frac{\gamma' \cdot (z+a)}{\gamma' \cdot z} = 1 + \frac{a}{z}$



$\sigma'_{vo} = \gamma' \cdot z$
 $\sigma'_{vc} = \gamma' \cdot z + \gamma' \cdot a$

All' aumentare di z si riduce OCR , che tende asintoticamente ad 1.

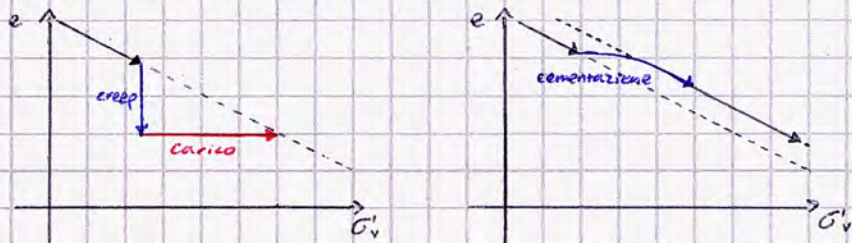
Difatti, se un banco sovraconsolidato viene caricato, presenterà un andamento nel piano $e - \log \sigma'_z$ lungo la linea di ricarico; ne segue che, a parità di profondità z e di stato tensionale corrente, un banco sovraconsolidato è più rigido: ricordando che $C_c < C_s$ e che

$E_{ed} = \frac{(1 + e_{iniz}) \cdot 2,302 \sigma'_v}{C_x}$

Vale per: rigidità volumetrica
 rigidità a taglio
 resistenza a rottura

Il tutto è evidente.

Processi di invecchiamento possono dar luogo ad assetti particellari più rigidi (ad esempio, per fenomeni di creep o di cementazione) che danno luogo ad un $OCR > 1$ (non è una sovraconsolidazione di tipo meccanico, ovvero legata a processi di scarico tensionale con sequenti, ad esempio, all'erosione).



Per ciò che concerne i terreni a grana fine, quando si forma un banco di argilla, inizialmente l'indice dei vuoti e il contenuto d'acqua sono entrambi alti; nel tempo, producendosi incrementi di tensioni efficaci, essi si abbassano. In un banco normalconsolidato, a grandi profondità (e per un grande carico agente) si arriva allo stato semisolido/solido; ne segue

che il rinvenimento di argille "consistenti" (solide) è legato a fenomeni erosivi o tettonici che le hanno portate in superficie; in generale, un banco normalconsolidato di argilla è in condizioni plastiche o liquide!

Ricordando come, nel parlare di stati tensionali litostatici, si è introdotta il coefficiente di spinta a riposo k_0 , proprietà dello scheletro solido, che consente di determinare le tensioni orizzontali efficaci partendo dallo stato tensionale verticale efficace, risulta che:

$k_0 = \frac{\sigma'_x}{\sigma'_z}$

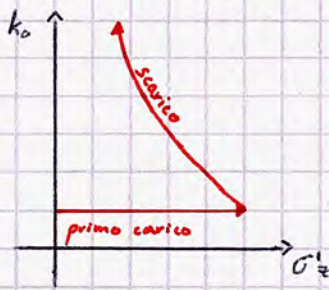
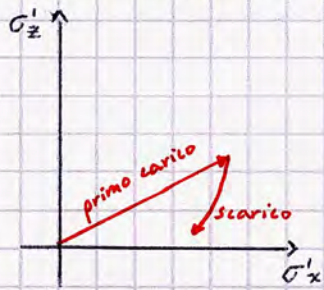
$k_0 = \frac{\nu'}{1 - \nu'}$ imponendo deformazioni laterali impedita e ritenendo valida la teoria dell'elasticità.

Il Coefficiente di Poisson, di chiaro significato fisico, è però di difficile determinazione sperimentale anche in virtù del fatto che il terreno è fortemente anelastico; ne segue che il k_0 si valuta con prove edometriche, con edometri particolari utilizzati esclusivamente a fini di ricerca: poiché l'anello dell'edometro tradizionale non ha una rigidità veramente infinita, deformandosi in ragione della tensione radiale cui è soggetto dalla prova, in questi dispositivi si adottano degli anelli strumentati che, misurando l'entità della deformazione suddetta, consentono di valutare lo stato di coazione generato tra terreno e provino.

Nota la σ'_z dalle prove è quindi possibile valutare σ'_x e calcolare il k_0 ; si osserva sperimentalmente che:

- Lungo la linea di primo carico, la relazione tra σ'_x e σ'_z è lineare $\Rightarrow k_0$ è costante;
- In fase di scarico, come è noto, si recuperano gli stati tensionali verticali (non quelli deformativi, essendo il mezzo anelastico!); essendo la tensione laterale autoequilibrata ciò non è vero sul piano orizzontale.

Poiché restano in fase di scarico delle tensioni laterali residue, in fase di scarico k_0 è crescente.



Questo comportamento è stato modellato con teorie elastoplastiche, da cui risulta un valore di k_0 pari a $1 - 6\phi'$, con ϕ' angolo di attrito. In fase di sovracconsolidazione,

• Primo carico: $k_0 = 1 - 6\phi'$

• Scarico: $k_0 = (1 - 6\phi') \cdot OCR^n$ ^{coefficiente}

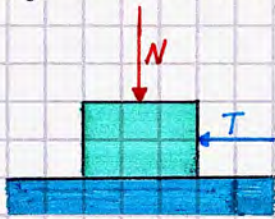
Resistenza a rottura dei terreni

Concetto fondamentale nella risoluzione di problemi relativi a fondazioni superficiali e profonde: la quantificazione del carico di collasso dipende dalla resistenza del terreno.

Essendo lo stato di sollecitazione nei terreni più complesso di quello uniaassiale rispetto cui si verificano le resistenze di acciai e calcestruzzi, la loro resistenza a rottura viene valutata definendo nello spazio delle tensioni un criterio di resistenza (ad es. Hencky-von Mises, trattato in SdC); la resistenza del materiale viene spesso identificata con i parametri del criterio di resistenza adottato.

Nei terreni si adotta il criterio di resistenza di Mohr-Coulomb, avente per parametri di resistenza la coesione e l'angolo di attrito.

Il criterio deriva dalla legge di attrito: si immaginino due corpi a contatto privi di peso, di cui uno è soggetto ad uno sforzo normale alla superficie di contatto; è possibile applicare un'azione orizzontale al corpo senza determinare scorrimento fino al raggiungimento di un valore T_{lim} :



$$T_{lim} = f \cdot N$$

← coefficiente di attrito

Ragionando in termini di risultante, quando la risultante di N e T è inclinata di ϕ si ha scorrimento; risulta che $f = \tan \phi$.

ϕ , angolo di attrito, è definito rispetto alla verticale.

Dividendo per l'area di contatto tra i corpi, si ha che $\frac{T_{lim}}{A} = f \frac{N}{A} \Rightarrow T_{lim} = f \sigma_n$

A livello microscopico, si osserva che due corpi a contatto esplicano detto contatto su una superficie molto più ridotta di A , legata ai punti di contatto delle microscopiche asperità degli elementi; poiché se $A_c \ll A$ lo sforzo normale - passante solo nei punti di contatto - porta a "snervamento" i punti di contatto, per l'equilibrio si ha che:

$$N = q_y \cdot A_c$$

← tensione di snervamento del materiale

Il ruolo di N è quindi quello di aumentare l'area di contatto tra i materiali; in corrispondenza dei punti di contatto si generano dei contatti di tipo coesive.

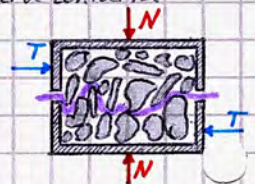
Definita s la resistenza unitaria di questi contatti, si ha che:

$$T_{lim} = s \cdot A_c \quad \text{da cui} \quad T_{lim} = \frac{s}{q_y} \cdot N \quad \text{e dunque} \quad f = \tan \phi = \frac{s}{q_y}$$

Si osserva che l'angolo di attrito è un parametro dipendente dalle proprietà meccaniche delle superfici a contatto.

In un terreno, mezzo particellare, il discorso è formalmente il medesimo; oltre allo scorrimento del mezzo bisogna però garantire lo scavalcamento di particelle.

Nei terreni quindi f non è proprio del materiale costituente la particella ma dell'insieme di particelle, dipendendo anche dal loro stato di addensamento: ne segue che f di un terreno è tendenzialmente maggiore, e dipende anche dalle variazioni volumetriche del materiale.



In termini tensionali, la relazione $\tau_{lim} = \sigma_n \operatorname{tg} \phi$ deve essere quindi corretta introducendo una componente di resistenza coesiva, non dipendente dallo sforzo normale applicato.

Si può dunque scrivere la legge di resistenza a rottura dei terreni:

$$\tau_{lim} = \underbrace{c}_{\text{coesione}} + \underbrace{\sigma_n \operatorname{tg} \phi}_{\text{angolo di attrito}}$$

Per il principio delle tensioni efficaci, occorre intervenire ulteriormente sulla formula introducendo la componente di pressione eventualmente indotta dall'acqua, in quanto le proprietà di resistenza a rottura sono relative al solo scheletro solido. Si ha in definitiva che:

$$\tau_{lim} = c' + (\sigma_n - u_w) \operatorname{tg} \phi'$$

Rappresentata nel piano $\tau - \sigma$, la legge definisce una retta di intercetta $(0; c)$ e coefficiente angolare $\operatorname{tg} \phi$; si definiscono due casi limite:

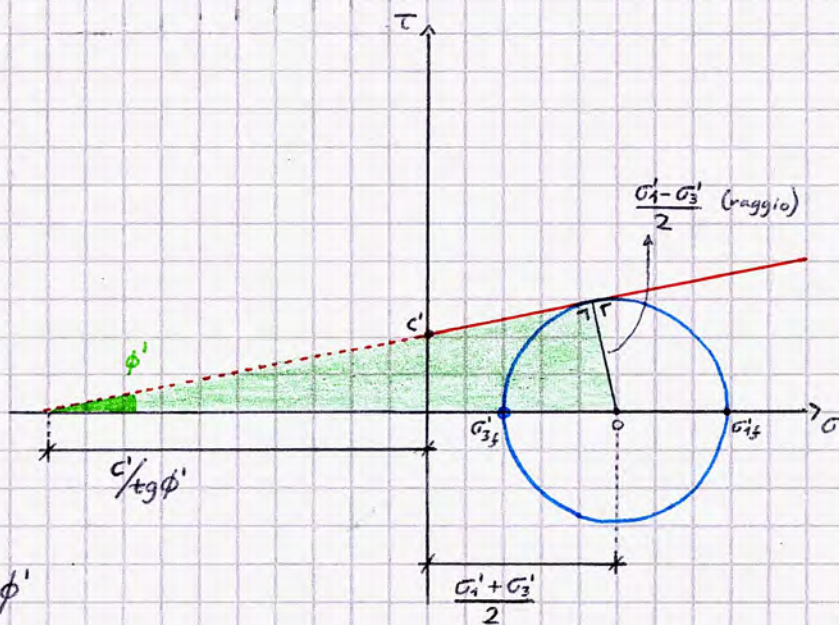
- $c = 0 \rightarrow$ comportamento puramente attritivo
- $\phi = 0 \rightarrow$ comportamento puramente coesivo



Lo stesso criterio di resistenza può essere rappresentato in una formulazione molto utile per le applicazioni, consentendo di stabilire una relazione tra le tensioni principali a rottura: è sufficiente imporre che il Cerchio di Mohr, rappresentativo degli stati tensionali, sia tangente alla retta di rottura.

Tracciando il Cerchio, si individua un polo; i due punti del cerchio che intersecano lo asse σ corrispondano evidentemente a σ_1 e σ_3 (essendo $\tau = 0$).

Il cerchio è tangente alla retta di rottura se σ_1 e σ_3 individuano un diametro tale da rendere il cerchio tangente; dal punto di tangenza, tracciando la normale alla retta di rottura si interseca il centro del cerchio; il segmento appena individuato deve evidentemente corrispondere al raggio del cerchio; la tangenza viene quindi imposta attraverso la costruzione del triangolo rettangolo evidenziato in verde; il criterio di rottura si esprime quindi come:



$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \left(c' \cdot \operatorname{cotg} \phi' + \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \right) \operatorname{sen} \phi'$$

In questa relazione, essendo note le relazioni tra tensioni principali a rottura, è possibile trovare la soluzione di diversi casi pratici: poiché di norma la tensione principale massima è verticale e calcolabile come $\gamma \cdot z$, è possibile ricavare la tensione principale minima di terreni in cui si impone il raggiungimento delle condizioni di rottura. Una applicazione esemplare è quella relativa al calcolo della spinta del terreno sui muri di sostegno: nel corso del deposito di terreno in adiacenza alla parete, il muro di sostegno ruota, decomprimendo il terreno fino a portarlo a rottura; note le σ_1 , verticali, tramite la relazione appena descritta si può definire l'andamento delle σ_3 .

Attraverso dei passaggi matematici è possibile derivare dalla relazione appena definita due legami tra tensione principale minima e massima, diretti:

$$\sigma_1 = \sigma_3 k_p + 2c' \sqrt{k_p}$$

$$\text{con } k_p = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi'}{1 - \operatorname{sen} \phi'} = \operatorname{tg}^2 \left(45 + \frac{\phi'}{2} \right)$$

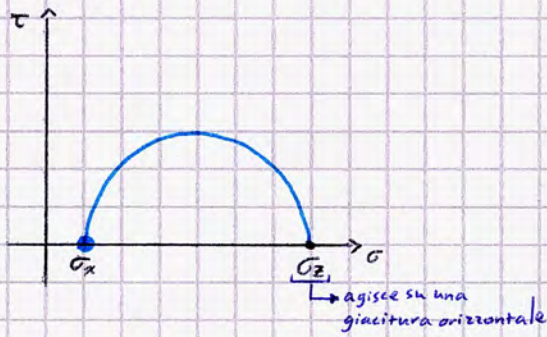
Formule di Rankine

$$\sigma_3 = \sigma_1 k_a - 2c' \sqrt{k_a}$$

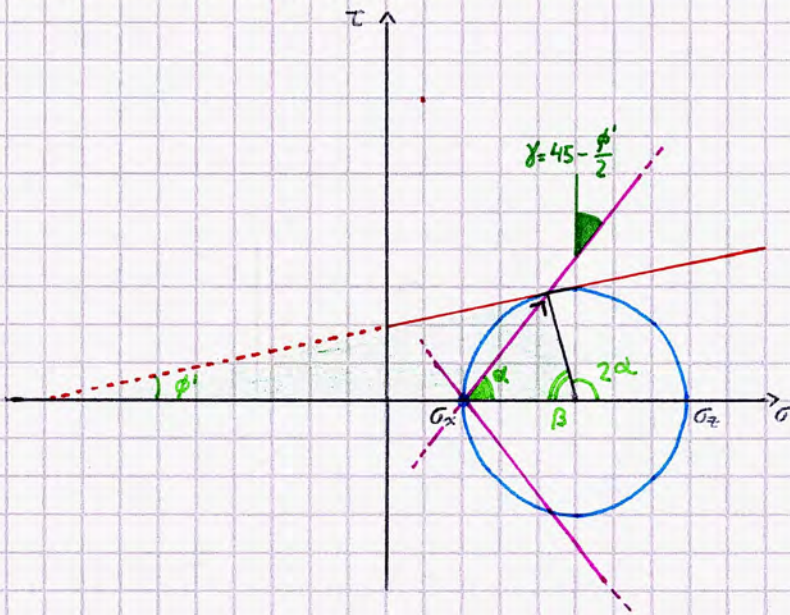
$$\text{con } k_a = 1/k_p$$

Si osserva che $k_a \leq 1$; $k_p \geq 1$

Osservazione: se σ_3 coincide con la tensione orizzontale, il polo del Cerchio di Mohr coincide esattamente con σ_3 ; vale anche il viceversa, il che implica che il polo coincide con la tensione orizzontale se le tensioni verticali e orizzontali sono tensioni principali.



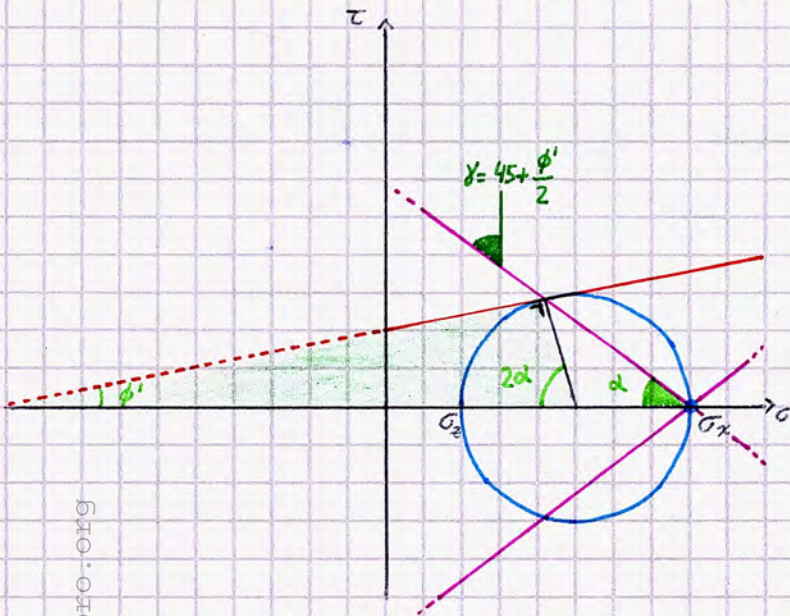
Si possono valutare anche le inclinazioni delle superfici di rottura, tracciando dal polo la retta passante per il punto di tangenza tra Cerchio e retta di rottura:



$$\beta = 180 - 2\alpha = 180 - 90 - \phi'$$

$$\alpha = 45 + \frac{\phi'}{2}$$

$$\gamma = 90 - \alpha = 45 - \frac{\phi'}{2} \quad \text{angolo rispetto alla verticale}$$



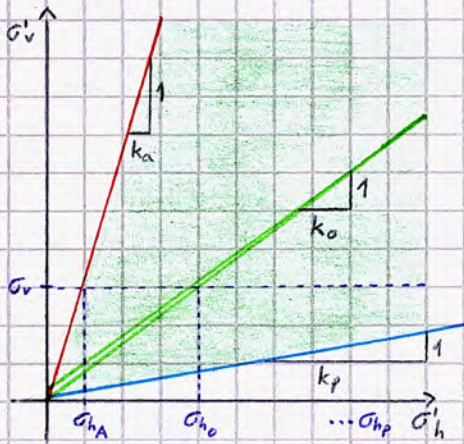
$$180 = 2\alpha + 90 + \phi'$$

$$\alpha = 45 - \frac{\phi'}{2}$$

$$\gamma = 90 - \alpha = 45 + \frac{\phi'}{2} \quad \text{angolo rispetto alla verticale}$$

Osservazione: Se la tensione orizzontale è la tensione principale minima, le superfici di rottura tendono a verticalizzarsi, viceversa tendono a chiudersi sull'orizzontale.

Un altro modo per rappresentare il criterio di rottura prevede di riportarsi sul piano tensioni orizzontali - tensioni verticali. Trascurando la presenza di coesione, si individuano rette di rottura inclinate di K_p e K_a , che definiscono al loro interno un dominio di resistenza.



Nota σ_v da mere considerazioni di equilibrio in direzione verticale, si possono ricavare tre valori caratteristici di tensione orizzontale:

- Tensione orizzontale a riposo;
- Tensione orizzontale in condizioni di rottura attiva (insufficienza di contenimento laterale);
- Tensione orizzontale in condizioni di rottura passiva (insufficienza di contenimento assiale).

Definiti:

$$t = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} \quad s = \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2}$$

La rappresentazione del criterio di rottura nel piano $t-s$ consente di ~~rappr~~relazionare il centro e il raggio dei Cerchi di Mohr a rottura. Infatti, essendo:

$$\frac{\sigma'_1 - \sigma'_3}{2} = c' \cos \phi' + \frac{\sigma'_1 + \sigma'_3}{2} \tan \phi'$$

Risulta che

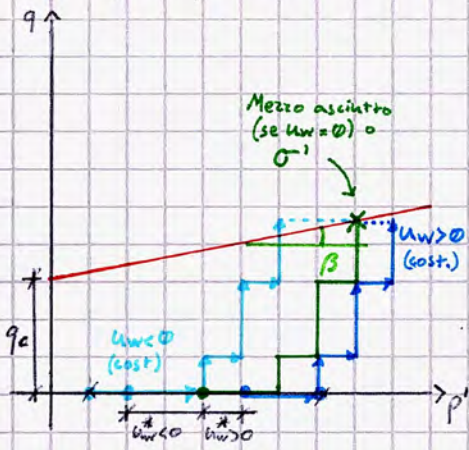
$$\begin{aligned} \tan \phi' &= \frac{d}{c'} \Rightarrow \phi' = \arcsin \left(\frac{d}{c'} \right) \\ d &= c' \cos \phi' \Rightarrow c' = \frac{d}{\cos \phi'} \end{aligned}$$



Le condizioni di rottura possono anche essere rappresentate nel piano $q-p'$, in cui la retta di rottura si individua attraverso i seguenti parametri:

$$q = q_c + M \cdot p' \quad \text{criterio di rottura}$$

$$M = \tan \beta = \frac{6 \sin \phi'}{3 - \sin \phi'} \Rightarrow \phi' = \arcsin \frac{3M}{6+M}$$



La rappresentazione in questo piano consente di evidenziare l'influenza del principio delle tensioni efficaci nel comportamento a rottura: si consideri un volume di terreno soggetto ad un determinato percorso di carico; per valutare la rottura bisogna evidentemente valutare il percorso delle tensioni efficaci (e non quelle totali, in cui è presente anche la pressione dell'acqua!) e definirne l'intersezione con la retta di rottura.

Se ci si trova in condizioni non drenate, ricordando la formula di Atkinson & Bresby (in cui il percorso delle tensioni efficaci non è perfettamente verticale ma inclinato in ragione di α per tener conto del caso più generale) e quella di Skempton, che essendo ricavate per $\Delta \epsilon'_v = 0 \Rightarrow \Delta p' = 0$ ($\Delta \epsilon'_v = \Delta p' / k'$), da cui risulta che $\Delta p = \Delta u_w = \Delta p' = 0$, implicano che le tensioni efficaci, non potendo variare ($\Delta p' = 0$), seguono un percorso verticale.

Osservazione: in condizioni non drenate, il punto in cui si verifica la rottura non varia prescindere dal percorso di carico delle pressioni interstiziali.

Da questa osservazione nasce un'idea per caratterizzare in modo rapido e speditivo la valutazione delle condizioni di rottura in presenza di condizioni non drenate, prescindendo dalla necessità - indotta dalla teoria di Terzaghi - di valutare le tensioni nel solo scheletro solido.

Si consideri un mezzo monofase equivalente al terreno e assoggettato allo stato tensionale totale; riferendosi alle tensioni totali si può definire un involucro di condizioni di rottura, definito da una retta orizzontale; essendo $\phi' = 0$, si definisce una coesione intercetta, detta **coesione non drenata**, dipendente evidentemente dallo stato tensionale iniziale (p'). Con questo procedimento è evidentemente possibile prescindere dalle u_w .

⚠ La coesione non drenata non è una proprietà intrinseca del terreno (la differenza di coesione e angolo di attrito interno).

In sintesi, i criteri di rottura in condizioni non drenate si possono scrivere in due modi:

$$\tau_{lim} = c' + [\sigma_n - (u_w + \Delta u_w)] \operatorname{tg} \phi'$$

difficile da valutare
principio delle tensioni efficaci

conoscibile

$$\tau_{lim} = c_u + \sigma_n \operatorname{tg} \phi_u$$

dipende dallo stato tensionale efficace di partenza (coesione non drenata)
mezzo monofase equivalente soggetto allo stato tensionale totale

Nella realtà il comportamento del mezzo non è elastico, omogeneo e isotropo, implicando un percorso di tensioni efficaci curvilineo e non verticale, ma che è comunque indipendente dal percorso delle tensioni totali.

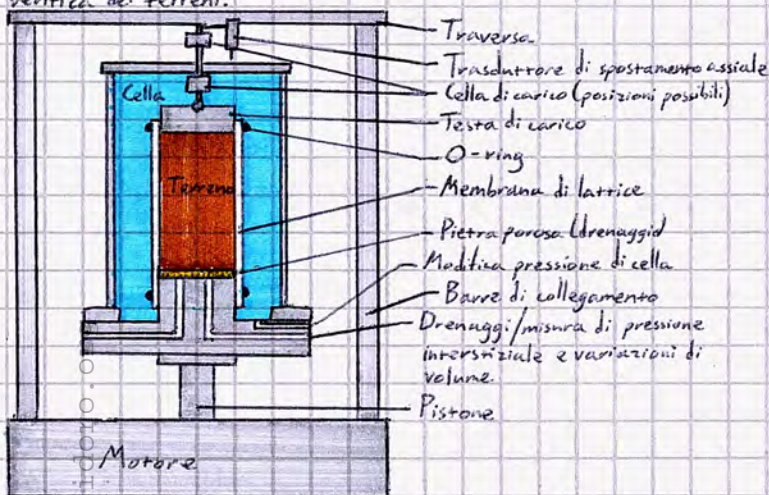
Prove

Le prove a rottura sui terreni si articolano in due fasi:

- Compressione: si applica uno stato tensionale pre-rottura (sostanzialmente analogo a quello in situ);
- Variazione dello stato tensionale applicato aumentando q in misura maggiore rispetto a p .

Prove di compressione triassiale

Si utilizza l'apparecchiatura triassiale, che consente di condurre una prova di compressione in condizioni di espansione laterale libera. Esistono varie tipologie di apparecchiatura triassiale, tutte riconducibili ad uno stesso schema; la macchina è comunque il principale strumento di verifica dei terreni.



Dallo schema a fianco, si osserva che il drenaggio, costituito da una pietra porosa, è presente nella sola parte inferiore: il provino viene compresso mantenendo ferma la testa di carico, facendo avanzare il blocco in basso con un pistone ed imponendo una velocità di deformazione costante, misurando le deformazioni con delle celle di carico (simili a dinamometri).

Il provino è contenuto in una cella riempita d'acqua, che può essere inserita in pressione, così da sottoporre il provino ad uno sterico nella prima fase di compressione; per non alterare il contenuto d'acqua del provino e le relative pressioni interstiziali, l'interfaccia tra cella e provino è costituita da una membrana di lattice, fissata alle teste superiori ed inferiori con degli O-ring.

La pietra porosa è a contatto con l'esterno tramite dei canali, che possono essere:

- Chiusi → prova non drenata (l'acqua di porosità non esce dal provino);
- Aperti → prova drenata (l'acqua drena in corrispondenza di variazioni volumetriche del provino).

Il provino in questa prova è "alto e stretto" in quanto nascono in prossimità delle teste di carico delle interazioni di tipo attrittive che limitano l'espansione laterale del provino; le dimensioni del provino consentono di limitare questa condizione, rendendola di contorno.

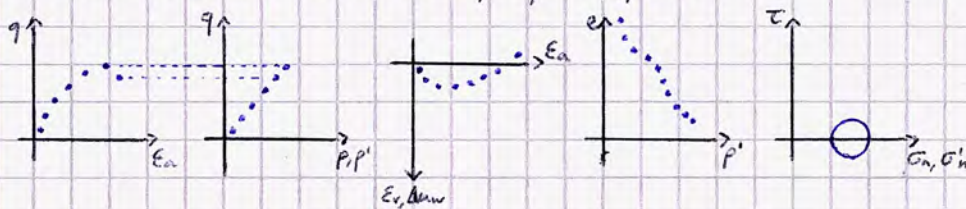
Le dimensioni assolute dei provini sono varie, in virtù delle diverse granulometrie dei terreni, mantenendo una proporzione di 1:2.

Si realizzano tradizionalmente 3 prove:

- CID - compressione isotropica drenata: sia la compressione isotropa (aumento di pressione dell'acqua di cella) che la compressione assiale avvengono assicurandosi che le condizioni siano drenate (canali aperti e velocità di compressione tale da garantire che le condizioni siano sempre drenate).
- CIU - Prova consolidata isotropicamente non drenata: la prima fase è drenata, la seconda è non drenata; la compressione assiale quindi è non drenata; nel circuito chiuso per drenare l'acqua si possono utilizzare dei dispositivi per misurare i valori di pressione interstiziale.
- UU - Prova non consolidata isotropicamente non drenata: entrambe le fasi di carico sono in condizioni non drenate.

I risultati della prova triassiale possono essere riportati in diversi tipi di grafici:

- $q - \epsilon_{assiale}$: riportando la deformazione assiale con la tensione deviatorica, si ha rottura in corrispondenza del punto a tangente orizzontale;
- Evolutiva - $\epsilon_{assiale}$: con ϵ_v ricavata dalla variazione di contenuto d'acqua se la prova è in condizioni drenate, se la prova è non drenata $\epsilon_v = 0$, dunque si valuta Δu_w ;
- $q - p [p']$: consente di riportare i risultati della prova ai percorsi di sollecitazione;
- $e - p'$: l'indice dei vuoti è indicativo di caratteristiche volumetriche;
- Evoluzione dei Cerchi di Mohr nel tempo (poco frequente).

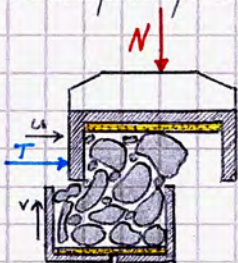


Prova di taglio diretto

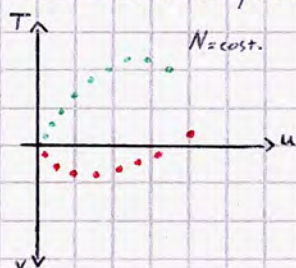
Si effettua con due tipologie di apparecchiature:

- Apparecchiatura di taglio diretto piano;
- Apparecchiatura di taglio diretto anulare.

Il provino è contenuto in una scatola costituita da due parti separate; viene inizialmente consolidato come in edometro, in condizioni di spinta a riposo K_0 , per poi essere portato a rottura per taglio lungo il piano di separazione tra le due parti. Lo stato tensionale agente su un piano orizzontale è disunitario, dunque non definibile a partire dai valori di N e T . Nel corso della prova vengono misurati gli spostamenti verticali v e gli spostamenti orizzontali u . Alle estremità del provino sono poste due pietre porose e viene imposta la condizione di pressione interstiziale nulla.



La rappresentazione dei risultati mostra in una prima fase la componente di compressione edometrica, con la successiva applicazione di uno sforzo di taglio T che, tendendo a far scorrere le due semiscatole, determina degli scavalcamenti (quindi aumenti di volume e spostamenti verticali); nel grafico $T - u$ (con u spostamento orizzontale) ad N costante, si osserva un grafico concavo verso il basso, con T_{lim} in corrispondenza del punto a tangente orizzontale.



I risultati di una prova di taglio diretto piano vengono spesso rappresentati anche con riferimento alle seguenti grandezze:

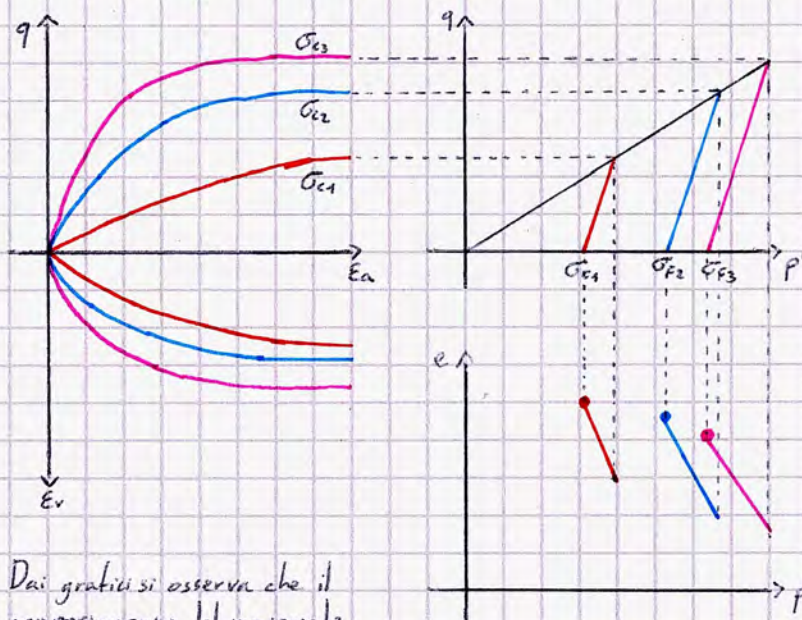
- Rapporto $\tau = T/A$, non corrispondente alla tensione tangenziale sul piano orizzontale a causa delle disuniformità nello stato tensionale;
- Tensione normale $\sigma = N/A$, anch'essa disuniforme in fase di taglio;
- Deformazione angolare $\gamma = u/H$, con H altezza del provino: lo spessore di provino interessato da deformazioni a taglio non è noto;
- Deformazione assiale $\epsilon_a = v/H$, con le stesse considerazioni sullo spessore di provino interessato da deformazioni assiali.

Come detto, queste grandezze sono dei surrogati: nel provino gli stati tensionali sono disuniformi, essendo le pareti rigide: le deformazioni ad esempio non si concentrano in tutto il provino ma in una fascia non definibile.

Resistenza a rottura delle sabbie in prove triassiali

Le sabbie presentano sempre un comportamento drenato, dunque le prove triassiali su di esse si conducono sempre in condizioni drenate; di fatti, la definizione di sabbia in base a condizioni meramente granulometriche non è sufficiente: si definisce sabbia un materiale che nelle pratiche applicazioni, per la velocità di applicazione dei carichi tipica legata alla costruzione di opere civili si trova in condizioni sempre drenate; in genere, la sabbia non è compattabile in condizioni indisturbate.

Prova triassiale su sabbia sciolta: ricordando le prime definizioni sulle proprietà dei materiali, la sabbia sciolta presenta densità relativa ridotta, ovvero un indice dei vuoti prossimo a quella massimo. Trovandosi in condizioni drenate, a seguito dell'applicazione dello sterico il percorso di carico è inclinato di 1:3:



Nei grafici si riporta l'andamento di tre prove triassiali, con carico sterico applicato da σ_c a σ_{c1} poi procedere nella prova assiale.

Dai grafici si osserva che il comportamento del materiale è subito non lineare e concavo verso il basso; si ha rottura in corrispondenza del punto a tangente orizzontale nel grafico $q-\epsilon_a$. In termini di ϵ_v , il mezzo tende ad addensarsi, implicando $\epsilon_v > 0$, che in questa convenzione implica una riduzione di volume, e una riduzione dell'indice dei vuoti. Il comportamento a rottura di una sabbia sciolta appare quindi **ductile e monotono**: raggiunto il massimo deviatore, il mezzo continua a deformarsi mantenendo il livello di carico raggiunto.

Se si applica una tensione di cella maggiore ($\sigma_{c3} > \sigma_{c2} > \sigma_{c1}$), si osserva che:

- Le rigidità, a parità di ϵ_a , sono maggiori;
- Si raggiunge un deviatore maggiore: con l'applicazione dello sterico iniziale, ricordando il criterio di Mohr-Coulomb, si inibiscono ulteriormente gli scorcimenti tra particelle.

Evidentemente, definite più prove triassiali è possibile individuare la retta di rottura nel piano $q-p'$.

Prova triassiale su sabbia densa: essendo D_r (v. pag. 8) prossima al 100%, l'indice dei vuoti iniziale è certamente minore.

Confrontando il comportamento tra sabbia densa e sciolta alla stessa tensione di cella σ_{c1} , si osserva un radicale cambiamento di comportamento:

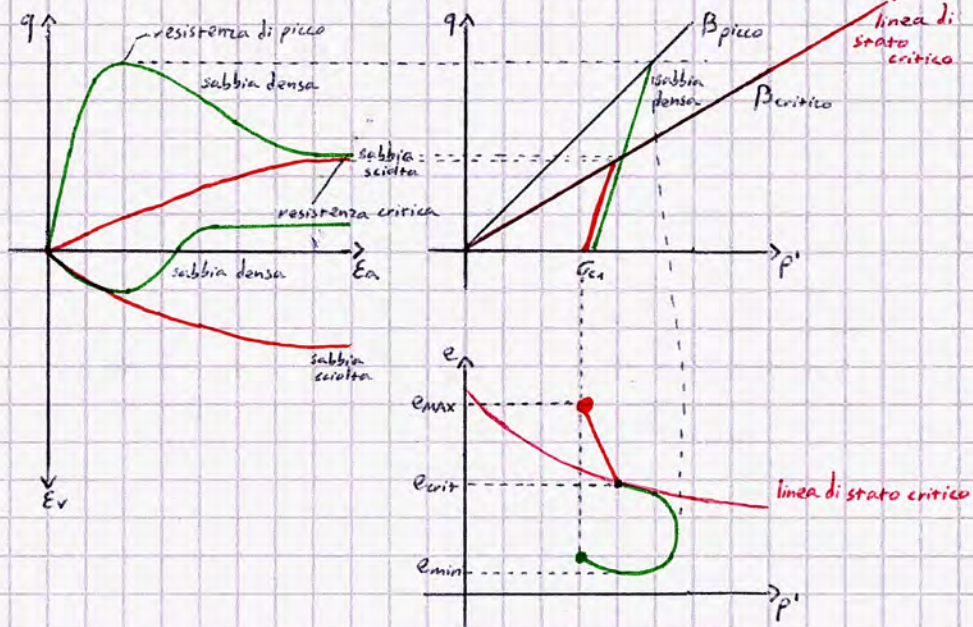
- Essendo il materiale molto denso, le particelle per rompersi si devono scavalcare, implicando che progredendo nella prova il provino si espande;
- Si raggiunge un deviatore massimo, "di picco", molto maggiore, ma il comportamento non è monotono: raggiunto il picco e la condizione di scorrimento tra particelle, il provino si deforma ma può sostenere in ultimo un deviatore a rottura coincidente con quello della sabbia sciolta.

Per il materiale denso quindi si distingue tra resistenza di picco e resistenza finale, implicando che la resistenza a rottura non è univocamente determinata.

La prova triassiale evolve come segue:

1. Sferico
2. Compressione assiale fino a rottura

La variazione di comportamento della sabbia è stata qui valutata a parità di sferico.



Si è visto come, postulando l'assenza di coesione, un provino di sabbia densa presenta 2 rette di rottura (per il criterio di Mohr-Coulomb) nel piano $q-p'$: critica e di picco.

In corrispondenza del picco (sabbia densa) si ha il massimo gradiente di espansione del provino (espande prima della rottura critica); la tangente verticale nel diagramma $\epsilon-p'$ corrisponde al picco di $q-p'$.

Si osserva che il provino sciolto ha a rottura un comportamento duttile: dilatante, a rottura esso si imbarca (rottura diffusa); il provino denso al picco ha una rottura localizzata, su una singola superficie.

La resistenza finale del provino denso è detta resistenza critica in virtù dell'osservazione di un elevato numero di prove, in cui si osserva che detto valore di resistenza non dipende dall'indice dei vuoti iniziale: a parità di p' si giunge alle stesse condizioni finali in termini di q (resistenza critica) ed ϵ (indice dei vuoti critico); si riscontra quindi una stazionarietà del comportamento rispetto ai processi deformativi assiali (distorsionali).

Variando lo sferico (p') iniziale si definiscono nei diagrammi più condizioni finali di stazionarietà, che individuano delle linee di stato critico (condizioni di stazionarietà al variare di p' imposto dalla tensione di cella).

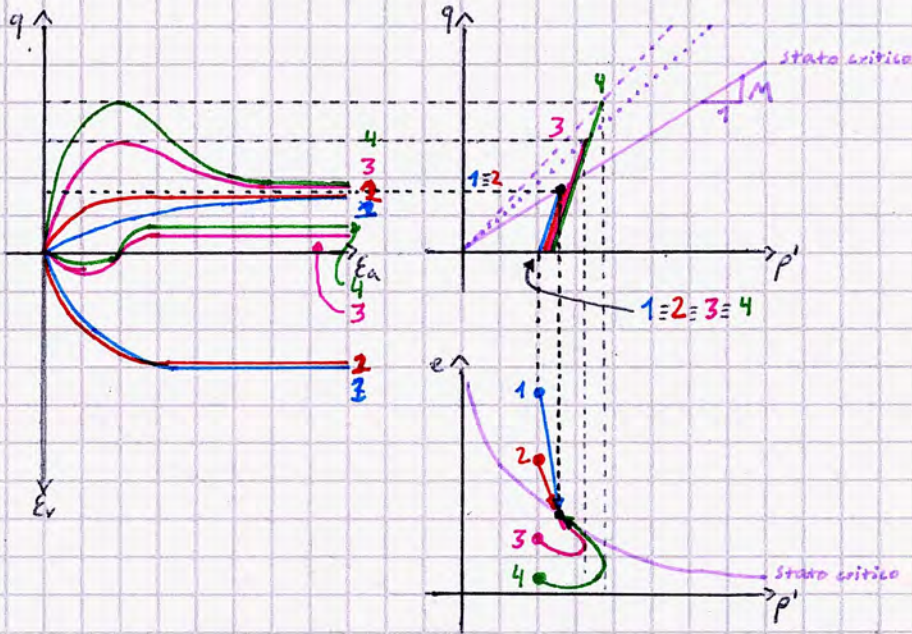
Le linee di stato critico sono le proiezioni della linea di stato critico nel piano $q-p'-\epsilon$ sui singoli piani; ciò implica che il provino si trova allo stato critico se e soltanto se entrambe le sue proiezioni nel piano $\epsilon-p'$ e nel piano $q-p'$ appartengono alle proiezioni nei piani della linea di stato critico.

La linea di stato critico consente di definire unitariamente il comportamento a rottura della sabbia: ad esempio, nel piano $\epsilon-p'$ partendo da sopra la linea di stato critico si ha un comportamento contraente a rottura, duttile che giunge monotonicamente al deviatore di rottura, con una definizione univoca della resistenza.

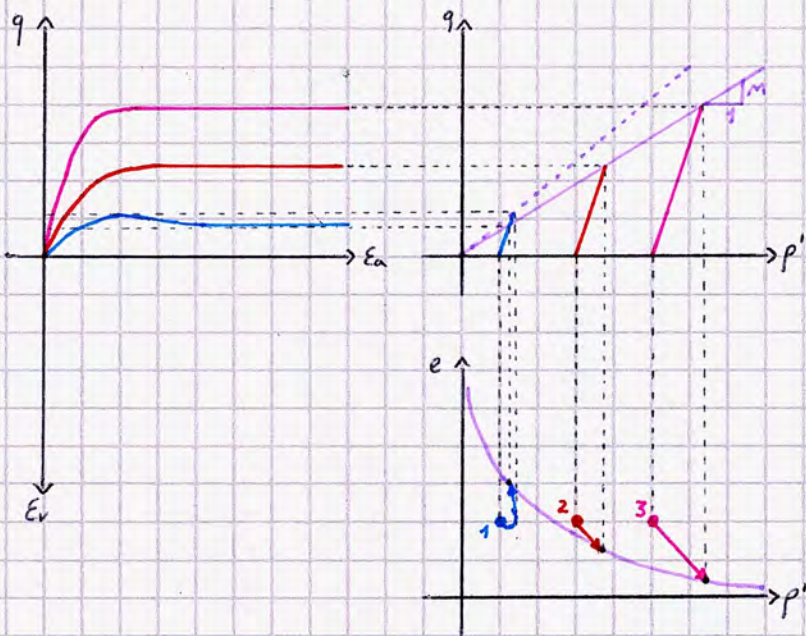
Nota il punto iniziale, sapendo che nel piano $q-p'$ il percorso evolve di 1:3 e che il comportamento è monotono a rottura è possibile tracciare facilmente i diagrammi.

Se invece il punto iniziale si trova al di sotto della linea di stato critico, il comportamento a rottura del materiale è dilatante, implicando una resistenza di picco e una resistenza critica; essendo però noto il punto finale

si ricava dalla linea di stato critico un altro punto per descrivere l'andamento nel piano $e-p'$.
 Noti i diagrammi $e-p'$ e $q-p'$ si possono descrivere i diagrammi $q-E_a$ e E_v-E_a , facendo attenzione alla corrispondenza tra massimo gradiente dell'indice dei vuoti e resistenza di picco.
 A parità di p' , si ottiene quindi che:



Analogamente, si possono costruire dei diagrammi a parità di indice dei vuoti iniziale, facendo variare p' (\triangle La variazione di p' implica una variazione di q finale!); si osserva evidentemente che varia il comportamento della sabbia, malgrado il medesimo indice dei vuoti, in base alla posizione relativa delle condizioni iniziali dovute alle diverse tensioni di cella e la linea di stato critico:



Nelle sabbie, la definizione dell'indice dei vuoti iniziale può essere fissata a piacere a priori, essendo possibile variare agevolmente e tramite processi di deposizione e vibrazione.

Come vedremo, ciò non è vero per le argille, in cui le interazioni di tipo elettrochimico sono significative; le variazioni di indice dei vuoti possono essere realizzate solo con una riconfigurazione totale del materiale, molto onerosa.

A parte ciò, il comportamento a rottura delle argille segue considerazioni analoghe a quanto fatto per le sabbie.

Resistenza a rottura delle argille in prove triassiali

È preliminarmente utile ricapitolare alcune evidenze della prova edometrica (dalla quale si può valutare il Δe e la dinamica necessaria per raggiungere uno specifico indice dei vuoti): ricordando le dinamiche legate a retta vergine (di I carichi) e rette di scarico-ricarico (che non tornano ad e_0 , essendo lo scarico solo elastico), risulta che l'indice dei vuoti nelle argille può essere definito unicamente comprimendo e scaricando il materiale in accordo al comportamento in edometro, a meno di una totale riconfigurazione del materiale.

Ricordando le equazioni della retta vergine e delle rette di scarico-ricarico:

$$e = e_{0c} - C_c \log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}} ; \quad e = e_{0cs} - C_s \log_{10} \frac{\sigma'_v}{\sigma'_{v0}}$$

(varia il punto iniziale \rightarrow fascio di rette parallele)

Per la valutazione della resistenza a rottura delle argille, conviene rappresentare l'equazione della retta vergine in funzione di p' invece che di σ'_v , così da poter confrontare i dati in edometro con quelli in cella triassiale:

Si ricorda che in edometro la retta vergine divide gli stati possibili da quelli impossibili.

$\sigma'_v = k_0 \sigma'_v$ in condizioni di espansione laterale impedita

$p' = \frac{\sigma'_v (1+2k_0)}{3}$ in condizioni di assialsimmetria ed in edometro

$\sigma'_v = \frac{3p'}{1+2k_0}$

ricordando che $\log_{10} d = \frac{\ln d}{\ln 10} = \frac{\ln d}{2,302}$
essendo preferibile in base alla letteratura considerare il logaritmo naturale nelle prove triassiali.

Essendo $k_0 =$ costante in un materiale normalconsolidato, risulta quindi che:

$$e = e_{oc} - \frac{c_c}{2,302} \ln \left(\frac{3p'}{3p'_0} \cdot \frac{1+2k_0}{1+2k_0} \right) \Rightarrow e = e_{oc} - \lambda \ln \left(\frac{p'}{p'_0} \right)$$

$\lambda = \frac{c_c}{2,302}$

Assumendo $p'_0 = 1$, ponendo $e_{oc} = H$ si ha:

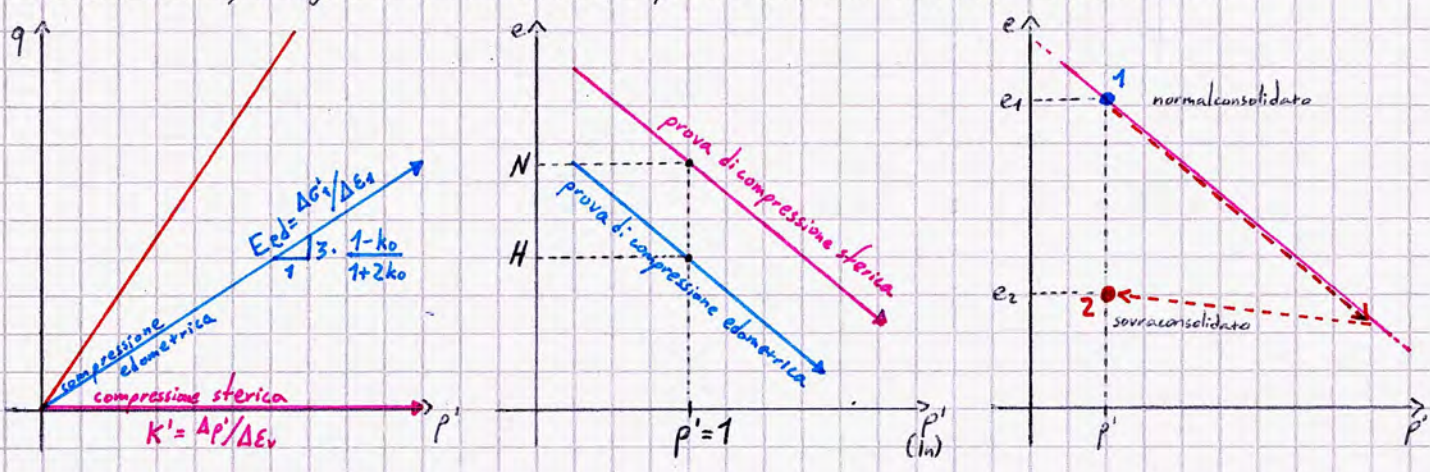
$$e = H - \lambda \ln \frac{p'}{p'_0} \Rightarrow e = H - \lambda \ln p'$$
 compressione edometrica

La compressione sterica dell'argilla - prima fase della prova triassiale - può essere quindi caratterizzata in termini di $e-p'$ (come nella cella triassiale), con un'equazione sostanzialmente analoga a quella appena ricavata per la compressione edometrica; dal comportamento sperimentale risulta una retta di equazione simile ma con indice dei vuoti iniziale diverso:

$$e = N - \lambda \ln p'$$
 $N > H$ compressione sterica

Una volta applicata la compressione isotropa, è possibile caratterizzare il comportamento delle argille in ragione di una compressione assiale: come anticipato, per definire due condizioni iniziali a uno stesso livello di p' ma con indici dei vuoti differenti, bisogna procedere con una compressione lungo la linea di primo carico per poi attuare uno scarico; ne segue che il confronto è tra un provino normalconsolidato e uno sovraconsolidato.

La curva di compressione isotropa è una linea di stato in senso assoluto, separando stati possibili da stati impossibili (a destra); la linea edometrica invece non è una linea di stato: lo è solo in riferimento a percorsi di tipo edometrico!

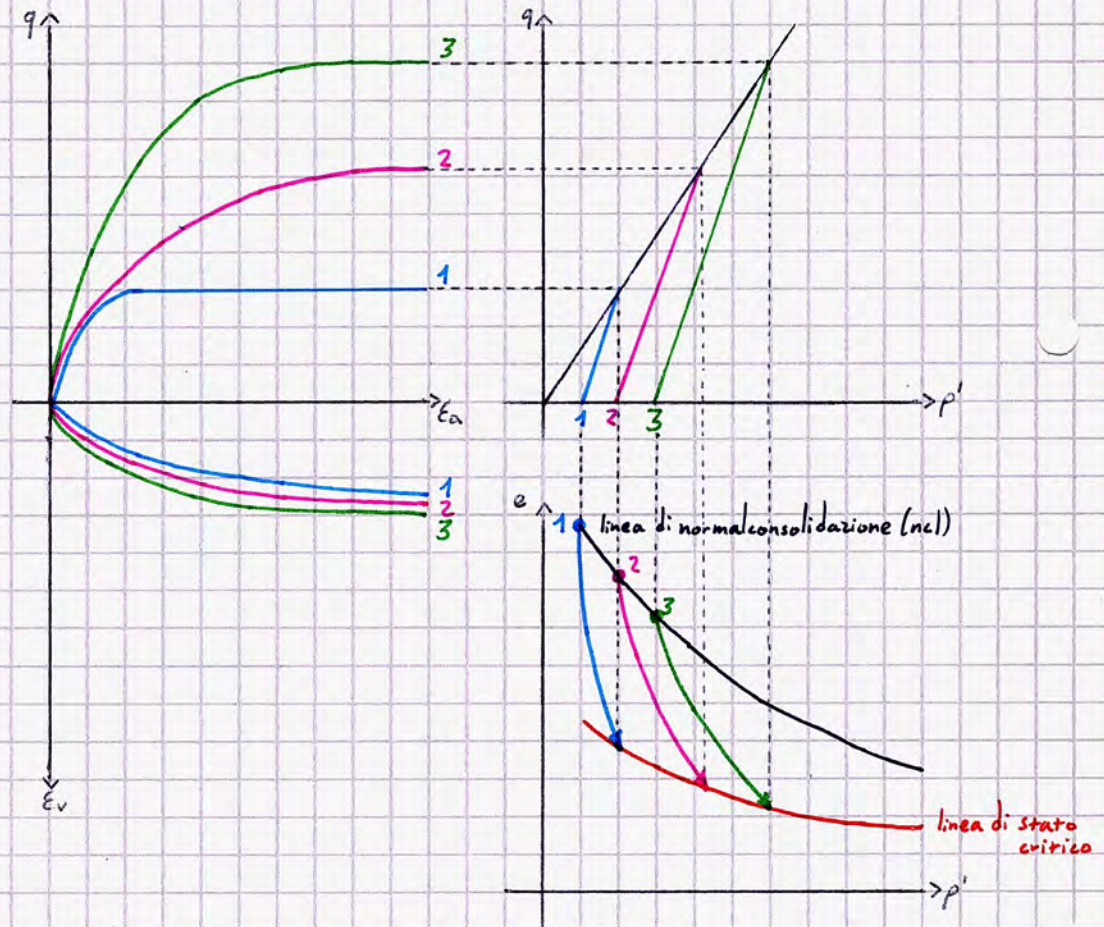


Il differente comportamento tra argilla normalconsolidata e sovraconsolidata segue gli stessi andamenti del diverso comportamento di sabbie sfolte e dense; a differenza delle sabbie però occorre tener conto dell'impatto delle diverse condizioni di drenaggio (la sabbia è per definizione in condizioni sempre drenate).

riccardo.polidoro.org

Argilla normal consolidata

Comportamento drenato: sostanzialmente analogo al comportamento di una sabbia secca, con una crescita monotonica del deviatore e un comportamento duttile a rottura; all' aumentare delle deformazioni assiali oltre la rottura, il provino riesce a mantenere il carico massimo applicato. Nel piano $q-p'$ il percorso di carico è inclinato di $1:3$ fino al raggiungimento della linea di stato critico; nel piano $e-p'$ il provino evidenzia un comportamento contraente fino al raggiungimento dello stato critico (condizioni stazionarie); variando la tensione di cella dal punto iniziale, si percorre la linea di normal consolidazione; un aumento della tensione di cella implica un aumento di rigidezza e resistenza, pur conservando lo stesso andamento; i punti "di arrivo" sulla linea di stato critico dipendono invece dal p' a rottura.

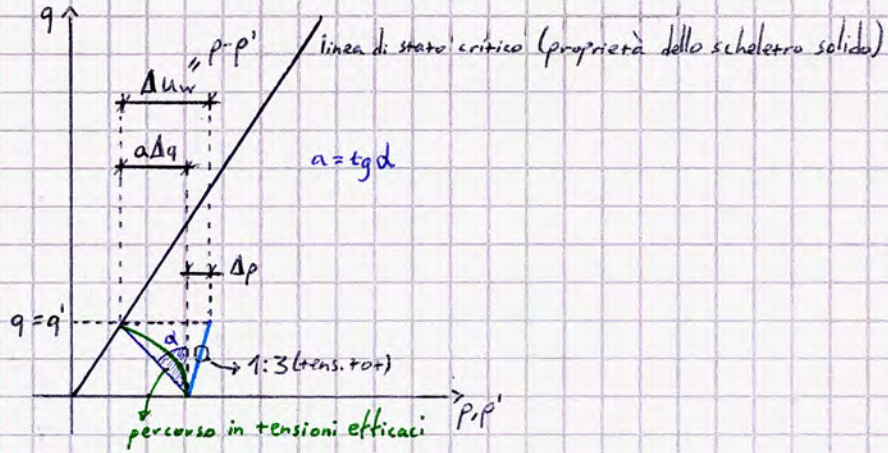


Comportamento non drenato: Ricordando che la compressione sterica iniziale è condotta sempre in condizioni drenate (prova CIU), nella compressione assiale la pressione dell'acqua aumenta. (Δ L'ESPANSIONE LATERALE NON È IMPEDITA, dunque l'acqua non assorbe tutto il carico) poiché si "deforma" con lo scheletro solido e assorbe PARTE del carico: poiché in condizioni non drenate non ci sono deformazioni volumetriche (SEMPRE VERO), andando in pressione l'acqua sostanzialmente impedisce allo scheletro solido di variare il proprio volume.

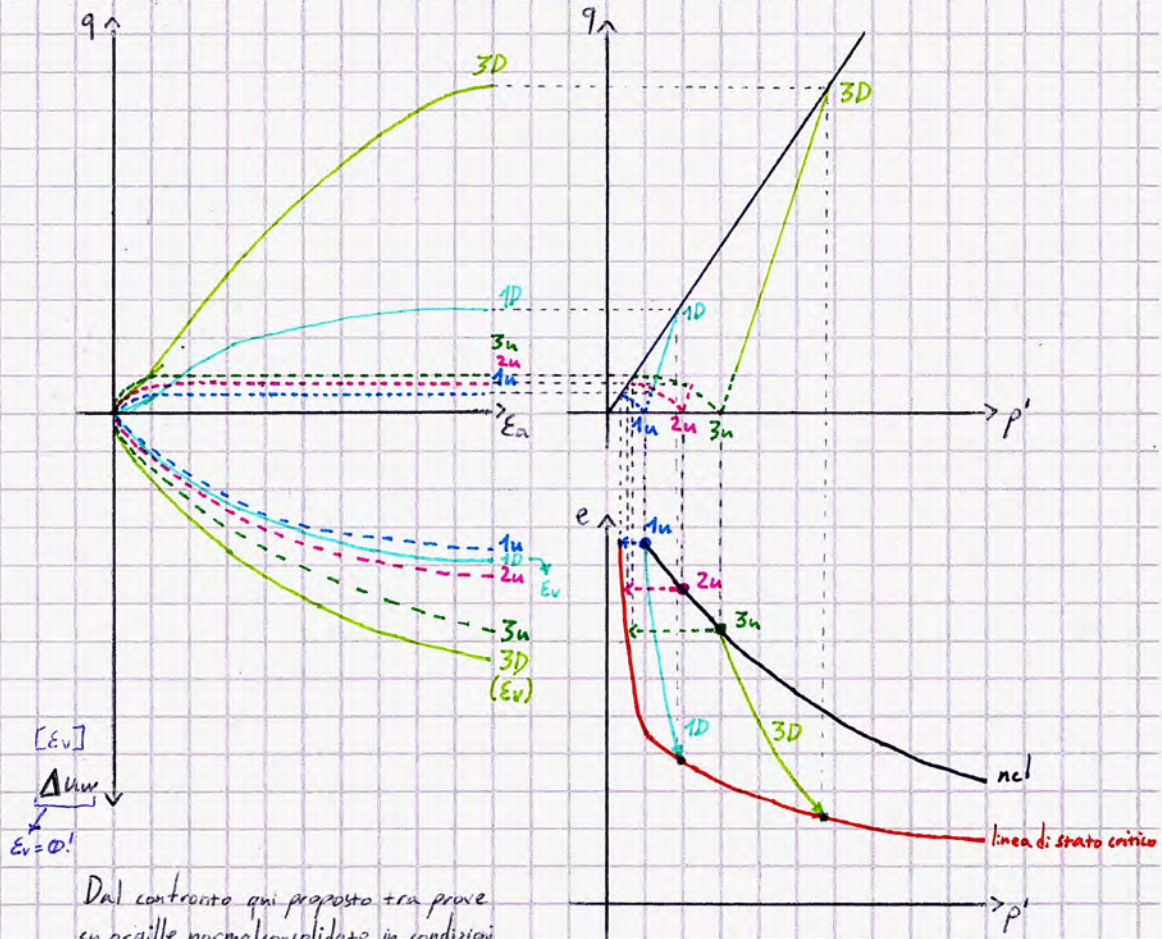
In termini di diagramma, quello in condizioni drenate identifica sostanzialmente il diagramma in tensioni TOTALI in condizioni non drenate; non variano q e q' tra σ e σ' ma, evidentemente, si ha che $p \neq p'$ in ragione delle Δu_w : ne risulta che il percorso in tensioni efficaci (p') è traslato verso sinistra, il che implica il raggiungimento della linea di stato critico a un valore minore di resistenza rispetto ad un'argilla equivalente in condizioni drenate (Δ è il percorso in tensioni efficaci a regolare la rottura!)

Ricordando la formula di Skempton $\Delta u_w = \Delta p + a \Delta q$, tracciando nel diagramma $q-p, p'$ la verticale dal punto a $q=0$ di una prova CIU, essendo elementare la definizione di Δp risulta identificato anche $a \Delta q$; si osserva sperimentalmente che a varia al variare di p ; nelle pratiche applicazioni però si adotta $a = a_{secante} = \text{costante}$.

⚠ Nel variare tra prove drenate e non drenate, il deviatore a rottura varia sensibilmente ma le proprietà dello scheletro solido NO!



Volendo ricomporre i diagrammi presentati in precedenza, si osserva che nel piano $e-p'$, essendo $\epsilon_v = 0$, $e = \text{costante}$; ne segue che si assiste ad un percorso ad indice dei vuoti costante fino ad intersecare la linea di stato critico (volendo rappresentare i diagrammi conviene quindi partire da questo punto per ricavare p' a rottura!).



Dal confronto qui proposto tra prove su argille normalconsolidate in condizioni drenate (D, linea continua, prova CID) e non drenate (u, linea tratteggiata, prova CIV) a parità di tensioni steriche di cella (in tensioni efficaci, in quanto lo sterico iniziale è applicato in condizioni drenate!), si osserva che:

- La resistenza dell'argilla in condizioni non drenate è molto più bassa: la compressione porta ad una riduzione delle tensioni efficaci;
- La rigidità iniziale dell'argilla in condizioni non drenate è maggiore di quella in condizioni drenate.

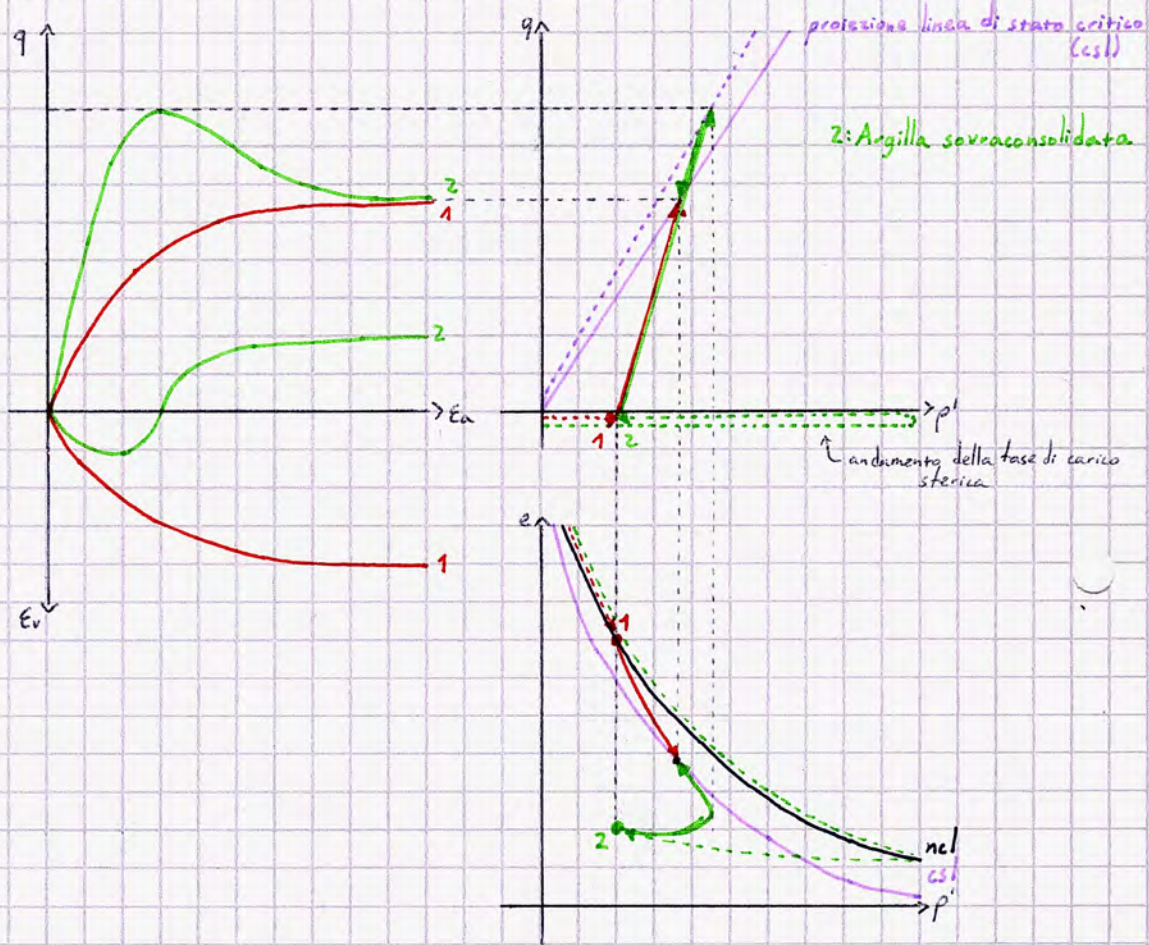
In un'argilla normalconsolidata, la rigidità iniziale è maggiore - a parità di p' - in condizioni non drenate perché, considerando la rigidità del mezzo monotasse equivalente ed essendo le sovrappressioni iniziali modeste si può assumere $G_u = G'$

$G = f(E, \nu)$
 modulo di rigidità
 a taglio
 $\nu_u = 0,5 \Rightarrow$ invariabilità volumetrica

$$G_u = G' \Rightarrow \frac{E_u}{2(1+\nu_u)} = \frac{E'}{2(1+\nu')} \Rightarrow E_u = 3 \frac{E'}{2(1+\nu')} \text{ essendo } \nu' < 0,5, E_u > E'$$

Argilla sovraconsolidata: come fatto con le sabbie dense, si propone di seguito un confronto con l'argilla normalconsolidata a parità di p' iniziale (e è evidentemente diverso).

Comportamento drenato: nella fase di compressione storica si raggiunge il carico p' , non coincidente col massimo carico cui il provino è stato soggetto; le differenze in comportamento sono analoghe a quelle tra sabbie dense e sciolte.



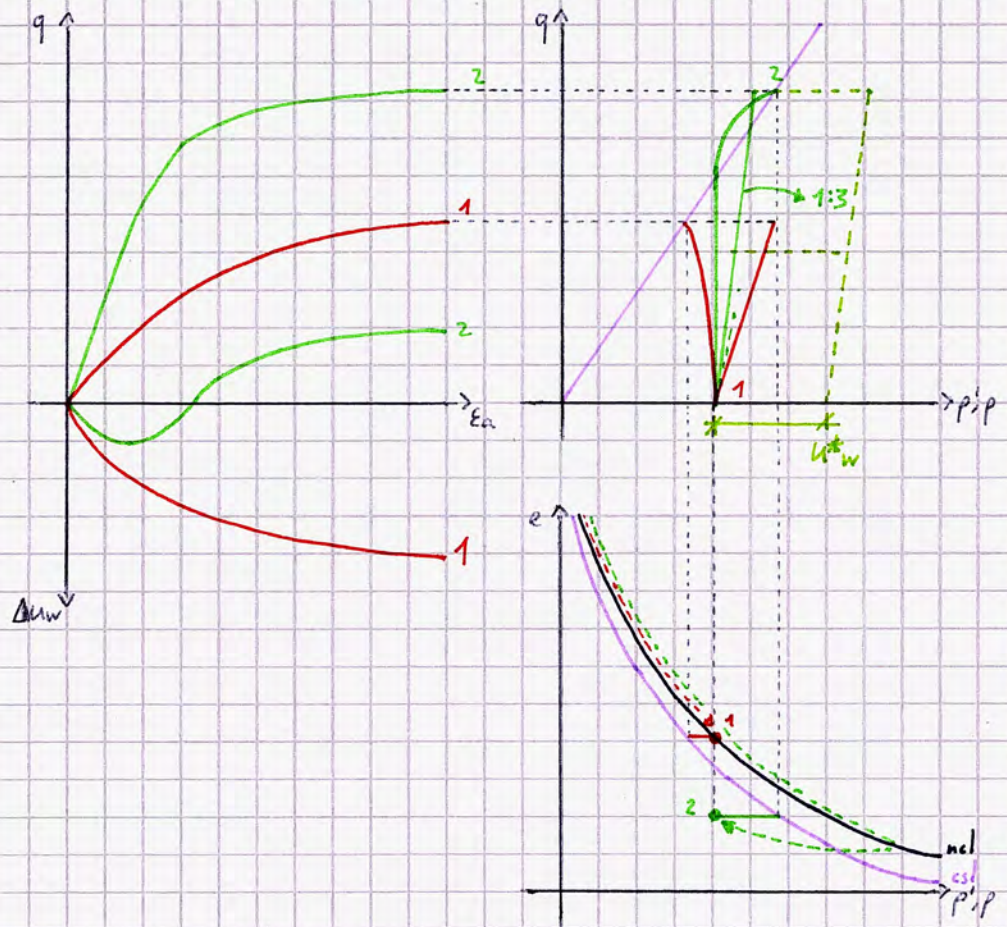
Comportamento non drenato: inizialmente l'acqua aumenta di pressione, poi la pressione si riduce fino a diventare $< \mathcal{D}$, il che implica un incremento delle tensioni efficaci e quindi un aumento dello stato di coesione tra particelle, incrementando la resistenza del materiale.

Osservazione: l'argilla sovraconsolidata in condizioni non drenate arriva a rottura con comportamento duttile (monotono).

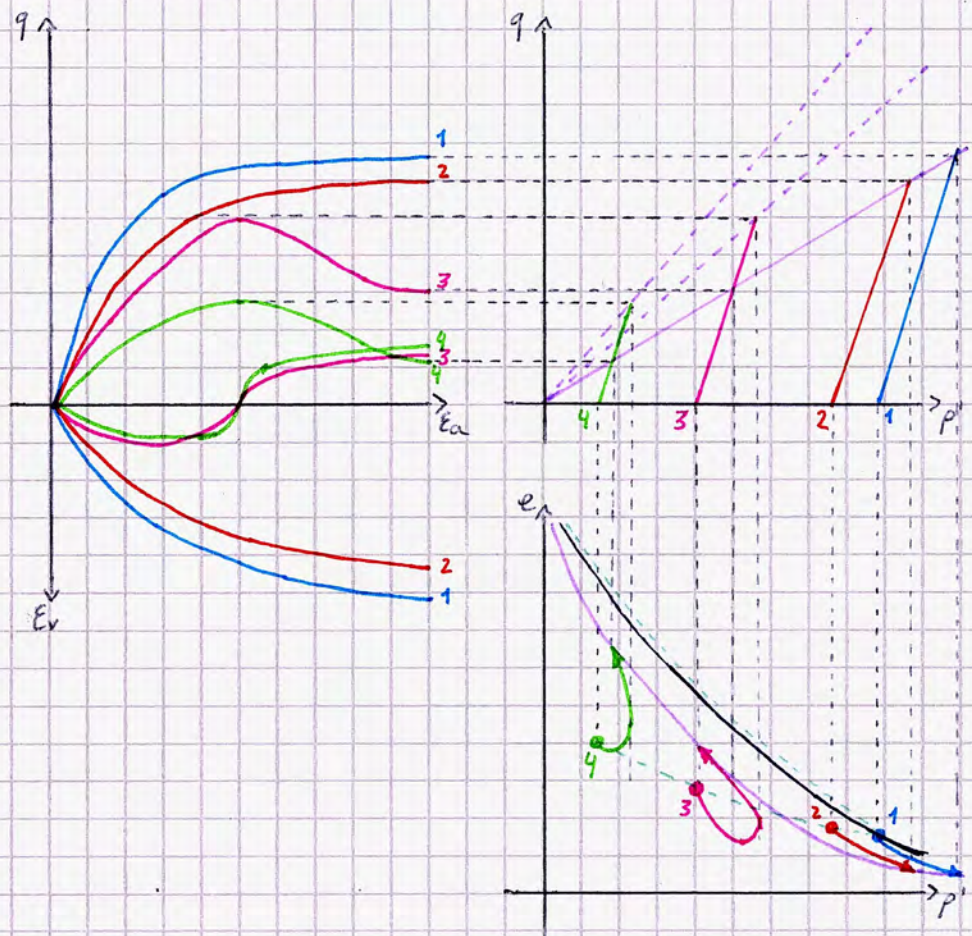
Osservazione: esistono argille che a rottura, pur se sovraconsolidate, hanno un comportamento contraente: si tratta delle argille debolmente sovraconsolidate (punto iniziale tra csi e ncl), che hanno rottura duttile e comportamento analogo alle argille normalconsolidate ma con maggior rigidezza e resistenza.

In queste prove però possono sorgere problemi di cavitazione della cella triassiale, dovuta ad una eccessiva depressione dell'acqua, che comporta la formazione di bolle d'aria e la desaturazione del provino.

Per caratterizzare le argille molto sovraconsolidate quindi si distanzia il percorso in tensioni efficaci da quello in tensioni totali applicando una back pressure all'estremità del provino (u_w^*), ricorrendo al comportamento in tensioni efficaci in presenza di una u_w sempre $> \mathcal{D}$.



Confronto tra argille in prove CID per diversi valori di OCR in una stessa linea di scurricaricario:



Per determinare i parametri di resistenza associati al mezzo monofase equivalente (coesione non drenata c_u) occorre riferirsi evidentemente a prove CU o UU; per comprenderne il ruolo occorre comprendere i fattori che ne condizionano il valore, introdotti quando la grandezza è stata definita (pp. 59-60):

La c_u non è una proprietà intrinseca, non essendo riferita allo scheletro solido; il suo valore dipende dallo stato tensionale efficace a rottura, ovvero, a cascata, dallo stato tensionale efficace iniziale. In definitiva, si ha dipendenza da:

- Proprietà intrinseche dello scheletro solido (Γ, λ, M);
- Stato tensionale efficace iniziale (tensione media efficace p'_i);
- Storia di carico (grado di preconsolidazione OCR).

Si ha infatti che:

$c_u = q_t/2$ definisce la variazione di coesione non drenata in $f(p', OCR) \rightarrow$ il percorso in tensioni efficaci non è verticale come a p. 59 ma pende a destra o sinistra.

In condizioni non drenate,

$q_{finale} = M p'_{finale}$ dal diagramma $q-p'$, M è il coefficiente angolare della retta di stato critico.

p'_{finale} è linea di stato critico $e-p' \rightarrow e_t = \Gamma - \lambda \ln p'_{finale}$ equazione della linea di stato critico nel piano $e-p'$

Poiché in condizioni non drenate $e_t = e_0$, $e_0 = \Gamma - \lambda \ln p'_{finale}$
 $\Rightarrow p'_{finale} = e^{\left[\frac{\Gamma - e_0}{\lambda}\right]}$

Da cui $q_{finale} = 2c_u = M p'_t = M \cdot e^{\left[\frac{\Gamma - e_0}{\lambda}\right]}$

Dunque, $c_u = \frac{q_t}{2} = \frac{1}{2} \cdot M \cdot e^{\left[\frac{\Gamma - e_0}{\lambda}\right]}$

A sua volta e_0 è definibile in base al percorso iniziale dovuto alla compressione sterica, in generale prodotto da fenomeni di compressione e scarico-ricarico:

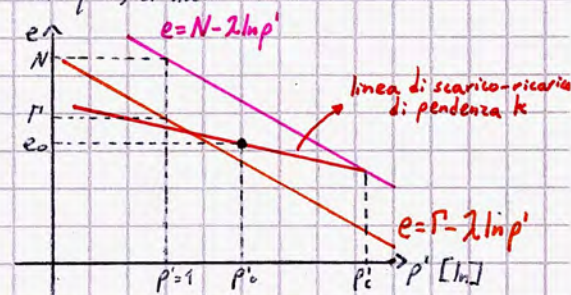
$e_0 \begin{cases} N - \lambda \ln p'_o & \text{normalconsolidato} \\ N - \lambda \ln p'_i + k \ln \frac{p'_i}{p'_o} & \text{sovraconsolidato} \end{cases}$
 pendenza della linea di scarico-ricarico

Ricordando inoltre che $OCR = p'_i/p'_o$, da cui $p'_i = OCR \cdot p'_o$, si ha:

$$e_0 = N - \lambda \ln(OCR p'_o) + k \ln(OCR)$$

Da cui risulta in definitiva che:

$$c_u = M \cdot p'_o \left(\frac{OCR}{2,718} \right)^{\frac{1-k}{2}}$$



Osservazione: in materiali normalconsolidati, c_u varia linearmente con la profondità; per $OCR > 1$ la variazione è meno che lineare ($OCR \gg 1 \Rightarrow c_u$ assunta costante).

Fondazioni

Si definisce fondazione la parte di struttura che la vincola al suolo; viene trattata a parte e con attenzione perché gli sforzi e gli stati tensionali in una struttura hanno tensioni di lavoro (nel CLS, 250-300 kg/cm²) più alte rispetto a quelle del terreno (un buon terreno resiste a 1 kg/cm²), anche di 3 ordini di grandezza: per superare a questa differenza si distribuiscono gli sforzi su un'area maggiore; riducendo il carico di lavoro in termini tensionali si rende il carico coerente con le condizioni imposte dal terreno (analogo il discorso per le rigidità).

Questo obiettivo si realizza con due soluzioni fondamentali:

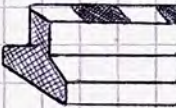
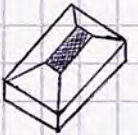
- Fondazioni superficiali: presentano un rapporto tra la profondità del piano di posa (D) e la larghezza della fondazione (B) molto minore di 1;
- Fondazioni profonde: $D/B \gg 1$

Logicamente, variando la tipologia cambia completamente il modo di lavorare della fondazione: una fondazione superficiale reagisce principalmente con sforzi normali sotto il piano di posa, con una resistenza attrittiva sotto il piano di posa trascurabile (stati tensionali ridotti \Rightarrow sforzi normali ridotti \Rightarrow T resistenti ridotte per Mohr-Coulomb; a ciò si aggiunge che le caratteristiche meccaniche dei terreni nei primi strati sono modeste); una fondazione profonda aggiunge a questo tipo di meccanismo un meccanismo attrittivo legato alle T_{lim} della superficie laterale della fondazione stessa: aumentano le T_{lim} e contemporaneamente si attinge a strati in cui σ_n è maggiore.

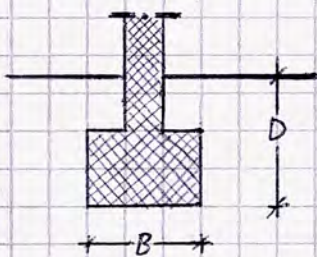
Fondazioni superficiali [dirette]

Si classificano in:

- Plinti di fondazione: strutture di fondazione associate alle estremità inferiori dei singoli pilastri, isolate tra loro; in origine erano di forma troncoconica - richiamo al cono di diffusione - inclinati di 45° così da definire un risparmio in termini di materiale, rispettando la dinamica di diffusione del carico; con l'aumento dei costi della manodopera si preferiscono forme semplici, prismatiche.
In zona sismica è obbligatorio assicurare un comportamento d'insieme a tutti i livelli (travi e solai sono elementi tensorisistenti), ovvero anche sul piano di fondazione, con travi di collegamento progettate per lavorare a trazione.
- Travi rovesce: se l'interasse tra plinti in una direzione è nullo o ridotto si preferisce utilizzare una trave rovescia (simile a una T rovesciata), con travi di collegamento nell'altra direzione. Se si impiegano travi rovesce in entrambe le dimensioni, si parla di un reticolo di travi rovesce.
- Platee di fondazione: se il reticolo di travi rovesce coprirebbe il 50-60% dell'impronta dell'edificio, conviene realizzare una platea, comunque obbligata per motivi di tenuta idraulica (impermeabilizzazione del piano di fondazione). Presenta uno spessore tra 75 cm e 2 m.



Piano di posa della fondazione: profondità associata alla capacità portante della fondazione (più è profonda, più è possibile caricare la fondazione: le "tensioni di rottura" del terreno dipendono dalla profondità). Nella definizione della profondità del piano valgono le seguenti regole:



- Bisogna preliminarmente eliminare il terreno di riporto e materiale vegetale ($\approx 1m$);
- In presenza di falda, il piano di posa non deve trovarsi nella zona interessata da oscillazioni del livello di falda.
- Le acque superficiali possono scalfare la fondazione; bisogna assicurarsi che il riempimento non si eroda significativamente \rightarrow la profondità del piano deve essere tale da evitare alterazioni nella portanza della fondazione.
- Il piano di posa deve trovarsi sotto lo spessore di terreno interessato da gelo o variazioni del contenuto d'acqua.

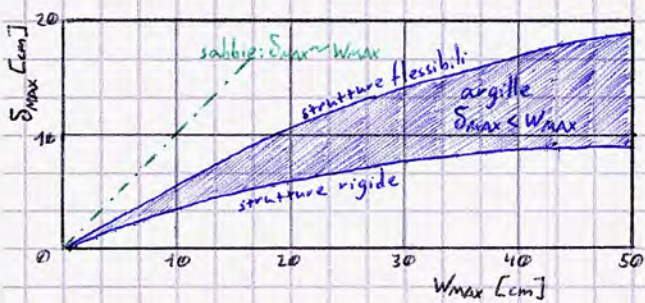
Si immagini di imporre un carico applicato dalla fondazione sul terreno: all' aumentare del carico aumenta l' entità del cedimento; è possibile costruire una relazione sperimentale tra i carichi e i cedimenti, da cui si osserva un comportamento inizialmente lineare che diventa stavolevolmente non lineare (a rigidità decrescente), sviluppando cedimenti molto maggiori a parità di incremento di carico Δq . Il comportamento è asintotico verso il carico limite q_{lim} (in termini geologici noto anche come portanza della fondazione) nel caso di sabbie dense e delle argille sovraconsolidate: gli altri tipi di terreno possono (soprattutto se più scadenti) avere un piccolo tratto lineare iniziale e un' assenza di asintoto (in questi casi il comportamento del terreno è modellato a partire da quello appena definito, includendo dei termini correttivi).



Occorre quindi definire una teoria in grado di identificare il carico limite q_{lim} , così da individuare il carico di esercizio, sicuramente lontano da q_{lim} ma anche tale da produrre un cedimento ammissibile, compatibile col funzionamento (statico o di esercizio) della struttura. Occorre quindi anche un impianto teorico che consenta di interrelare il carico di esercizio al cedimento prodotto.

Il principale problema statico di una fondazione è legato al fatto che le strutture, essendo fortemente iperstatiche, potrebbero essere soggette a significative sollecitazioni interne a causa di cedimenti differenziali: anche in presenza di una struttura che carica uniformemente il terreno, il sottosuolo non ha un comportamento omogeneo e produce sempre dei cedimenti differenziali, che rapportati alla distanza producono distorsioni e quindi sollecitazioni interne.

Ne segue che occorre definire un cedimento teorico assoluto, da cui è possibile ricavare il cedimento compatibile con la statica della struttura; ciò si conduce tramite delle correlazioni empiriche (Bjerrum, 1968) che legano il cedimento assoluto (risultante da un calcolo teorico) alla distorsione δ tra due punti tramite abacchi:



In particolare, risulta che:

- Depositi sabbiosi: presentano cedimenti ridotti ($\sim 10\%$), ma essendo molto disomogenei producono distorsioni dello stesso ordine di grandezza.
- Depositi argillosi: producono cedimenti intensi (anche 50%) ma determinano cedimenti entro un' aliquota $< 50\%$ del cedimento assoluto perché i depositi sono tendenzialmente più omogenei.

Nelle normative antecedenti alle NTC si assumeva $q_{esercizio} = q_{lim}/3$, ridotto a $q_{lim}/2$ per i muri di sostegno: nelle limitazioni di norma era implicita l'ottica su quozienti e cedimenti, in quanto più si è lontani da q_{lim} minori sono i cedimenti; il limite sui muri di sostegno è meno stringente perché l'opera è progettata per muoversi e ruotare, dunque imporre un cedimento ridotto implicherebbe strutture massive, che non si muovono, determinando problemi.

Ricapitolando:

- $q_{esercizio} \ll q_{lim}$;
- w_{ass} e w_{diff} compatibili con la statica e la funzionalità della sovrastruttura (da $q_{esercizio}$);
- Bisogna valutare e verificare la sicurezza di fondazione: $q_{esercizio}$ e le reazioni determinano N, T, M.

Previsione dei cedimenti nelle fondazioni superficiali

Il procedimento alla base del calcolo dei cedimenti presenta più metodi, accomunati dalla medesima dinamica:

- Determinazione dello stato tensionale litostatico: associato alla configurazione indeformata di riferimento, consente, in base alla tensione media efficace, di definire la rigidità degli strati di terreno (variabile con la profondità).
- Determinazione degli incrementi di tensione indotti dal sovraccarico: le $\Delta \sigma$ inducono $\Delta \epsilon$ che producono il cedimento in virtù delle rigidità degli strati di terreno.

Già studiate
riccardo.palumbo@uniroma1.it

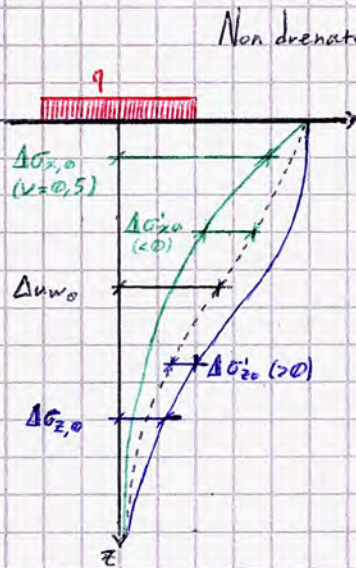
- Determinazione delle $\Delta \epsilon_z$: esse producono il cedimento ($w = \int_0^H \Delta \epsilon_z dz \rightarrow$ incrementi di deformazione prodotti solo dal sovraccarico).
- È questo il passaggio che caratterizza i vari metodi di calcolo, distinti in base a:

- Modo di caratterizzare i parametri di rigidezza:
 - Prove in sito (necessarie per la sabbia, non campionabile in forma indisturbata);
 - Prove di laboratorio (tipiche per i terreni a grana fine): distinguono alcuni dei metodi in base alla prova utilizzata:
 - Prove triassiali;
 - Prove edometriche.
- Meccanismo deformativo utilizzato: si distingue tra:
 - Metodo edometrico: $\Delta \epsilon_z = \Delta \sigma_z / E_{ed}$ anche se si è lontani dalle condizioni edometriche;
 - Metodo elastico: si impiega la legge di Hooke generalizzata, secondo cui $\Delta \epsilon_z = 1/E [\Delta \sigma_z - \nu (\Delta \sigma_x + \Delta \sigma_y)]$
- Fase del processo di riequilibrio idraulico del sistema: in base alle condizioni drenate o non drenate del sistema, bisogna riferirsi a un preciso stadio di riferimento del processo di consolidazione (cedimenti iniziali/ finali o ad un certo istante intermedio t).

I metodi di riferimento sono 3:

- Metodo elastico;
- Metodo edometrico;
- Metodo di Skempton e Bjerrum ("miscola" precedenti).

Metodo elastico: adotta il formalismo della legge di Hooke generalizzata per il calcolo delle $\Delta \epsilon_z$, è riferibile sia a condizioni drenate che a quelle non drenate.



Non drenate: se la velocità di applicazione del carico è elevata rispetto alla capacità di dissipazione delle pressioni dell'acqua, l'acqua si deforma insieme allo scheletro solido; in questa fase si hanno cedimenti solo in presenza di variazioni di tensioni efficaci: con l'applicazione del carico aumentano le tensioni verticali totali, calcolate in base al modello e alle formule di Boussinesq (prescindono dalle σ_z dai parametri elastici del mezzo); le tensioni orizzontali totali dipendono invece dai parametri elastici del mezzo (in particolare da ν , pari a 0,5 nell'istante iniziale in condizioni non drenate essendo necessario imporre l'invariabilità volumetrica del mezzo); per valutare una variazione di tensioni efficaci occorre definire gli incrementi di pressione interstiziale dovuti al carico, ovvero applicare le formule di pressione interstiziale (Atkinson e Bresby e le relative forme particolarizzate, come per il carico circolare) che consentono di valutare gli incrementi di tensioni verticali e orizzontali efficaci (risulta che le orizzontali sono < 0 , mentre quelle verticali sono > 0 come evidente dai diagrammi a fianco, in tensioni totali).

Nota la variazione di tensioni efficaci, dalla legge di Hooke generalizzata si calcolano i cedimenti ($\Delta \epsilon_z$ nella legge di Hooke, $\nu = \nu'$ dello scheletro solido; note le tensioni orizzontali totali, nel calcolo è rilevante valutare le proprietà del solo scheletro solido!)

$$\Delta \epsilon_{z,0} = \frac{1}{E'} [\Delta \sigma'_{z0} - \nu' (\Delta \sigma'_{x0} + \Delta \sigma'_{y0})]$$

cedimento iniziale alla generica profondità Z ; moltiplicato per lo spessore del singolo strato restituisce il cedimento nello strato; integrato nell'intero banco definisce il cedimento totale.

⚠ Il mezzo monofase equivalente è soggetto alle SOLE tensioni totali, e non a quelle efficaci!

Il medesimo calcolo può essere condotto ritenendosi ad un mezzo monofase equivalente, non richiedendo la conoscenza di ν' e delle sovrapressioni interstiziali in quanto consente di riferirsi alle tensioni totali (i parametri elastici del mezzo monofase equivalente sono $\nu = 0,5$, $E = E_u$ ricavato da una prova triassiale consolidata non drenata):

$$\Delta \epsilon_{z0} = \frac{1}{E_u} [\Delta \sigma_{z0} - \nu_u (\Delta \sigma_{x0} + \Delta \sigma_{y0})]$$

Il passaggio dall'una all'altra relazione è semplice: basterà sostituire nella prima relazione la seguente espressione:

$$\Delta \sigma'_{z0} = \Delta \sigma_{z0} - \Delta u_w; \quad \Delta \sigma'_{x0} = \Delta \sigma_{x0} - u_w; \quad \Delta u_w = \Delta p = \frac{\Delta \sigma_{z0} + 2\Delta \sigma_{x0}}{3}$$

Cedimento finale: cambiano $\Delta \sigma'_z$ e $\Delta \sigma'_{x,y}$, che assumono valore coincidente con la tensione totale in quanto $\Delta u_w = 0$. Le tensioni orizzontali totali cambiano anch'esse nella consolidazione, essendo $v_{finale} = v'$, dello scheletro solido. In termini di tensioni efficaci, risulta:

$$\Delta \epsilon_{zt} = \frac{1}{E'} \left[\Delta \sigma'_{zt} - v' (\Delta \sigma'_{xt} + \Delta \sigma'_{yt}) \right]$$

\downarrow
 $\propto v' \quad \propto v_u = 0,5$
 \downarrow
 $\Delta \sigma_{xt} \neq \Delta \sigma_{x0}$
 \downarrow
 $\Delta \sigma_{zt} = \Delta \sigma_{z0}$

Il cedimento di consolidazione viene valutato in questo approccio come differenza tra valore finale e valore iniziale.

Calcolate le $\Delta \epsilon_z$, il calcolo del cedimento si calcola formalmente come integrale tra 0 ed H (a rigore tra 0 e ∞ , ma con la profondità gli incrementi di tensione diventano trascurabili rispetto a quelli degli strati superiori e parallelamente aumentano le rigidzze, quindi E'), con H pari in genere a 2-3 volte la larghezza B della fondazione.

In genere, più che all'integrale (non risolvibile, anche alla luce delle informazioni necessariamente discretizzate del sottosuolo) si ricorre ad una sommatoria di accorciamenti valutati su strati di spessore finito, discretizzando il problema e calcolando gli stati deformativi nel baricentro dello strato (lo stesso avviene per tutti gli altri parametri):

$$W = \int_0^H dw = \int_0^H \Delta \epsilon_z dz \approx \sum_{i=1}^n \Delta \epsilon_{zi} \cdot \Delta z_i$$

Δz_i ← spessore del singolo strato

Metodo edometrico: al posto del formalismo della legge di Hooke generalizzata si impiega quello edometrico ($\Delta \epsilon_z = \Delta \sigma'_z / E_{ed}$), imponendo che il mezzo si deformi in condizioni di espansione laterale impedita (condizione fisicamente irrealistica in molti casi, soprattutto per carichi applicati su un'area finita; si è osservato però che ne risultano risultati attendibili per il cedimento finale: Δ nella prova edometrica il cedimento iniziale è nullo!). Nell'applicazione del metodo non si riferisce a una formula che passa per la stima di E_{ed} ; si preferisce un modo più pratico e agevole legato alla curva edometrica (i cui risultati sperimentali sono spesso già disponibili), dai risultati della quale si può calcolare $\Delta \epsilon_z$ come segue:

$$\Delta \epsilon_z = \Delta \epsilon_v \rightarrow \Delta \epsilon_z = - \frac{\Delta e}{1 + e_0} = \frac{e_0 - e_t}{1 + e_0}$$

↑
in edometro

Valori leggibili sui risultati della prova edometrica.

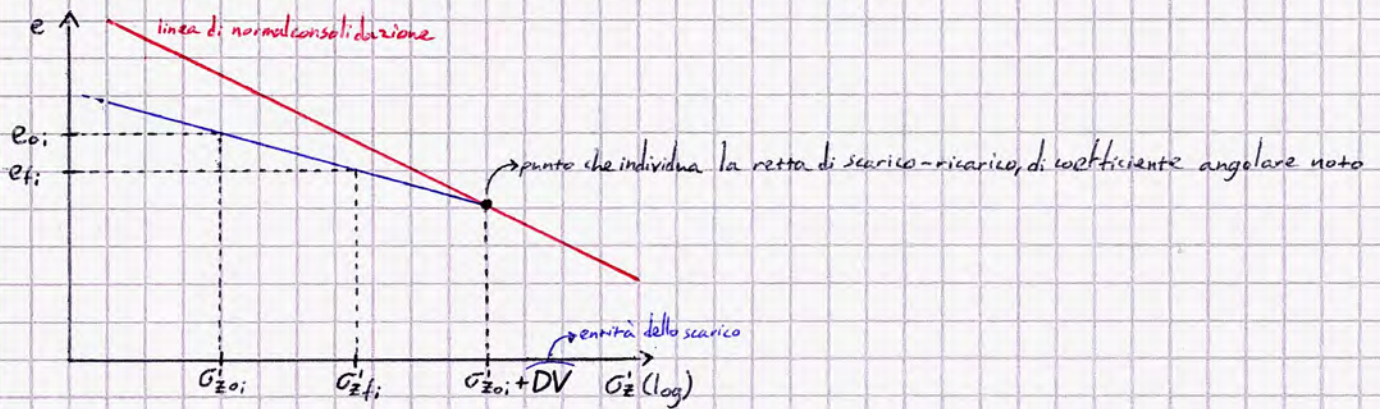
- e_0 : associato allo stato tensionale litostatico σ_{z0} (prima applicazione del carico); nelle ipotesi di normalconsolidazione è sulla linea di normalconsolidazione.
- e_t : lo stato tensionale litostatico si altera di una quantità $\Delta \sigma'_z$; a seguito del calcolo delle tensioni indotte dal carico si ha $\sigma_{zt} = \sigma_{z0} + \Delta \sigma'_z$, da cui nelle ipotesi di normalconsolidazione si ricava e_t .

Osservazione: sono rilevanti la profondità e lo stato tensionale litostatico: dal calcolo dell'indice dei vuoti iniziale (tensioni litostatiche) e finale (tensioni compressive) si ottiene un utile parametro per il calcolo dei cedimenti dalla loro differenza.

Se il deposito è sovraconsolidato, esso ha evidentemente avuto una fase deposizionale (in condizioni edometriche → in fase deposizionale i carichi sono infinitamente estesi) con un successivo fenomeno erosivo, in cui tutti i punti subiscono un uguale decremento del carico; ne segue che la linea di scarico-ricarico di riferimento può essere individuata, noto lo scarico avvenuto, aggiungendo allo stato tensionale misurato il quantitativo dello scarico: il valore così individuato si trova sulla linea di normalconsolidazione, da cui

si identifica la retta di scarico-ricarico di riferimento.

Dalla prova edometrica eseguita a una certa profondità, essendo nota la tensione di preconsolidazione e la tensione verticale efficace è possibile estendere dalla profondità campionata a tutto il deposito l'ammontare dello scarico riferito (si ricordi la costruzione di Casagrande), da cui si ricava tutto:



Metodo di Skempton e Bjerrum: metodo ibrido, impiega entrambi i formalismi:

- Metodo elastico: viene utilizzato per determinare il cedimento iniziale con un'analisi in tensioni totali (mezzo monofase equivalente):

$$W_0 = \int_0^H \frac{1}{E_u} [\Delta \sigma_{z_0} - 0,5(\Delta \sigma_{x_0} + \Delta \sigma_{y_0})] dz$$

- Metodo edometrico: utilizzato per il calcolo del cedimento di consolidazione (non più definito a posteriori, come fatto nel metodo elastico), derivante dalla dissipazione delle Δu_w .

Assumendo uno stato tensionale totale costante (non proprio vero, in quanto nella consolidazione le tensioni orizzontali cambiano), la variazione di tensione efficace è sostanzialmente pari a $-\Delta u_w$, da cui segue che, adottando il formalismo edometrico:

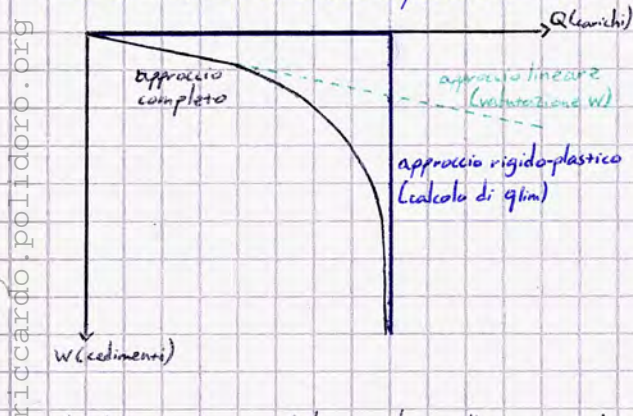
$$W_c = \int_0^H \frac{\Delta u_w}{E_{ed}} dz = \int_0^H \frac{\Delta \sigma_3 + A(\Delta \sigma_1 - \Delta \sigma_3)}{E_{ed}} dz$$

Immaginando che E_{ed} sia costante in tutto il dominio, con alcuni passaggi matematici risulta:

$$W_c = \beta W_{ed} \quad \text{aliquota del cedimento edometrico}$$

↳ funzione del parametro A di Skempton, della geometria e della rigidità della fondazione.

Carico limite di fondazioni superficiali



Come anticipato, il carico limite è per definizione il valore del carico raggiunto il quale si assume che la struttura di fondazione collassi; rispetto al comportamento effettivo non lineare (riproducibile tramite il sistema di equazioni del problema di consolidazione), nelle pratiche applicazioni si considera nella valutazione dei cedimenti un comportamento elastico lineare o non lineare tale da approssimare efficacemente la curva in una zona sufficientemente lontana da q_{lim} , in cui si ipotizza lavori la struttura di fondazione in condizioni di esercizio; analogamente, nella valutazione del carico limite si tende abitualmente a ipotizzare un comportamento rigido-plastico, governato dal criterio di rottura di Mohr-Coulomb (in cui si assume

che il sistema non si deforma fino alla rottura). Inoltre, si considera il problema come un problema piano di deformazione (indefinito nella direzione ortogonale al piano di riferimento), con un piano di posa orizzontale e un

carico verticale e uniformemente distribuito sul piano di posa (\triangle In queste valutazioni la struttura di fondazione "non esiste": lo obiettivo è la valutazione del carico trasmesso da essa per valutare il carico limite e quindi quello di esercizio). Valgono le seguenti condizioni al contorno:

- Criterio di rottura di Mohr-Coulomb

$$\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \left(c' \cotg \phi' + \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}\right) \text{sen } \phi'$$

- Condizioni residue di un problema piano di deformazione: assumendo che Z sia la direzione ortogonale al piano di riferimento, si ha che:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0$$

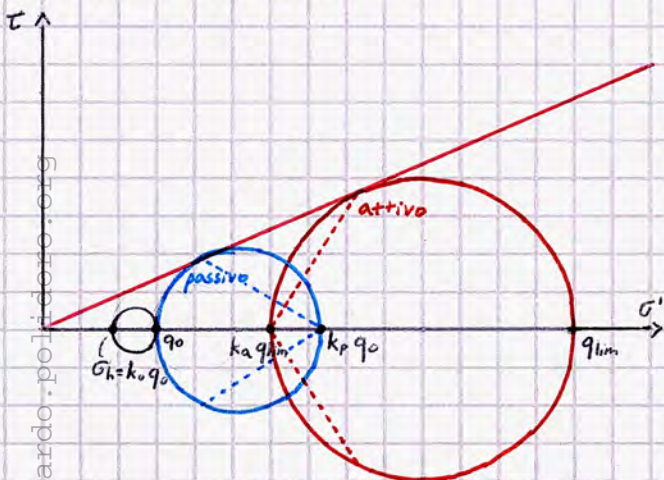
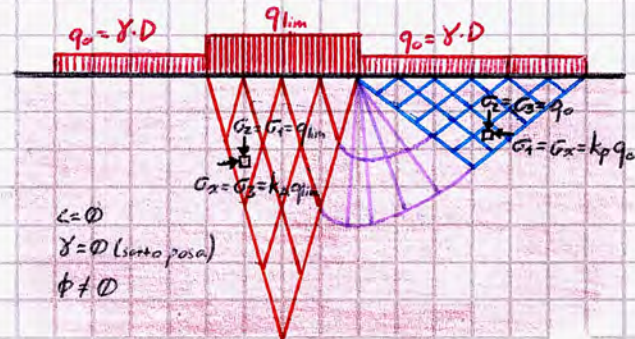
Essendo un sistema di 3 equazioni in 3 incognite, in alcune condizioni elementari si può raggiungere una soluzione in forma chiusa; il problema - non essendo noto a priori il volume interessato dalla rottura - viene tipicamente risolto tramite la sovrapposizione (somma) di 3 casi elementari per definire il carico limite. (a rigore, il principio di sovrapposizione degli effetti non è applicabile; il calcolo è quindi approssimato).

1. Si immagini che il dominio sia costituito da un continuo elastico dotato di angolo di attrito ϕ ma in assenza di peso e coesione e si assuma che il terreno laterale alla struttura di fondazione contribuisca al problema unicamente in termini di peso (e non con contributi resistenti di altra natura). Ipotizzando che il piano di posa si trovi a una profondità D, il carico del terreno posto lateralmente al piano di posa sarà pari a $q_0 = \gamma \cdot D$.

Con questa soluzione è possibile determinare l'entità del q_{lim} , ma anche di definire il volume del continuo interessato dal fenomeno di rottura e in che modo esso va a rottura.

Nella soluzione del primo caso elementare si osserva che al raggiungimento di q_{lim} si forma un cono in cui il terreno va a rottura in condizioni di rottura attiva (per mancanza di contenimento laterale, il Cerchio di Mohr va a tangenza). Le tensioni laterali sono dovute al peso applicato nelle zone laterali alla fondazione; parallelamente alle regioni al di sotto dei carichi laterali si rompono in stato passivo. Tra le due zone vi è una zona di transizione, in cui si verifica una rotazione delle tensioni principali di tensione e quindi delle superfici di rottura; la resistenza del sistema è sostanzialmente garantita dalla resistenza passiva del cono laterale alla fondazione.

In termini di Cerchi di Mohr, partendo dalle condizioni di riposo (nerol) si osservano gli stati tensionali del cono in regime di stato attivo (sotto la fondazione) e quelli del cono in stato passivo; in particolare si nota che $k_p \cdot q_0$ e $k_a \cdot q_{lim}$ sono "parenti", si influenzano l'uno con l'altro.



Ricapitolazione rottura in stato tensionale...

- Attivo: la tensione orizzontale è la tensione principale minima, le superfici di rottura tendono a verticalizzarsi (come un carico in cella triassiale).
- Passivo: a rottura, la tensione orizzontale è tensione principale massima, le superfici di rottura tendono ad orizzontalizzarsi.

Il meccanismo di rottura consiste in un rifluimento del terreno posto al di sotto della striscia di carico verso l'esterno. Tale rifluimento provoca rottura per difetto di contenimento laterale nel terreno posto al di sotto della striscia di carico (rottura in stato attivo) e rottura per eccesso di compressione laterale nel terreno posto esteriormente alla striscia di carico (rottura in stato passivo).

La zona di terreno al di fuori della striscia di carico si oppone al rifluimento e consente alla fondazione di resistere; detta resistenza aumenta all'aumentare della resistenza orizzontale passiva che si sviluppa nella zona, dipendente dalla sola tensione verticale agente ($c=0$) dovuta al solo terreno al di sopra del piano di posa ($\gamma=0$).

Risulta la seguente soluzione matematica del problema:

$$q_{lim,1} = N_q \cdot q_0 = N_q \cdot \gamma_1 \cdot D \quad [F/L^2]$$

↳ peso del terreno al di SOPRA del piano di posa

Essendo in assenza di coesione e di peso al di sotto del piano di posa, lo stato tensionale presenta solo q_0 come elemento di resistenza.

N_q è un coefficiente adimensionale, funzione crescente dell'angolo di attrito del terreno posto AL DI SOTTO del piano di posa (SOPRA IL PIANO DI POSA NON SI CONSIDERA LA RESISTENZA!).

2. Non si considera q_0 (fondazione senza terreno posto lateralmente), si continua ad assumere che il sottosuolo sia privo di peso ma si assume che la sua **coesione** sia non nulla; ne segue che la resistenza del cuneo laterale alla fondazione è dovuta alla coesione, che "si trasforma" in un carico stabilizzante: da un'osservazione del criterio di rottura di Mohr-Coulomb risulta che la presenza di una coesione non nulla è equivalente all'applicazione di un carico di intensità $c' \cotg \phi$; graficamente, l'effetto è un'ideale traslazione dell'asse delle τ fino a incontrare il punto a coesione nulla.

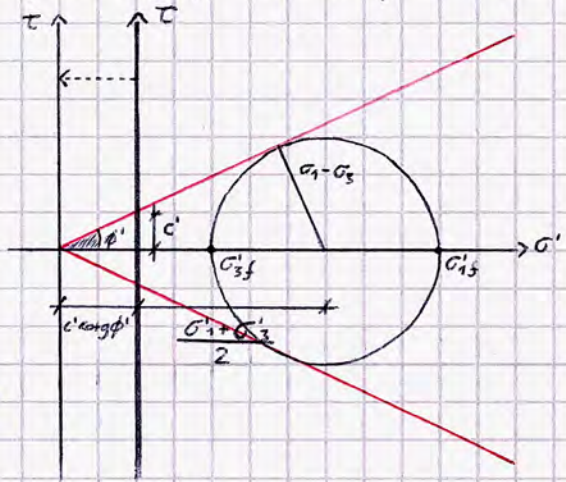
La coesione corrisponde quindi a un carico fittizio in cui $q_0 = c' \cotg \phi$; ci si riconduce quindi al caso 1 per la risoluzione:

$$q_{lim,2} + q_0 = N_q \cdot q_0$$

$$q_{lim,2} + c \cotg \phi = N_q \cdot c \cotg \phi$$

$$q_{lim,2} = \frac{N_c \cdot c}{N_q - 1}$$

↳ $[c(N_q - 1) \cotg \phi]$, ADIMENSIONALE
↳ sotto il terreno di fondazione



Il grafico con i cunei è analogo al caso 1, ma privo di q_0 significa: $q_0 = c \cotg \phi$

3. Non si considera q_0 , si assume coesione nulla ma il terreno al di sotto del piano di posa è considerato con il proprio peso; la resistenza passiva nella zona esterna alla striscia di carico è dovuta alla presenza delle tensioni verticali determinate dal peso proprio; la soluzione del caso, non ricavabile per via analitica ma solo per via numerica, determina come espressione del carico limite:

$$q_{lim,3} = N_\gamma \cdot \gamma_2 \cdot B/2$$

↳ peso del terreno al di SOTTO del piano di posa

in questo caso, la larghezza della fondazione incrementa il carico unitario $[F/L^2]$, in quanto il peso del terreno porta ad un aumento degli stati tensionali in profondità all'aumentare delle dimensioni della fondazione.

Queste tre soluzioni esprimono dei carichi unitari $[F/L^2]$; ne segue che per valutare il carico limite di una fondazione nastriforme (trave rovescia) occorre moltiplicare per B tutti e tre i termini $\Rightarrow [F/L]$. Complessivamente, si ha:

$$q_{lim} [F/L^2] = N_q \cdot \gamma_1 \cdot D + N_c \cdot c + N_\gamma \cdot \gamma_2 \cdot B/2 \implies Q_{lim} [F/L] = B (N_q \cdot \gamma_1 \cdot D + N_c \cdot c + N_\gamma \cdot \gamma_2 \cdot B/2)$$

Forma trinomia di Terzaghi del carico limite

Osservazione: le tensioni di rottura del terreno non dipendono solo dalle caratteristiche intrinseche del terreno stesso, ma anche dalla profondità del piano di posa e dalla larghezza della struttura di fondazione; ne segue che è necessario conoscere sia le caratteristiche del materiale che le caratteristiche geometriche del problema.

I tre coefficienti di carico limite N_q , N_c , N_γ sono tutti adimensionali e funzioni crescenti dell'angolo di attrito ϕ del terreno al di sotto del piano di posa; essendo dette funzioni sostanzialmente esponenziali e tangenti, si registra una variabilità dei coefficienti molto pronunciata con l'angolo, soprattutto sopra i 30° :

	N_q	N_c	N_γ
20°	6,40	14,83	5,39
30°	18,40	30,14	22,40
40°	64,20	75,31	109,41

Nel passare da 20° a 40° , N_c si incrementa di 5 volte, N_q di 10, N_γ di 20.

Per giustificare la dipendenza anche da B del carico limite unitario in un mezzo dotato di peso e resistenza attrittiva, si consideri che portare a carico limite una fondazione equivale a far scorrere la massa di terreno posta al di sotto del piano limite verso l'esterno; il carico limite quindi aumenta all'aumentare della resistenza a scorrimento opposta da tale massa.

Se la fondazione è più larga, il volume di terreno che va a rottura si estende a profondità maggiori; in presenza di peso proprio, a profondità maggiori corrispondono componenti normali di tensione maggiori; quindi una resistenza attrittiva maggiore.

Anche nei casi 1 e 2 una larghezza maggiore comporta un approfondimento della massa di terreno che va a rottura, in quei casi però all'incremento di profondità non corrispondono zone di maggior resistenza in quanto lo stato tensionale non varia con la profondità per assenza del peso proprio; dunque il q_{lim} unitario non dipende dalla larghezza della fondazione.

La forma trinomia di Terzaghi del carico limite è valida solo nel caso di una fondazione nastriforme caricata verticalmente e con carico centrato; nelle strutture di fondazione è però abitualmente presente taglio (che inclina la forza applicata sulla fondazione) e momento (che produce eccentricità), ulteriormente aggravati in presenza di azioni sismiche; per tener conto di queste condizioni si applicano alla formula dei coefficienti correttivi o degli approcci semplificati che tengono conto di questi effetti.

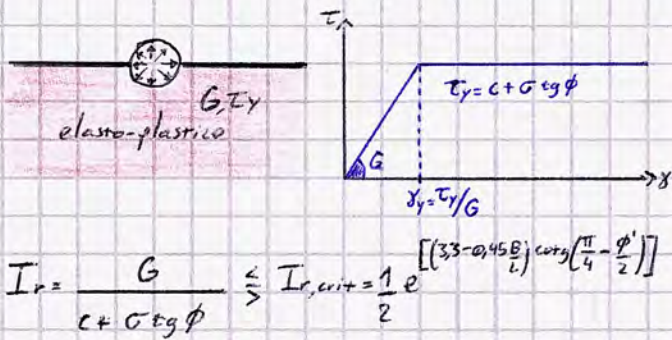
Il punzonamento, sintomatico di un comportamento plastico incidente nel terreno, essendo prodotto anche da deformazioni volumetriche non può verificarsi in condizioni non drenate; tipicamente si verifica in terreni molto deformabili come sabbie sciolte e argille normalmente consolidate. Per determinare qual è il meccanismo di rottura che avviene in un terreno, è rilevante valutare il rapporto tra rigidità e resistenza del terreno: grazie agli studi sul punzonamento di Vesic (1975), che studiò il fenomeno della rottura per punzonamento di fondazioni dirette assimilando il terreno come un mezzo elastico perfettamente plastico e la rottura per carico limite all'espansione di una cavità cilindrica indefinita.

⚠ La modellazione del terreno con comportamento rigido plastico è valida per materiali che si deformano poco prima di andare incontro a rottura (sabbie dense, argille sovraconsolidate), provocando un fenomeno di rottura generale; esistono però dei materiali che vanno incontro a rotture locali per punzonamento, fenomeno che si verifica molto prima della rottura teorica calcolata e che non avviene come meccanismo di collasso ma a seguito di un'elevata spinta degli elementini sotto il piano di posa.

Il fenomeno risulta retto da un coefficiente, detto indice di rigidità, che correla la rigidità alla resistenza del mezzo: all'aumentare di G migliora il comportamento e ritarda ($c + \sigma \tan \phi$), partendo verso una rottura generale.

Nell'espressione dell'indice di rigidità, la G viene considerata a una profondità $D + B/2$; si osserva che se $I_r < I_{r, critico}$, bisogna applicare dei coefficienti riduttivi alla formula trinomia.

Nelle pratiche applicazioni si tende a calcolare direttamente i coefficienti suddetti, applicandoli alla formula se risultano minori di uno.



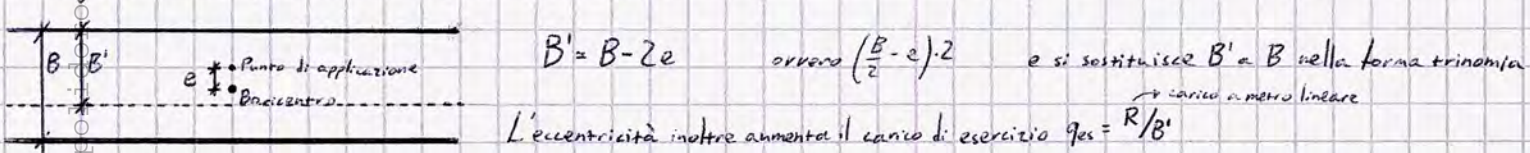
$$I_r = \frac{G}{c + \sigma \tan \phi} \leq I_{r, crit} = \frac{1}{2} \left[(3.3 - 0.45 \frac{B}{l}) \cot(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi'}{2}) \right]$$

Se $I_r < I_{r, crit} \Rightarrow \psi_q, \psi_c, \psi_\gamma = f(I_r, \phi) < 1$

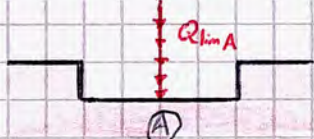
Nel caso in cui la fondazione ha forma diversa dalla striscia (quadrato, cerchio...), il problema non è più piano; la tridimensionalità delle superfici di rottura produce un carico limite unitario maggiore rispetto a quello associato alla striscia di uguale larghezza; nelle applicazioni si considerano dei coefficienti correttivi alla formula trinomia che tengono conto della forma della fondazione:

$$\frac{z_q, z_c, z_\gamma}{> 1 \quad < 1} = f(\text{forma}, \phi)$$

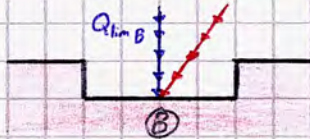
Se la risultante del carico è applicata eccentricamente, si considera come efficace la sola striscia di fondazione che centra il carico, di larghezza $B' < B$. Definita e l'eccentricità, si ha che:



Se la risultante del carico è inclinata rispetto alla verticale, il carico limite si riduce perché la forza orizzontale che agisce sul piano limite incrementa la tensione tangenziale agenti nel terreno, facilitandone il ribaltamento nella direzione di applicazione della forza; ipotizzando che il terreno conservi inalterata l'inclinazione della risultante fino al raggiungimento del carico limite, l'espressione del carico limite è quella tradizionale con l'aggiunta di 3 coefficienti correttivi che dipendono dall'inclinazione e dalle proprietà di resistenza del terreno; attraverso l'aggiunta di altri coefficienti correttivi è possibile portare in conto l'eventuale inclinazione del piano di posa e del piano di campagna.



Si incrementa il carico fino a Q_{lim}



Il carico applicato è inclinato, la sua componente verticale raggiunge Q_{lim} ad un certo valore di Q , minore rispetto al caso A: si ha un rifluimento laterale favorito verso la direzione del carico, determinando una dissimmetria negli stati tensionali che implica che $q_{lim} < q_{lim A}$.

Anche in questo caso si introducono dei coefficienti correttivi i_q, i_c, i_γ , particolarmente penalizzanti (per le fondazioni di muri di sostegno possono anche assumere valore pari a 0,5), dipendenti dall'inclinazione e dalle proprietà di resistenza del terreno.

Applicazioni della formula del carico limite ⚠

La formula trinomia del carico limite per fondazioni superficiali è applicabile solo su un mezzo omogeneo; nel caso di sottosuoli stratificati è quindi necessario definire un mezzo omogeneo equivalente (l'unica disomogeneità ammissibile è tra i γ sopra e sotto il piano di posa, in quanto il terreno laterale alla fondazione è rilevante solo in quanto carico, non in termini di resistenza). **Nota:**

La formula inoltre è applicabile in condizioni di:

- mezzo asciutto
- falda in quiete (+ quote)
- condizioni non drenate

Mezzo asciutto/in condizioni drenate: la formula deve essere applicata allo scheletro solido, richiedendo quindi la valutazione delle proprietà e degli stati tensionali dello scheletro solido; ne segue che N_q, N_c, N_γ vanno valutati in funzione di ϕ' .

Mezzo in condizioni non drenate: la formula deve essere riferita al mezzo monofase equivalente, poiché acqua e scheletro solido si deformano insieme; bisogna quindi valutare gli stati tensionali totali. Si ha inoltre che, essendo le condizioni non drenate, $\phi = 0$ e la coesione è pari alla coesione non drenata c_u .

Definito q_0 come valore di tensione efficace verticale in corrispondenza del piano di posa, indicati con:

- γ_1 il peso dell'unità di volume al contenuto d'acqua naturale;
- $\gamma_{sat,1}$ il peso dell'unità di volume del mezzo ipotizzato saturo;
- γ'_1 il peso dell'unità di volume alleggerito.

Si ha che:

- $q_0 = \gamma_1 \cdot D$ se la falda è al di sotto del piano di posa;
- $q_0 = \gamma_{sat,1} \cdot D$ se la falda è al di sotto del piano di posa ed il mezzo è saturo per risalita capillare;
- $q_0 = \gamma'_1 \cdot D$ se la falda è al piano campagna.

Fissiamo inoltre:

- $\gamma_1 D \rightarrow$ stato tensionale in corrispondenza del piano di posa.
- $\gamma_2 B/2 \rightarrow$ stato tensionale a profondità $B/2$ dal piano di posa.

Carico limite in condizioni asciutte: è il caso più semplice, richiede la valutazione dei termini rispetto alle proprietà del solo scheletro solido.

$$q_{lim} = N_q(\phi') \cdot \overbrace{\gamma_1 \cdot D}^{\gamma \text{ naturale}} + N_c(\phi') \cdot \underbrace{c'}_{\text{coesione efficace, dello scheletro solido}} + N_\gamma(\phi') \cdot \gamma_2' \cdot B/2$$

Condizioni drenate, falda in corrispondenza del piano di posa:

$$q_{lim} = N_q(\phi') \cdot \gamma_1 \cdot D + N_c(\phi') \cdot c' + N_\gamma(\phi') \cdot \gamma_2' \cdot B/2$$

↪ se la risalita capillare porta il terreno a saturazione, a γ_1 si sostituisce γ_{sat} .
↪ in condizioni drenate si deve valutare lo stato tensionale EFFICACE a profondità $B/2$ dal piano di posa.

Condizioni drenate, falda al piano di posa con risalita capillare fino al piano campagna:

$$q_{lim} = N_q(\phi') \cdot \gamma_{sat,1} \cdot D + N_c(\phi') \cdot c' + N_\gamma(\phi') \cdot \gamma_2' \cdot B/2$$

Essendo la falda immersa, è opportuno aggiungere la sottrazione idraulica $\gamma_w \cdot D$. 79

Condizioni drenate, falda a piano campagna: essendo in questo caso la fondazione immersa in acqua, occorre aggiungere la sottospinta idraulica di galleggiamento agente sulla struttura.

$$q_{lim} = N_q(\phi') \cdot \gamma_s' \cdot D + N_c(\phi') \cdot c' + N_\gamma(\phi') \cdot \gamma_s' \cdot \frac{B}{2} + \gamma_w \cdot D$$

Condizioni non drenate: la formula è applicata al mezzo monofase equivalente, vi compaiono dunque le azioni applicate sullo insieme scheletro solido + acqua di porosità, richiedendo un approccio in tensioni totali e una valutazione delle proprietà di resistenza del mezzo monofase:

- $L = c_u$;
- $\phi = \phi_u = 0$.

$$q_{lim, t=0} = N_q(\phi_u) \cdot \gamma_{sat,1} \cdot D + N_c(\phi_u) \cdot c_u + N_\gamma(\phi_u) \cdot \gamma_{sat,2} \cdot \frac{B}{2}$$

Nel caso di argille, il carico limite varia al variare del tempo; in genere si determinano i valori del carico limite all'istante iniziale (condizioni non drenate) e a tempo infinito (condizioni drenate).

Nel caso di sabbie, il carico limite è legato invariabilmente alle condizioni drenate; in genere è assente il termine coesivo nella formula trinomia.

Progettazione agli stati limite con coefficienti di sicurezza parziali

Le formule ricavate in precedenza rappresentano la base per la progettazione delle strutture di fondazione ai sensi delle prescrizioni delle NTC.

Stato limite: condizione superata la quale la struttura non soddisfa più le esigenze per cui è stata progettata (l'approccio prestazionale nella progettazione).

Gli stati limite si dividono essenzialmente in due classi:

- Stati limite di esercizio: limite di decadimento delle prestazioni relative all'uso dell'edificio, è tendenzialmente reversibile.
- Stati limite ultimi: stati limite oltre i quali c'è un serio rischio di perdita di vite umane e la struttura subisce danni ingenti, a carattere irreversibile; sono di maggior interesse per la progettazione o nell'approccio all'esistente e sono legati a:
 - Perdita di equilibrio della struttura o di una sua parte;
 - Spostamenti o deformazioni eccessive;
 - Raggiungimento della massima capacità di resistenza di parti di struttura, collegamenti, fondazioni;
 - Raggiungimento della massima capacità di resistenza della struttura nel suo insieme;
 - Raggiungimento di meccanismi di collasso nei terreni;
 - Rottura di membrature e collegamenti per fatica;
 - Rottura di membrature e collegamenti per altri effetti dipendenti dal tempo;
 - Instabilità di parti della struttura e del suo insieme.

Verifiche agli stati limite: la normativa precedente considerava dei parametri medi di calcolo per le condizioni di collasso, definendo poi un margine di sicurezza globale; per le fondazioni ad esempio si calcolava il carico limite a collasso della struttura per poi applicare un coefficiente di sicurezza globale (pari a 3 per strutture per civile abitazione) nel definire le condizioni di esercizio.

La normativa attuale definisce azioni e resistenze caratteristiche ("medie", calcolate al meglio delle proprie capacità) e di progetto, ricavate da quelle caratteristiche tramite l'applicazione di coefficienti di sicurezza PARZIALI, applicati alle varie proprietà concorrenti alla definizione dell'azione (resistenza).

Ad esempio, nella valutazione del q_{lim} si applicano coefficienti di sicurezza su $\tan \phi$, δ e le altre singole proprietà fisiche presenti nella formula.

Modificate resistenze e azioni da caratteristiche a valori di progetto, si verifica che gli effetti delle azioni siano inferiori agli effetti delle resistenze:


$$E_d \leq R_d$$

In genere, i coefficienti di sicurezza ampliano gli effetti sfavorevoli e riducono quelli favorevoli, presenti su entrambi!

Le azioni sono classificate in base alla loro variabilità nel tempo, dividendosi in:

- Permanenti (G)
 - Peso proprio degli elementi strutturali / del terreno, forze indotte dal terreno, forze risultanti dalla pressione dell'acqua (se costanti nel tempo, ovvero se la falda è stabile). (G1)
 - Peso proprio degli elementi non strutturali (G2).
- Variabili (Q)
 - Di lunga durata rispetto alla vita nominale della struttura;
 - Di breve durata.
- Eccezionali (A)
 - Incendi, esplosioni, urti, impatti.
- Sismiche (E)
 - derivanti dai terremoti.

Nota: il peso proprio del terreno è un'azione con effetto:

- Stabilizzante, per fondazioni superficiali;
- Instabilizzante, per muri di sostegno; 
- Neutro, per la stabilità dei pendii: il comportamento è analogo a quello di un blocco su un piano inclinato, richiedendo la valutazione di F_x e F_z , il cui rapporto non dipende dall'entità del peso ma dall'inclinazione del pendio: definita E l'inclinazione suddetta sulla orizzontale, si ha come coefficiente di sicurezza:

$$F = \frac{tg \phi}{tg E}$$

Esse sono trattate in combinazioni in cui ogni contributo ha il proprio coefficiente di sicurezza (≥ 1 a seconda che siano sfavorevoli o favorevoli); nella combinazione sismica di norma non si alterano i carichi permanenti.

Nelle verifiche $E_d \leq R_d$ a SLU si applicano dei gruppi di coefficienti parziali per alterare le azioni [resistenze], specifici per il singolo caso. Allo SLU si considerano 5 diversi gruppi di coefficienti per le azioni, coi singoli coefficienti specifici per ciascuna categoria (G1, G2, etc):

- EQU - stato limite di equilibrio come corpo rigido;
- STR (A1) - stato limite di resistenza della struttura; stress massimo nella struttura
- GEO (A2) - stato limite di resistenza del terreno; stress massimo nel sistema terreno
- UPL - stato limite di sollevamento;
- HYD - stato limite di sifonamento.

Si riportano di seguito i coefficienti moltiplicativi per i gruppi di maggior interesse.

Carichi	Effetto	A1 - STR	A2 - GEO
Permanenti strutturali	Favorevole	1	1
Permanenti strutturali	Sfavorevole	1,3	1
Permanenti non strutturali	Favorevole	0	0
Permanenti non strutturali	Sfavorevole	1,5	1,3
Variabili	Favorevole	0	0
Variabili	Sfavorevole	1,5	1,3

Si osserva che la combinazione GEO riduce l'alterazione globale dei carichi; inoltre, per i carichi caratterizzati da una certa variabilità si assume coefficiente nullo per le azioni favorevoli (assumendo che possa esistere un momento in cui essi non agiscono) e pari ad 1,5 per quelle sfavorevoli (nell'ipotesi in cui si possa attuare un eccessivo sovra dimensionamento nel tempo che porti ad elevati sovraccarichi).

Per le resistenze invece si definiscono solo due gruppi, identificati con M1 ed M2 e caratterizzati dai seguenti divisori:

Parametro	Grandezza	Coefficiente parziale	M1	M2
Angolo di resistenza al taglio	$tg(\phi'_k)$	$\gamma_{\phi'}$	1,0	1,25
Coesione efficace	c'_k	$\gamma_{c'}$	1,0	1,25
Resistenza non drenata	c_{uk}	γ_{c_u}	1,0	1,4

Si osserva una maggior incertezza (contribuibile dal valore maggiore del divisore) nella valutazione della coesione non drenata; ciò è dovuto al fatto che essa non è una proprietà del terreno ma dipende dallo stato tensionale efficace di partenza (ad esempio, in un banco di argilla normal consolidata esse varia linearmente con la profondità; sorge dunque il problema su dove conviene valutare c_u).

riccardo.polidoro.org

Nella verifica $E_d \leq R_d$, a questi coefficienti parziali si aggiunge comunque un coefficiente globale, analogamente a quanto previsto dai dispositivi normativi precedenti.

Nel passaggio dai valori caratteristici a quelli di progetto, la normativa prevede due possibili approcci tra loro alternativi (è sufficiente che uno solo dei due sia verificato)

- Approccio 1: contiene due combinazioni e richiede che siano entrambe soddisfatte;
- Approccio 2: contiene un'unica combinazione.

Carichi	Effetto	A1-STR	A2-GEØ
G1	Favorevole	•• 1,0	• 1,0
	Sfavorevole	•• 1,3	• 1,0
G2	Favorevole	•• Ø	• Ø
	Sfavorevole	•• 1,5	• 1,3
Q	Favorevole	•• Ø	• Ø
	Sfavorevole	•• 1,5	• 1,3

Grandezza	M1	M2
$\text{tg}(\phi'_k)$	•• 1,0	• 1,25
c'_k	•• 1,0	• 1,25
c_{uk}	•• 1,0	• 1,4

Moltiplicatori globali	R1	R2	R3
γ_r	• 1	• 1	• 1,1 ÷ 1,4

Approccio 1:

• Combinazione 1:

- A1 - azioni;
- M1 - resistenze;
- R1 - coefficiente globale di penalizzazione (unitario).

• Combinazione 2:

- A2 - azioni;
- M2 - resistenze;
- R2 - coefficiente globale.

- Approccio 2: coincide con l'approccio 1 combinazione 1 ma con un coefficiente globale di resistenza R3, con diverse decurtazioni a seconda del tipo di verifica:
 - A scorrimento $\rightarrow 1,1$
 - A carico limite $\rightarrow 1,4$ (di nostro interesse)

Esempi di verifiche a carico limite

Approccio 1 combinazione 1

R_d risulta dall'applicazione dei coefficienti parziali alla formula del carico limite; volendo classificare gli elementi nella formula si ha:

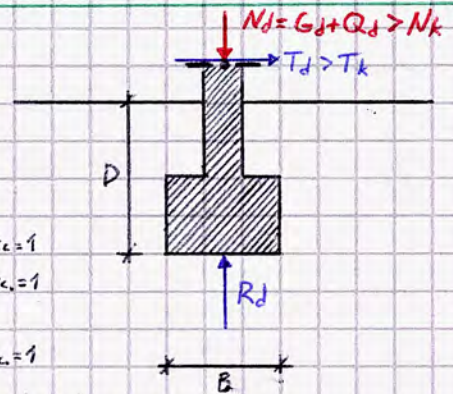
- Peso proprio del terreno $\rightarrow G1$ favorevole; $c_{sicc} = 1$
- $\phi'_k, c'_k \rightarrow$ parametri di resistenza, non alterati in approccio 1 combinazione 1; $c_{sicc} = 1$
- $\gamma_2 \rightarrow G1$ favorevole. $c_{sicc} = 1$

Quindi,

$$R_d = \left[N_q(\phi'_k) \cdot i_q \cdot \gamma_{1k} \cdot D + N_c(\phi'_k)_{ic} \cdot c'_k + N_{\gamma} i_{\gamma}(\phi'_k) \gamma_{2k} \frac{B'}{2} \right] \cdot B'$$

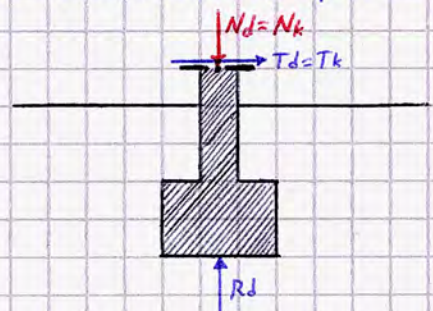
$$E_d = \frac{N_d}{B'}$$

$\rightarrow N_d$ presenta implicitamente alterazioni (1,3G1 + 1,5G2 + 1,5Q ...) sulle singole azioni; è un parametro fornito dal progettista delle strutture in elevazione (e in questo caso $N_d > N_k$)



Approccio 1 combinazione 2

In questo caso, N_d presenta un incremento delle azioni sfavorevoli di minor entità; variano in R_d i parametri N_q, N_c, N_{γ} , essendo dipendenti da ϕ'_i ; essendo il coefficiente di sicurezza applicato a $\text{tg} \phi'_k$, per valutare ϕ'_i bisogna calcolare $\arctg\left(\frac{\text{tg} \phi'_k}{\gamma_{m2}}\right) \Rightarrow N_i = N_k \left(\arctg\left(\frac{\text{tg} \phi'_k}{\gamma_{m2}}\right)\right)$



Risulta quindi:

$$R_d = \left(N_q \left(\arctg \left(\frac{tg \phi'_k}{1,25} \right) \right) i_q \cdot \gamma_{rk} \cdot D + N_c \left(\arctg \left(\frac{tg \phi'_k}{1,25} \right) \right) i_c \cdot \frac{c'_k}{1,25} + N_\gamma \left(\arctg \left(\frac{tg \phi'_k}{1,25} \right) \right) i_\gamma \cdot \gamma_{rk} \cdot \frac{B'}{2} \right) \cdot B'$$

$$E_d = N_d / B'$$

Approccio 2

Considerato lo R_d dell'approccio 1 combinazione 1, vi si applica il coefficiente globale di 1,4; anche E_d sarà quella dell'approccio 1 combinazione 1.

$$R_d = \frac{1}{\gamma_r} \cdot R_d(A1; M1) \quad ; \quad E_d = E_d(A1; M1)$$

Interazione terreno-fondazione

Il progetto di fondazioni si lega a 3 problemi:

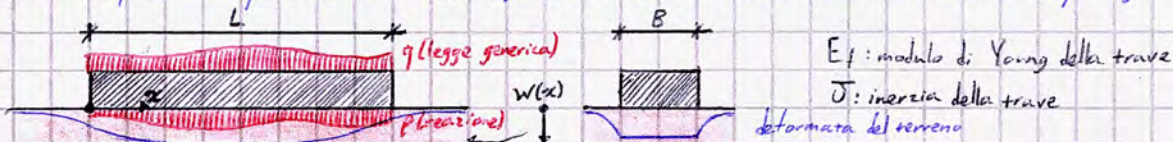
- Stimare il carico limite per poi determinarne il conseguente carico di esercizio;
- Verifica, noto il carico limite, dei cedimenti compatibili;
- Verifica che la struttura di fondazione, assoggettata al carico di esercizio e alle reazioni del terreno, sia soggetta a caratteristiche interne di sollecitazione compatibili con la sua resistenza.

Bisogna quindi occuparsi di quest'ultimo problema, qui accennato in relazione alla trave rovescia.

L'impostazione del problema muove dalle seguenti ipotesi:

- Si trascura la sovrastruttura se il carico produce effetti deformativi nel terreno, essi non alterano le azioni nella sovrastruttura;
- I carichi trasmessi non sono influenzati da cedimenti: essi si possono quindi ricavare da analisi a vincoli fissi (F_{fix}) o per aree di influenza.
- Il contatto tra fondazione e terreno è:
 - Liscio $\Rightarrow \tau = 0$
 - Bilaterale \Rightarrow Scorrimento nel terreno, consente di applicare la sovrapposizione degli effetti;

ipotesi valida per strutture isostatiche, estensibile alle strutture di fondazione se sono molto più rigide della sovrastruttura.



$w(x)$ è una legge attiva per effetto dei carichi sovrastanti, cui corrisponde $p(x)$, interazione trave-terreno per unità di lunghezza.

Ne segue che:

$$\begin{cases} E_f \cdot J \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q - p \\ w = f(p) \end{cases}$$

Equazione della linea elastica ($EI w'''' = q$)

Relazione cedimenti-carichi: p dipende da w e quindi dalle caratteristiche costitutive del mezzo, ovvero dal comportamento del terreno ($f(p)$ dipende dal modello di sottosuolo).

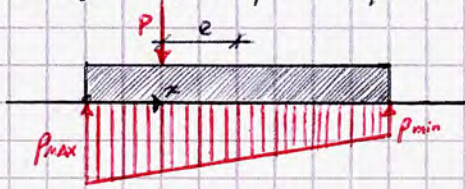
Nelle pratiche applicazioni si considerano dei metodi di risoluzione semplificati.

Metodo del trapezio delle tensioni

Si assume che la trave sia molto più rigida del terreno, implicando che la deformata è una deformata da trave rigida, implicando che gli spostamenti che si attivano per effetto dello spostamento rigido della trave assumono una legge lineare, cui si fa corrispondere una reazione lineare.

Formalmente, quindi è il comportamento del terreno ad essere rigido, cui si fa corrispondere una distribuzione trapezia di p come se la distribuzione di carico richiami la deformata rigida.

Ne segue che, noti p_{max} e p_{min} , è nota la distribuzione delle azioni agenti sulla trave.



Definita P la risultante di q , eccentrica, risultano 2 incognite (p_{max} , p_{min}), valutabili con due equazioni di equilibrio:

$$\text{Traslazione verticale} \quad \int_0^L p \cdot dx = P$$

$$\text{Rotazione} \quad \int_0^L x \cdot p \cdot dx = P \left(\frac{L}{2} - e \right) \quad \text{rispetto all'origine del riferimento}$$

Da cui risulta che: $p(x) = \frac{P}{L} \left(1 + 6 \frac{e}{L} - 12 \frac{ex}{L^2} \right)$ e, integrando le equazioni della linea elastica,

$$T(x) = \int_0^x p(x) dx$$

$$M(x) = \int_0^x T(x) dx$$

e si può verificare la struttura.

Metodo di Winkler (impropriamente detto metodo della trave elastica su suolo elastico)

Si ipotizza che la trave poggi su un letto di molle indipendenti a comportamento elastico (ovvero in cui la forza applicata è proporzionale allo spostamento); il suolo però non è elastico in senso stretto: un sistema di molle indipendenti non trasmette interazioni tangenziali (si comporta come l'acqua) ed è quindi diverso da un mezzo continuo elastico.

In questo caso le reazioni del terreno sulla trave sono proporzionali a w tramite una costante, detta costante di sottotondo k ; dimensionalmente per risalire al carico unitario p bisogna inoltre moltiplicare per la larghezza della fondazione:

$$p = k \cdot B \cdot w$$

Ad esempio, se p è un carico esteso su una striscia è possibile valutare il cedimento dal metodo edometrico da quello elastico:

Ne segue che k non è una proprietà del solo terreno: $k = p/B \cdot w$!

Ciò perché uno stesso carico su un'area maggiore produce differenti distribuzioni di tensione e un cedimento maggiore.

$$\begin{cases} w_{ex} = w_{ed} = \int_0^{4B} \frac{\sigma_z}{E_{ed}} dz \approx \frac{2q_{ex} \cdot B}{E_{ed}} \Rightarrow k = \frac{E_{ed}}{2B} \\ w_{ex} = w_{el} = \frac{q_{ex} \cdot B}{E} I_w(v) \Rightarrow k = \frac{E}{I_w B} \end{cases}$$

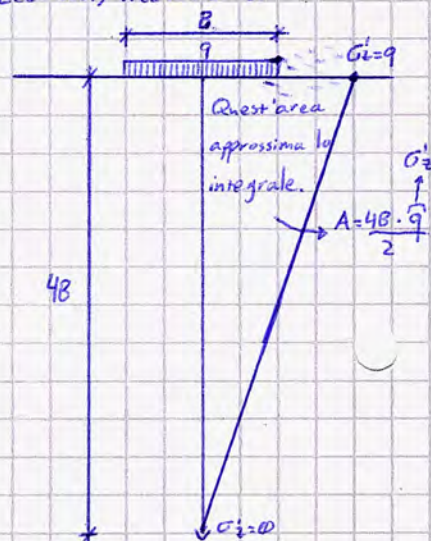
risolvibile in forma chiusa assumendo $E_{ed} = \text{cost.}$ e definendo una distribuzione di σ_z verosimile. Infatti, se $E_{ed} = \text{cost.}$, $w_{ed} = 1/E$ e:

L'equazione risultante è in questo caso:

$$E_f \cdot J \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} = q(x) - k B w(x)$$

In assenza di carichi distribuiti (tipico di travi rovesce, essendo rilevanti solo gli scarichi dei pilastri):

$$E_f \cdot J \cdot \frac{d^4 w}{dx^4} + k B w(x) = 0$$



Risulta il seguente integrale generale:

$$w(x) = e^{x/\lambda} \left(A \cos \frac{x}{\lambda} + B \sin \frac{x}{\lambda} \right) + e^{-x/\lambda} \left(C \cos \frac{x}{\lambda} + D \sin \frac{x}{\lambda} \right)$$

In cui $\lambda = \sqrt[4]{\frac{4E+J}{kB}}$ è la lunghezza caratteristica della trave, in cui figura il rapporto tra rigidità della trave e rigidità del terreno.

Le costanti A, B, C, D dipendono dalle condizioni al contorno.

Nota $w(x)$, derivando l'equazione della linea elastica si ottengono le altre componenti cercate:

$$p = kB \cdot w(x)$$

$$\alpha = dw/dx \quad \text{rotazione della trave}$$

$$M = d\alpha/dx$$

$$T = dM/dx$$

⚠ Per $\frac{L}{\lambda} \leq \frac{\pi}{4}$ la soluzione corrisponde a quella della trave rigida (distribuzione trapezoidale).

Per $\frac{L}{\lambda} > \pi$ la trave si dice infinitamente flessibile [di lunghezza infinita]: le caratteristiche interne di sollecitazione della trave si smorzano (vanno a 0 all'interno della trave) nella lunghezza della trave; in questo caso esiste una soluzione in forma chiusa per diverse condizioni al contorno.

Se compreso tra i due, l'equazione va risolta caso per caso, richiedendo spesso una risoluzione per via numerica (con tabelle).

Fondazioni profonde (su pali)

Sono fondazioni in cui $D/B \gg 1$, il che implica un cambiamento nel comportamento meccanico: c'è una significativa interazione per attrito sulla superficie laterale della fondazione (nelle fondazioni superficiali l'interazione è trascurabile perché gli stati tensionali in superficie sono molto bassi), dunque un contributo non trascurabile di resistenza laterale che, nel caso di un materiale omogeneo, aumenta con la profondità poiché aumentano gli stati tensionali.

I pali sono preferibili per:

- Carichi molto significativi;
- Terreni di scarsa qualità in superficie;
- Problemi di sedimenti.
- Quando una fondazione superficiale potrebbe essere sialzata per erosione dei terreni;
- Quando è necessario rinforzare strutture di fondazione superficiali esistenti.

su materiali soffici, un edificio di 7-8 piani deve essere realizzato su pali; comunque sono necessari per superare terreni scadenti.

In alcuni casi, come nella pile di alcuni viadotti, le strutture di fondazione applicano un tiro al terreno, rendendo necessario l'uso dei pali in virtù della loro resistenza attrittiva.

⚠ L'attrito dipende dalla forza normale alla superficie, ciò implica che la resistenza dipende sia dallo stato tensionale litostatico che dalle modalità realizzative:

- Scavo per poi gettare → decompressione iniziale
- Intossicazione → aumento di resistenza

Nella classificazione delle fondazioni profonde ci si riferisce quindi a più criteri, che condizionano la resistenza:

- Tecnologia realizzativa (battuti/trivellati);
- Materiale (legno/acciaio/CLS prefabbricato/CLS in opera);
- Diametro: cambia il funzionamento!
 - piccolo diametro → < 25 cm
 - medio diametro → 30-60 cm
 - grande diametro → > 80 cm

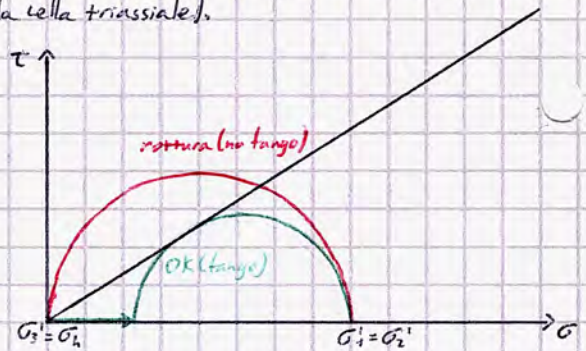
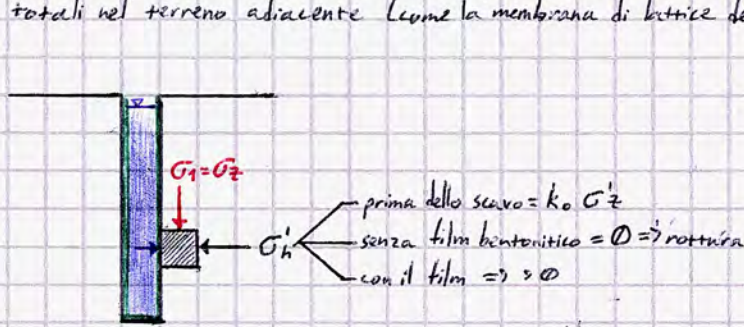
Pali battenti: essendo intessi implicano uno stato di coazione orizzontale molto significativo; ~~non~~ non possono però essere di grande diametro perché richiederebbero elevate energie di battitura. Per lo stesso motivo la loro lunghezza massima è di circa 20m in virtù delle elevate resistenze attrittive (oltre a problemi nel trasporto fino all'opera).

- Legno: forma tendenzialmente quadrata, dimensioni massime 50x50cm, Lmax 20m, Q lavoro 4-5 MPa;
- CLS prefabbricato: sezione quadrata/poligonale, MAX 50x50cm, Lmax 25m, Q lavoro 8-9 MPa, staffe intese in prossimità delle estremità per gli sforzi di battitura;
- Acciaio: sopporta alti sforzi, facilmente giuntabile, sono a forma ad H o tubolare, sono molto costosi.
- CLS in opera: si intigge un tubo-forma per poi realizzare l'incavo interno.

Pali avvitati: spostano di meno il terreno, si realizzano intiggendo un'elica con un tubo interno per il getto; dopodiché la si tira via eseguendo contestualmente il getto per poi introdurre la gabbia di armature alla fine.

Pali trivellati: prima si asporta il materiale con uno scavo (da sostenere in materiali sciolti, con un tubo di rivestimento) per poi posare l'armatura e gettare il CLS, estraendo infine il rivestimento.

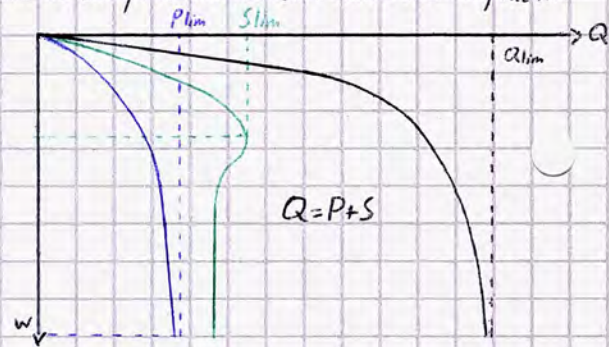
In alternativa al tubo di rivestimento, si può condurre uno scavo con tanghi bentonitici: attraverso una sospensione di bentonite in acqua si crea un moto di filtrazione verso l'esterno che determina la formazione di una sottile patina di bentonite lungo le pareti, rese progressivamente impermeabili (morzando il flusso nel tempo); esaurito il processo il foro è stabile, in quanto la pressione dell'acqua agente sulle pareti del foro si trasforma per via della patina in tensioni totali nel terreno adiacente (come la membrana di lattice della cella triassiale).



Comportamento di un palo di fondazione

Dal punto di vista fenomenologico il comportamento di un palo è sostanzialmente analogo a quello di una fondazione superficiale: inizialmente i cedimenti hanno legge lineare, poi concavità verso il basso fino a tendere asintoticamente al q_{lim} . Il palo però resiste tramite la resistenza alla punta e la resistenza laterale; ciò implica che la resistenza globale si scompone virtualmente nelle sue componenti:

- La resistenza alla punta cresce monotonicamente fino a un valore limite;
- La resistenza laterale ha un comportamento instabile, con un massimo per uno spostamento del palo di circa 2cm e un decadimento successivo.



Ne risulta un problema nella definizione del carico limite: nella valutazione bisogna stimare separatamente la resistenza alla punta (P) e quella laterale (S), ciascuna con il proprio andamento e massimo valore: la definizione di q_{lim} come somma dei massimi valori delle due resistenze è legittima solo se i due massimi si verificano in corrispondenza dello stesso cedimento.

In particolare, S_{lim} si registra a $w = 1-2$ cm indipendentemente dal diametro del palo; P_{lim} invece si attinge in corrispondenza di un valore del cedimento dipendente dal diametro del palo (più si allarga la fondazione più aumenta il cedimento), ma aumenta anche il q_{lim} unitario, come alla base di una fondazione superficiale, risultando in particolare che il cedimento che attiva la resistenza massima alla punta si verifica per spostamenti pari al 10-25% del diametro del palo; ciò implica che i pali di piccolo diametro hanno le due massime resistenze coincidenti; per pali grandi invece la resistenza di punta massima si verifica per cedimenti molto maggiori; non essendo i valori limite tra loro sommabili, si assume il seguente criterio:

$$Q_{lim} = S_{lim} + \alpha P_{lim}$$

α \rightarrow aliquota di resistenza alla punta per $w \approx 2$ cm

Calcolo della resistenza laterale S_{lim}

Si ipotizza che il meccanismo di rottura alla punta non interferisca con quello della superficie laterale, come indicato nei volumi significativi in figura.

La resistenza laterale risulta dall'applicazione della legge di attrito; poiché lungo il fusto le T non sono nulle, le condizioni non sono litostatiche: agirà una σ_z diversa da quella litostatica ($\sigma_z = \alpha \cdot \sigma_{z, litostatica}$); valgono le seguenti relazioni:

$$\sigma_z = \alpha \cdot \sigma_{z, litostatica}$$

$$\sigma_{nz} = k^* \cdot \sigma_z \quad \text{tensione normale alla superficie laterale}$$

↳ dipende fortemente dalla tecnologia realizzativa

$$T = \sigma_{nz} \cdot \operatorname{tg} \delta$$

Da cui risulta che $T_{lim} = \sigma_n \operatorname{tg} \delta = k^* \cdot \alpha \cdot (\gamma \cdot z) \operatorname{tg} \delta$

$$T_{lim} = k (\gamma \cdot z) \operatorname{tg} \delta$$

↳ contiene gli effetti di σ_z e il fatto che essa non è litostatica

Perché T_{lim} a una profondità z agisce costantemente su un'area $2\pi r \cdot dz$, si ha:

$$S_{lim} = \int_0^L T_{lim} \cdot 2\pi r \, dz = \dots = k \cdot \gamma \cdot \operatorname{tg} \delta \cdot 2\pi r \cdot \frac{L^2}{2}$$

⚠ Se $\delta < \phi'$, si considera δ nella formula; altrimenti si considera ϕ' !

↳ tende ad assomigliare al coefficiente di spinta:

- passiva, in pali battuti (compresse o il terreno circostante);
- attiva, in pali trivellati;
- a riposo, in pali avvistati.

$\operatorname{tg} \delta$ dipende dall'angolo di attrito del terreno e dal materiale del palo; nei calcoli si assume sempre $\operatorname{tg} \delta \leq \operatorname{tg} \phi'$, altrimenti lo scorrimento si verificherebbe tra due strati di terreno adiacenti invece che tra terreno e palo.
 $\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \phi' \Leftrightarrow$ pali in CLS in opera.

In condizioni non drenate nelle argille, ci si riferisce al mezzo monofase equivalente, implicando che la resistenza laterale non drenata si pone pari ad un'aliquota della coesione non drenata.

$$T_{lim} = \alpha \cdot c_u$$

Parametri che incidono sulla resistenza laterale:

- δ : può essere $\geq \phi'$; se l'attrito palo-terreno è maggiore dell'attrito terreno-terreno si riporta il parametro al valore dell'attrito terreno-terreno; ingegneristicamente quindi si assume sempre $\delta \leq \phi'$ (se $\delta > \phi'$ si considera $\delta = \phi'$); tipicamente ciò avviene per i pali in CLS, mentre nei pali in acciaio solitamente $\delta < \phi'$.
- k : trasforma le tensioni verticali in orizzontali, è parente a $k_a/k_0/k_p$ a seconda della tecnologia realizzata del palo (trivellati/avvistati/intissi).

Calcolo della resistenza alla punta P_{lim}

Nel calcolo, si ipotizza che il comportamento del palo sia analogo a quello di una fondazione superficiale, riconducendo il calcolo alla Formula trinomia di Terzaghi utilizzando i parametri del palo di fondazione (profondità del piano di posa = lunghezza del palo; larghezza della fondazione = diametro d del palo).

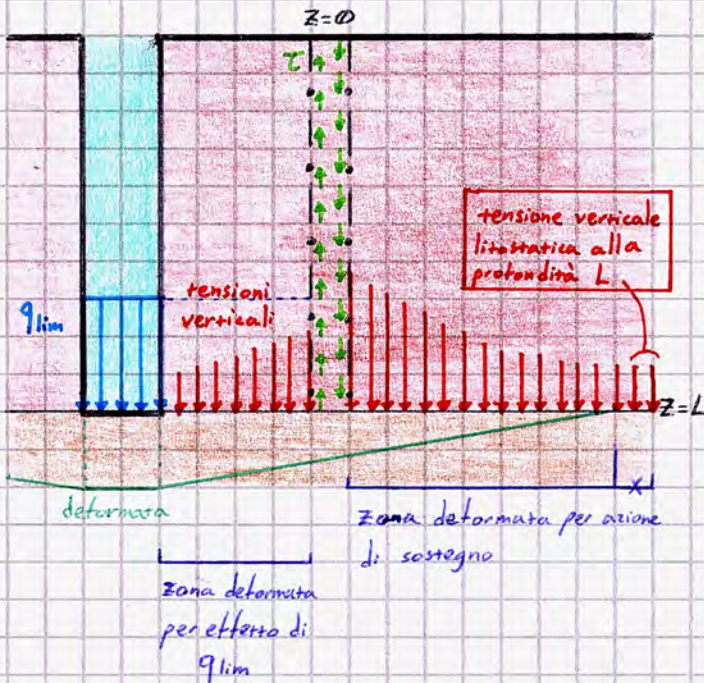
$$q_{lim} = N_q \cdot \gamma_1 \cdot L + N_c \cdot c + N_\gamma \cdot \gamma_2 \cdot \frac{d}{2}$$

Perché N_q ed N_γ sono dello stesso ordine di grandezza, ma $d \ll L$, il terzo termine della relazione è in realtà trascurabile rispetto ai primi due, dunque si ha che $q_{lim} = N_q \cdot \gamma_1 \cdot L + N_c \cdot c$.

Nel tener conto delle reali condizioni del palo, esistono varie teorie che definiscono N_q ed N_c , funzione crescente di ϕ' ; tra le varie teorie sussistono variazioni anche molto significative per un dato ϕ' ; la teoria attualmente più utilizzata è quella del russo Berezanov, che cerca di validare la formula binomia attraverso prove di carico su modelli fisici di pali con lo stesso diametro ma diverse lunghezze.

Berezanov postulò, come è lecito aspettarsi, che P_{lim} cresca linearmente con la lunghezza del palo, misurando il carico limite con una cella di carico all'estremità inferiore del palo per non misurare l'effetto della resistenza laterale.

In realtà si osserva che a partire da una certa profondità si verifica una certa costanza in P_{lim} , in quanto poco prima del raggiungimento di q_{lim} la punta del palo cede, determinando che l'estremità inferiore del palo scende e con essa anche una porzione del terreno posto lateralmente, fino al raggiungimento di una zona indisturbata.



Gli stati tensionali verticali nel piano $z=L$, che si oppongono al rifluimento (terreno laterale) è come se si ritrovasse improvvisamente al di sopra di un terreno deformabile; ciò implica che la zona tende a scaricarsi, caricando la zona fino a poco prima indisturbata e indisturbata, determinando una sorta di migrazione tensionale; ne segue che lo stato tensionale verticale diventa minore di $\gamma_1 \cdot L$.

L'effetto si esalta con la profondità del palo in quanto aumenta la superficie verticale che consente il trasferimento delle tensioni per attrito.

Per tener conto di questo effetto, si penalizzano N_q ed N_c , resi funzione decrescente rispetto al rapporto L/d .

$$N_q, N_c = f(\phi', \gamma; L/d)$$

Negli abachi di Berezanov, ogni classe di L/d presenta una propria curva, crescente con ϕ' .

Come per le fondazioni superficiali, in condizioni non drenate si considera il mezzo monotasse equivalente e le relative proprietà $\rightarrow \phi_u = 0; c \equiv c_u$.

$$q_{lim} = N_q (\phi_u = 0) \cdot \gamma_{sat} \cdot L + N_c (\phi_u = 0) \cdot c_u$$

Per pali di grande diametro si penalizza la resistenza massima alla punta, essendo essa stalsata rispetto ad S_{lim} ; si utilizza la formula trinomia con coefficienti N_q/N_c tabellati specificamente per pali di grande diametro.

In molte strutture di fondazione (piastre su palificate, pali a interassi ridotti...) sorge il problema del calcolo del carico limite della palificata: nella realizzazione di più pali si altera il comportamento del terreno, producendo un q_{lim} che non è pari alla somma dei q_{lim} del singolo palo; per una palificata di N pali intatti si ha:

$$Q_{lim, N} = E \cdot N \cdot Q_{lim}$$

coefficiente di efficienza

> 1 : la realizzazione della palificata incrementa la resistenza del terreno. È il caso dei terreni incoerenti, particolarmente con pali battuti. In questi casi si assume cautelativamente $E=1$.

< 1 : è il caso dei terreni a grana fine, particolarmente per pali battuti in argilla; l'intossicazione in "tempi brevi" implica un incremento delle pressioni interstiziali e un processo di riequilibrio idraulico dilazionato nel tempo, dunque una riduzione della resistenza.

Come evidente dalle note a fianco, il problema della efficienza si pone solo per terreni a grana fine (i terreni a grana grossa si considerano sempre con $E=1$).

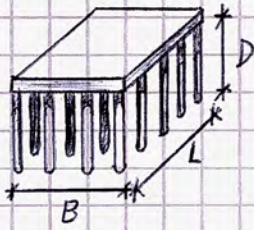
Nei terreni a grana fine, dovendosi riferire alle condizioni non drenate si può avere anche $E=0,6$.

Il coefficiente E per una palificata di $m \times n$ pali si può calcolare con la formula empirica di Converse-Labarre, dipendente dal numero di pali, dal loro interasse e dal loro diametro, in cui si osserva che all'aumentare del numero di pali e al ridursi dell'interasse si riduce E .

$$E = 1 - \frac{\arctg(d/s)}{\pi/2} \cdot \frac{(m-1) \cdot n + (n-1) \cdot m}{m \cdot n}$$

In alternativa, è possibile impiegare un approccio che considera la palificata come se fosse una fondazione superficiale, calcolando q_{lim} come una fondazione superficiale ma ricordando l'influenza della superficie laterale della palificata:

Metodo di Terraghi e Peck



$$Q_{lim} = \underbrace{B \cdot L (N_c \cdot C_u + \gamma \cdot D)}_{\substack{\text{superficie} \\ \text{della base} \\ \text{della} \\ \text{palificata}}} + \underbrace{2D(B+L) \cdot C_u}_{\substack{\text{2 volte } 1/2 \text{ perimetro} \\ \text{superficie laterale}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{termine di resistenza alla base della} \\ \text{palificata}}} + \underbrace{0}_{\substack{\text{termine di resistenza laterale}}}$$

$\phi = 0 \Rightarrow N_q = 1$
SEMPRE

Nelle pratiche applicazioni si impiegano entrambi gli approcci, applicando il più gravoso (Q_{lim} più basso).

23.05.2024 - Fine

Fondazioni

prof. Luca Pagano

13.06.2024 - 30